Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

कक्षा - 10

गणित

अध्याय-1 : वास्तविक संख्याएँ

भाग - 4

अपरिमेय संख्याएँ

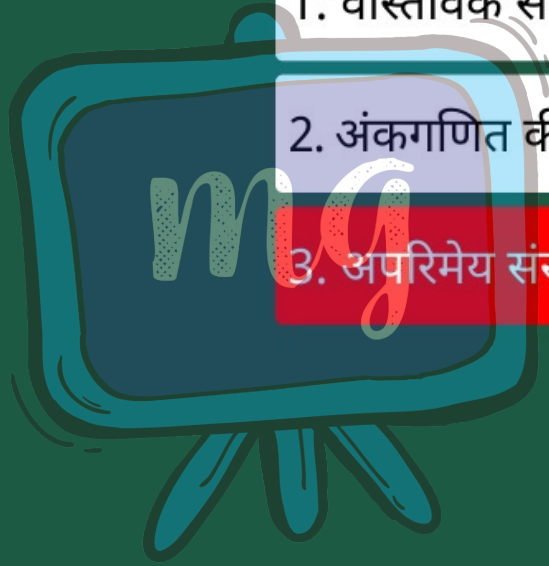
केशव शर्मा

Under CSR Support by ipca | Foundation

विवरण

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

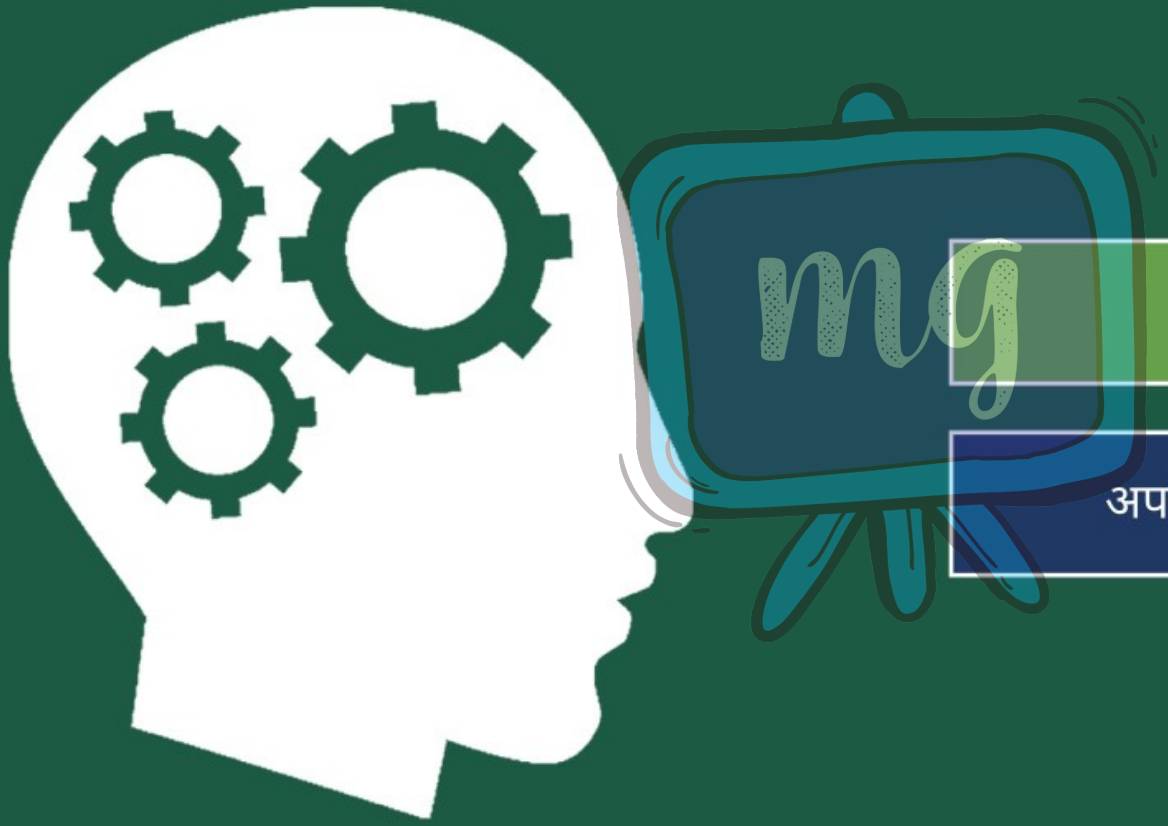
1. वास्तविक संख्याएँ
2. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय
3. अपरिमेय संख्याएँ



Under CSR Support by
ipca | Foundation

कंपेटेंसी बेस्ड लर्निंग

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



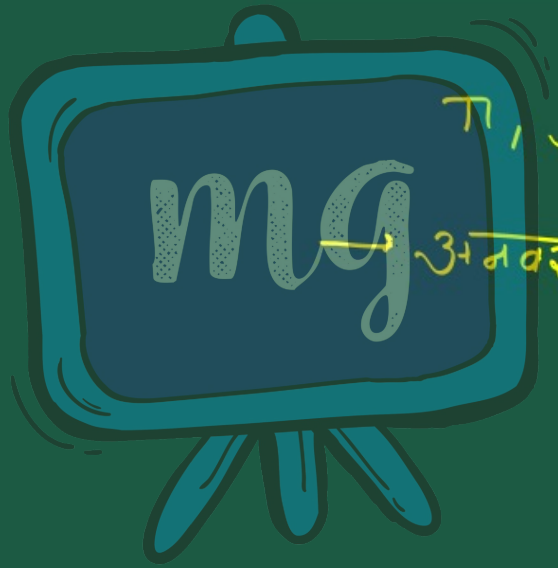
अपरिमेय संख्याएँ

अपरिमेय संख्याओं को सिद्ध करना

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

अपरिमेय संख्याएँ

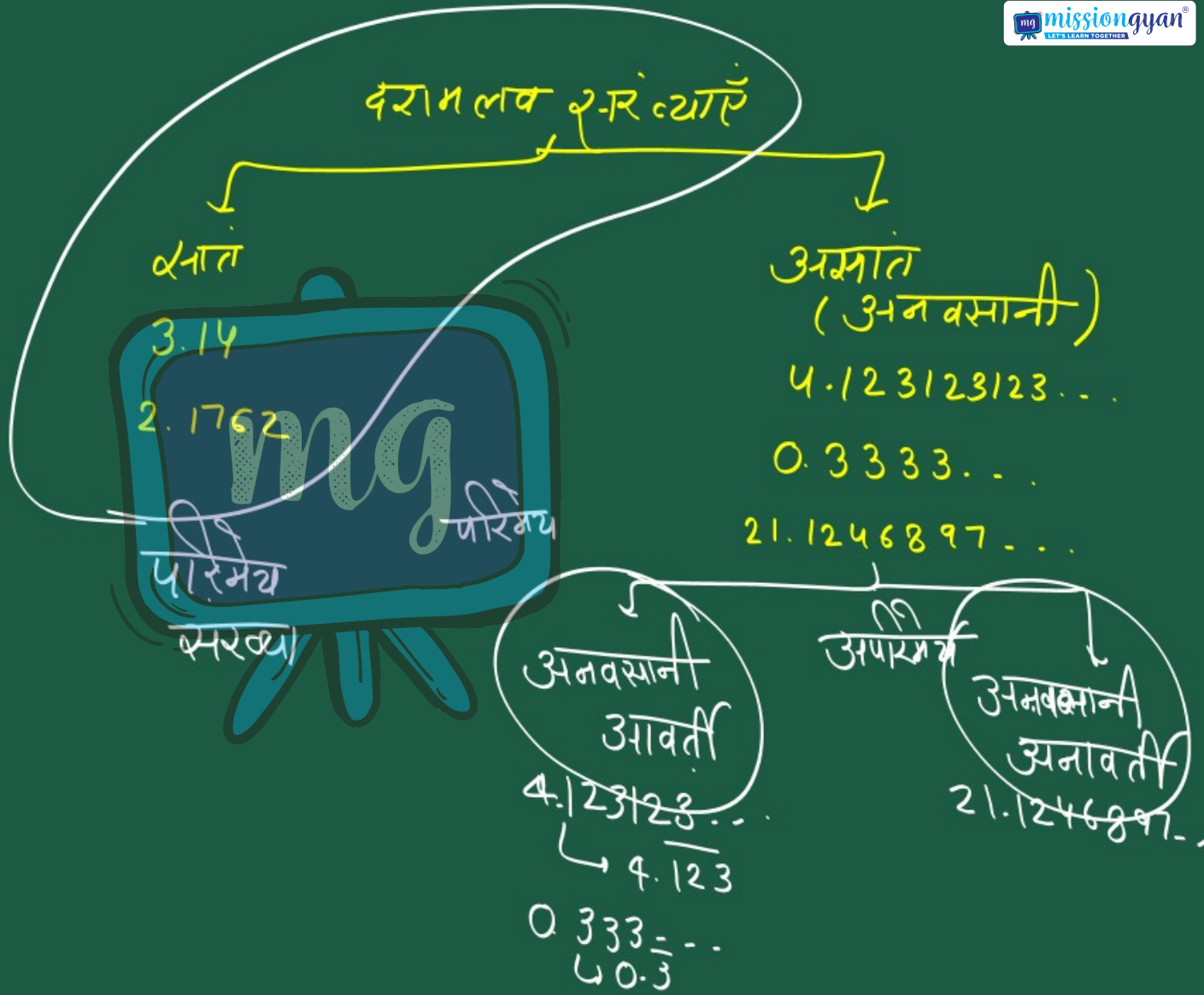


$\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{11}, \sqrt{19}$

→ अनवसानी अनावृत्ती संख्याएँ

Under CSR Support by ipca Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

इस प्रकार की संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, जहाँ p व q पूर्णांक संख्याएँ है और $q \neq 0$.

– अनवसानी अनावर्ती संख्याएँ

उदाहरण – π, 1.101001000100001.....

3.14214314414514.....

$\sqrt{11}, \sqrt{3}, \sqrt{2},$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

प्रमेय 1.2

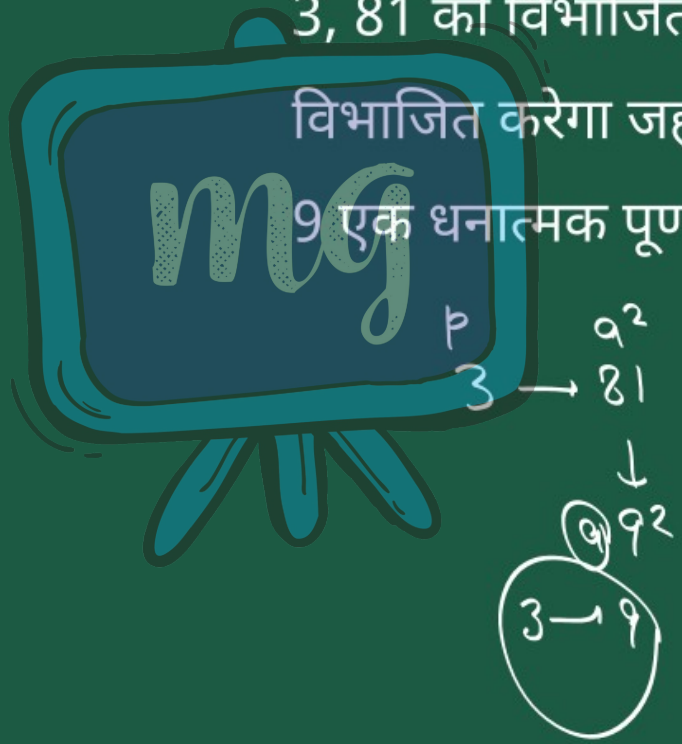
☛ मान लीजिए, P एक अभाज्य संख्या है। तब यदि P, a^2 को विभाजित करती है, तो P, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण के लिए –

3, 81 को विभाजित करता है तो 3, 9 को भी विभाजित करेगा जहाँ 3 अभाज्य संख्या है और 9 एक धनात्मक पूर्णांक है।



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

प्रमेय 1.3

☛ $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।



माना कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, जहाँ p व q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$

एवं p व q सह अभाज्य संख्याएं

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$\sqrt{2}q = p$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$(\sqrt{2}q)^2 = (p)^2$

$2q^2 = p^2$ — (i)

अर्थात $2, p^2$ को विभाजित करता है तो

प्रमेय 1.2 से $2, p$ को भी विभाजित करेगा।

$p = 2r$, जहाँ r पूर्णांक है।

p का मान समी. (i) में रखने पर

$2q^2 = (2r)^2$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$$\cancel{4}q^2 = \cancel{4}r^2$$

$$q^2 = 2r^2$$

अर्थात

2, q^2 को विभाजित करता है तो

प्रमेय 1.2 से, 2, q को भी विभाजित करेगा।

अतः p व q में कम से कम एक उभयनिष्ठ

गुणनखण्ड 2 है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

यह तथ्य का विरोधाभास है कि p व q में केवल ⊥ हि उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।



यह विरोधाभास हमारी युक्तिपूर्ण कल्पना के कारण उत्पन्न हुआ।

अतः √2 एक अपरिमेय संख्या है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण-5

दर्शाइए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।



हल :- माना कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, जहाँ p व q सह अभाज्य संख्या है।

$\sqrt{3}q = p$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$(\sqrt{3}q)^2 = p^2$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$3q^2 = p^2$ — (i)

अर्थात $3, p^2$ को विभाजित करता है

तो प्रमेय 1.2 से $3, p$ को भी विभाजित करेगा।

$p = 3r$, जहां r पूर्णांक है।

p का मान समी. (i) में रखने पर

$3q^2 = (3r)^2$

$3q^2 = 9r^2$

$q^2 = 3r^2$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$q^2 = 3r^2$

अर्थात 3, q^2 को विभाजित करता है तो

प्रमेय 1.2 से 3, q को भी विभाजित करेगा।

अतः

p व q का कम से कम एक

उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 3 है।

यह विरोधाभास है तथ्य कि p व q

सह अभाज्य संख्याएँ हैं।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण उत्पन्न हुआ।



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण-6

दर्शाइए कि $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।



हल :- माना कि $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है

$5-\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, जहाँ p व q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$

$5=\frac{p}{q}+\sqrt{3}$

$5-\frac{p}{q}=\sqrt{3}$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

5, p व q पूर्णांक हैं।

अतः $5-\frac{p}{q}$, परिमेय संख्या है। इसलिए $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

यह विरोधाभास है तथ्य का कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण उत्पन्न हुआ।

अतः $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण-7

दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।



हल:- माना कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$3\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, जहाँ p व q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$

$\sqrt{2} = \frac{p}{3q}$

p, q व 3 पूर्णांक है।

अतः $\frac{p}{3q}$, परिमेय संख्या है। इसलिए $\sqrt{2}$ एक

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

परिमेय संख्या है।

यह विरोधाभास है तथ्य का कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।



यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण उत्पन्न हुआ।

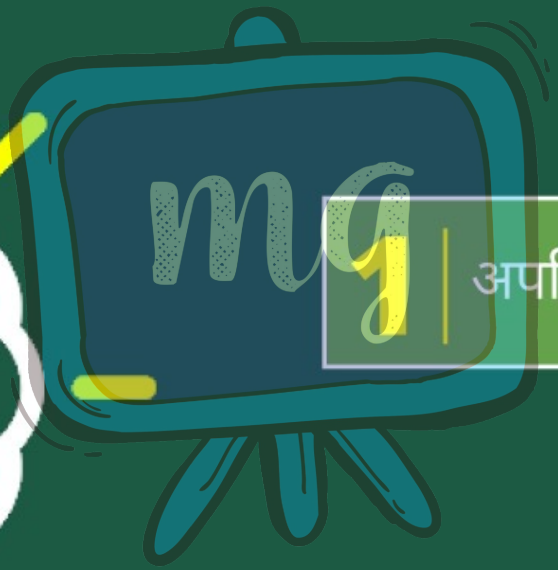
अतः $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Under CSR Support by ipca Foundation

लर्निंग आउटकम्स

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER





अपरिमेय संख्याओं को सिद्ध करना

Under CSR Support by ipca Foundation

मूल्यांकन

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



1 निम्न में से अपरिमेय संख्या है –

अ 1.818181....

ब 2.345

स $\sqrt{25} = 5$

द $\sqrt{5}$

Under CSR Support by ipca Foundation

मूल्यांकन

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



2 निम्न में से अपरिमेय संख्या है –

अ 3.1234

ब 11.121314...

स 0.3939...

द 26.0820

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्नावली 8.3

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्नावली 8.3

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्नावली 8.3

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्नावली 8.3

(ix) $(\text{cosec}A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

