Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan



कक्षा - 11

गणित

अध्याय - 4

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

भाग - 2

सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

हर्ष गोयल

Under CSR Support by
ipca | Foundation

विवरण (Overview)

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



1. सम्मिश्र संख्याएँ
2. सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित
3. सम्मिश्र संख्याओं का संयुग्मी व मापांक

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणितीय



दो सम्मिश्र संख्याओं का

→ योगफल

→ अंतर

→ गुणनफल

→ भागफल

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

योगफल

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$z_1 + z_2 = a + ib + c + id$

$= a + c + ib + id$

$= \underbrace{(a+c)}_{\text{वास्तविक भाग}} + i\underbrace{(b+d)}_{\text{काल्पनिक भाग}}$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$z_1 = 1 + i$

$z_2 = 3 + 2i$



$z_1 + z_2 = 1 + i + 3 + 2i$

$= (1 + 3) + i(1 + 2)$

$= 4 + i3$

$= 4 + 3i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

योगफल निम्न प्रगुणों को संतुष्ट करता है:



संवरक नियम :

यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं तो

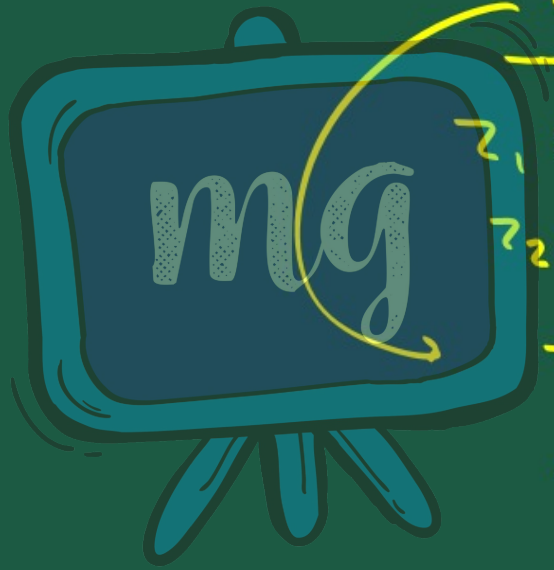
$z_1 + z_2 \rightarrow$ सम्मिश्र संख्या

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(2) क्रमविनिमेयता

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$



$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$

$z_2 + z_1 = (c+a) + i(d+b)$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(3) साहचर्य :

$z_1 = a_1 + ib_1$

$z_2 = a_2 + ib_2$

$z_3 = a_3 + ib_3$

z_1, z_2, z_3 तीन सम्मिश्र संख्याएँ

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$a_1 + a_2 + a_3$ $\qquad$ $a_1 + a_2 + a_3$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(4) योगात्मक तत्समक :

$z + 0 = z$

$0 = 0 + i0$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(5) योगात्मक प्रतिलोम :

$z + \underline{(-z)} = 0$

$-z \rightarrow$ योगात्मक प्रतिलोम

$z = a + ib$

$\rightarrow -z = -a - ib$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का योग

यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ है तब $z_1 + z_2$ के योग को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id)$$
$$= (a + c) + i(b + d)$$

उदाहरण :

$$(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i(3 + 5)$$
$$= -4 + i8$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्यओं के योग निम्नलिखित प्रगुणों को संतुष्ट करते है :

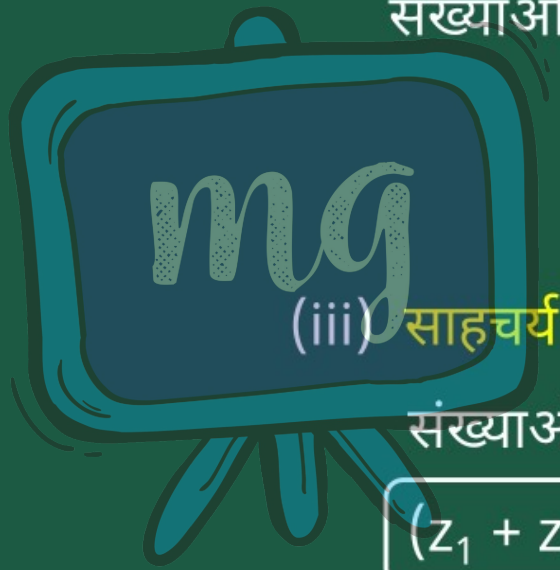
(i) संवरक नियम : दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एक सम्मिश्र संख्या होती है, अर्थात् सारी सम्मिश्र संख्याओं, z_1 तथा z_2 के लिए, $z_1 + z_2$ एक सम्मिश्र संख्या है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(ii) **क्रम विनिमय नियम :** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$



(iii) **साहचर्य नियम :** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(iv) **योगात्मक तत्समक का अस्तित्व** : सम्मिश्र संख्या 0 + i0, योगात्मक तत्समक अथवा शून्य सम्मिश्र संख्या कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z के लिए

$$z + 0 = z$$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(v) **योगात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व :** प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$, के लिए हमें सम्मिश्र संख्या $-a + i(-b)$ प्राप्त होती है, जोकि योगात्मक प्रतिलोम अथवा z का ऋण कहलाता है।

$z + (-z) = 0$ (योगात्मक तत्समक)

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

अंतर

z_1 तथा z_2

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$$z_1 - z_2 = a + ib - (c + id)$$
$$= a + ib - c - id$$
$$= (a - c) + i(b - d)$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण :

$z_1 = 2 + i$

$z_2 = 3 + 2i$

$z_1 - z_2 = 2 + i - (3 + 2i)$

$= (2 - 3) + i(1 - 2)$

$= -1 + i(-1)$

$= -1 - i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का अंतर

यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ है तब z_1 और z_2 का अंतर $z_1 - z_2$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id)$$
$$= (a - c) + i(b - d)$$

उदाहरण :

$$(2 + i3) - (6 + i5) = (2 - 6) + i(3 - 5)$$
$$= -4 - i2$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

गुणनफल

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id)$

$= ac + iad + ibc + i^2 bd$

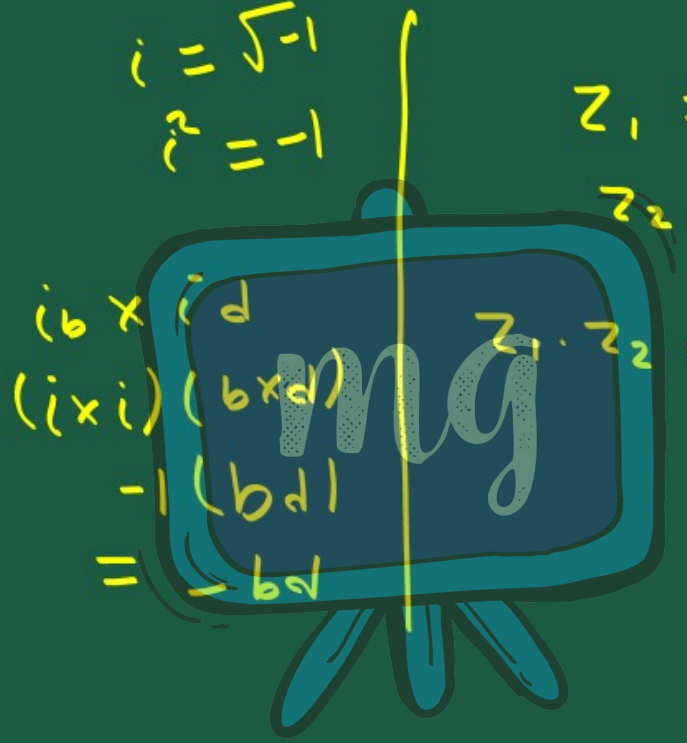
$= (ac - bd) + i(ad + bc)$

$ib \times id$

$(i \times i)(b \times d)$

$-1 (bd)$

$= -bd$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदा. $(1+i) \times (2+3i)$

$= 2+3i+2i+i\times 3i$

$= 2+3i+2i-3$

$= -1+5i$



Under CSR Support by ipca | Foundation

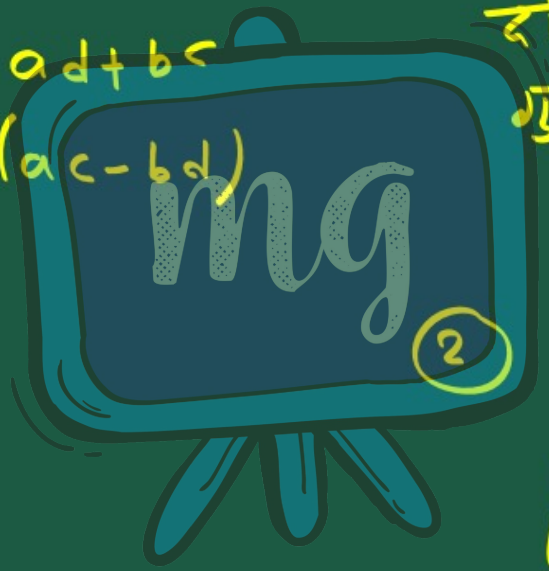
missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(1) संवरुप नियम :

दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल एक सम्मिश्र संख्या होता है।

$ad+bc$

$+(ac-bd)$



क्रमविनिमेय

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



(3) साहचर्य

z_1, z_2 तथा z_3 तीन सम्मिश्र संख्याएँ

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

(4) गुणात्मक तत्समक :

$$z \cdot 1 = z$$

$1 = 1 + i0$

↓

गुणात्मक तत्समक

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(5) गुणात्मक प्रतिलोम

$z\left(\frac{1}{z}\right) = 1$



$z = a + ib$

इसका गुणात्मक प्रतिलोम

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

↓

गुणात्मक प्रतिलोम

$\frac{1}{z}$ या z^{-1} है

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



(6) वंटन नियम

(a) $z_1 \cdot (z_2 + z_3)$

$= z_1 z_2 + z_1 z_3$

(b) $(z_1 + z_2) \cdot z_3$

$= z_1 z_3 + z_2 z_3$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणन

यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ है तब गुणनफल $z_1.z_2$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$z_1.z_2 = (a + ib)(c + id)$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

उदाहरण :

$$(3 + i5).(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2)$$
$$= -24 + i28$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्यओं के गुणन निम्नलिखित प्रगुणों को संतुष्ट करते है :

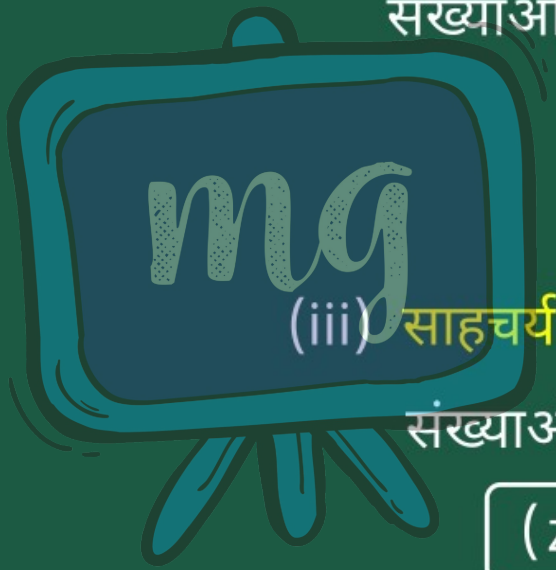
(i) संवरक नियम : दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल, एक सम्मिश्र संख्या होती है, सभी सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, गुणनफल $z_1.z_2$ एक सम्मिश्र संख्या होती है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(ii) **क्रम विनिमय नियम :** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए,

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$



(iii) **साहचर्य नियम :** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए,

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

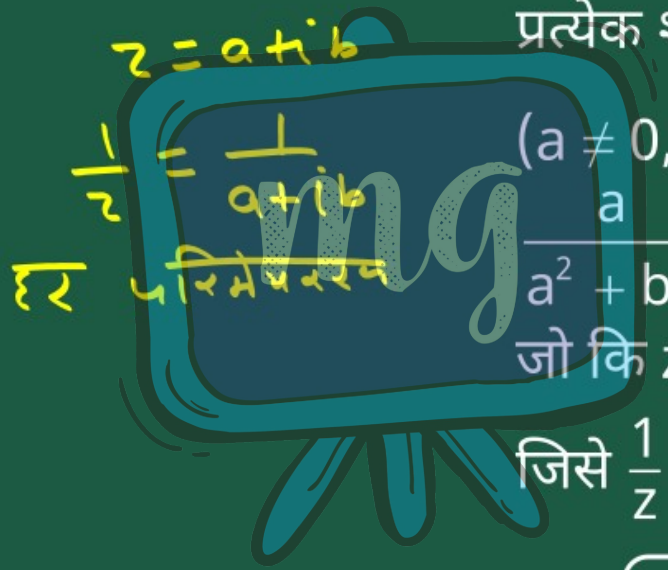
(iv) गुणात्मक तत्समक का अस्तित्व : सम्मिश्र संख्या 1+ i0 (1 के द्वारा दर्शाया जाता है), गुणात्मक तत्समक अथवा एकल सम्मिश्र संख्या कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z के लिए

$$z.1 = z$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(v) गुणात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व :



प्रत्येक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$, $(a \neq 0, b \neq 0)$ के लिए, हमें सम्मिश्र संख्या $\frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$ प्राप्त होती है, जो कि z की गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती है जिसे $\frac{1}{z}$ अथवा z^{-1} के द्वारा दर्शाया जाता है।

$$z.\frac{1}{z} = 1 \text{ (गुणात्मक तत्समक)}$$

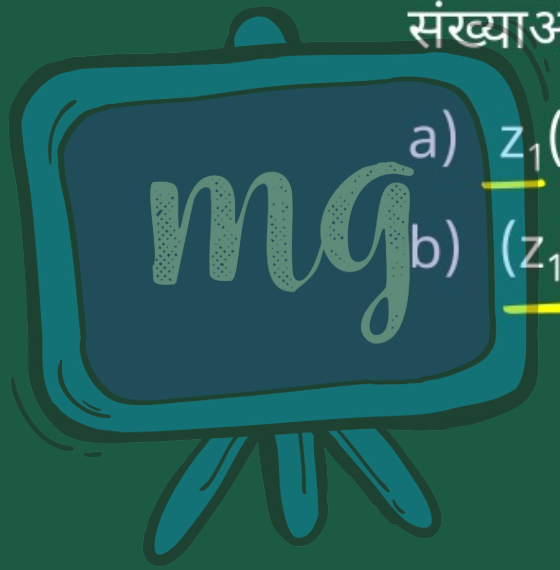
Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(vi) **बंटन नियम :** किन्हीं तीन सम्मिश्र z_1, z_2, z_3 संख्याओं के लिए

a) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

b) $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

आइए हल

$z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$

$$\frac{1+i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{2-i+2i+1}{4+2i-2i+1}$$

$$= \frac{3+i}{5}$$

$\frac{3}{5} + i\,\frac{1}{5}$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का भागफल

किन्ही दो दी हुई सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, जहाँ $z_2 \neq 0$, भागफल $\frac{z_1}{z_2}$ निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

उदाहरण :

माना $z_1 = 6 + 3i$ और $z_2 = 2 - i$

तब $\frac{z_1}{z_2} = \left[(6+3i) \times \frac{1}{2-i}\right]$

परिमेय
न २ ०

Under CSR Support by ipca | Foundation

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

missiongyan



सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

Under CSR Support by ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



1 | यदि $z_1 = 1 + i$ तथा $z_2 = 1 - i$ तो $z_1 z_2$ का मान है –

अ 1

ब 2

स 3

द 4

$z_1 = 1 + i$

$z_2 = 1 - i$

$z_1 z_2 = (1 + i)(1 - i)$

$= 1 - i + i - i \times i$

$= 1 - i^2 + i + 1$

$= 2$

Under CSR Support by ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



2 यदि $z_1 = (a, b)$ और $z_2 = (c, d)$ दो सम्मिश्र संख्याओं हो तब $\text{Im}(z_1 z_2) = ?$

अ bd – ac

ब ac – bd

स bc – ad

द bc + ad

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

$\text{Im}(z_1 z_2) = ad + bc$