Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan



कक्षा - 11

गणित

अध्याय - 4

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

भाग - 1

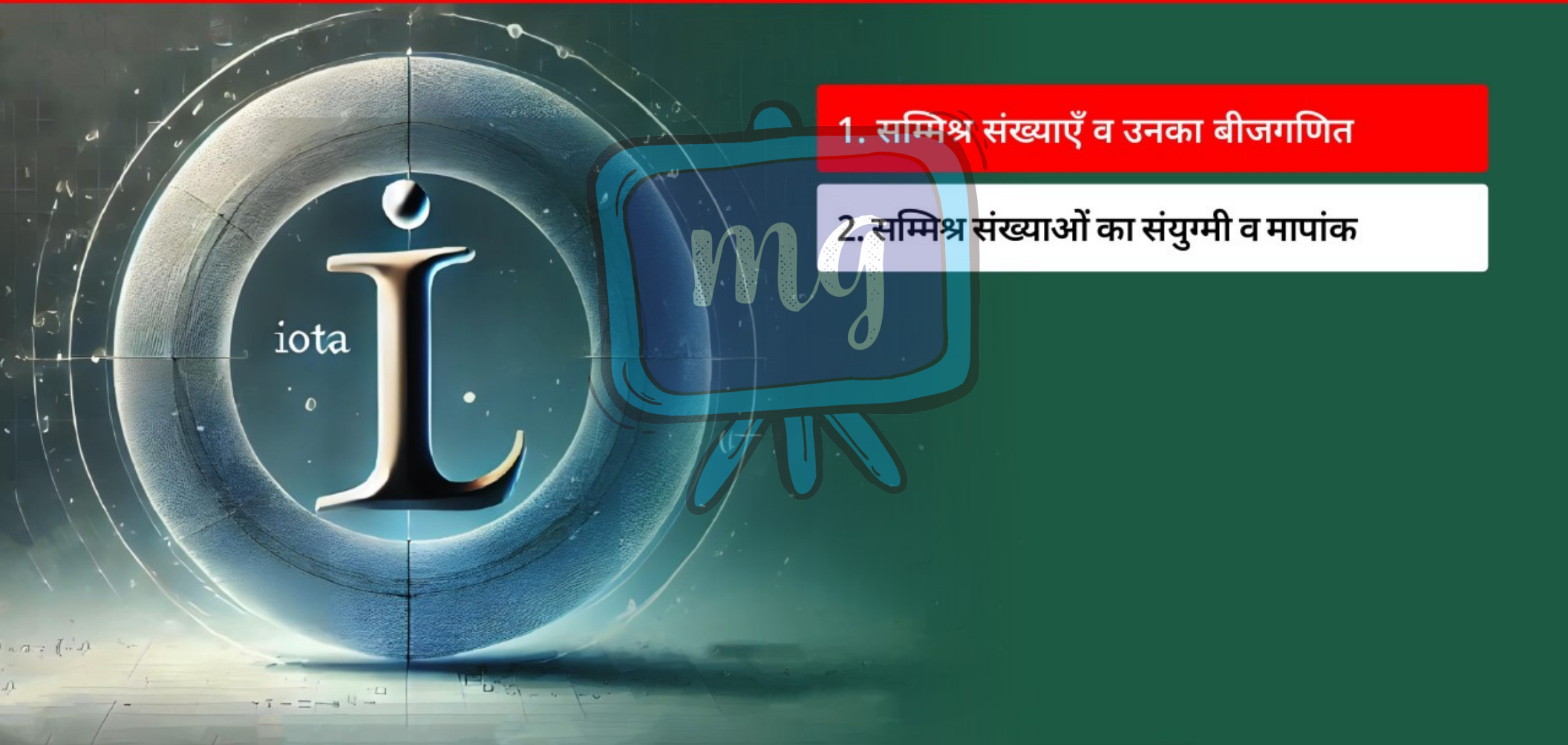
सम्मिश्र संख्याएँ व उनका बीजगणित

हर्ष गोयल

Under CSR Support by
ipca | Foundation

विवरण (Overview)

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



1. सम्मिश्र संख्याएँ व उनका बीजगणित
2. सम्मिश्र संख्याओं का संयुग्मी व मापांक

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्याएँ



z से निरूपित

$z = a + ib$

- वास्तविक संख्या
- वास्तविक संख्या

$i \rightarrow$ आयोता

$(2) + i(3)$

$z = -1 + 3i$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$z = a + ib$

$a, b \in R$

$i \rightarrow$ आयोटा

$i = \sqrt{-1}$



(a, b)

a = वास्तविक भाग

$Re(z)$

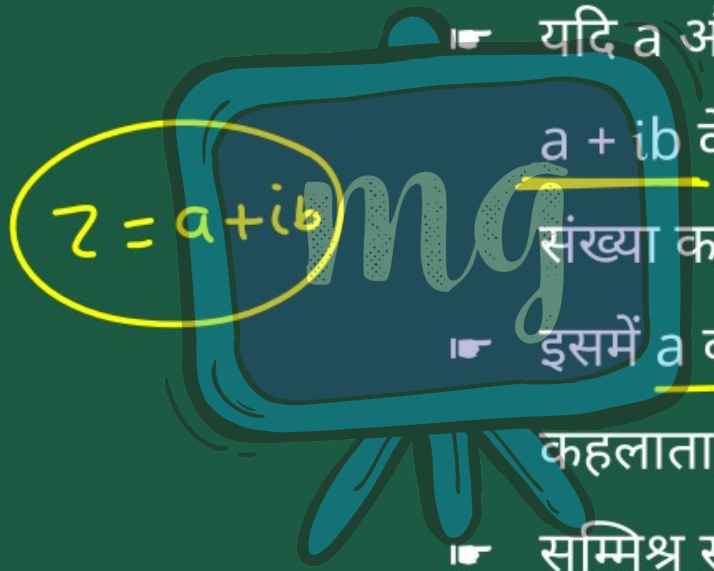
b = काल्पनिक भाग

$Im(z)$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्याएँ

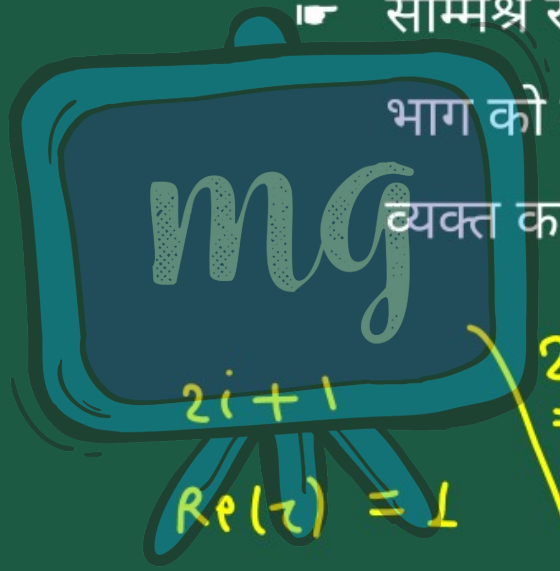


- यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ है तो a + ib के रूप की संख्याओं को सम्मिश्र संख्या कहते है।
- इसमें a वास्तविक भाग व b काल्पनिक भाग कहलाता है।
- सम्मिश्र संख्या को z से प्रदर्शित किया जाता है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

- $z = a + ib$, जहाँ $a, b \in R$ तथा $i = \sqrt{-1}$
- सम्मिश्र राशि के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग को क्रमशः Re (z) और Im (z) से व्यक्त करते है।



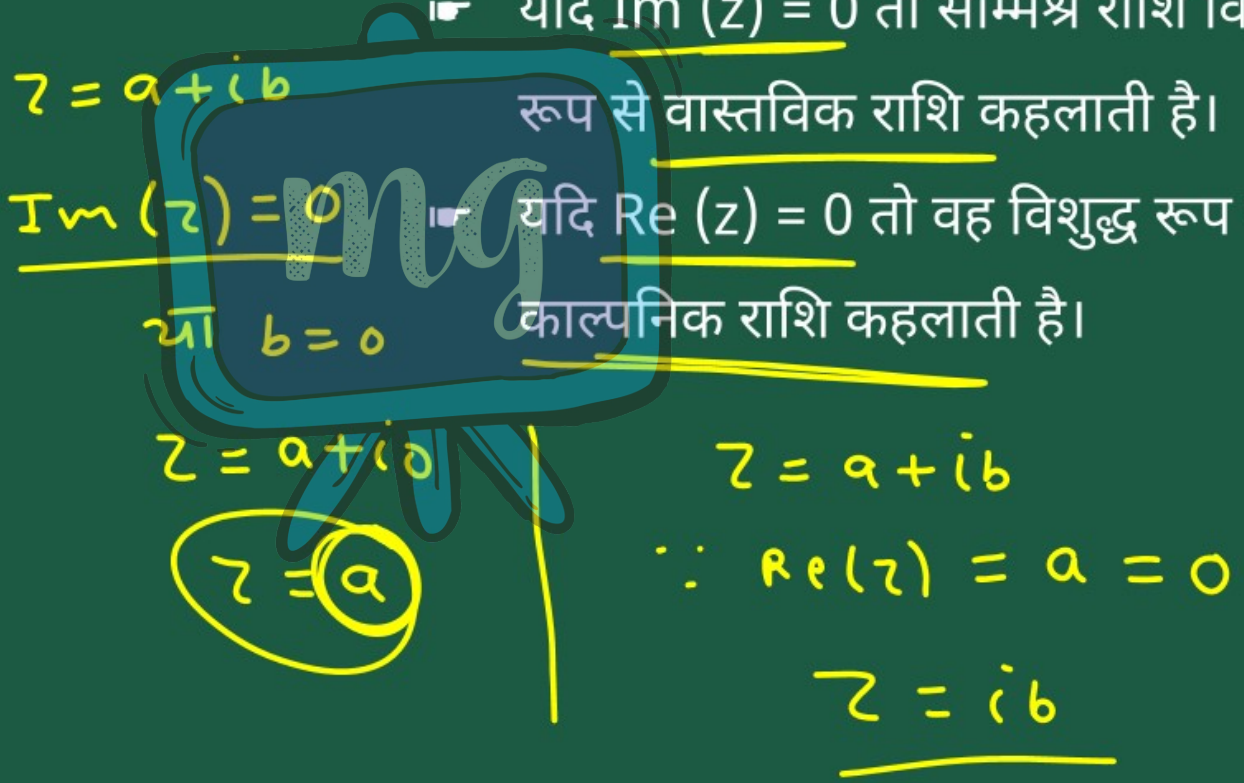
Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

विशेष स्थिति :

☛ यदि Im (z) = 0 तो सम्मिश्र राशि विशुद्ध रूप से वास्तविक राशि कहलाती है।

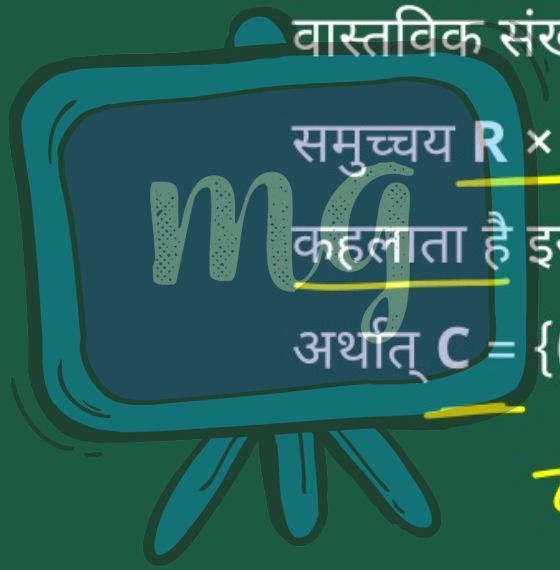
☛ यदि Re (z) = 0 तो वह विशुद्ध रूप से काल्पनिक राशि कहलाती है।



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय



वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय **R** × **R** सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय कहलाता है इसे **C** से व्यक्त करते है।

अर्थात् **C** = {(a,b) : a,b ∈ **R**} = **R** x **R**

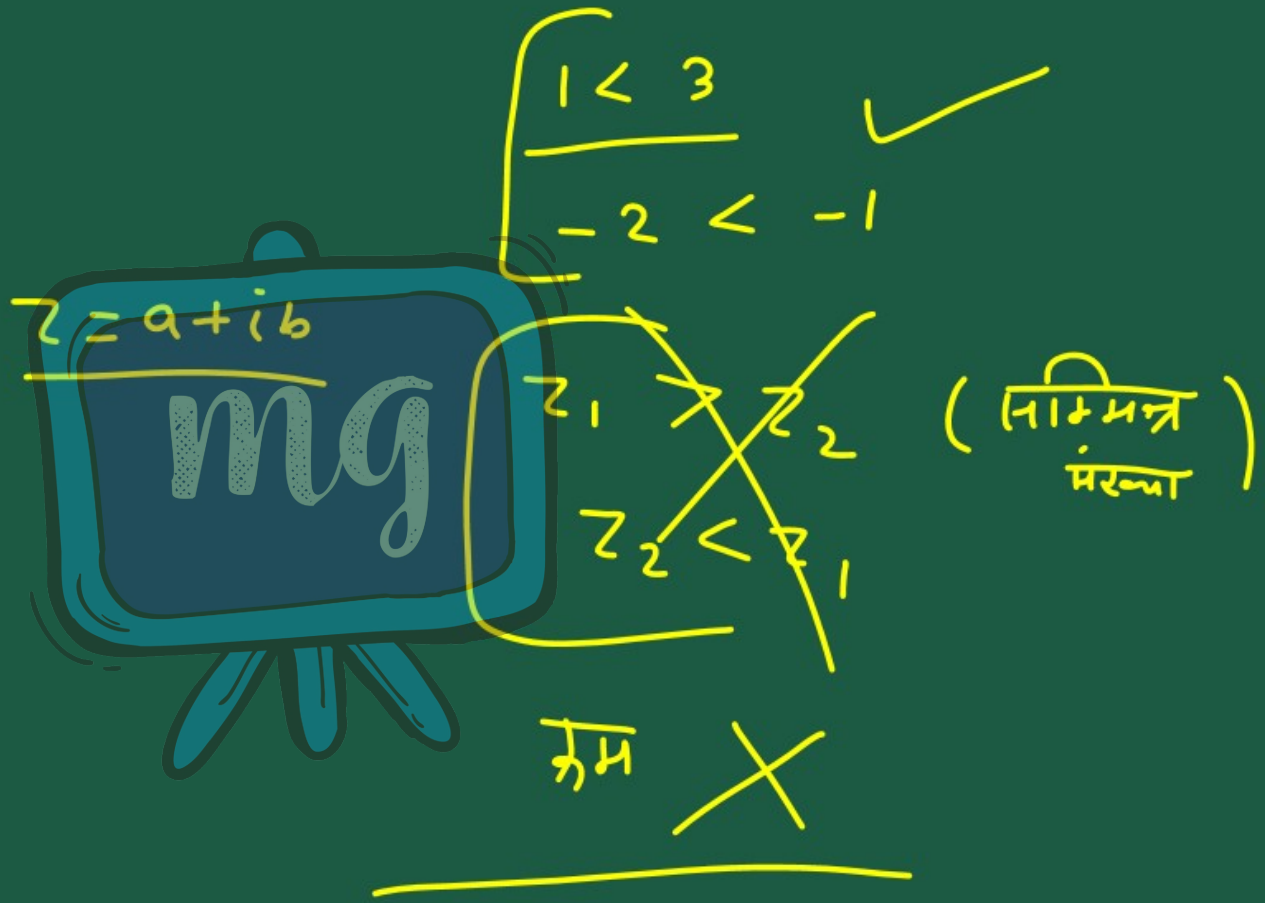
$z = a + ib$

$a \downarrow R$ $b \downarrow R$

$R \times R$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$z = a + ib = 0$

$a + ib = 0 + i0$



तो

$a = 0$

$b = 0$

$z_1 = z_2$ (समानता)

$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$

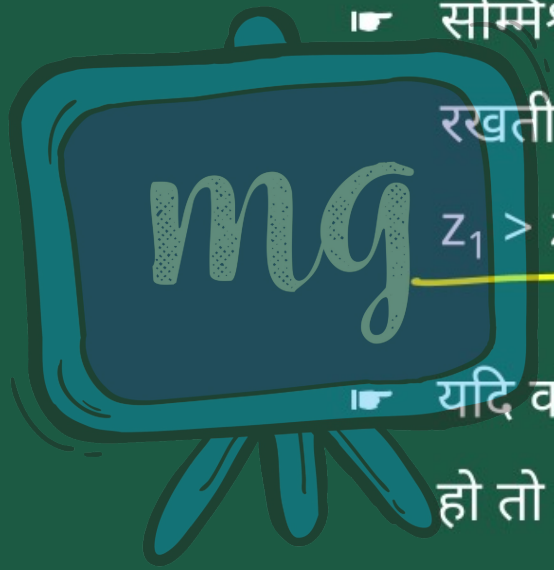
$a_1 = a_2$

$b_1 = b_2$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

नोट

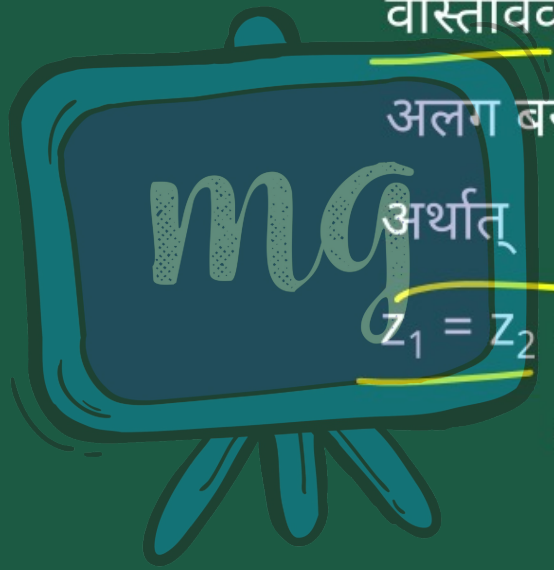


- सम्मिश्र संख्या क्रम का गुणधर्म नहीं रखती है, अर्थात् $z_1 < z_2$ अथवा $z_1 > z_2$ परिभाषित नहीं है।
- यदि कोई सम्मिश्र संख्या शून्य के बराबर हो तो उसके वास्तविक व काल्पनिक दोनों भाग शून्य के बराबर होते हैं।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

☛ यदि दो सम्मिश्र संख्याएँ बराबर हों तो उनके वास्तविक और काल्पनिक भाग भी अलग-अलग बराबर होते हैं।



अर्थात्

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

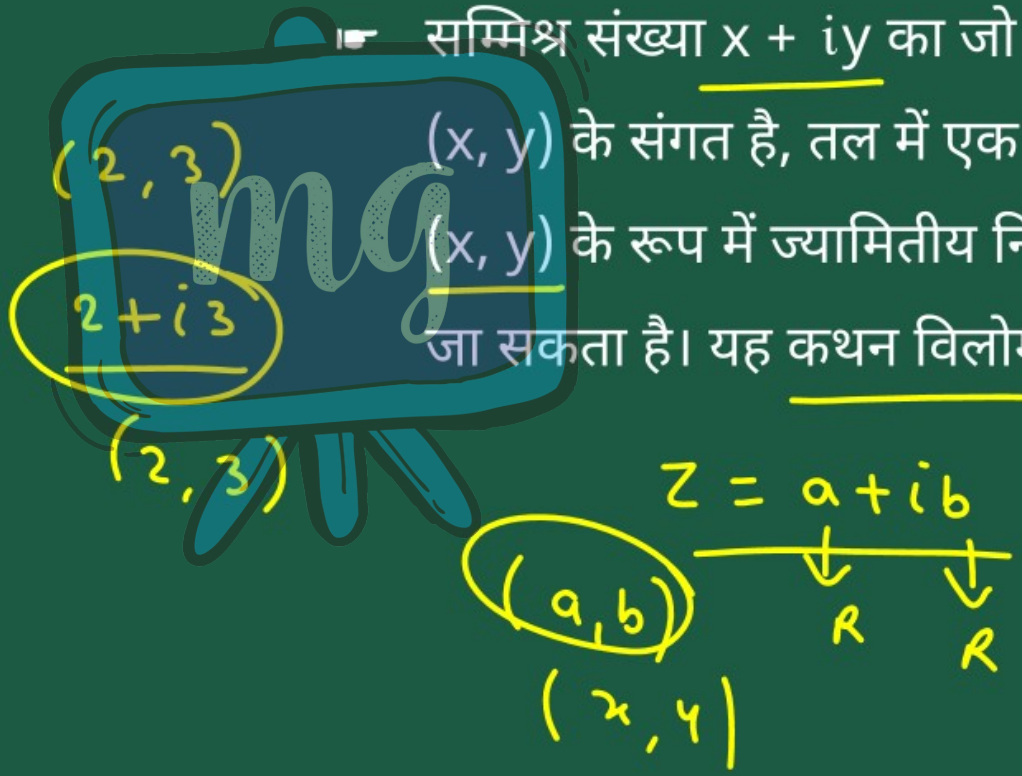
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ व } y_1 = y_2$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

आर्गंड तल

- सम्मिश्र संख्या $x + iy$ का जो क्रमित युग्म (x, y) के संगत है, तल में एक अद्वितीय बिंदु (x, y) के रूप में ज्यामितीय निरूपण किया जा सकता है। यह कथन विलोमतः सत्य है।



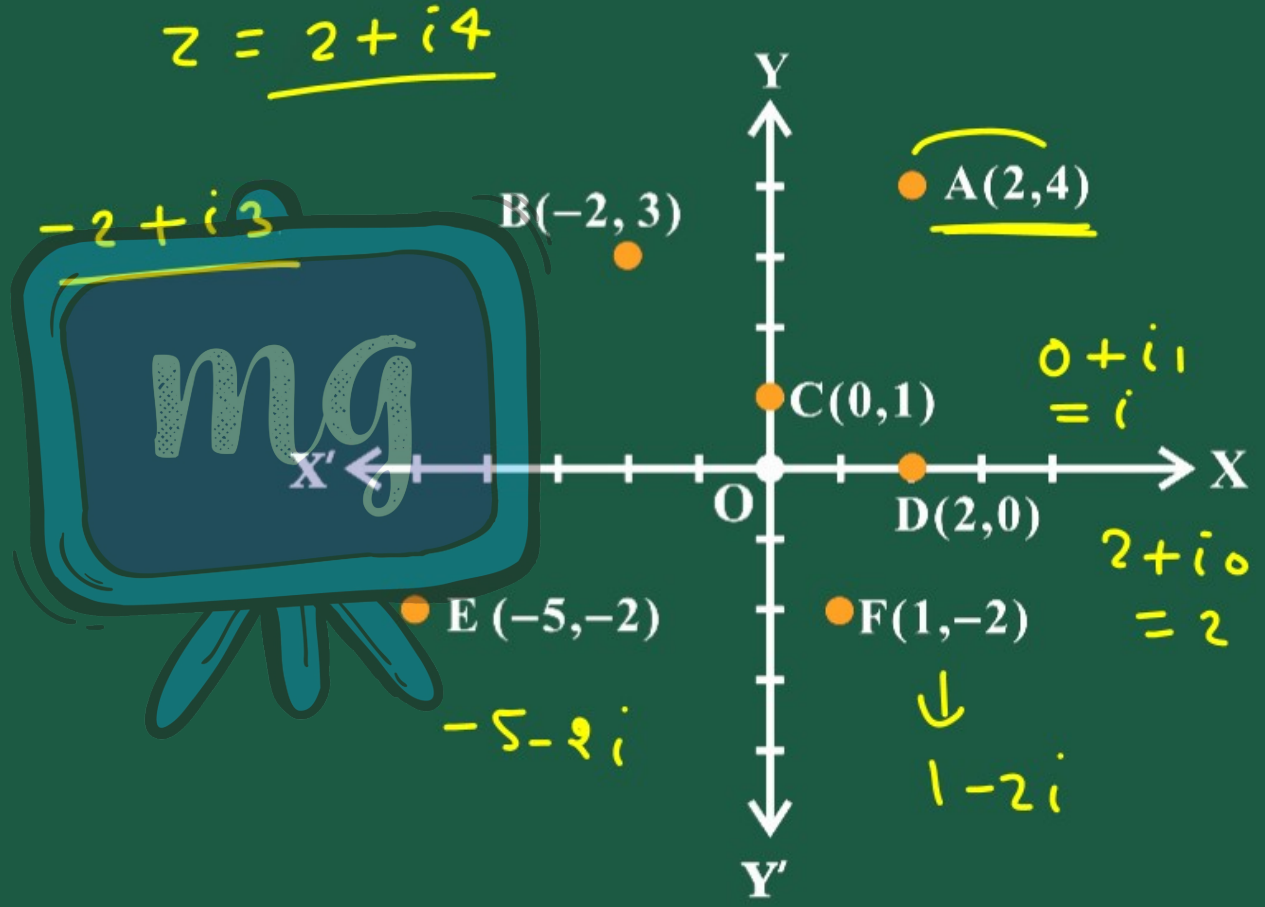
Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

☛ कुछ सम्मिश्र संख्याओं जैसे 2 + 4i, –2 + 3i, 0 + 1i, 2 + 0i, –5–2i और 1–2i को जो कि क्रमित युग्मों (2, 4), (–2, 3), (0,1), (2, 0), (–5, –2) और (1, 2) के संगत हैं, आकृति में बिंदुओं A, B, C, D, E और F द्वारा ज्यामितीय निरूपण किया गया है।

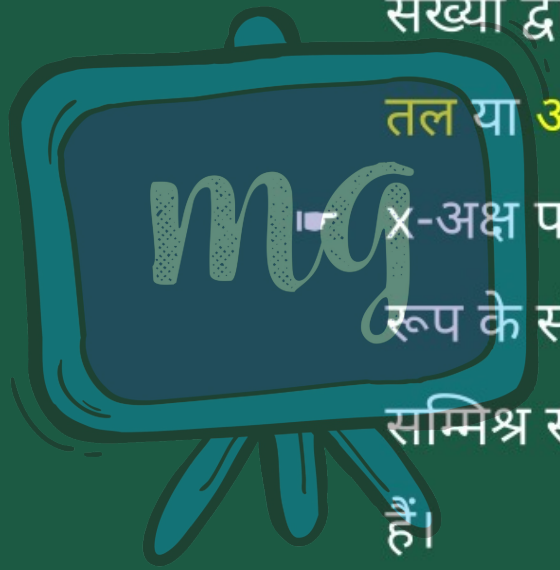
Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



- तल, जिसमें प्रत्येक बिंदु को एक सम्मिश्र संख्या द्वारा निर्दिष्ट किया गया है, सम्मिश्र तल या आर्गड तल कहलाता है।
- x-अक्ष पर बिंदु, सम्मिश्र संख्याओं $a + i0$ रूप के संगत होते हैं और y-अक्ष पर बिंदु, सम्मिश्र संख्याओं $0 + ib$ रूप के संगत होते हैं।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

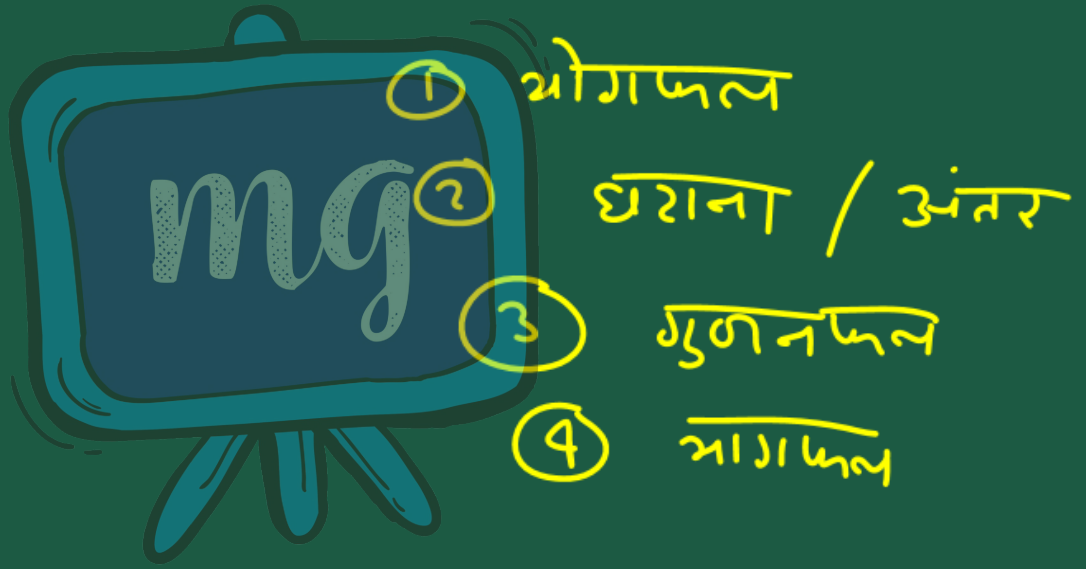
☛ आर्गड तल में x-अक्ष और y-अक्ष क्रमशः वास्तविक अक्ष और काल्पनिक अक्ष कहलाते हैं।



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणितीय



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

① योगफल

$z_1 + z_2$



$z_1 = a_1 + ib_1$

$z_2 = a_2 + ib_2$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$

$$= (a_1 + a_2) + ib_1 + ib_2$$

$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$

$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 + i$

$= (2 + 1) + 3i + i$

$= 3 + i(3 + 1)$

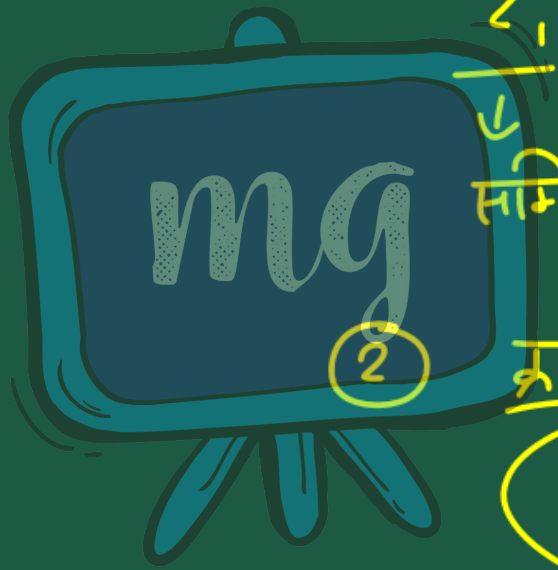
$= 3 + i4$



प्रगुलो मो संगुल

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



(1) संवरक

$z_1 + z_2 \longrightarrow (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$

↓ सम्मिश्र ↓ सम्मिश्र संख्या

(2) क्रमविनिमेय

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$

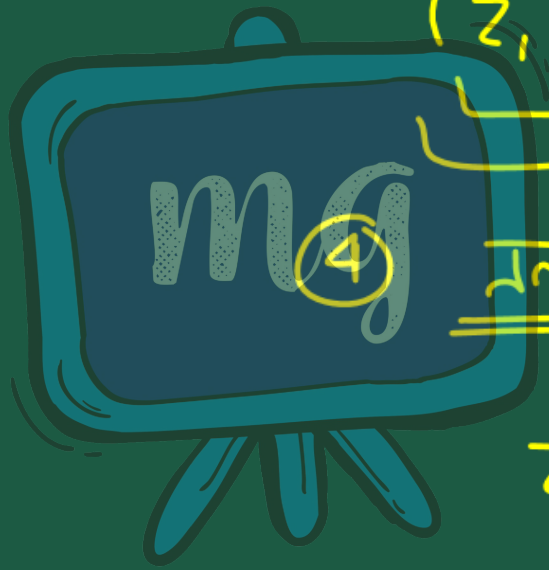
$= (a_2+a_1)+i(b_2+b_1)$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(3) सहचार्यता :

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$



(4) तत्समक (योगात्मक)

$z + 0 = z$

$0 + i0$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(5) योगात्मक प्रतिलोम

$z+(-z)=0$



$-z = -a-ib$

↓

योगात्मक प्रतिलोम

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का योग

यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ है तब $z_1 + z_2$ के योग को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id)$$
$$= (a + c) + i(b + d)$$

उदाहरण :

$$(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i(3 + 5)$$
$$= -4 + i8$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्यओं के योग निम्नलिखित प्रगुणों को संतुष्ट करते है :

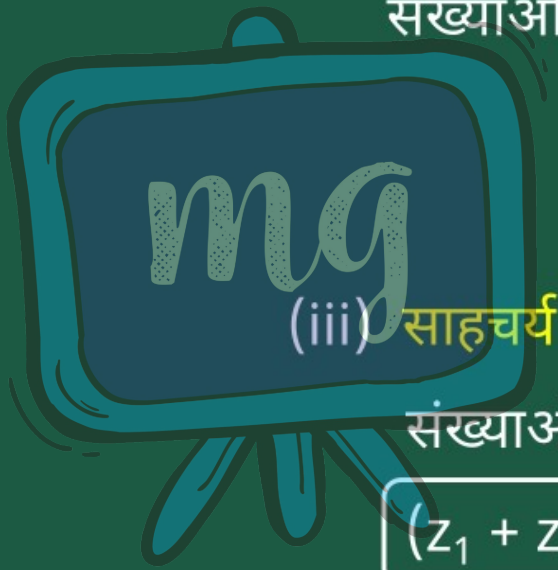
(i) संवरक नियम : दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एक सम्मिश्र संख्या होती है, अर्थात् सारी सम्मिश्र संख्याओं, z_1 तथा z_2 के लिए, $z_1 + z_2$ एक सम्मिश्र संख्या है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(ii) **क्रम विनिमय नियम :** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$



(iii) **साहचर्य नियम :** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(iv) **योगात्मक तत्समक का अस्तित्व** : सम्मिश्र संख्या 0 + i0, योगात्मक तत्समक अथवा शून्य सम्मिश्र संख्या कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z के लिए

$$z + 0 = z$$



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(v) **योगात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व :** प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$, के लिए हमें सम्मिश्र संख्या $-a + i(-b)$ प्राप्त होती है, जोकि योगात्मक प्रतिलोम अथवा z का ऋण कहलाता है।

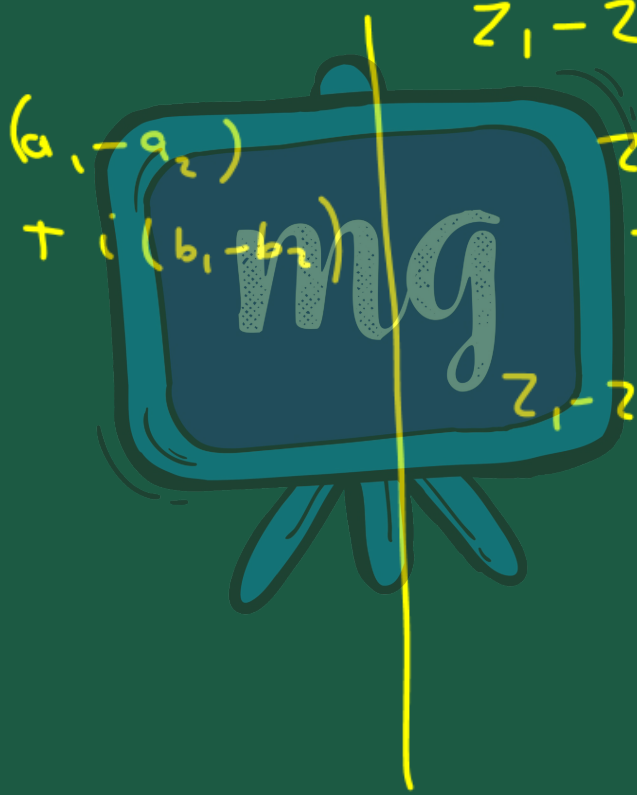
$z + (-z) = 0$ (योगात्मक तत्समक)

$-a + (-ib)$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

अंतर



$z_1 - z_2$

$(a_1 - a_2)$

$+ i(b_1 - b_2)$

$z_1 = a_1 + ib_1$

$z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)$

$= (a_1 - a_2)$

$+ ib_1 - ib_2$

$i(b_1 - b_2)$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = 2 + 3i$



$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 + 3i)$

$= (1 - 2) + i(2 - 3)$

$= -1 + i(-1)$

$= -1 - i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का अंतर

यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ है तब z_1 और z_2 का अंतर $z_1 - z_2$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id)$$
$$= (a - c) + i(b - d)$$

उदाहरण :

$$(2 + i3) - (6 + i5) = (2 - 6) + i(3 - 5)$$
$$= -4 - i2$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

गुणनफल

$2 \times 2i$

$= 4i$

$i \times i$

$= -1$

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$z_1 \cdot z_2$

$z_1 = (a_1 + ib_1)$

$z_2 = (a_2 + ib_2)$

$z_1 z_2 = a_1 a_2 + i\, a_1 b_2 + i\, b_1 a_2 - b_1 b_2$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



$$(2+3i) \times (1+4i)$$

$$2 + 8i + 3i + (3i)(4i)$$

$$2 + 8i + 3i - 12$$

$$2 - 12 + i(8+3)$$

$$= -10 + i\,11$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

① संवरक :



$z_1 \cdot z_2$ → सम्मिश्र संख्या

सम्मिश्र

क्रमविनिमेय

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$(a_1 a_2 - b_1 b_2)$

$+i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(3) साहचर्य

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$



तत्समक (गुणात्मक)

$z \cdot (1) = z$

$1 + i0$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(5) गुणात्मक प्रतिलोम

$z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) = 1$

$\frac{1}{z}$ या z^{-1}

$z = a + ib$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib}$

$= \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$

$= \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणन

यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ है तब गुणनफल $z_1.z_2$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$z_1.z_2 = (a + ib)(c + id)$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

उदाहरण :

$$(3 + i5).(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2)$$
$$= -24 + i28$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्यओं के गुणन निम्नलिखित प्रगुणों को संतुष्ट करते है :

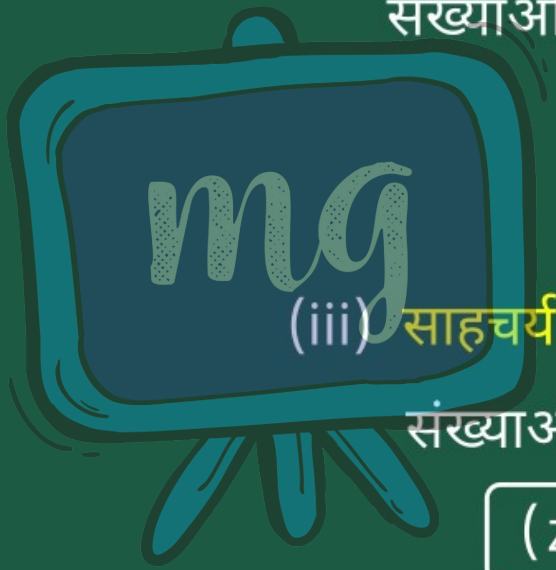
(i) संवरक नियम : दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल, एक सम्मिश्र संख्या होती है, सभी सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, गुणनफल $z_1.z_2$ एक सम्मिश्र संख्या होती है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(ii) **क्रम विनिमय नियम :** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए,

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$



(iii) **साहचर्य नियम :** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए,

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

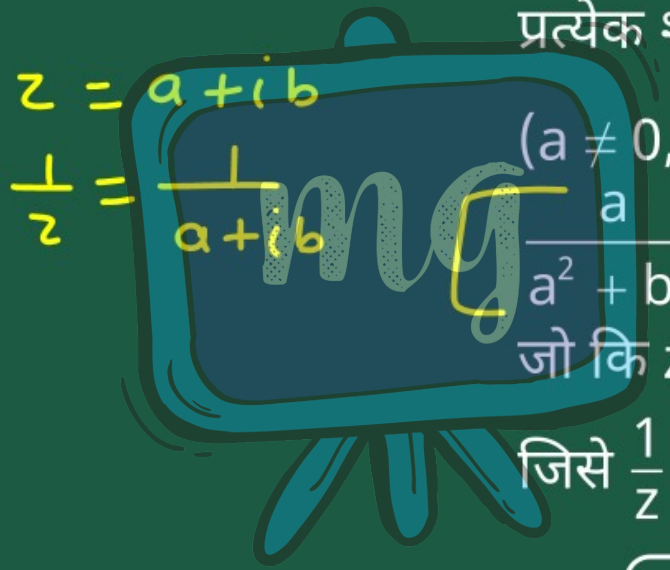
(iv) गुणात्मक तत्समक का अस्तित्व : सम्मिश्र संख्या 1+ i0 (1 के द्वारा दर्शाया जाता है), गुणात्मक तत्समक अथवा एकल सम्मिश्र संख्या कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z के लिए

$$z.1 = z$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(v) गुणात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व :



प्रत्येक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$, $(a \neq 0, b \neq 0)$ के लिए, हमें सम्मिश्र संख्या $\frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$ प्राप्त होती है, जो कि z की गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती है जिसे $\frac{1}{z}$ अथवा z^{-1} के द्वारा दर्शाया जाता है।

$$z.\frac{1}{z} = 1 \text{ (गुणात्मक तत्समक)}$$

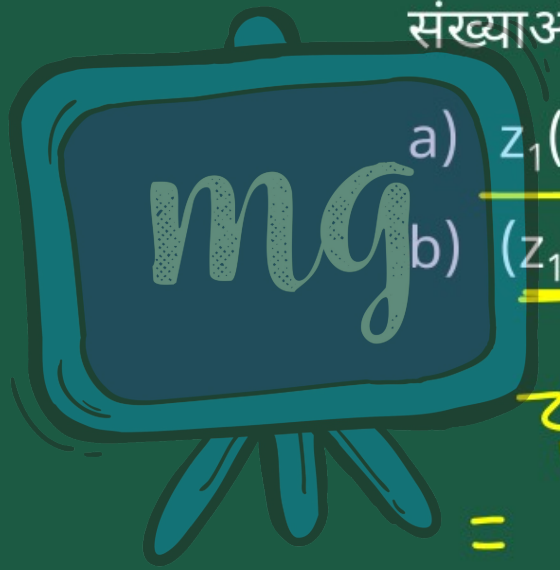
Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(vi) बंटन नियम : किन्हीं तीन सम्मिश्र z_1, z_2, z_3 संख्याओं के लिए

a) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

b) $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$



$z_1(z_2+z_3)$

$= z_1z_2 + z_1z_3$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

भागफल

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$



$$= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id}$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

दो सम्मिश्र संख्याओं का भागफल

किन्ही दो दी हुई सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, जहाँ $z_2 \neq 0$, भागफल $\frac{z_1}{z_2}$ निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

उदाहरण :

माना $z_1 = 6 + 3i$ और $z_2 = 2 - i$

तब $$\frac{z_1}{z_2} = \left[(6+3i) \times \frac{1}{2-i}\right]$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$$\frac{6+3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$



$$\Rightarrow \frac{(6\times 2)+6i+6i-3}{(2)^2-(i)^2}$$

$$= \frac{12+6i+6i-3}{4+1}$$

$$= \frac{9+12i}{5} = \frac{9}{5}+i\frac{12}{5}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

i की घात



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

नोट



☛ किसी पूर्णांक k के लिए,

$i^{4k} = 1$,

$i^{4k+1} = i$,

$i^{4k+2} = -1$,

$i^{4k+3} = -i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

एक ऋण वास्तविक संख्या के वर्गमूल



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

तत्समक (Identities)



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

तत्समक (Identities)

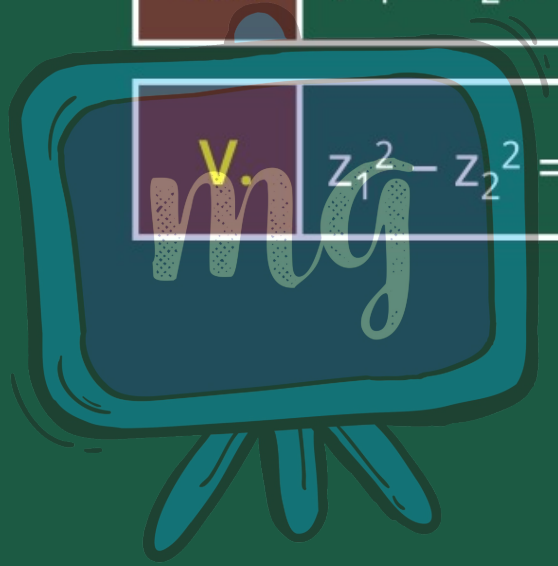
किन्हीं सम्मिश्र संख्याओं, z_1 और z_2 के लिए

I.	$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$
II.	$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2$
III.	$(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

IV.	$(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$
V.	$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$



Under CSR Support by ipca | Foundation

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



1. सम्मिश्र संख्याएँ
2. सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण
3. सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

Under CSR Support by
ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



1 | यदि $2 + (2a + 5ib) = 8 + 10i$ तब :

अ | $a = 2, b = 3$

ब | $a = 3, b = 2$

स | $a = 2, b = 2$

द | $a = 3, b = 3$

Under CSR Support by ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



2 यदि $z_1 = (a, b)$ और $z_2 = (c, d)$ दो सम्मिश्र संख्याओं हो तब $\text{Im}(z_1 z_2) = ?$

अ bd – ac

ब ac – bd

स bc – ad

द bc + ad

Under CSR Support by
ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



3 वह छोटे से छोटा पूर्णांक n क्या होगा जिसके लिए $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$

अ 1

ब 2

स 3

द 4