Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan



कक्षा - 11

गणित

अध्याय – 4

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

भाग – 3

सम्मिश्र संख्याओं का संयुग्मी व मापांक

हर्ष गोयल

Under CSR Support by
ipca | Foundation

विवरण (Overview)

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



1. सम्मिश्र संख्याएँ
2. सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित
3. सम्मिश्र संख्याओं का संयुग्मी व मापांक

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

i की घात



$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \times i$

$= -1 \times i$

$= -i$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



$i^{4} = 1$

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+3} = -i$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k} = 1$

$i^{1} = 1 \times i = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

नोट



☛ किसी पूर्णांक k के लिए,

$i^{4k} = 1$,

$i^{4k+1} = i$,

$i^{4k+2} = -1$,

$i^{4k+3} = -i$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

एक ऋण वास्तविक संख्या के वर्गमूल



$\sqrt{-3}$ का वर्गमूल

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

यदि $(-i)^2 = -1$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

i तथा $-i$, -1 के
वर्गमूल होंगे ।



$x^2+1 = 0$ हो

हल $x = i$

$x = -i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



$\sqrt{a \times b}$

$= \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{-1 \times 3}$

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{3}$

$= i \times \sqrt{3}$

तो $\sqrt{-3}$ के वर्गमूल

$\sqrt{3}\,i$, $-\sqrt{3}\,i$

$\sqrt{-3}$

$\sqrt{-1}$ का वर्गमूल

i , $-i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$\sqrt{-a}$ मा वर्गमूल

a मोई वास्तविक संख्या।

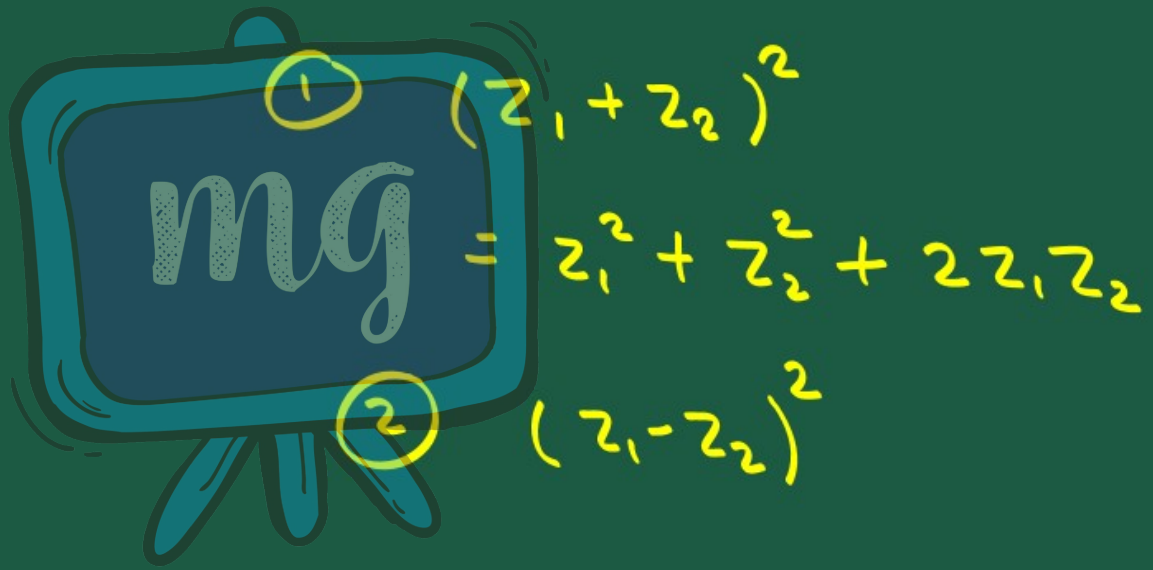


$\sqrt{a}\,i$, $-\sqrt{a}\,i$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

तत्समक (Identities)



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

तत्समक (Identities)

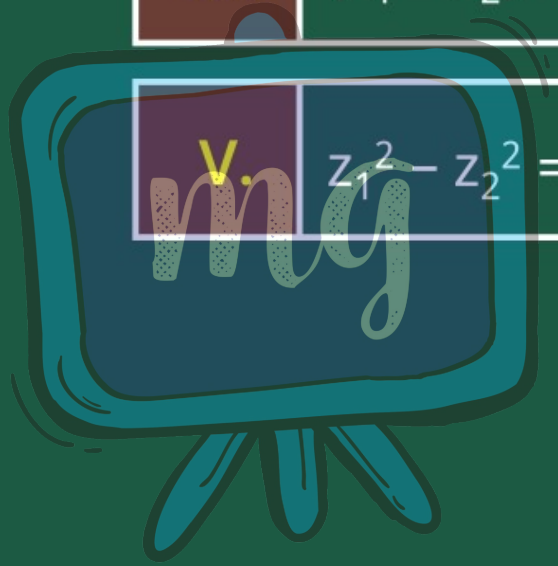
किन्हीं सम्मिश्र संख्याओं, z_1 और z_2 के लिए

I.	$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$
II.	$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2$
III.	$(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

IV.	$(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$
V.	$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

$z = a + ib$

z का संयुग्मी $= a - ib$



$\bar{z}$ से प्रदर्शित

$\bar{z} = a - ib$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$z = 2 + 3i$

$\bar{z} = 2 - 3i$



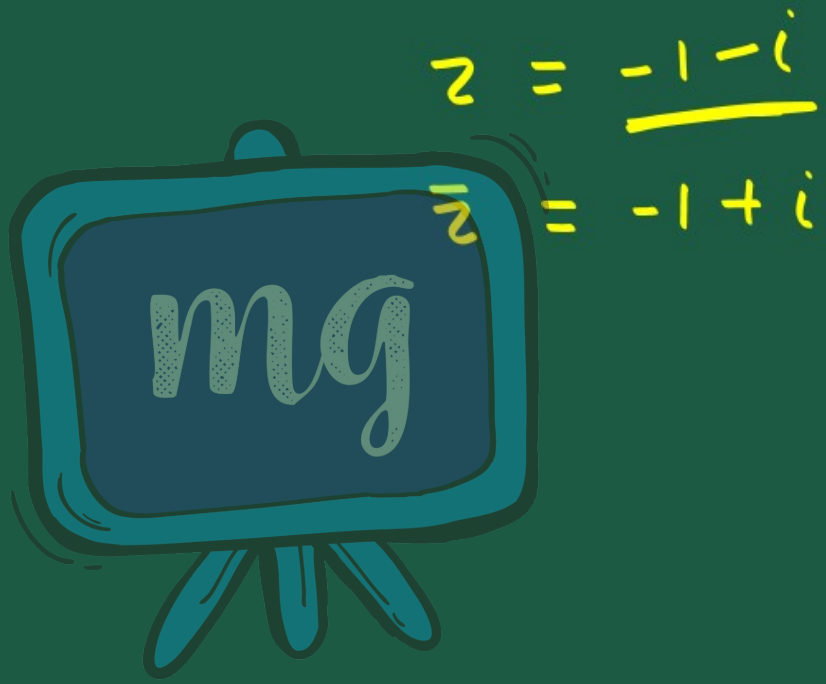
$z = 3i + 1$

$\bar{z} = 3i - 1$

$\bar{z} = -3i + 1$

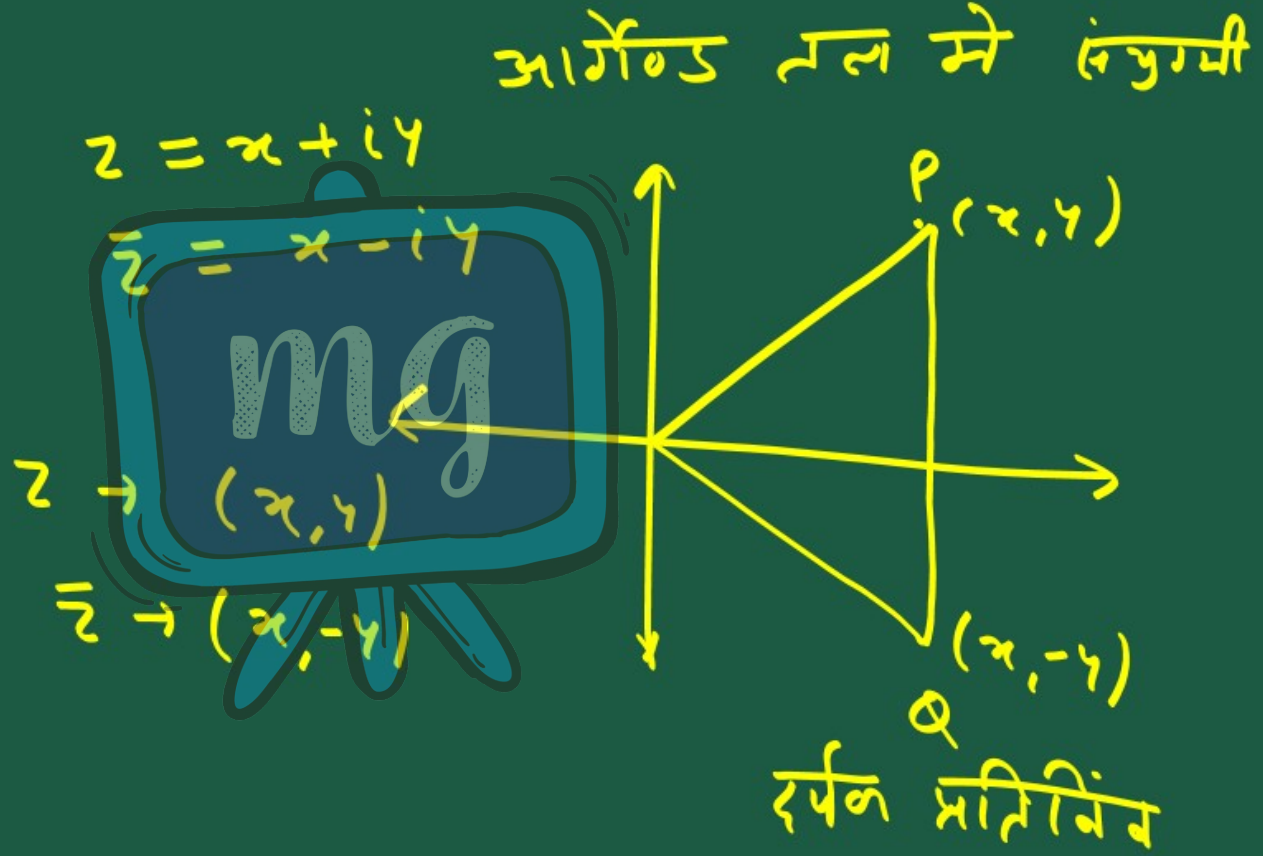
Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

यदि एक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$, तो इसका संयुग्मी $\bar{z} = a - ib$ से परिभाषित होता है।

उदाहरण :

(i) $2 + 3i$ का संयुग्मी $2 - 3i$ है।

(ii) $2i + 1$ का संयुग्मी $-2i + 1$ है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

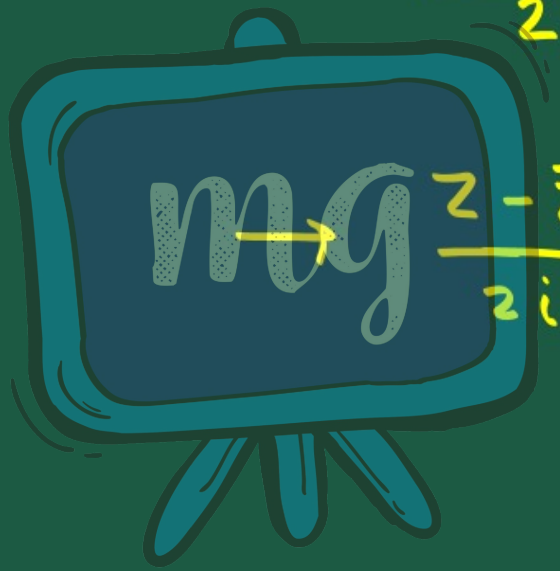
missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

☛ आर्गड तल में सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ और इसकी संयुग्मी $\bar{z} = x - iy$ को बिंदुओं $P(x, y)$ और $Q(x, -y)$ के द्वारा निरूपित किया गया है। ज्यामितीय भाषा से, बिंदु $(x, -y)$ वास्तविक अक्ष के सापेक्ष बिंदु (x, y) का दर्पण प्रतिबिंब कहलाता है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

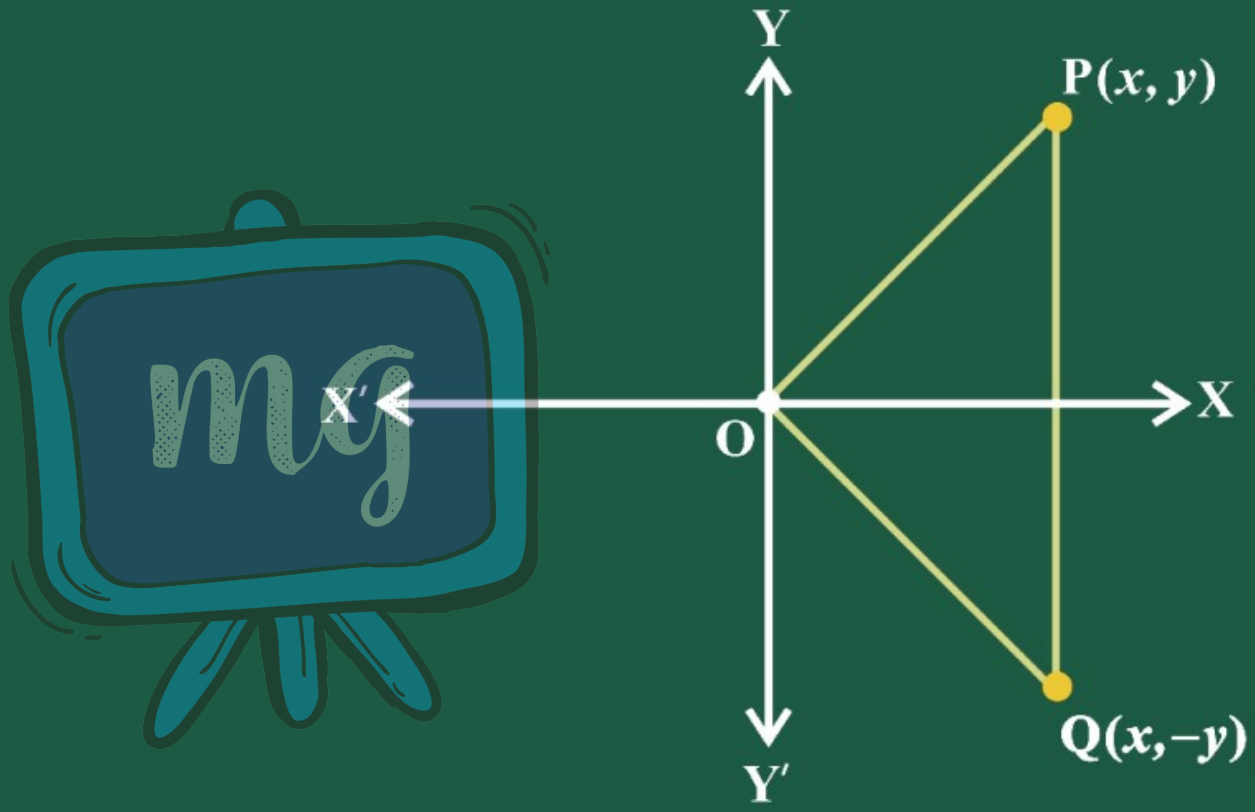
$$\rightarrow \frac{z + \bar{z}}{2} = Re(z)$$



$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = Im(z)$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

नोट



- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$
- $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

संयुग्मी के गुणधर्म :

यदि z_1, z_2, तथा z_3, सम्मिश्र संख्याये हो तो हम निम्न परिणाम प्राप्त करते है।

(i) $\overline{(\bar{z})} = z$

$z = 1+2i$

$\bar{z} = 1-2i$

$(\bar{\bar{z}}) = 1+2i$

(ii) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

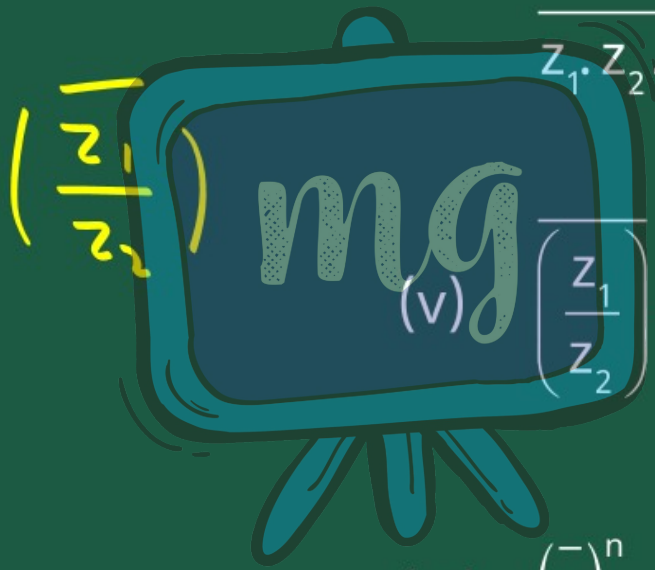
(iii) $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(iv) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ व्यापक रूप में,

$\overline{z_1 . z_2 . z_3 ..... z_n} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 . \bar{z}_3 ..... \bar{z}_n$



(v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$

(vi) $\left(\bar{z}\right)^n = \left(\overline{z^n}\right)$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्या का मापांक

$z = a + ib$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$z = 1 + 2i$

$|z| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{1+4}$

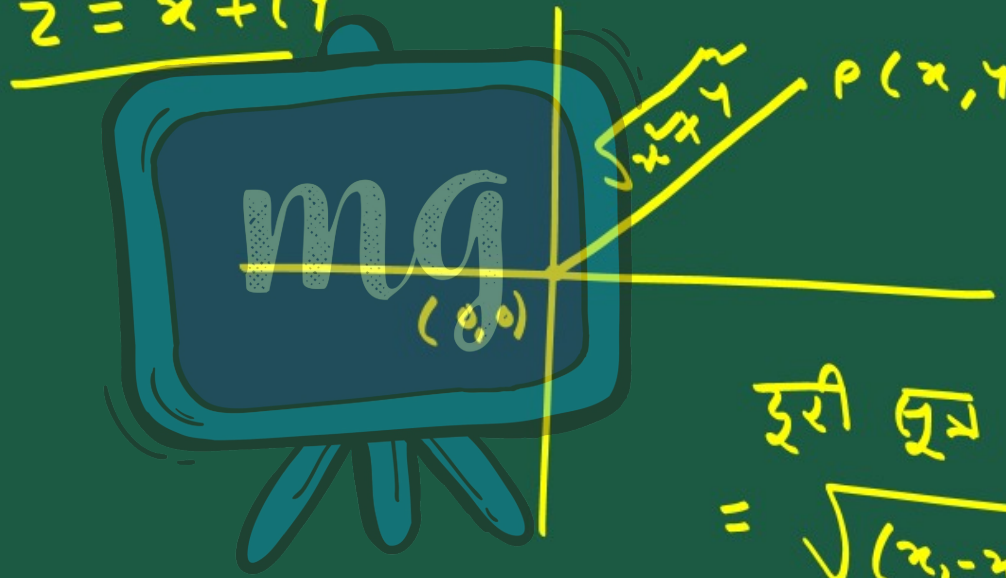
$= \sqrt{5}$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$|z|$ → धनात्मक वास्तविक संख्या

$z = x + iy$



दूरी सूत्र

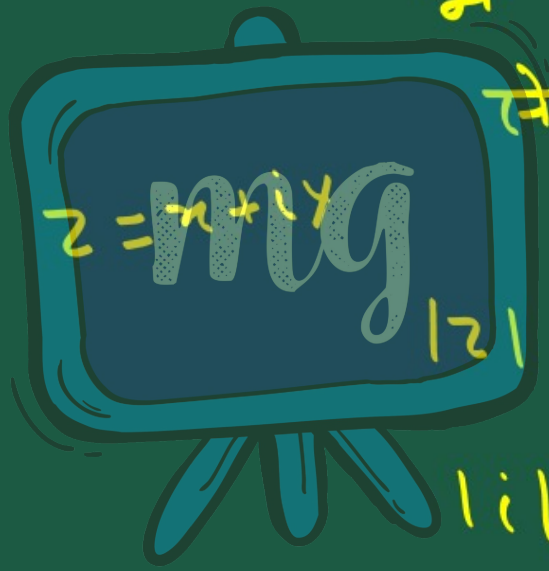
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

मापांक आर्गेण्ड तल
मे बिंदु की मूल बिंदु
से दूरी



$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|i| = \sqrt{(0)^2+(1)^2}$

$= 1$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

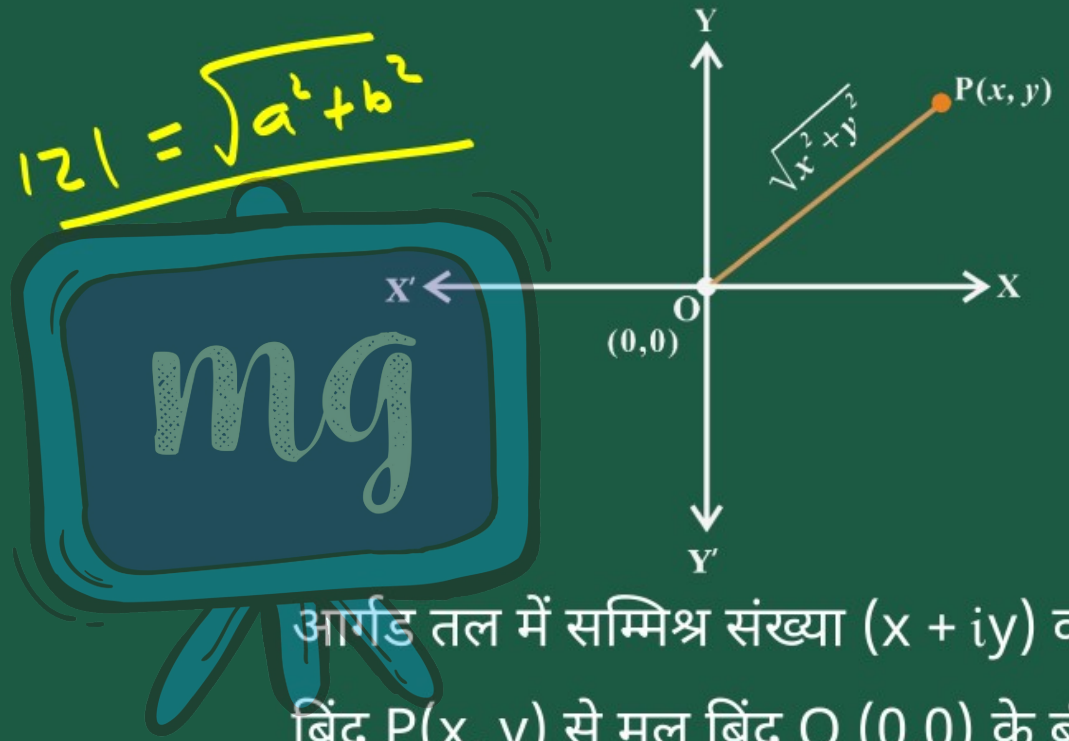
सम्मिश्र संख्या का मापांक

सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का मापांक धनात्मक वास्तविक संख्या $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ a, b वास्तविक संख्यायें हैं।



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



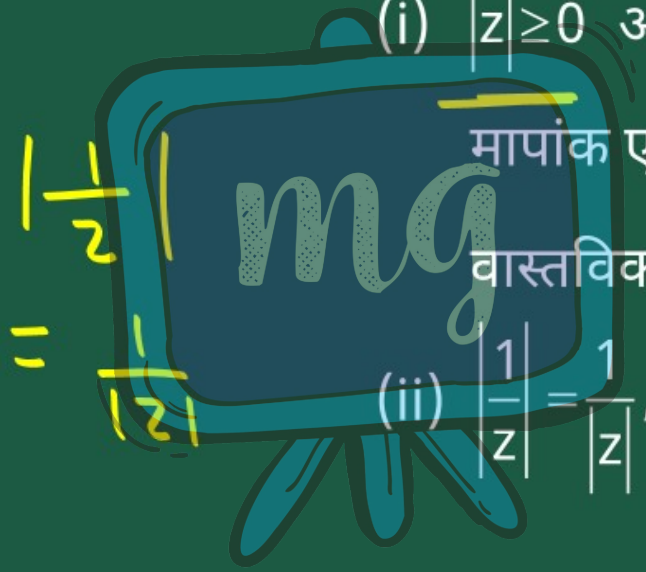
आर्गंड तल में सम्मिश्र संख्या (x + iy) का मापांक बिंदु P(x, y) से मूल बिंदु O (0,0) के बीच की दूरी द्वारा प्राप्त होता है

$$|z| = \overrightarrow{OP}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्याओं के मापांक के गुण



(i) $|z| \geq 0$ अर्थात् किसी सम्मिश्र संख्या का मापांक एक अऋणात्मक (non-negative) वास्तविक संख्या होगा।

(ii) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, (z \neq 0)$

(iii) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(iv) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0)$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(v) $|z^n| = |z|^n$, $n \in N$

$|z^n| = |z|^n$

(vi) $z.\bar{z} = |z|^2$ (पूर्णतः वास्तविक)

(vii) $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$1 = z \cdot \bar{z}$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सम्मिश्र संख्या का प्रतिलोम :

अशून्य सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का प्रतिलोम



$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण

$2 + i$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।



$z = 2 + i$

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$\bar{z} = 2 - i$

$|z| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{5}$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$= \frac{2-i}{(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{2-i}{5}$$

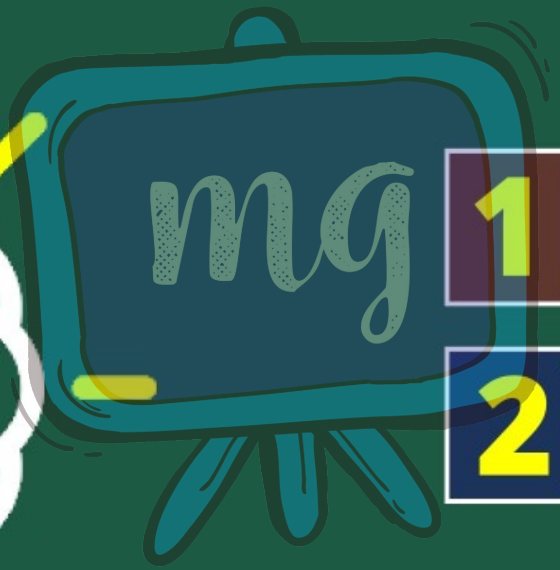
$$= \frac{2}{5} + i\left(\frac{-1}{5}\right)$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

missiongyan





1 सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

2 सम्मिश्र संख्या का मापांक

Under CSR Support by ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



1 यदि $z = 7 - 4i$ तो z और उसके संयुग्मी का योग क्या है?

अ $7 - 4i$

ब 14

स $7 + 4i$

द 0

$z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

$z = 7 - 4i$

$Re(z) = 7$

तो $z + \bar{z} = 2 \times 7$

$= 14$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



2 | यदि $z = 2 + 3i$, तो $z.\bar{z}$ का वास्तविक भाग क्या है?

- अ 13
- ब 14
- स 5
- द 7

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$|z| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{4 + 9}$

$= \sqrt{13}$

$z \cdot \bar{z} = 13$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

मूल्यांकन (Assessment)

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



3 | यदि $z = 1 + 2i$ तो $\frac{1}{z}$ का संयुग्मी क्या है?

अ $1 + 2i$

ब $\frac{1}{1+2i}$

स $\frac{1}{1-2i}$

द $\frac{1}{2+i}$

$z = 1 + 2i$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+2i}$

$\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}}$

$= \frac{1}{1-2i}$