गणित प्रकाश

कक्षा 6 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक

0675

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Reprint 2025-26

0675 – गणित प्रकाश
कक्षा 6 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक

ISBN 978-93-5292-480-6

प्रथम संस्करण
सितंबर 2024 भाद्रपद 1946
दिसंबर 2024 अग्रहायण 1946
पुनर्मुद्रण
मार्च 2025 फाल्गुन 1946

PD 100T M

₹ 65.00

एन.सी.ई.आर.टी. वॉटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशन प्रभाग में प्रकाशित तथा लक्ष्मी ऑफ़सेट प्रिंटर्स, जी-115, हीरावाला इंडस्ट्रियल एरिया, कानोता, आगरा रोड़, जयपुर द्वारा मुद्रित।

रा.शै.अ.प्र.प. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलुरू 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट : धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लेक्स
मालीगाँव
गुवाहाटी 781 021 फोन : 0361-2676869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	:	*एम.वी. श्रीनिवासन*
मुख्य संपादक	:	*बिज्ञान सुतार*
मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी)	:	*जहान लाल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*अमिताभ कुमार*
सहायक संपादक	:	*मीनाक्षी*
सहायक उत्पादन अधिकारी	:	*सायुराज ए.आर.*

आवरण एवं सज्जा
क्रिएटिव आर्ट स्टूडियो

चित्रांकन
चेतन शर्मा, एनिमैजिक इंडिया
अलंकृता अमाया
श्री चित्रा क्रिएटिव

आमुख

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.ई.पी.) 2020 एक परिवर्तनकारी पाठ्यचर्या और शैक्षणिक संरचना की अनुशंसा करती है जिसके मूल में भारतीय संस्कृति, सभ्यता और भारतीय ज्ञान परंपरा निहित है। यह नीति विद्यार्थियों को इक्कीसवीं सदी की संभावनाओं और चुनौतियों के साथ रचनात्मक रूप से जुड़ने के लिए तैयार करती है। नई शिक्षा नीति में के अन्तर्गत सन्निहित चुनौतियों और सुझावों के आधार पर विद्यालयी शिक्षा हेतु निर्मित *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा* (एन.सी.एफ.एस.ई.) 2023 में सभी स्तरों के पाठ्यचर्या क्षेत्र तैयार किए गए हैं। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 का उद्देश्य है बुनियादी और प्रारंभिक स्तर पर बच्चों का पंचकोशीय विकास सुनिश्चित करते हुए मध्य स्तर पर उनका विकासात्मक स्वरूप अग्रसर किया जाए। इस प्रकार, मध्य स्तर कक्षा 6 से कक्षा 8 तक तीन वर्षों को समाहित करते हुए आरंभिक और माध्यमिक स्तरों के मध्य एक सेतु के रूप में कार्य करता है।

मध्य स्तर पर इस राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा का उद्देश्य है, विद्यार्थियों को उन आवश्यक कौशलों में दक्ष करना जो बच्चों की विश्लेषणात्मक, वर्णनात्मक और सृजनात्मक क्षमताओं को प्रोत्साहित करें और उन्हें आने वाली चुनौतियों और अवसरों के लिए तैयार करें। मध्य स्तर हेतु राष्ट्रीय पाठ्यचर्या के आधार पर विकसित बहुआयामी पाठ्यक्रम में ऐसे नौ विषय सम्मिलित किए गए हैं जो बच्चों के समग्र विकास को प्रोत्साहन देते हैं। इनमें तीन भाषाओं (कम से कम दो भारतीय मूल की भाषाएँ) सहित विज्ञान, गणित, सामाजिक विज्ञान, कला शिक्षा, शारीरिक शिक्षा एवं आरोग्य और व्यावसायिक शिक्षा सम्मिलित हैं।

ऐसी परिवर्तनकारी शिक्षण संस्कृति के लिए अनुकूल परिस्थितियों की आवश्यकता होती है। इसे मूर्त रूप देने के लिए विभिन्न विषयों की उपयुक्त पाठ्यपुस्तकें भी होनी चाहिए। पाठ्यसामग्री और पढ़ने-पढ़ाने के उपागमों के मध्य इन पाठ्यपुस्तकों की महत्वपूर्ण भूमिका होगी। ऐसी निर्णायक भूमिका जो बच्चों की जिज्ञासा और खोजी प्रवृत्ति के मध्य एक विवेकपूर्ण संतुलन स्थापित करेगी। कक्षा नियोजन और विषयों की पढ़ाई दोनों में उचित संतुलन बनाने के लिए शिक्षकों की तैयारी भी आवश्यक है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निरंतर गुणवत्तापूर्ण पाठ्यपुस्तकें तैयार करने के लिए एक प्रतिबद्ध संस्था है। पाठ्यपुस्तकों के निर्माण हेतु संबंधित विषय विशेषज्ञों, शिक्षाशास्त्रियों और शिक्षकों को समितियों में सम्मिलित किया जाता है। कक्षा 6 के लिए विकसित गणित की पाठ्यपुस्तक— *गणित प्रकाश*, गणित लोक की एक मनोरम यात्रा है। पुस्तक का आरंभ विद्यार्थियों को अपने आस-पास के पैटर्न देखने एवं तलाशने और गणितीय

अवधारणाओं को स्वयं खोजने हेतु प्रोत्साहित करने से होती है। यह पाठ्यपुस्तक संख्याओं के क्षेत्र में व्यापक जानकारी देती है, जहाँ युवा विद्यार्थियों को संख्याओं और आकृतियों के जादू से परिचित कराया जाता है। रंगीन चित्रों, उदाहरणों एवं क्रियात्मक प्रश्नावलियों के द्वारा विद्यार्थी अंकगणित में एक सुदृढ़ आधार विकसित करते हैं, जो अधिक जटिल गणितीय अवधारणाओं के लिए मार्ग प्रशस्त करता है। संपूर्ण पुस्तक में कहानियाँ, वार्तालाप एवं उपाख्यान सम्मिलित किए गए हैं, जिससे युवा विद्यार्थी अमूर्त गणितीय अवधारणाओं को स्वयं से जोड़कर समझ सकें। पुस्तक की विषय-वस्तु पहेलियों एवं अभिनव समस्याओं का उपयोग कर विकसित की गयी है, जो विद्यार्थियों को न केवल गणितीय अवधारणाएं तार्किकता के साथ उनके आस-पास के वातावरण से जोड़ने एवं उनकी गणित की समझ व्यापक बनाने में सहायक होगी, अपितु उन्हें गणनात्मक सोच के उभरते हुए क्षेत्र की अवधारणाओं को समझने के लिए भी तैयार करेगी। भारतीयता की जड़ें एवं भारतीय ज्ञान पद्धति (IKS) से संबंध पाठ्यपुस्तक की सामग्री में अंतर्निहित किया गया है।

इस पाठ्यपुस्तक के साथ ही इस स्तर पर विद्यार्थियों को विविध शिक्षण संसाधनों की जानकारी हेतु भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। ऐसे संसाधन उपलब्ध कराने में विद्यालय के पुस्तकालय महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इसके अतिरिक्त विद्यार्थियों का इस दिशा में मार्गदर्शन और प्रोत्साहन देने हेतु अभिभावकों और शिक्षकों की भूमिका भी महत्वपूर्ण होगी।

मैं इस पाठ्यपुस्तक के विकास में सम्मिलित उन सभी व्यक्तियों का आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने यह उत्कृष्ट प्रयास साकार किया है और आशा करता हूँ कि यह पुस्तक सभी हितधारकों की अपेक्षाएं पूर्ण करेगी। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशन निरंतर परिष्कृत करने के लिए समर्पित है। हम आपकी टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करते हैं जो भावी संशोधनों में सहायक होंगे।

दिनेश प्रसाद सकलानी
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
सितंबर, 2024

Reprint 2025-26

पुस्तक के विषय में

गणित, विद्यार्थियों को न केवल बुनियादी अंकगणित कौशलों को विकसित करने में सहायता करता है, अपितु तार्किकता, रचनात्मक समस्या निदान एवं स्पष्ट और सटीक संवाद (मौखिक एवं लिखित दोनों) की महत्त्वपूर्ण क्षमताएँ विकसित करने में भी सहयोग प्रदान करता है। गणितीय ज्ञान अन्य विद्यालयी विषयों की अवधारणाओं को समझने में भी महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है, जैसे— विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान और यहाँ तक कि कला, शारीरिक शिक्षा एवं व्यवसायिक शिक्षा। गणित का अधिगम, सुविचारित विकल्पों एवं निर्णयों के लिए क्षमताओं को विकसित करने में भी योगदान दे सकता है। संख्याओं और मात्रात्मक तर्कों की समझ, प्रभावी एवं सार्थक लोकतांत्रिक और आर्थिक भागीदारी के लिए भी आवश्यक है। इस प्रकार गणित, विद्यालयी शिक्षा के समस्त उद्देश्यों को प्राप्त करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

मध्य स्तर (मिडिल स्टेज) पर गणित एक बड़ी चुनौती है जिसे बच्चे के अनुभव और वातावरण के समीप होने एवं अमूर्त रूप में होने, दोनों की दोहरी भूमिका निभानी होती है। गणित को दृढ़ता व परिशुद्धता को बनाए रखने और उस पर बल देने के साथ-साथ अंतर्ज्ञान विकसित करने की दोहरी भूमिका निभानी चाहिए। इसके अतिरिक्त इसे कलात्मकता और रचनात्मकता तथा शिष्टता और सौंदर्यता की भावना विकसित करने के साथ-साथ आलोचनात्मक और तार्किक सोच में वृद्धि की दोहरी भूमिका भी निभानी चाहिए। अंतत: गणित को दोहरी भूमिका निभानी चाहिए— विद्यार्थियों को स्वयं अवधारणाओं की खोज और अन्वेषण के पर्याप्त अवसर प्रदान करना और साथ ही गणित के वैश्विक भंडार में सर्वश्रेष्ठ ज्ञात विधियों को पढ़ाना।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक में गणित को सीखने के उपरोक्त लक्ष्यों और चुनौतियों का समाधान करने का प्रयास किया गया है। इस पुस्तक के लेखकों का लक्ष्य विद्यार्थियों में अंतर्ज्ञान और दृढ़ता दोनों को विकसित करने के लिए औपचारिक एवं अनौपचारिक परिभाषाओं और तरीकों के बीच विवेकपूर्ण संतुलन बनाना है। यह पुस्तक सक्रिय और अनुभवात्मक अधिगम को बढ़ावा देने के लिए कक्षा में विद्यार्थी-विद्यार्थी और विद्यार्थी-शिक्षक के मध्य गणितीय वार्तालाप के कई अवसर भी प्रदान करती है। पुस्तक में अनेक प्रश्न, पहेलियाँ और अभ्यास निरंतर अन्वेषण को प्रोत्साहित करने के लिए दिए गए हैं। कक्षा में चर्चा को प्रोत्साहित करने हेतु कई खुले अंत वाले (ओपन एंडेड) प्रश्न भी दिए गए हैं। इसके अतिरिक्त अंत में कुछ प्रसिद्ध अनसुलझी समस्याओं को भी सम्मिलित किया गया है ताकि विद्यार्थी यह समझ सकें कि गणित अभी भी एक बहुत सक्रिय विषय है, जिसमें बहुत कुछ, जो पहले से ही ज्ञात है व खोजा जा चुका है परंतु कुछ गूढ़ या अज्ञात अवधारणाएँ भी हैं जिन्हें हल करना अभी शेष है। ऐसी अज्ञात अवधारणाओं और

अनसुलझे प्रश्नों के लिए नए विचारों और एक साहसी नई पीढ़ी की आवश्यकता होगी ताकि इन रोमांचक समस्याओं को समझा जा सके और हल किया जा सके।

दुनिया के सबसे बड़े समस्या समाधानकर्ताओं और वर्तमान पीढ़ी के सबसे रचनात्मक मस्तिष्कों में से एक विश्व प्रसिद्ध गणितज्ञ मञ्जुल भार्गव हैं। उन्होंने गणित में मौलिक प्रकृति की दशकों पुरानी और कुछ मामलों में सदियों पुरानी समस्याओं का समाधान किया है, विशेष रूप से संख्या सिद्धांत, बीजगणित, प्रतिनिधित्व सिद्धांत (Representation Theory) और अंकगणितीय ज्यामिति के क्षेत्र में। गणित में अपने अग्रणी अन्वेषण के कारण वे वर्ष 2014 में, फील्ड्स मेडल प्राप्त करने वाले भारतीय मूल के पहले व्यक्ति बने। फील्ड्स मेडल गणितज्ञों को दिया जाने वाला सर्वोच्च सम्मान है, यह पुरस्कार प्रत्येक चार वर्ष में एक बार दिया जाता है और इसे 'गणित का नोबेल पुरस्कार' के रूप में जाना जाता है।

हम उत्साहित और सम्मानित महसूस कर रहे हैं कि इस पुस्तक का अध्याय 1, 'गणित में पैटर्न', आचार्य मञ्जुल भार्गव द्वारा रचित एवं योगदान दिया गया है। इस अध्याय में, 'गणित क्या है?' खंड में, आचार्य भार्गव स्पष्ट एवं सशक्त रूप से गणित को एक रचनात्मक कला के रूप में बताते हैं इसके साथ ही आकर्षक पैटर्नों की खोज और उन पैटर्नों की व्याख्या का भी वर्णन करते हैं। अध्याय के बाद के खंड़ों में, वे गणित के कुछ सबसे बुनियादी पैटर्न के नमूनों— संख्याओं के अनुक्रम और आकृतियों के अनुक्रम और उनके उल्लेखनीय और आश्चर्यचकित करने वाले अंतर्संबंधों का वर्णन करते हैं। पुस्तक के बाद के अध्यायों में भी इन पैटर्नों का ध्यान रखा गया है जो गणित की एकरूपता को बनाए रखने पर बल देता है। इन पैटर्नों पर भविष्य में भी विचार किया जाएगा। हम आशा करते हैं कि यह खोजपूर्ण अध्याय नई पीढ़ी को गणित की खोज और अध्ययन के लिए प्रेरित करने में सहायक होगा।

गणित में पैटर्नों की खोज के विचारों का निर्माण कर, पुस्तक पुनः गणित के विभिन्न क्षेत्रों की यात्रा की ओर मुड़ती है। अध्याय 2, 'रेखाएँ और कोण', ज्यामिति के निर्माण खंडों— बिंदु, रेखाखंड, किरणें, रेखाएँ, कोण और कोणों को कैसे मापें, इसका परिचय देता है। अध्याय 3, 'संख्याओं का खेल', गणित में कुछ शिक्षाप्रद लेकिन रोचक खेलों और पहेलियों के माध्यम से एक खोजपूर्ण रोमांचक अध्याय है, जिनमें से कुछ पहेलियाँ अभी तक अनसुलझी हैं। अध्याय 4, 'आँकड़ों का प्रबंधन और प्रस्तुतिकरण', आँकड़े इकट्ठे करने और प्रस्तुत करने की कला का परिचय देता है, जिसमें इसके विश्लेषणात्मक और सौंदर्यात्मक दोनों पहलू सम्मिलित हैं। अध्याय 5, 'अभाज्य समय', अभाज्य संख्याओं और गुणनखंड के माध्यम से एक खेल-खेल में पढ़ा जाने वाला एक रोमांचक अध्याय है। अभाज्य संख्याएँ पूर्ण संख्याओं के विश्व का आधारभूत खंड हैं। अध्याय 6, 'परिमाप और क्षेत्रफल', इन मूलभूत विचारों का एक संशोधन

Reprint 2025-26

है, जिसमें बच्चों को समस्याओं से निपटने के लिए तैयार करने और उनकी समझ को बढ़ाने के लिए विभिन्न प्रकार की चुनौतीपूर्ण पहेलियाँ हैं। अध्याय 7, 'भिन्न' द्वारा विद्यार्थी भिन्न की अवधारणा को पहली बार समझेंगे। इस अध्याय का उद्देश्य धीरे-धीरे भिन्नों के विषय में अंतर्ज्ञान का निर्माण करना है। शुरुआत में 1/10 जैसी भिन्नात्मक इकाइयाँ इसका आधार हैं, और धीरे-धीरे सामान्य भिन्नों के साथ काम करना शुरू होता है जिसमें उनकी तुलना, जोड़ना और घटाना भी सम्मिलित है। अध्याय 8, 'रचनाओं के साथ खेलना', विद्यार्थियों के ज्यामितीय अंतर्ज्ञान और समझ को बढ़ाने के लिए, परकार (Compass) और रूलर का उपयोग करने सहित, आकृतियाँ बनाने का व्यावहारिक अनुभव है। अध्याय 9, 'सममिति', गणित और उससे आगे की सबसे महत्त्वपूर्ण और सर्वव्यापी अवधारणा का एक कलात्मक और व्यवहारिक अन्वेषण है। अंत में, अध्याय 10, 'शून्य के दूसरी ओर',का उद्देश्य विद्यार्थी को बेला की 'मज़ेदार इमारत' पर जाकर ऋणात्मक संख्याओं के लिए अंतर्ज्ञान प्राप्त करना है, इसके साथ ही धीरे-धीरे ब्रह्मगुप्त द्वारा निर्धारित सभी पूर्णांकों के जोड़ और घटाव के नियमों को समझना है।

गणित की इस पुस्तक में सभी अध्यायों में कला, इतिहास और विज्ञान सहित अन्य विषयों के साथ जोड़ने का प्रयास किया गया है। पैटर्नों, संख्याओं, रचनाओं, सममिति, खेलों, पहेलियों इत्यादि को दर्शाने के लिए अनेक चित्र और रेखाचित्र सम्मिलित किए गए हैं, जिससे गणितीय वस्तुओं और सिद्धांतों के लिए दृश्यात्मक और कलात्मक कल्पना एवं अंतर्ज्ञान विकसित किया जा सके। पुस्तक में विभिन्न गणितीय अवधारणाओं के इतिहास का वर्णन किया गया है, जिसमें वर्ष 628 ईस्वी में ब्रह्मगुप्त के भिन्नों को जोड़ने और घटाने के नियमों की, शून्य की और ऋणात्मक संख्याओं की, विश्व परिवर्तनकारी खोजें सम्मिलित हैं। विद्यार्थियों को खोज की खुशी का अनुभव करने और प्रक्रिया की सराहना करने योग्य बनाने और मानवीय बनाने में सहयोग करने के लिए दुनियाभर से अन्य खोजों, जैसे— इकाई भिन्नें, अभाज्य संख्याओं की खोज, कोलाट्ज अनुमान, कापरेकर संख्या आदि उनके इतिहास सहित वर्णन किया गया है। विज्ञान में गणितीय अवधारणाओं के उपयोग के महत्त्व को स्पष्ट करने के लिए विज्ञान से उदाहरण (जैसे समुद्र तल से ऊपर या नीचे तापमान या ऊँचाई मापने के लिए ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग) भी पर्याप्त मात्रा में लिए गए हैं।

हम आशा करते हैं कि कहानी सुनाने और व्यावहारिक क्रियाकलापों को एक साथ क्रियान्वित करके, सीखने को एक गहन अधिगम अनुभव बनाया जाएगा, जो जिज्ञासा को जगाता हो और गणित के प्रति प्रेम को बढ़ावा देता हो। यह आशा की जाती है कि शिक्षक, बच्चों को चर्चा करने, खेलने, परस्पर सामंजस्य बनाने, विभिन्न विचारों के लिए तार्किकता प्रदान करने और प्रस्तुत तर्कों में कमियाँ ढूँढ़ने का अवसर देंगे। विद्यार्थियों के लिए यह भी आवश्यक है कि अंतत:

Reprint 2025-26

वे यह समझने की क्षमता विकसित करें कि किसी तथ्य या अवधारणा को सिद्ध करने का क्या अर्थ होता है और अंतर्निहित अवधारणाओं के विषय में भी आश्वस्त बनें। गणित की कक्षा में एल्गोरिदम के अंधाधुंध अनुप्रयोग की अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए, अपितु बच्चों को प्रश्न हल करने के विभिन्न तरीके ढूँढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के अनुसार गणनात्मक सोच (Computational Thinking) को भी पहेलियों, खेलों और संवादात्मक अभ्यासों के माध्यम से धीरे-धीरे प्रस्तुत किया गया है, यह पुस्तक इस सोच को बढ़ावा देती है। पाठ्यपुस्तक में विभिन्न अवधारणाओं का संदर्भ देते समय उनकी भारतीयता की जड़ों को भी ध्यान में रखा गया है। अध्यायों में भारतीय गणितज्ञों का योगदान एक समस्या-समाधान दृष्टिकोण के एक रूप में दिया गया है ताकि विद्यार्थियों को भारत की समृद्ध गणितीय विरासत और गणित में भारत के वैश्विक योगदान के विषय में जागरूक किया जा सके।

अवधारणाएँ और समस्याएँ दैनिक जीवन की स्थितियों से जुडी हुई हैं। उन संदर्भों और सामग्रियों का उपयोग करने का प्रयास किया गया है जिनसे विद्यार्थी परिचित हैं। पुस्तक के अंत में अधिगम सामग्री पत्रक दिए गए हैं जिनकी फोटोकॉपी करके उपयोग किया जा सकता है। अनेक जगहों पर, सहकर्मी समूह के प्रयासों और चर्चाओं को प्रोत्साहित करने के लिए अभ्यास या क्रियाकलाप दिए गए हैं। पाठ्यपुस्तक, कक्षा में एक विविध समूह के विद्यार्थियों की सीखने की आवश्यकताओं को संबोधित करने का उद्देश्य रखती है।

हमने गणित में निहित प्रकरणों में परस्पर तारतम्यता और सामंजस्यता दर्शाने हेतु प्रारंभिक अध्यायों में सीखी गई अवधारणाओं को बाद के अध्यायों के विचारों से जोड़ने का प्रयास किया है। हम आशा करते हैं कि शिक्षक इन अवधारणाओं को संयुक्त रूप से दोहराने के अवसर के रूप में उपयोग करेंगे ताकि बच्चे गणित की संपूर्ण संकल्पनात्मक संरचना की सराहना कर सकें। इसके साथ-साथ शिक्षक भिन्न, ऋणात्मक संख्याओं के विचारों और अन्य गणितीय विचारों, जो विद्यार्थियों के लिए नए हों, को अधिक समय दें। इनमें से कई अवधारणाएँ भविष्य में गणित को सीखने की आधार हैं।

अंतत: इस पुस्तक का उद्देश्य केवल एक पाठ्यपुस्तक से कहीं अधिक है। यह गणितीय खोज और अन्वेषण की दुनिया का पासपोर्ट है। इसे कक्षा और घर दोनों जगह उपयोग किया जा सकता है। हम आशा करते हैं कि यह विद्यार्थियों को अपने स्वयं के गणितीय साहसिक कार्यों की शुरुआत करने के लिए प्रेरित कर सकती है, जिससे वे अपने आस-पास की सभी वस्तुओं में गणित की सुंदरता और प्रासंगिकता को देख सकें। अपने जुझारू दृष्टिकोण और कक्षा 6 की

Reprint 2025-26

व्यापक गणितीय अवधारणाओं के साथ यह पुस्तक युवा मस्तिष्कों को लुभाने और उन्हें गणितीय खोज की आजीवन यात्रा के लिए तैयार करती है।

मैं इस पाठ्यपुस्तक के सभी लेखकों और योगदानकर्ताओं को इस महत्वपूर्ण और मूल्यवान योगदान हेतु और राष्ट्र के गणित शिक्षकों, शिक्षार्थियों और जिज्ञासुओं के लिए की गई सेवा के लिए पुन: धन्यवाद देता हूँ।

हम इस पुस्तक के संबंध में आपकी टिप्पणियों और सुझावों की उम्मीद करते हैं और आशा करते हैं कि शिक्षण और सीखने के दौरान आपने जो रुचिपूर्ण अभ्यास, क्रियाकलाप और कार्य विकसित किए हैं, उन्हें प्रेषित करेंगे। इन सुझावों को आगामी संस्करणों में सम्मिलित किया जाएगा।

आशुतोष वझलवार
प्रोफेसर, शैक्षणिक संयोजक
डी.ई.एस.एम.
रा.शै.अ.प्र.प.

राष्ट्रीय पाठ्यक्रम और शिक्षण अधिगम सामग्री समिति (एन.एस.टी.सी.)

1. महेश चंद्र पंत, *कुलाधिपति*, राष्ट्रीय शैक्षिक योजना एवं प्रशासन संस्थान (NIEPA) (***अध्यक्ष***)
2. मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय (***सह-अध्यक्ष***)
3. सुधा मूर्ति, *प्रतिष्ठित लेखिका* एवं *शिक्षाविद्*
4. बिबेक देबरॉय, *अध्यक्ष*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद् (ई.ए.सी.-पी.एम.)
5. शेखर मांडे, *पूर्व महानिदशेक*, सी.एस.आई.आर., एवं *प्रतिष्ठित आचार्य*, सावित्रीबाई फुले पुणे विश्वविद्यालय, पुणे
6. सुजाता रामदोरई, *आचार्य*, ब्रिटिश कोलंबिया विश्वविद्यालय, कनाडा
7. शंकर महादेवन, *संगीत विशेषज्ञ*, मुंबई
8. यू. विमल कुमार, *निदेशक*, प्रकाश पादुकोण बैडमिंटन अकादमी, बेंगलुरु
9. मिशेल डैनिनो, *अतिथि आचार्य*, आई.आई.टी. गांधीनगर
10. सुरीना राजन, *आई.ए.एस.* (सेवानिवृत्त), पूर्व महानिदशेक, हिपा, हरियाणा
11. चमू कृष्ण शास्त्री, *अध्यक्ष*, भारतीय भाषा समिति, शिक्षा मंत्रालय
12. संजीव सान्याल, *सदस्य*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद (ई.ए.सी.-पी.एम.)
13. एम.डी. श्रीनिवास, *अध्यक्ष*, सेंटर फॉर पॉलिसी स्टडीज़, चेन्नई
14. गजानन लोंढ़े, हेड, प्रोग्राम ऑफिस, एन.एस.टी.सी.
15. रबिन छेत्री, *निदेशक*, एस.सी.ई.आर.टी., सिक्किम
16. प्रत्यूष कुमार मंडल, *आचार्य*, सामाजिक विज्ञान शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
17. दिनेश कुमार, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, योजना एवं अनुवीक्षण प्रभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
18. कीर्ति कपूर, *आचार्य*, भाषा शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
19. रंजना अरोड़ा, *आचार्य एवं अध्यक्ष*, पाठ्यचर्या अध्ययन और विकास विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली (***सदस्य-सचिव***)

पाठ्यपुस्तक विकास समूह

अध्यक्ष, पाठ्यचर्या क्षेत्र समूह (सीएजी) (गणित)

माधवन मुकुंद, *निदेशक*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई

योगदानकर्ता

अंजलि गुप्ते, *प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत्त), विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर

अमर्त्य कुमार दत्ता, *आचार्य*, सांख्यिकी-गणित यूनिट, भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (आई.एस.आई.), कोलकाता

अमृतांशु प्रसाद, *आचार्य*, गणितीय विज्ञान संस्थान, चेन्नई

आलोका कान्हेरे, *परियोजना वैज्ञानिक अधिकारी*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, मुंबई

एच.एस. शारदा, *टीजीटी*, शासकीय हाई स्कूल, एच.डी. कोट, कर्नाटक

एस. विश्वनाथ, *आचार्य*, गणितीय विज्ञान संस्थान (आई.एम.एससी.), चेन्नई

के.(रवि) सुब्रमण्यम, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, मुंबई

के.वी.सुब्रमण्यम, *आचार्य*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई

पंतजलि शर्मा, *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), अजमेर

पद्माप्रिया शिराली, पूर्व *प्रधानाचार्य*, सह्याद्रि स्कूल के.एफ.आई., पुणे

मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय और सह-अध्यक्ष, एन.एस.टी.सी.

मधु बी., *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), मैसूरु

राखी बैनर्जी, *सह आचार्य*, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलुरु

शैलेश ए. शिराली, *निदेशक*, शिक्षक शिक्षा कार्यक्रम वैली स्कूल, के.एफ.आई.

शिवकुमार के.एम., *सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

सुजाता रामदोरई, *आचार्य*, यूनिवर्सिटी ऑफ ब्रिटिश कोलंबिया, कनाडा,सदस्य एन.एस.टी.सी.

श्रवण एस. के., *सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

समीक्षक

अनुराग बेहर, *सदस्य*, राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा निरीक्षण समिति

आर. रामानुजम, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), गणितीय विज्ञान संस्थान (आई.एम.एससी.), चेन्नई

सदस्य-संयोजक, पाठ्यचर्या क्षेत्र समूह (सीएजी) गणित

आशुतोष केदारनाथ वझलवार, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

सदस्य-समन्वयक (हिंदी संस्करण)

टी.पी. शर्मा, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

अनुवादक

आशीष कुमार श्रीवास्तव, *गणित प्रवक्ता*, एंग्लो-बंगाली इंटर कालेज, प्रयागराज, उत्तर प्रदेश

उमंग कुमार पाण्डेय, आर.पी., सी.बी.ई.डी., झल्लारा, उदयपुर, राजस्थान

ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

प्रकाश सांगवान, *पी.जी.टी.*, गणित, जी.एस.एस.एस., झोझू कलां, दादरी, हरियाणा

प्रदीप कुमार जैन, *प्रवक्ता* गणित (सेवानिवृत्त) आर.पी.वी.वी., सूरजमल विहार, दिल्ली

महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड), सेवानिवृत्त, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

राजेंद्र कुमार पूनीवाला, *पी.जी.टी.*, शासकीय कन्या उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, बुरहानपुर, मध्य प्रदेश

रितु तिवारी, *गणित प्रवक्ता*, आर.एस. केंद्रीय विद्यालय नं. 1, भोलानाथ नगर, दिल्ली

रूपल गुप्ता, *सहायक आचार्य*, (अतिथि शिक्षक) सी.आई.सी., दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

सुधा पाटीदार, *संसाधन विशेषज्ञ*, नई दिल्ली

सुनील कुमार तिवारी, ए. आर. पी., प्राथमिक शिक्षा, हरजिंदर नगर, कानपुर

आभार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (रा.शै.अ.प्र.प.) इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में मिश्रित विषयों (Cross-Cutting Themes) पर दिशा-निर्देशों के लिए पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूह (CAG) और गणित एवं अन्य सम्बद्ध पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूहों (CAGs) के सम्मानित अध्यक्ष एवं सदस्यों का उनके मार्गदर्शन एवं समर्थन के लिए आभार व्यक्त करती है।

इस पाठ्यपुस्तक के विकास के दौरान, विभिन्न कार्यशालाएँ आयोजित की गई थीं जिनमें विभिन्न संस्थानों से गणित के विषय विशेषज्ञ आमंत्रित किए गए थे। रा.शै.अ.प्र.प. इन विषय-विशेषज्ञों द्वारा इस पाठ्यपुस्तक की सामग्री एवं शिक्षणशास्त्र में सुधार के लिए श्री वी. शिवशंकर शास्त्री, *गणित संचारक* (Communicator), कोलार; पी. सत्यनारायण शर्मा, *अथिति प्राध्यापक*, गणित विभाग, के.बी.एन. कॉलेज (स्वायत्त), विजयवाड़ा, आंध्रप्रदेश; सुहास साहा, *प्रमुख*, गणित विभाग, ईशा होम स्कूल, कोयंबटूर; प्रियव्रत देशपांडे, *सह आचार्य*, सी.एम.आई. चेन्नई; सादिक अली शेख, *प्रमुख*, गणित विभाग, मौलाना आज़ाद कॉलेज, कला, विज्ञान एवं वाणिज्य (कॉमर्स), औरंगाबाद, महाराष्ट्र; जसपाल कौर, *टी.जी.टी.* (गणित), स्कूल ऑफ एक्सेलेंस, दिल्ली; बीना प्रकाश, *वरिष्ठ पी.जी.टी.* (गणित), कैम्पियन स्कूल, भोपाल; महेंद्र शंकर, *वरिष्ठ प्रवक्ता* (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली; राम अवतार, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली; के.ए.एस.एस.वी. कामेश्वर राव, *सह आचार्य* (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प.; आदित्य चंद्रशेखर कर्नाटकी, *सहायक आचार्य*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई; नागेश मोने, *प्राचार्य* (सेवानिवृत्त), द्रविड़ हाई स्कूल डेक्कन शैक्षिक समिति, वाई, महाराष्ट्र; आर. आत्मारामन, गणितीय शिक्षा *परामर्शदाता*, टी.आई. मैट्रिक हायर सेकेंडरी स्कूल एवं ए.एम.टी.आई., चेन्नई, तमिलनाडू; उपेंद्र कुलकर्णी, *सह आचार्य*, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई; अनुपमा एस.एम., संकाय, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय; संदीप दिवाकर, गणित *विषय-विशेषज्ञ*, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन; आशीष गुप्ता, *संसाधन विशेषज्ञ*, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन; प्रवीण उनियाल, *संसाधन विशेषज्ञ*, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन; रामचंदर कृष्णमूर्ति, *प्राचार्य*, अज़ीम प्रेमजी विद्यालय का बहुमूल्य सुझावों एवं जानकारी के लिए आभार व्यक्त करती है।

परिषद्, श्रीधर श्रीवास्तव, *संयुक्त निदेशक*, रा.शै.अ.प्र.प.; अमरेन्द्र प्रसाद बेहरा, *संयुक्त निदेशक*, केंद्रीय शैक्षिक प्रौद्योगिकी संस्थान, रा.शै.अ.प्र.प. को भी धन्यवाद देती है।

परिषद्, सुनीता फरक्या, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., के शैक्षणिक एवं प्रशासनिक सहयोग के लिए आभार ज्ञापित करती है।

परिषद्, इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में सहयोग प्रदान करने के लिए सुष्मिता जोशी, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी*; मंजू महार, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी*; लुबना रहमान, *कनिष्ठ परियोजना अध्येता*; शक्ति कुमार भारद्वाज, *गणित प्रयोगशाला सहायक*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., के योगदानों की सराहना करती है।

इसके साथ ही ज्योती बांगड़े, *प्रूफ रीडर* (संविदा); विशाल शर्मा, अतुल, *टंकक हिंदी* (संविदा), डी.ई.एस.एम. का योगदान भी प्रशंसनीय हैं। अंततः परिषद्, पुस्तक की रूपरेखा तैयार करने एवं पुस्तक को अंतिम रूप देने हेतु पवन कुमार बरियार, *प्रभारी*, डी.टी.पी. प्रकोष्ठ, राजश्री सैनी, विपन कुमार शर्मा, बिट्टू कुमार महतो एवं मनोज कुमार, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा), प्रकाशन प्रभाग, रा.शै.अ.प्र.प. का आभार व्यक्त करती है। परिषद्, संपादन कार्य के लिए *सहायक संपादक* (संविदा) पारुल त्यागी एवं राहुल सेमवाल और प्रूफ रीडिंग के लिए *प्रूफ रीडर* (संविदा) श्रीया, प्रियंका, प्रियंका शर्मा एवं अब्दुल मजीद का आभार ज्ञापित करती है।

शिक्षक के लिए शब्द

हम आशा करते हैं कि *गणित प्रकाश* पाठ्यपुस्तक, गणित जैसे रोमांचक विषय को सीखने के आनंद को अगली पीढ़ी तक पहुँचाने के महत्वपूर्ण कार्य को पूर्ण करने में मजबूत समर्थक और मार्गदर्शक के रूप में आपकी सहायता करेगी।

इस कार्य के लिए एक अनुकूल वातावरण प्रदान करना आवश्यक है जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में गणितीय सोच को विकसित करने में सहायता करेगा।

अक्सर कक्षाओं में विद्यार्थियों को जो कुछ भी बताया जाता है उसे वे केवल सुनते हैं या बोर्ड पर जो कुछ लिखा जाता है उसे कॉपी में उतारते हैं। इस तरह की कक्षाओं में गणित सीखने के लिए आवश्यक परिस्थितियों का अभाव होता है इसलिए अनुकूल वातावरण की अनुपस्थिति में कोई भी विद्यार्थियों से गणितीय सोच और समझ को ग्रहण करने की उम्मीद नहीं कर सकता। कक्षाएँ ऐसी जगह होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी गणितीय अवधारणाओं के साथ खेलने, पैटर्नों को खोजने, चर्चा करने और समस्याओं को हल करने के लिए रचनात्मक रणनीतियों को अपने मित्रों के साथ मिलकर क्रियान्वित करने में व्यस्त रहे। विद्यार्थियों को समस्याओं को एक दूसरे के समक्ष भी रखना चाहिए और उनके संभव समाधान पर चर्चा करनी चाहिए। निश्चित तौर पर ये वही स्थितियाँ हैं जिनके कारण अब तक गणित के संपूर्ण क्षेत्र का विकास हुआ है।

कक्षा में ऐसा वातावरण तैयार करना जटिल कार्य नहीं है। इसके लिए हमें चाहिए एक रुचिकर प्रश्न, समस्या, पैटर्न या चुनौती जिसे नियमित आधार पर विद्यार्थियों के लिए प्रस्तुत किया जाए। विद्यार्थियों को कक्षा में जोड़े में या समूहों में प्रश्न को समझने, उस पर चर्चा करने एवं उस पर कार्य करने के लिए पर्याप्त समय दिया जाए।

इसके साथ ही एक ऐसा वातावरण विकसित करने की आवश्यकता है, जहाँ विद्यार्थियों की त्रुटियों को समझा जाए और सीखने में उनके महत्व को स्वीकार किया जाए।

यद्यपि कक्षाओं में गणितीय सोच को शुरू करने के लिए उत्साह पैदा करना कठिन कार्य नहीं है हालाँकि इसे बनाए रखना चुनौतीपूर्ण हो सकता है। यह उत्साह बनाए रखने के लिए इसमें आपकी ओर से प्रयास सम्मिलित हो सकते हैं। इसके लिए गणितीय प्रश्न, समस्या, पैटर्न या चुनौती को प्रस्तुत करने का पहला भाग सप्ताह में कम से कम एक या दो बार किया जाता हो। इसके साथ ही विद्यार्थियों को प्रश्न को समझने, चर्चा करने और उस पर काम करने के लिए आपकी ओर से पर्याप्त प्रतीक्षा समय भी दिया जाता हो। आपके ऐसे प्रयास विद्यार्थियों के गणित को देखने और उसके प्रति दृष्टिकोण पर सकारात्मक प्रभाव डाल सकते हैं।

यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि यह सकारात्मक प्रभाव त्वरित नहीं होगा बल्कि यह सीखने की एक धीमी प्रक्रिया है। यह प्रक्रिया विभिन्न कारकों पर निर्भर करती है, जैसे— समस्या समाधान हेतु आप विद्यार्थियों को कितने अवसर देते हैं, आपका धैर्य और प्रोत्साहन जो आप विद्यार्थियों को देते हैं।

समस्या प्रस्तुत करने में आपकी सहायता करने के लिए, इस पुस्तक में सभी समस्याओं या प्रश्नों को चिह्न का उपयोग करके चिह्नित किया गया है। यह चिह्न कक्षा में समस्या समाधान और अन्वेषण की प्रक्रिया शुरू करने के संभावित अवसर का संकेतक है। आप देखेंगे कि कुछ समस्याओं को 'गणित चर्चा' नाम दिया गया है। इस प्रकार के प्रश्नों को विशेष रूप से कक्षा में चर्चा के लिए विषय बनाया जा सकता है।

विद्यार्थियों की गणितीय सोच और अवधारणाओं की समझ को विकसित करने के लिए पर्याप्त समस्याएँ दी गई हैं। उन सभी को हल करने का प्रयास इस कीमत पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को हल करने और उन पर चर्चा करने का पर्याप्त समय ही न मिले।

यह समझना महत्त्वपूर्ण है कि खोजपूर्ण समस्याएँ केवल समस्याओं को हल करने के कौशल को बढ़ावा देने के लिए नही हैं, अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना शुरू करते हैं तो वे प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाने में भी सहायता करती हैं।

विद्यार्थियों को स्वतंत्र शिक्षार्थी बनाने के प्रयास अवश्य होने चाहिए। इसके लिए एक आवश्यक अनिवार्य पहलू गणितीय पाठ को पढ़ने और समझने की क्षमता है। इस कौशल को बढ़ावा देने हेतु विद्यार्थियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। वे जो पढ़ते हैं उसकी व्याख्या करने और उसे दूसरों के सामने व्यक्त करने के पर्याप्त अवसर उन्हें प्रदान किए जाने चाहिए। यह उस एक बड़ी समस्या का भी समाधान करेगा जिसका सामना विद्यार्थी गणित को बोलने और शब्द समस्याओं की व्याख्या करने में करते हैं।

पाठ्यपुस्तक में अनेक खुले अंत वाले (open-ended) प्रश्न दिए गए हैं। इसमें कुछ अवधारणाओं को समझने के नए तरीके भी सम्मिलित हैं। यदि आप उन्हें हल करने में सक्षम नहीं हैं या उनमें से कुछ का तुरंत अनुसरण नहीं कर पा रहे हैं, तो यह कोई जटिल समस्या नहीं है। प्रत्येक व्यक्ति को संपूर्ण ज्ञान नहीं होता। ऐसी सामग्री को समझने और उस पर विचार करने के लिए इसे कक्षा में ले जाना और चर्चा के लिए प्रस्तुत करना बहुत उपयोगी होगा। चर्चा के पश्चात्, जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं, उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है। यह प्रक्रिया अपने आप ही पाठ्य सामग्री को समझने में सुगम बना सकती है। इन चर्चाओं में आप एक साथी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं और जब विद्यार्थी, शिक्षक को किसी विषय को समझने के लिए ढूँढ़ते एवं उन्हें सोचते हुए देखते हैं, तो यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित करता है।

आशा है कि आप और आपके विद्यार्थी इस पुस्तक का उपयोग करके एक बहुत अच्छा और उपयोगी समय व्यतीत करेंगे।

Reprint 2025-26

प्रमुख बिंदुओं का सारांश

अन्वेषण के लिए समय

1. विद्यार्थियों के लिए नियमित रूप से नई समस्याओं, प्रश्नों, पैटर्नों या चुनौतियों को प्रस्तुत करना महत्वपूर्ण है। व्यक्तिगत रूप से और समूहों में उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने और उन पर काम करने के लिए पर्याप्त समय दीजिए।
2. एक ऐसे वातावरण को निर्मित करने की आवश्यकता है, जो त्रुटियों को समझता है और सीखने में उनके महत्व को स्वीकारता है।
3. एक ऐसी पाठ्य संस्कृति होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी एक-दूसरे के लिए समस्याएँ प्रस्तुत करें और समस्याओं को हल करने की विभिन्न विधियों पर एक-दूसरे से चर्चा करें।

पाठ्यपुस्तक में समस्याओं के विषय में

1. पुस्तक में खोजपूर्ण समस्याएँ न केवल समस्याओं के समाधान के स्तर में वृद्धि करती हैं, अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना शुरू करते हैं, तो इन समस्याओं का उद्देश्य प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाना भी है।
2. पुस्तक में सभी समस्याओं को हल करने का प्रयास इस कीमत पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने एवं हल करने के लिए पर्याप्त समय ही न मिले।

पढ़ना

1. विद्यार्थियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित कीजिए।
2. विद्यार्थी जो पढ़ते हैं, उसकी व्याख्या करने और उसे दूसरों के सामने व्यक्त करने का उन्हें अवसर दें।

न जानने का अधिकार!

1. यदि विद्यार्थी को पढ़ते समय कुछ पाठ्य सामग्री तुरंत समझ में नहीं आती है, तो इसमें कोई जटिल समस्या नहीं है। ऐसी पाठ्य सामग्री को समझने और उस पर विचार करने के साथ-साथ, इसे कक्षा मे प्रस्तुत किया जा सकता है और उस पर चर्चा की जा सकती है। चर्चा के पश्चात्, जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं, उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है। इन चर्चाओं में आप एक साथी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं। जब विद्यार्थी शिक्षक को किसी विषय को समझने के लिए खोजते एवं सोचते हुए देखते हैं, तो यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित करता है।
2. सीखना एक सतत प्रक्रिया है। वास्तव में, गणित में इतना कुछ है जो अभी भी ज्ञात नहीं है और जिसके लिए और अधिक अन्वेषण की आवश्यकता है!

Reprint 2025-26

विद्यार्थियों के लिए शब्द!

गणित कला को सराहने के लिए केवल निष्क्रिय दर्शक बने रहना पर्याप्त नहीं है, अपितु इसमें आपकी सक्रिय भागीदारी की भी आवश्यकता है, जैसे— कोई जासूस किसी रहस्य को सुलझाने के लिए प्रक्रिया में अनुरत रहता है।

इस भागीदारी की आवश्यकता विशेषत: तब होती है जब आप कोई नया प्रश्न देखते हैं या कोई प्रश्न आपकी अपनी जिज्ञासा से उत्पन्न होता है या जब आप संख्याओं या आकृतियों के किसी नए आर्कषक पैटर्न को देखते हैं। जब ऐसी अवधारणाओं से आपका सामना हो, तो आप अपने अध्ययन कार्य को विराम दीजिए एवं अपनी रचनात्मकता का उपयोग प्रश्न का परिणाम निकालने या पैटर्न को समझने में कीजिए।

आपको ज्ञात होगा कि इस पाठ्यपुस्तक में अध्यायों के अंतर्गत कुछ प्रश्नों के साथ उनके उत्तर भी दिए गए हैं। उनके उत्तर देखने से पहले प्रश्नों को स्वयं या समूह में हल करना या उन पर चर्चा करना अधिगम के लिए सार्थक सिद्ध होगा। ऐसा करने से आपका अनुभव गणित की पुस्तक को पढ़ने में अत्यंत सहायक सिद्ध होगा जो कि आपके अधिगम प्रक्रिया को सशक्त बनाएगा।

अध्ययन करते समय अध्यायों में आपको यह चिह्न देखने को मिलेगा जो कि दर्शाता है कि अब गणित के तथ्यों एवं अवधारणाओं को समझने का समय है। कभी-कभी आपको शीर्षक 'आइए, पता लगाएँ' के अंतर्गत एक ही स्थान पर कई प्रश्न एक साथ मिलेंगे।

इस पुस्तक में कुछ प्रश्न गणित चर्चा के अंतर्गत सम्मिलित हैं। ये प्रश्न आपको आपके मित्रों के साथ चर्चा करने एवं हल करने के लिए दिए गए हैं।

अंतत: पाठ्य सामग्री को रोचक बनाने हेतु कुछ प्रश्न प्रयास करें के अंतर्गत सम्मिलित हैं। इन प्रश्नों का उत्तर देने के लिए अधिक रचनात्मक सोच की आवश्यकता है। अंत: इनका उत्तर देना आपके लिए अत्यंत रोचक होगा।

विषय-सूची

Reprint 2025-26

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1]**[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य]** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

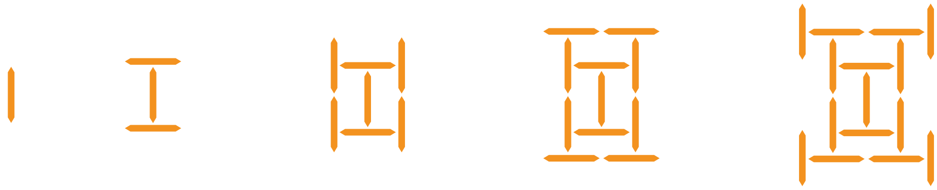
व्यक्ति की गरिमा और [2]**[राष्ट्र की एकता और अखंडता]** सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।



1 गणित में पैटर्न

0675CH01

1.1 गणित क्या है?

गणित, पैटर्नों (प्रतिरूपों) की खोज तथा पैटर्नों उनके अस्तित्व के कारण का स्पष्टीकरण है।

पैटर्न सामान्यत: हमारे आस-पास प्रकृति में, हमारे घरों और विद्यालयों में तथा सूर्य, चंद्रमा और तारों की गति में विद्यमान होते हैं। ये पैटर्न हमें खरीदारी से लेकर खाना बनाने में, गेंद फेंकने से लेकर खेल खेलने आदि में दिखाई देते हैं। इसके साथ ही यह मौसम चक्र को समझने एवं प्रौद्योगिकी का उपयोग करने में हमारी सहायता करते हैं।

पैटर्न तथा उन्हें समझना आनंददायक और रचनात्मक कार्य हो सकता है। इसी कारणवश गणितज्ञ, गणित को कला और विज्ञान दोनों के ही रूप में देखते हैं। हमें आशा है कि इस कक्षा में आपको गणितीय पैटर्नों को खोजने और समझने के लिए अनेक रचनात्मक तथा कलात्मक अवसर प्राप्त होंगे।

यह बात ध्यान रखने योग्य कि गणित का लक्ष्य केवल यह ज्ञात करना नहीं है कि कौन-कौन से पैटर्नों का अस्तित्व है, अपितु उनके अस्तित्व के कारणों के स्पष्टीकरणों को भी ज्ञात करना है। तब, ऐसे स्पष्टीकरणों का उपयोग प्राय: ऐसे अनुप्रयोगों में तब किया जा सकता है, जो उन संदर्भों के बाहर हैं जिनमें इनकी खोज की गई थी, और जो मानवता को आगे बढ़ने के लिए प्रेरित करने में सहायता कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, तारों, ग्रहों और उनके उपग्रहों (satellites) की गति के पैटर्नों की समझ ने मानव को गुरूत्वाकर्षण (gravitation) का सिद्धांत विकसित करने तक पहुँचाया। इसी के

फलस्वरूप हम चंद्रमा और मंगल पर स्वयं अपने उपग्रह प्रक्षेपित करने और रॉकेट भेजने में सफल हो पाए। इसी प्रकार, जीनोमों (genomes) के पैटर्नों की समझ ने हमें रोगों का पता लगाने और उनका उपचार करने में सहायता की। पैटर्न से संबंधित ऐसे अनेक उदाहरण हैं जिनमें से यह एक हैं।

आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. क्या आप अन्य उदाहरणों के विषय में सोच सकते हैं, जहाँ गणित दैनिक जीवन में हमारी सहायता करता है?
2. गणित ने किस प्रकार मानव को आगे बढ़ाने के लिए प्रेरित करने में सहायता की है? (आप उन उदाहरणों के विषय में विचार कर सकते हैं जिनमें वैज्ञानिक प्रयोग करना; अपनी अर्थव्यवस्था और लोकतंत्र को चलाना; पुलों, घरों या अन्य जटिल भवनों को निर्मित करना; टी.वी., मोबाइल फोन, कम्प्यूटरों, साइकिलों, रेलगाड़ियों, कारों, वायुयानों, कैलेंडरों, घड़ियों इत्यादि को बनाना सम्मिलित हैं।)

1.2 संख्याओं में पैटर्न

गणित में दिखने वाले सबसे अधिक मौलिक पैटर्नों में संख्याओं के पैटर्न हैं, विशेष रूप से पूर्ण संख्याओं के पैटर्न— 0, 1, 2, 3, 4, ...

गणित की वह शाखा जिसमें पूर्ण संख्याओं के पैटर्नों का अध्ययन किया जाता है, **संख्या सिद्धांत** कहलाती है।

संख्या अनुक्रम (sequences) सबसे अधिक मौलिक एवं सबसे अधिक आकर्षित करने वाले पैटर्नों के प्रकारों में हैं, जिनका अध्ययन गणितज्ञ करते हैं।

सारणी 1 कुछ मुख्य संख्या अनुक्रमों को दर्शाती है, जिनका गणित में अध्ययन किया जाता है।

सारणी 1— संख्या अनुक्रमों के उदाहरण

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,….	(सभी '1')
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ….	(गणन संख्याएँ)
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ….	(विषम संख्याएँ)
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ….	(सम संख्याएँ)
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ….	(त्रिभुजाकार संख्याएँ)
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ….	(वर्ग संख्याएँ)
1, 8, 27, 64, 125, 216, ….	(घन संख्याएँ)
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ….	(विरहांक संख्याएँ)
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ….	(2 की घातें)
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ….	(3 की घातें)

आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. क्या आप सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?
2. सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम को उसकी अगली तीन संख्याओं सहित अपनी नोटबुक पर पुन: लिखिए। प्रत्येक अनुक्रम के बाद, उस अनुक्रम में संख्याओं को बनाने वाले नियम को अपने शब्दों में लिखिए।

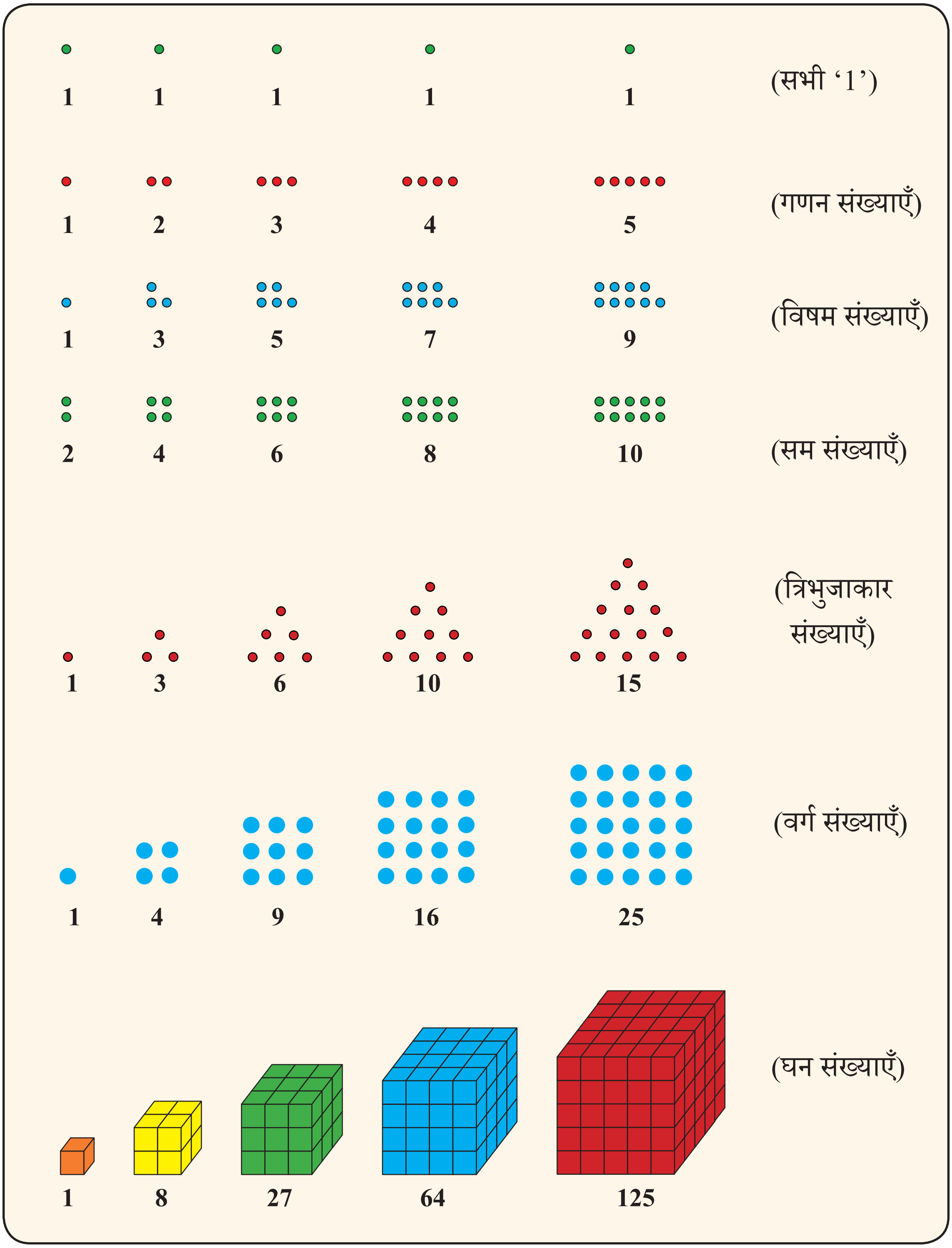
1.3 संख्या अनुक्रमों का दृश्यांकन

चित्रों का उपयोग करते हुए अनेक संख्या अनुक्रमों का दृश्यांकन किया जा सकता है। गणितीय वस्तुओं का चित्रों या आरेखों के माध्यम से दृश्यांकन गणितीय पैटर्नों और संकल्पनाओं को समझने का एक अति लाभप्रद तरीका हो सकता है।

आइए, सारणी 1 के प्रथम सात अनुक्रमों को अग्रलिखित चित्रों के माध्यम से दर्शाइए—

Reprint 2025-26

सारणी 2— कुछ संख्या अनुक्रमों का चित्रीय निरूपण



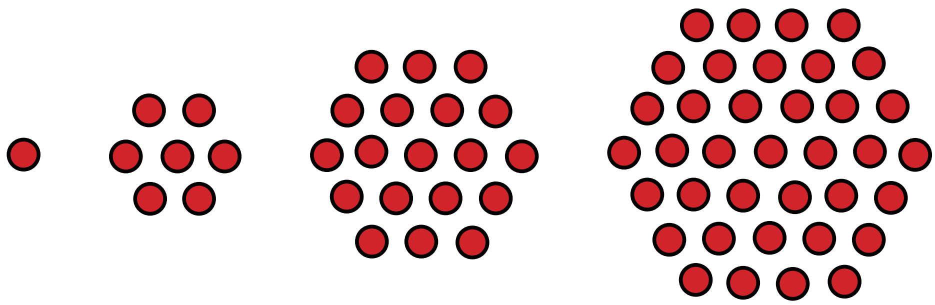
Reprint 2025-26

आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. सारणी 2 में दिए संख्या अनुक्रमों को चित्रात्मक रूप से दर्शाने के लिए अपनी नोटबुक में प्रतिलिपि बनाकर प्रत्येक अनुक्रम के लिए अगला चित्र बनाइए।
2. 1, 3, 6, 10, 15, ... **त्रिभुजाकार संख्याएँ** क्यों कहलाती हैं? 1, 4, 9, 16, 25, ... **वर्ग संख्याएँ** या **वर्ग** क्यों कहलाती हैं? 1, 8, 27, 64, 125, ... **घन संख्याएँ** या **घन** क्यों कहलाती हैं?
3. आपने ध्यान दिया होगा कि 36 एक त्रिभुजाकार संख्या और वर्गाकार संख्या दोनों है। अर्थात् 36 बिंदुओं को त्रिभुज और वर्ग दोनों में पूरी तरह व्यवस्थित किया जा सकता है। इसे स्पष्ट करते हुए अपनी नोटबुक में चित्र बनाइए।

   इससे ज्ञात होता है कि एक ही संख्या को अलग-अलग तरीकों से दर्शाया जा सकता है और संदर्भ के आधार पर अलग-अलग भूमिकाएँ निभाई जा सकती हैं। कुछ अन्य संख्याओं को अलग-अलग तरीकों से चित्रात्मक रूप से दर्शाने का प्रयास कीजिए।
4. आप संख्याओं के निम्नलिखित अनुक्रम को क्या कहेंगे?

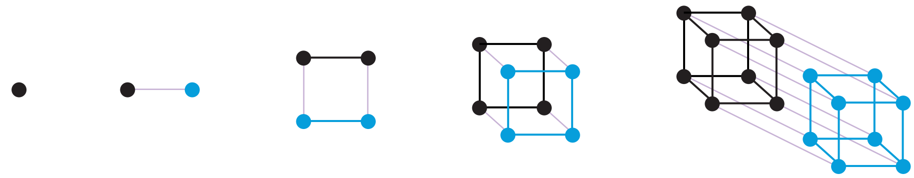


1　　7　　19　　37

   इन्हें **षड्भुजाकार** (hexagonal) **संख्याएँ** कहते हैं। इन्हें अपनी नोटबुक में बनाइए। अनुक्रम में अगली संख्या क्या होगी?
5. क्या आप '2 की घात' के अनुक्रम का चित्रीय निरूपण कर सकते हैं? '3 की घात' का?

Reprint 2025-26

यहाँ '2 की घात' के चित्रात्मक प्रस्तुतीकरण का एक संभावित तरीका दिया है—



1 2 4 8 16

1.4 संख्या अनुक्रमों के बीच संबंध

कभी-कभी संख्या अनुक्रम आश्चर्यजनक तरीकों से एक-दूसरे से संबंधित हो सकते हैं।

उदाहरण— क्या होता है जब हम विषम संख्याओं को जोड़ना प्रारंभ करते हैं?

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$
$$\vdots$$

वास्तव में यह एक सुंदर पैटर्न है!

- ऐसा क्यों होता है? क्या आपको यह लगता है कि सदैव ऐसा ही होता रहेगा?

इसका उत्तर है कि यह पैटर्न सदैव ही चलता रहेगा। अब आप सोच रहे होंगे कि ऐसा क्यों है? जैसा कि पहले बताया जा चुका है, ऐसा पैटर्न होने का कारण उतना ही महत्वपूर्ण और रोमांचक है, जितना कि वह पैटर्न स्वयं।

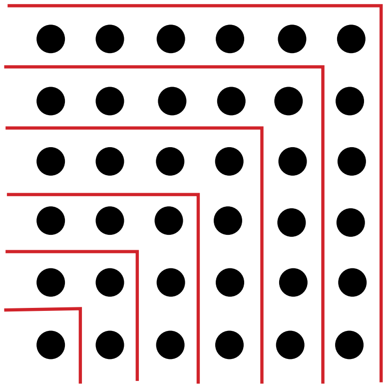
एक चित्र इसे स्पष्ट कर सकता है

एक चित्र द्वारा इस तथ्य को समझने में सहायता मिल सकती है। स्मरण कीजिए कि वर्ग संख्याएँ एक वर्ग ग्रिड (grid) में बिंदुओं की गिनती करके बनाई जाती हैं।

- एक वर्गाकार बिंदु ग्रिड में विषम संख्याओं 1, 3, 5, 7 के बिंदुओं को कैसे बाँटा जा सकता है?

आगे पढ़ने से पहले इसके बारे में एक क्षण के लिए सोचिए!

नीचे दिए गए पैटर्न में दिखाया गया है कि यह कैसे किया जा सकता है—



यह चित्र दर्शाता है कि

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36

क्योंकि इस प्रकार का चित्र किसी भी माप के वर्ग के लिए बनाया जा सकता है, अत: यह स्पष्ट हो जाता है कि विषम संख्याओं को जोड़ने पर वर्ग संख्याएँ क्यों प्राप्त हो जाती हैं।

इसी प्रकार एक अन्य चित्र बनाकर, क्या आप यह बता सकते हैं कि प्रथम 10 विषम संख्याओं का योग क्या है?

अब एक ऐसे ही चित्र की कल्पना कीजिए या आवश्यकतानुसार आंशिक चित्र बनाकर क्या आप बता सकते हैं कि प्रथम 100 विषम संख्याओं का योग क्या है? ऐसे चित्र की कल्पना कीजिए और आवश्यकतानुसार छोटे आकार में बनाकर इसे समझाइए।

अनुक्रमों के मध्य ऐसे संबंध का एक अन्य उदाहरण—
ऊपर और नीचे जोड़ना

आइए, निम्नलिखित पैटर्न पर ध्यान दीजिए—

1 = 1

1 + 2 + 1 = 4

1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9

1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16

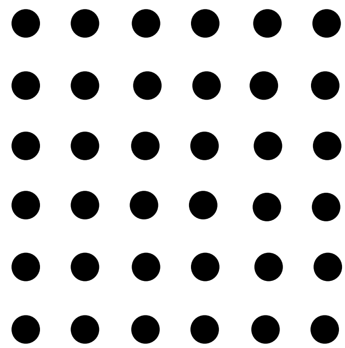
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36

⋮

दिए गए पैटर्न को देखकर यह प्रतीत होता है कि गणन संख्याओं को ऊपर और फिर नीचे जोड़ना वर्ग संख्याएँ प्राप्त करने का एक अन्य तरीका है।

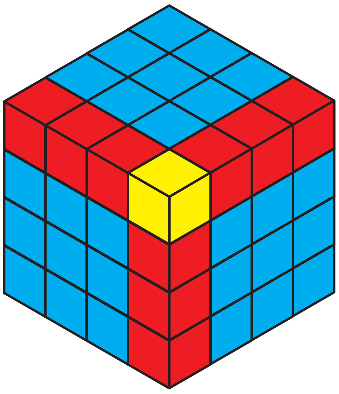
क्या आप नीचे दिए गए ग्रिड बिंदु से एक ऐसा ही चित्रात्मक स्पष्टीकरण ज्ञात कर सकते हैं?

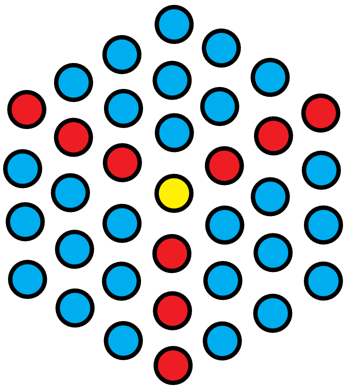


आइए, पता लगाएँ

1. गणन संख्याओं को ऊपर और नीचे जोड़ने पर अर्थात् 1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1, ..., से वर्ग संख्याएँ क्यों प्राप्त होती हैं, क्या आप इसके लिए एक चित्रीय स्पष्टीकरण दे सकते हैं?
2. इस तस्वीर के बड़े संस्करण की कल्पना करके या आवश्यकतानुसार उसका आंशिक चित्र बनाकर, क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 + 99 + ... + 3 + 2 + 1 का मान क्या होगा?
3. जब आप सभी '1' वाले अनुक्रम को ऊपर की ओर जोड़ना प्रारंभ करते हैं, तब आपको कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है? जब आप सभी '1' वाले अनुक्रम को ऊपर और नीचे जोड़ते हैं, तब कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है?
4. जब आप गणन संख्याओं को ऊपर की ओर जोड़ना प्रारंभ करते हैं, तब आपको कौन-सा अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप एक छोटे से चित्र के माध्यम से स्पष्टीकरण दे सकते हैं?
5. जब आप क्रमागत त्रिभुजाकार संख्याओं के युग्मों को जोड़ते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1 + 3, 3 + 6, 6 + 10, 10 + 15, … को लीजिए। आप कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्यों? क्या आप इसे एक चित्र द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं?
6. जब आप 1 से प्रारंभ करते हुए 2 की घातों को जोड़ना प्रारंभ करते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1, 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 4 + 8, … लीजिए? अब, इनमें से प्रत्येक संख्या में 1 जोड़ दीजिए— आप कौन-सी संख्याएँ प्राप्त करते हैं? ऐसा क्यों होता है?

7. जब आप त्रिभुजाकार संख्याओं को 6 से गुणा करते हैं और 1 जोड़ते हैं तो क्या होता है? आपको कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्या आप इसे चित्र के माध्यम से समझा सकते हैं?
8. जब आप षड्भुजाकार संख्याओं को जोड़ना प्रारंभ करते हैं तब क्या होता है? उदाहरण के लिए, 1, 1 + 7, 1 + 7 + 19, 1 + 7 + 19 + 37, … लीजिए? आप कौन-सा अनुक्रम प्राप्त करते हैं? क्या आप इसे एक घन के चित्र का उपयोग करते हुए स्पष्ट कर सकते हैं?





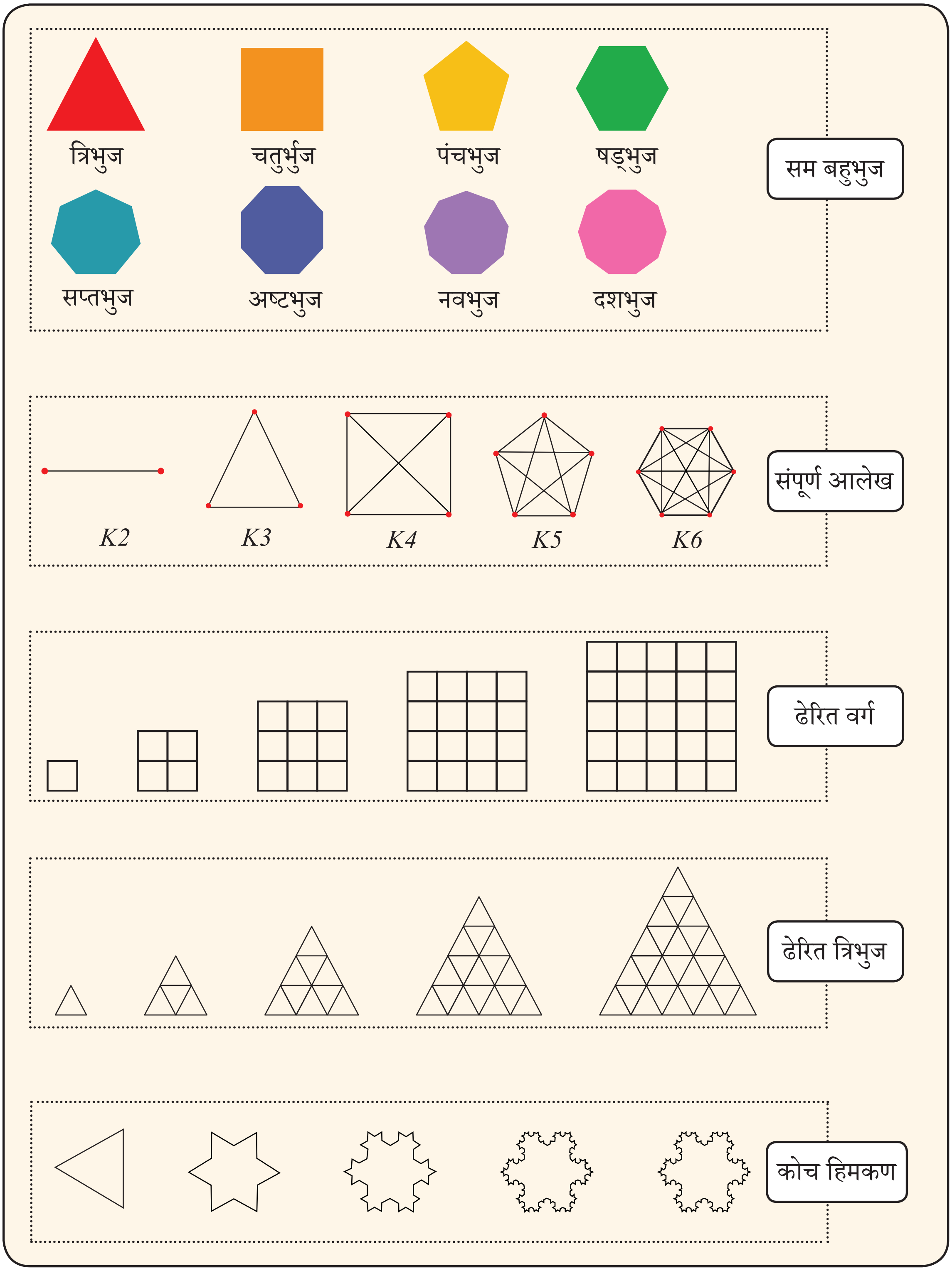
9. सारणी 1 में दिए गए अनुक्रमों में और दो भिन्न अनुक्रमों के उनके बीच स्वयं अपनी ओर से अन्य पैटर्न या संबंध खोजिए। क्या एक चित्र या किसी अन्य माध्यम से आप यह स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

1.5 आकारों में पैटर्न

गणित में पाए जाने वाले अन्य महत्वपूर्ण और बुनियादी पैटर्न आकारों के पैटर्न हैं। ये आकार एक, दो या तीन विमाओं (1D, 2D, 3D) में या यहाँ तक कि इनसे अधिक विमाओं (dimensions) में हो सकते हैं। गणित की वह शाखा जिसमें आकारों में पैटर्न का अध्ययन किया जाता है, ज्यामिति कहलाती है।

आकार अनुक्रम एक महत्वपूर्ण प्रकार के आकार पैटर्न हैं, जिनका गणितज्ञ अध्ययन करते हैं। सारणी 3 कुछ मुख्य आकार अनुक्रमों को दर्शाती है, जिनका गणित में अध्ययन किया जाता है।

सारणी 3— आकार अनुक्रम के उदाहरण



आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. क्या आप सारणी 3 के प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?
2. सारणी 3 के प्रत्येक अनुक्रम को अपनी नोटबुक में पुन: बनाने का प्रयास कीजिए। क्या आप प्रत्येक अनुक्रम में अगले आकार को खींच सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं? प्रत्येक अनुक्रम के बाद, अपने शब्दों में उस नियम या पैटर्न की व्याख्या कीजिए, जिसके अनुसार उस अनुक्रम में आकार बन रहे हैं।

1.6 संख्या अनुक्रमों से संबंध

प्राय: आकार अनुक्रम आश्चर्यजनक तरीकों द्वारा संख्या अनुक्रमों से संबंधित होते हैं। ऐसे संबंध आकार अनुक्रम और संबंधित संख्या अनुक्रम दोनों के अध्ययन और समझने में सहायक हो सकते हैं।

उदाहरण— सम बहुभुजों (regular polygons) के आकार अनुक्रम में, भुजाओं की संख्याएँ 3 से प्रारंभ करते हुए, अर्थात् 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... गणन संख्याओं द्वारा दी जाती हैं। इसी कारण ये आकार क्रमश:— **सम त्रिभुज, चतुर्भुज** (अर्थात् **वर्ग**), **पंचभुज, षड्भुज, सप्तभुज, अष्टभुज, नवभुज, दशभुज** इत्यादि कहलाते हैं।

शब्द 'सम' यह इंगित करता है कि इन आकारों में 'भुजाओं' की लंबाइयाँ समान हैं और साथ ही 'कोण' भी एक समान हैं (अर्थात् भुजाएँ बराबर दिखाई देती हैं तथा कोने भी समान दिखाई देते हैं)। कोणों के बारे में हम विस्तृत चर्चा अगले अध्याय में करेंगे।

सारणी 3 के अन्य आकार अनुक्रमों का भी संख्या अनुक्रमों के साथ संबंध हैं।

आइए, पता लगाएँ

प्रयास करें

1. सम बहुभुजों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? सम बहुभुजों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में आकृतियों के कोनों के विषय में आप क्या कहेंगे? क्या आपको वही संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?
2. संपूर्ण आलेखों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में रेखाओं की संख्याओं की गणना कीजिए। इससे आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

3. ढेरित (stacked) वर्गों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे वर्ग हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

4. ढेरित त्रिभुजों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे त्रिभुज हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? (संकेत— अनुक्रम के प्रत्येक आकार में, प्रत्येक पंक्ति में कितने त्रिभुज हैं?)

प्रयास करें

5. कोच हिमकण (Koch snowflake) वाले अनुक्रम में, एक आकार से अगला आकार प्राप्त करने कि लिए प्रत्येक रेखाखंड ‘__’ को एक ‘गति उभार (speed bump)’ से प्रतिस्थापित करना पड़ता है। जैसे-जैसे इसे अधिक से अधिक बार किया जाता है, वैसे-वैसे परिवर्तन अत्यधिक छोटे-छोटे रेखाखंडों के साथ छोटे तथा और अधिक छोटे होते जाते हैं। कोच हिमकण के प्रत्येक आकार में कुल कितने रेखाखंड हैं? इनके संगत संख्या अनुक्रम क्या हैं? (3, 12, 48, ..., अर्थात् 4 की घात का तीन गुना इसका उत्तर हैं, यह अनुक्रम सारणी में नहीं है।)

सारांश

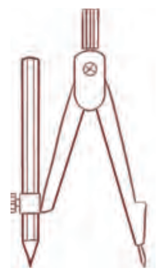
- गणित को पैटर्न की खोज और उन पैटर्न के अस्तित्व के स्पष्टीकरण के रूप में देखा जा सकता है।
- गणित में पाए जाने वाले सबसे मौलिक पैटर्न में **संख्या अनुक्रम** हैं।
- संख्या अनुक्रमों के कुछ महत्वपूर्ण उदाहरणों में गणन संख्याएँ, विषम संख्याएँ, सम संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ, त्रिभुजाकार संख्याएँ, घन संख्याएँ, विरहांक संख्याएँ और 2 की घातें सम्मिलित हैं।
- कभी-कभी संख्या अनुक्रम एक दूसरे से आकर्षक और उल्लेखनीय तरीकों से संबंधित हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, 1 से शुरू होने वाली विषम संख्याओं के अनुक्रम को जोड़ने पर वर्ग संख्याएँ प्राप्त होती हैं।
- चित्रों का उपयोग करके संख्या अनुक्रमों के दृश्यांकन से अनुक्रमों और उनके बीच संबंधों को समझने में सहायता प्राप्त हो सकती है।
- **आकार अनुक्रम** गणित में पैटर्न का एक और मौलिक प्रकार है। आकार अनुक्रमों के कुछ महत्वपूर्ण उदाहरणों में सम बहुभुज, संपूर्ण ग्राफ, ढेरित त्रिभुज और वर्ग तथा कोच हिमकण (snowflake) पुनरावृत्तियाँ सम्मिलित होती हैं। आकार अनुक्रम, संख्या अनुक्रमों के साथ अनेक रोचक संबंध भी प्रदर्शित करते हैं।

2 रेखाएँ और कोण

इस अध्याय में हम ज्यामिति की कुछ आधारभूत अवधारणाओं को जानेंगे इनमें बिंदु, रेखाएँ, किरणें, रेखाखंड और कोण सम्मिलित हैं। ये विचार 'समतल ज्यामिति' के मूलभूत अंग हैं और ज्यामिति के अधिक उन्नत विषयों, जैसे— विभिन्न आकृतियों की रचनाओं और उनके विश्लेषण, को समझने में सहायक होंगे।

2.1 बिंदु

कागज पर एक पेंसिल के नुकीले सिरे से एक बिंदु (Dot) अंकित कीजिए। सिरा जितना नुकीला होगा बिंदु उतना ही सूक्ष्म होगा। यह सूक्ष्म चिह्न आपको एक बिंदु की अवधारणा से अवगत कराएगा। एक बिंदु एक सटीक स्थान निर्धारित करता है, लेकिन इसकी कोई लंबाई, चौड़ाई या ऊँचाई नहीं होती। एक बिंदु के कुछ प्रतिरूप (मॉडल) निम्नलिखित हैं—

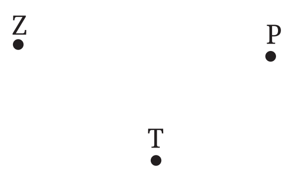


परकार की नोक

पेंसिल का नुकीला सिरा

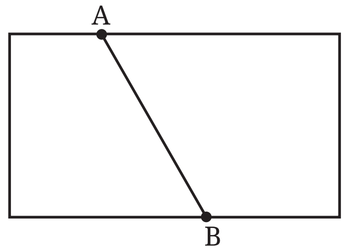
एक सुई का नुकीला सिरा

यदि आप किसी कागज पर तीन बिंदु अंकित करते हैं, तो आपको उनमें अंतर बताने की आवश्यकता होगी। इसके लिए, तीनों बिंदुओं को अंग्रेज़ी के बड़े अक्षर, जैसे— Z, P और T से व्यक्त किया जा सकता है।



इन बिंदुओं को बिंदु Z, बिंदु P और बिंदु T पढ़ा जाता है। नि:संदेह, ये बिंदु सटीक स्थान निर्धारित करते हैं और इन्हें अदृश्य रूप से बहुत ही छोटा होने की कल्पना करनी चाहिए।

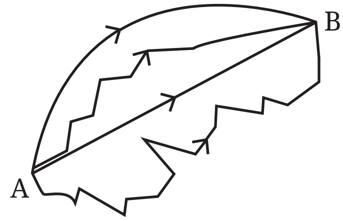
2.2 रेखाखंड



कागज के एक टुकड़े को मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। क्या आपको कागज पर कोई मोड़ (क्रीज) का निशान दिखाई देता है? इस मोड़ से एक रेखाखंड (line-segment) की अवधारणा का आभास होता है। इसके दो अंत्य बिंदु (end points) A और B हैं।

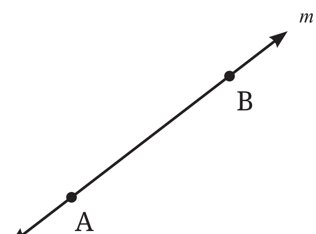
एक कागज पर दो बिंदु A और B अंकित कीजिए। इन दोनों बिंदुओं को सभी संभव मार्गों से जोड़ने का प्रयत्न कीजिए। (आकृति 2.1)

A से B तक का सबसे छोटा मार्ग कौन-सा है? A और B को जोड़ने वाला यह सबसे छोटा मार्ग (जिसमें बिंदु A और B भी सम्मिलित हैं) रेखाखंड कहलाता है। इसे $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ से व्यक्त किया जाता है। बिंदु A और B इस रेखाखंड $\overline{AB}$ के अंत्य बिंदु हैं।



आकृति 2.1

2.3 रेखा



आकृति 2.2

कल्पना कीजिए कि A से B तक के रेखाखंड (अर्थात् $\overline{AB}$) को A से आगे एक दिशा में और B से आगे दूसरी दिशा में बिना किसी अंत के विस्तारित किया गया है (आकृति 2.2 देखिए)। यह रेखा का एक प्रतिरूप है। क्या आपको ऐसा लगता है कि आप एक पूरी रेखा की आकृति बना सकते हैं? नहीं? (क्यों?)

दो बिंदुओं A तथा B से होकर जाने वाली रेखा को $\overleftrightarrow{AB}$ से दर्शाते हैं। यह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तारित होती है। कभी-कभी एक रेखा को l या m जैसे अक्षरों से भी व्यक्त करते हैं।

ध्यान दीजिए कि कोई भी दो बिंदु एक अद्वितीय रेखा निर्धारित करते हैं जो उन दोनों बिंदुओं से होकर गुजरती है।

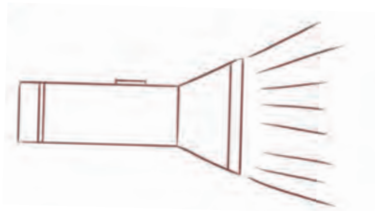
Reprint 2025-26

2.4 किरण

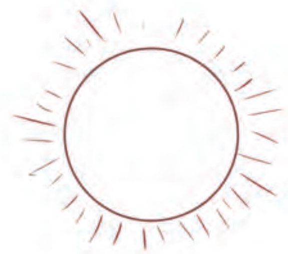
किरण रेखा का एक भाग है जो एक बिंदु से प्रारंभ होती है (जिसे किरण का प्रारंभिक बिंदु या आदि बिंदु कहते हैं)। किरण एक ही दिशा में बिना किसी अंत के विस्तारित होती है।

किरण के कुछ प्रतिरूप निम्नलिखित हैं—

एक लाइट हाउस से निकली प्रकाश की किरणें

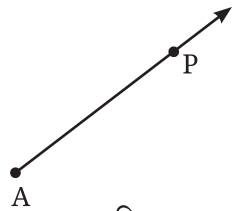


टॉर्च से निकली प्रकाश की किरणें



सूर्य की किरणें

किरण की दी हुई आकृति (आकृति 2.3) को देखिए। इस किरण पर दो बिंदु अंकित हैं। बिंदु A प्रारंभिक बिंदु है और दूसरा बिंदु P किरण पर स्थित है, तब हम इस किरण को $\overrightarrow{AP}$ से व्यक्त करते हैं।



आकृति 2.3

आइए, पता लगाएँ

1.

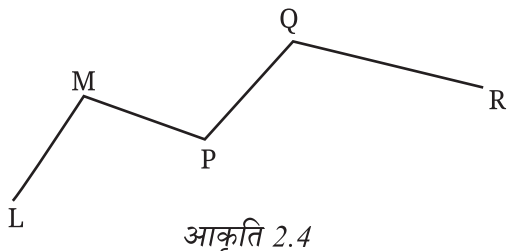
रिहान ने एक कागज पर एक बिंदु अंकित किया। वह उस बिंदु से जाने वाली कितनी रेखाएँ बना सकता है?

शीतल ने एक कागज पर दो बिंदु अंकित किए। वह उन दोनों बिंदुओं से गुजरती हुई कितनी भिन्न रेखाएँ बना सकती है?

क्या आप रिहान और शीतल को उनके उत्तर ज्ञात करने में मदद कर सकते हैं?

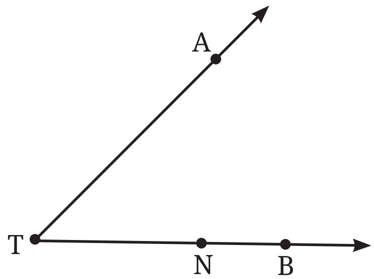
Reprint 2025-26

2. आकृति 2.4 में दिए गए रेखाखंडों के नाम लिखिए। पाँच अंकित बिंदुओं में से कौन-से केवल एक रेखाखंड पर स्थित हैं? कौन-से बिंदु किन्हीं दो रेखाखंडों पर स्थित हैं?



आकृति 2.4

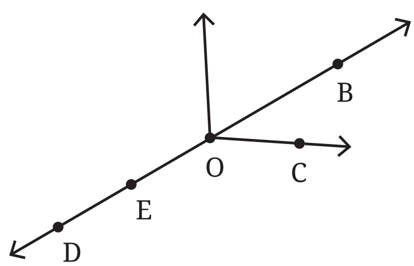
3. आकृति 2.5 में दी गई किरणों के नाम लिखिए। क्या T प्रत्येक किरण का प्रारंभिक बिंदु है?



आकृति 2.5

4. एक कच्ची (rough) आकृति बनाइए और नीचे दिए गए प्रत्येक बिंदु का उपयुक्त नामांकन कीजिए—
   a. $\overleftrightarrow{OP}$ और $\overleftrightarrow{OQ}$ बिंदु O पर मिलते हैं।
   b. $\overrightarrow{XY}$ और $\overleftrightarrow{PQ}$ बिंदु M पर प्रतिच्छेद करते हैं।
   c. रेखा l पर बिंदु E और F स्थित हैं पर बिंदु D स्थित नहीं है।
   d. बिंदु P, AB पर स्थित है।

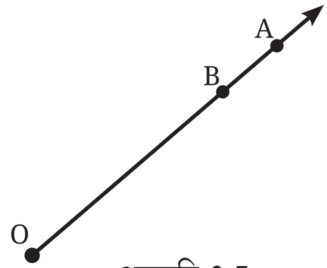
5. आकृति 2.6 में निम्नलिखित के नाम बताइए—
   a. पाँच बिंदु
   b. एक रेखा
   c. चार किरणें
   d. पाँच रेखाखंड



आकृति 2.6

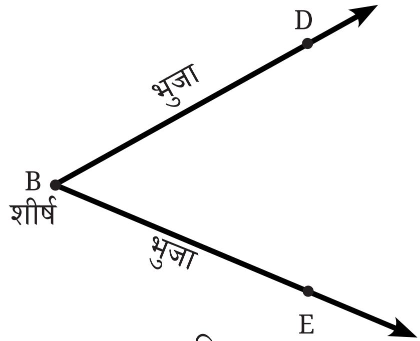
Reprint 2025-26

6. आकृति 2.7 में $\overrightarrow{OA}$ एक किरण है। यह O से शुरू होती है और बिंदु A से गुजरती है। यह बिंदु B से भी गुजरती है।
   a. क्या हम इसे $\overrightarrow{OB}$ भी नाम दे सकते हैं? क्यों?
   b. क्या हम $\overrightarrow{OA}$ को $\overrightarrow{AO}$ लिख सकते हैं? क्यों अथवा क्यों नहीं?



आकृति 2.7

2.5 कोण



आकृति 2.8

प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक उभयनिष्ठ कोण बनता है। आकृति 2.8 में किरण $\overrightarrow{BD}$ और किरण $\overrightarrow{BE}$ से एक कोण बना है, जिनमें उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु B है।

B कोण का शीर्ष है और किरणें $\overrightarrow{BD}$और $\overrightarrow{BE}$ कोण की भुजाएँ हैं। हम इस कोण का नामकरण कैसे कर सकते हैं? साधारण रूप में केवल शीर्ष का प्रयोग करते हुए हम इस कोण को कोण B कह सकते हैं। अधिक स्पष्ट करने के लिए हम शीर्ष के साथ प्रत्येक भुजा पर स्थित एक बिंदु का प्रयोग कर कोण का नाम भी लिख सकते हैं। इस स्थिति में इस कोण को कोण DBE या कोण EBD कहा जा सकता है। शब्द 'कोण' को चिह्न '∠' से भी दर्शाया जा सकता है, जैसे— ∠DBE या ∠EBD। ध्यान रखिए कि कोण को लिखते समय शीर्ष वाले अक्षर को मध्य में लिखा जाए।

एक कोण को दर्शाने के लिए शीर्ष पर एक छोटी चाप का प्रयोग किया जाता है (आकृति 2.9 में देखिए)।

विद्या ने अभी अपनी पुस्तक खोली है। आइए, पुस्तक के कवर को खोलते हुए भिन्न स्थितियों का अवलोकन करते हैं।


स्थिति 1 स्थिति 2 स्थिति 3 स्थिति 4 स्थिति 5 स्थिति 6

Reprint 2025-26

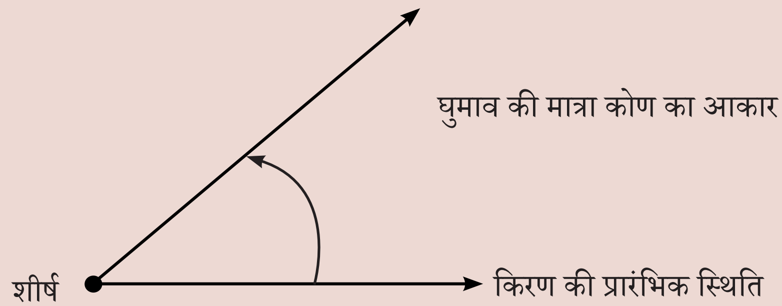
क्या आप प्रत्येक स्थिति में बनते हुए कोण को देख पा रहे हैं? क्या आप कोण को उसकी भुजाओं और शीर्ष के साथ अंकित कर सकते हैं?

कौन-सा कोण बड़ा है— पहली स्थिति का कोण या दूसरी स्थिति का कोण?

जिस प्रकार हम एक रेखा की लंबाई के आधार पर उसके आकार के विषय में चर्चा करते हैं, उसी प्रकार हम घुमाव की मात्रा के आधार पर एक कोण के आकार के विषय में भी चर्चा करते हैं।

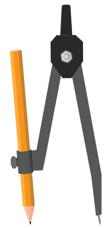
अत: स्थिति 2 का कोण अपेक्षाकृत बड़ा है, क्योंकि इस स्थिति में उसे कवर को अधिक घुमाने की आवश्यकता है। इसी प्रकार स्थिति 3 में कोण स्थिति 2 से भी बड़ा है, क्योंकि वहाँ और भी अधिक घुमाव है तथा स्थिति 4, 5 और 6 अधिक घुमाव के साथ क्रमिक रूप से बड़े कोण हैं।

एक कोण का माप या आकार घूर्णन या मोड़ की वह मात्रा है जो पहली किरण को दूसरी किरण तक ले जाने के लिए शीर्ष के परित आवश्यक है।



आकृति 2.9

आइए, दैनिक जीवन से कुछ उदाहरण लेते हैं, जहाँ घूर्णन या घुमाव से कोण बनते हैं—



- एक परकार (कम्पास) या डिवाइडर की भुजाओं को घुमाने पर एक कोण बनता है। शीर्ष वह बिंदु है जहाँ दोनों भुजाएँ मिलती या जुड़ती हैं। कोण की भुजाओं और शीर्ष को पहचानिए।

- एक कैंची में दो ब्लेड होते हैं। जब हम उन्हें कुछ काटने के लिए खोलते (या घुमाते) हैं तो एक कोण बनता है। कोण की भुजाओं और शीर्ष को पहचानिए।

Reprint 2025-26

- चश्मा, पर्स और अन्य साधारण वस्तुओं को देखिए। उनकी भुजाओं और शीर्ष को अंकित करते हुए कोण को पहचानिए।

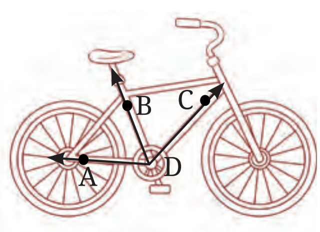
क्या आप देख पा रहे हैं कि कैसे एक भुजा को दूसरी भुजा के संदर्भ में घुमाने पर कोण बन रहे हैं?

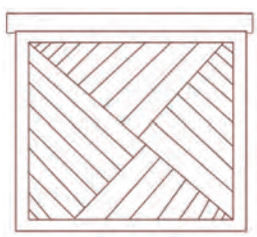
अध्यापक टिप्पणी

अध्यापक को कुछ ऐसे कार्यकलाप कराने चाहिए, जिससे विद्यार्थी कोण के आकार को घुमाव के माप से पहचान सकें।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप दी गई आकृतियों में कोण ढूँढ़ सकते हैं? किसी भी एक कोण की भुजाएँ बनाइए और शीर्ष का नाम दीजिए।

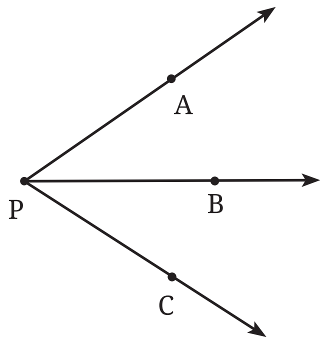




Reprint 2025-26

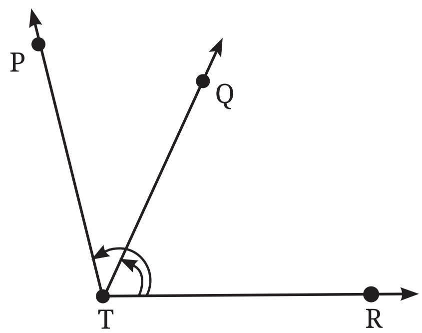
2. भुजा ST और SR को चिह्नित करते हुए कोण बनाइए।

3. व्याख्या कीजिए कि $\angle APC$ को $\angle P$ क्यों लिखा जा सकता?



गणित चर्चा

4. नीचे दी गई आकृति में अंकित कोणों के नाम लिखिए।



5. अपने कागज पर तीन बिंदु इस प्रकार अंकित कीजिए कि वे एक रेखा पर स्थित न हों। उन्हें A, B और C से चिह्नित कीजिए। सभी संभव रेखाएँ खींचिए, जो इन बिंदु-युग्मों से गुजरती हों। इस प्रकार आपको कितनी रेखाएँ प्राप्त होती हैं? उनके नाम भी बताइए। A, B और C का प्रयोग करते हुए आप कितने कोण बना सकते हैं? उन सभी के नाम लिखिए और आकृति 2.9 के अनुसार उनमें से प्रत्येक को एक चाप के साथ चिह्नित कीजिए।

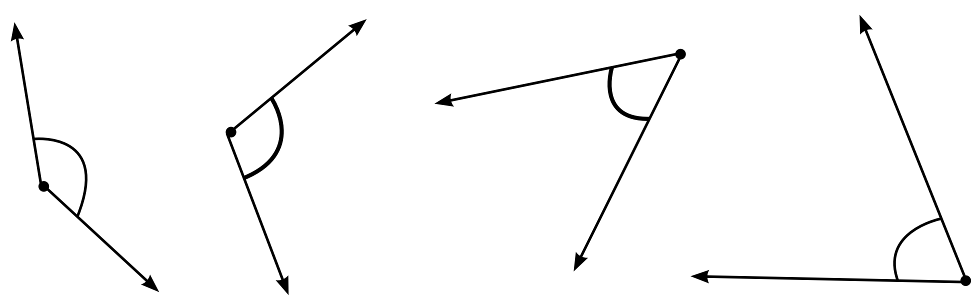
Reprint 2025-26

6. अपने कागज पर चार बिंदु इस प्रकार अंकित कीजिए कि उनमें से कोई भी तीन बिंदु एक रेखा पर न हों। उन्हें A, B, C और D से चिह्नित कीजिए। सभी संभव रेखाएँ खींचिए, जो इन बिंदु-युग्मों से गुजरती हों। इस प्रकार आपको कितनी रेखाएँ प्राप्त होती हैं? उनके नाम भी बताइए। आप A, B, C और D से कितने कोणों का नामकरण कर सकते हैं? उन्हें लिखिए और उनमें से प्रत्येक को आकृति 2.9 के अनुसार चाप द्वारा अंकित कीजिए।

2.6 कोणों की तुलना

नीचे दिए गए जानवरों को देखिए जिनका मुँह खुला है। क्या आप इनमें कोई कोण देख सकते हैं? यदि हाँ, तो उनमें से प्रत्येक की भुजाओं और शीर्ष को अंकित कीजिए। कुछ मुँह अन्य से अधिक खुले हैं। आप यह समझ सकते हैं कि जितना अधिक जबड़ों का घुमाव होगा कोण उतना ही बड़ा होगा। क्या इन चित्रों में दिए गए कोणों को आप छोटे से बड़े के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं?

क्या दो कोणों की तुलना हमेशा सरल होती है?



गणित चर्चा

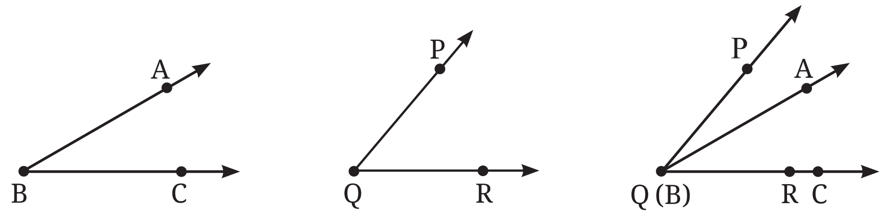
ऊपर कुछ कोण दिए गए हैं। प्रत्येक कोण को चिह्नित कीजिए। आप उनकी तुलना कैसे करेंगे? कुछ और कोण बनाइए, उन्हें चिह्नित कीजिए और उनकी तुलना कीजिए।

Reprint 2025-26

अध्यारोपण (superimposition) द्वारा कोणों की तुलना

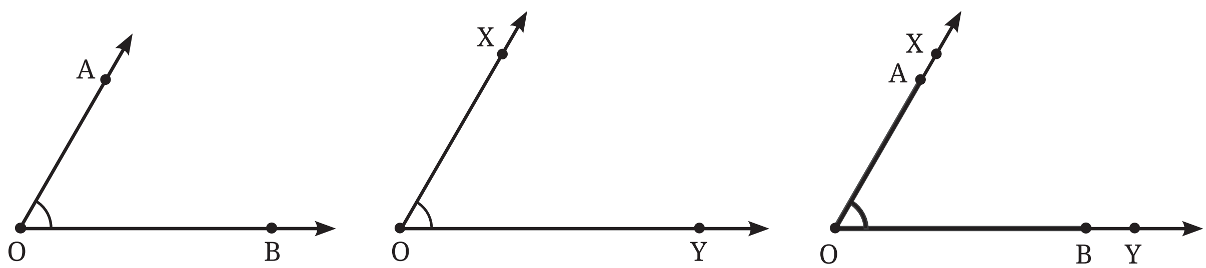
अध्यारोपण द्वारा किन्हीं दो कोणों की तुलना एक कोण को दूसरे पर रखकर की जा सकती है। अध्यारोपण करते हुए कोणों के शीर्ष एक दूसरे पर होने चाहिए।

अध्यारोपण के बाद यह स्पष्ट हो जाता है कि कौन-सा कोण छोटा है और कौन-सा कोण बड़ा है।



आकृति में दो कोणों को अध्यारोपित किया गया है। अतः आकृति से यह स्पष्ट है कि $\angle$PQR, $\angle$ABC से बड़ा है।

समान कोण— आकृति में दर्शाए गए $\angle$AOB और $\angle$XOY में से कौन-सा बड़ा है?



दोनों कोणों के शीर्ष एक समान हैं और दोनों कोणों की भुजाएँ एक दूसरे को पूरी तरह से अध्यारोपित कर रही हैं, जैसे— OA↔OX और OB↔OY। अतः ये दोनों कोण आकार में एक समान हैं।

इन दोनों कोणों के माप एकसमान हैं क्योंकि ये दोनों कोण समान घूर्णन या घुमाव के कारण बने हैं। अर्थात् $\overrightarrow{OB}$ का $\overrightarrow{OA}$ तक और $\overrightarrow{OY}$ का $\overrightarrow{OX}$ तक का घुमाव समान हैं।

अध्यारोपण की दृष्टि से जब दो कोणों के उभयनिष्ठ शीर्ष और दोनों कोणों की दोनों भुजाएँ एक दूसरे के ऊपर अध्यारोपित हैं, तो दोनों कोणों के माप समान होते हैं।

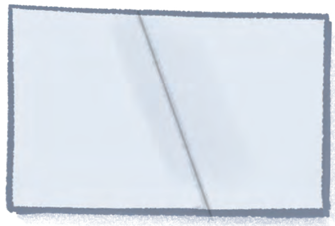
Reprint 2025-26

- हम अध्यारोपण द्वारा और कहाँ तुलना करते हैं?

गणित चर्चा

आइए, पता लगाएँ

1. एक आयताकार कागज को मोड़िए। अब घुमाव के निशान पर एक रेखा खींचिए। घुमाव और कागज की भुजाओं के बीच बने कोणों को नाम दीजिए और उन कोणों की तुलना कीजिए। आयताकार कागज को घुमाकर विभिन्न कोण बनाइए एवं उनकी तुलना कीजिए। यह भी बताइए कि इनमें से कौन-सा कोण सबसे बड़ा है और कौन-सा कोण सबसे छोटा है?



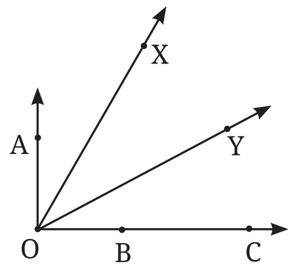
2. प्रत्येक स्थिति में बताइए कि कौन-सा कोण बड़ा है और क्यों?

   a. $\angle AOB$ या $\angle XOY$

   b. $\angle AOB$ या $\angle XOB$

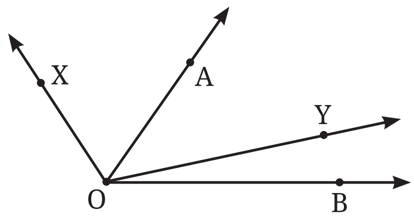
   c. $\angle XOB$ या $\angle XOC$

   अपने मित्रों से चर्चा कीजिए कि आपने यह निर्णय कैसे लिया कि कौन-सा कोण बड़ा है।



गणित चर्चा

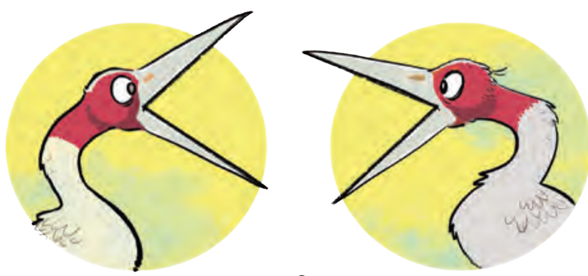
3. कौन-सा कोण बड़ा है— $\angle XOY$ या $\angle AOB$? कारण बताइए।



बिना अध्यारोपण के कोणों की तुलना

दो सारस बहस कर रहे हैं कि वे अपनी चोंच अधिक खोल सकते हैं अर्थात् कौन अधिक बड़ा कोण बनाएगा।

आइए, पहले इनके कोण बनाते हैं। हम यह कैसे पता लगा सकते हैं कि कौन-सा कोण बड़ा है? जैसा हमने पहले देखा कि



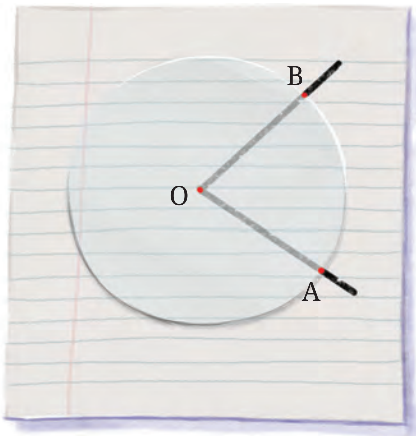
आकृति 2.10

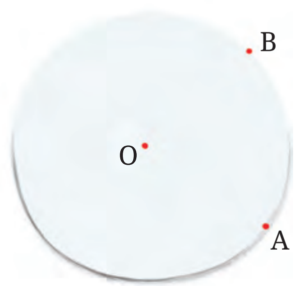
Reprint 2025-26

हम उनका अक्स (trace) लेकर अध्यारोपित करके पता कर सकते हैं कि कौन-सा कोण अधिक बड़ा है पर क्या हम बिना अध्यारोपण के भी यह पता लगा सकते हैं कि कौन-सा कोण अधिक बड़ा है?

माना कि हमारे पास एक पारदर्शी वृत्ताकार कागज है जिसे हम घुमा सकते हैं और आकृतियों के ऊपर भी रख सकते हैं। क्या हम इसे तुलना के लिए प्रयोग कर सकते हैं?

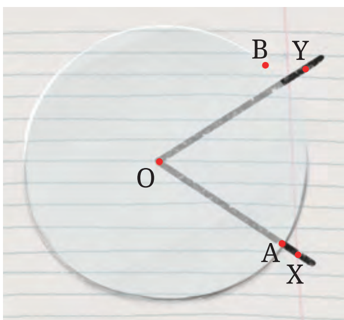
पारदर्शी वृत्तीय कागज को पहले सारस द्वारा बनाए गए कोण पर रखिए। वृत्त को इस प्रकार रखिए कि वृत्त का केंद्र, कोण के शीर्ष पर हो। इसके साथ ही वृत्त के किनारे पर बिंदु A और B अंकित कीजिए, जहाँ से कोण की भुजाएँ गुजर रही हैं।





क्या हम इसका प्रयोग यह जानने के लिए कर सकते हैं कि यह कोण, दूसरे सारस द्वारा बनाए गए कोण से बड़ा है या समान है या छोटा है?

आइए, इस पारदर्शी वृत्तीय कागज को दूसरे कोण पर इस प्रकार रखें कि वृत्त का केंद्र, कोण के शीर्ष पर हो और एक भुजा OA से गुजरती हो।



क्या अब आप बता सकते हो
कौन-सा कोण बड़ा है?

क्या अब आप बता सकते हैं कि किस सारस का कोण बड़ा है?

यदि आप एक पारदर्शी कागज से एक वृत काट सकते हैं, तो इस विधि का प्रयोग करके आकृति 2.10 में दिए गए कोणों की तुलना कीजिए।

अध्यापक टिप्पणी

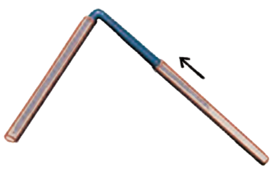
अध्यापक को कोण की अवधारणा के विषय में विद्यार्थियों की समझ की जाँच करनी चाहिए। संभवत: विद्यार्थी सोचते हैं कि भुजाओं की लंबाई बढ़ाने पर कोण की माप बढ़ जाती है। इसके लिए विद्यार्थियों के समक्ष कुछ परिस्थितियाँ रखी जानी चाहिए जिससे उनकी समझ को जाँचा जा सके।

2.7 घूर्णन भुजाएँ बनाना

आइए, कागज के दो पाइप (स्ट्रॉ) और एक क्लिप का उपयोग करते हुए निम्नलिखित चरणों से 'घूर्णन भुजाएँ' बनाएँ—

1. कागज के दो पाइप और एक क्लिप लीजिए।

2. पाइपों को क्लिप की भुजाओं में डालिए।

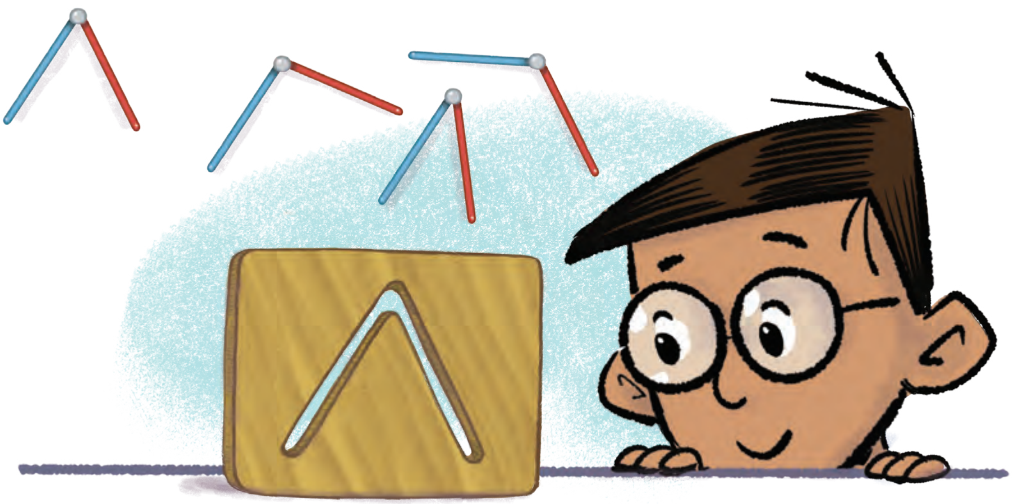


3. आपकी घूर्णन भुजा तैयार है।

क्लिप की भुजाओं के बीच विभिन्न कोणों की कई घूर्णन भुजाएँ बनाइए। अध्यारोपण के पश्चात् बने हुए कोणों को छोटे से बड़े के क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

एक चाप (झिरी) से गुजरते हुए— कुछ 'घूर्णन भुजाएँ' इकट्ठी कीजिए जिनके कोण भिन्न हों। कार्यकलाप के दौरान घूर्णन भुजा की किसी भी भुजा को न घुमाएँ।

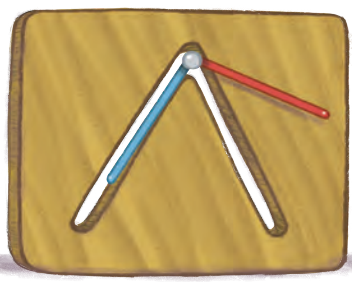
नीचे दी गई घूर्णन भुजाओं में से किसी एक को गत्ते पर ट्रेस करिए।



अब सभी घूर्णन भुजाओं में परस्पर अदला-बदली कर दीजिए। क्या आप पहचान सकते हैं कि गत्ते पर बनी चाप से कौन-सी घूर्णन भुजा गुजर सकती है?

बारी-बारी से प्रत्येक घूर्णन भुजा को झिरी पर रखने पर सही घूर्णन भुजा को पहचाना जा सकता है। आइए, इस प्रक्रिया को कुछ और घूर्णन भुजाओं के साथ करें।

झिरी कोण, (slit angle) भुजा कोण से बड़ा है। भुजाएँ, झिरी से नहीं गुजर सकतीं।



झिरी कोण, भुजा कोण से छोटा है। भुजाएँ, झिरी से नहीं गुजर सकतीं।

झिरी कोण, भुजा कोण के समान है। भुजाएँ झिरी से गुजर रही हैं।

घूर्णन भुजा का केवल वह युग्म झिरी से गुजरता है, जो झिरी कोण के समान है। ध्यान दीजिए कि झिरी से गुजरने की संभावना केवल घूर्णन भुजाओं के बीच बने कोण पर निर्भर करती है, उनकी लंबाइयों पर नहीं (जब तक वह झिरी की लंबाई से छोटी हो)।

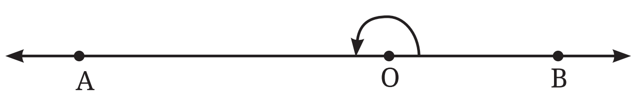
Reprint 2025-26

2.8 विशेष प्रकार के कोण

आइए, विद्या की पुस्तक को पुन: देखते हैं। उसे विभिन्न स्थितियों में पुस्तक का कवर खोलते हुए देखिए।

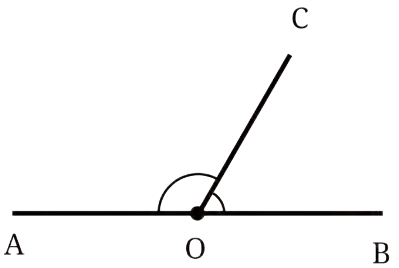
जब उसे हाथ में पकड़कर पुस्तक में लिखना होता है तो वह पूरा आवरण पलट देती है।

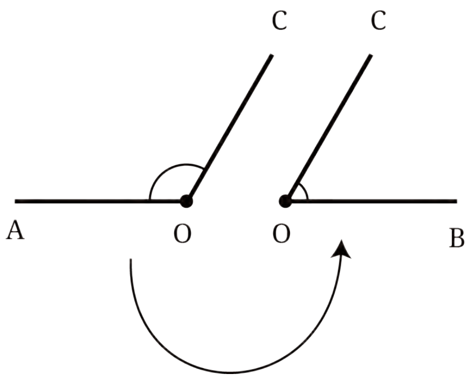
यदि उसे पुस्तक को मेज पर रख कर खोलना होता है तो वह आधा घुमाव देती है जो कि एक सरल रेखा पर स्थित है। इस स्थिति में भुजाओं के बीच बने कोण का अवलोकन कीजिए। ऐसे कोण को सरल कोण **(Straight Angle)** कहते हैं।



आकृति 2.11

एक सरल कोण $\angle AOB$ लीजिए। अवलोकन कीजिए कि कोई भी किरण $\overrightarrow{OC}$ उस कोण को दो कोणों $\angle AOC$ और $\angle COB$ में विभाजित करती है।





जब दोनों कोण समान आकार के हों तो क्या $\overrightarrow{OC}$ को इस तरह बनाना संभव है?

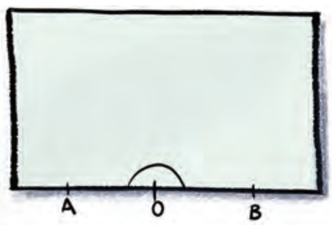
गणित चर्चा

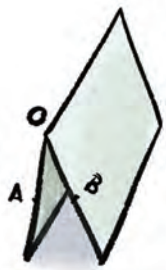
आइए, खोजें!

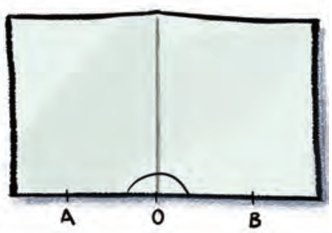
हम इस समस्या को कागज के एक टुकड़े का प्रयोग कर हल करने की कोशिश करते हैं। याद कीजिए जब कागज पर एक क्रीज बनाई जाती है तो उससे एक सीधे मोड़ का निशान (क्रीज) बनता है।

एक आयताकार कागज लीजिए, इसकी एक भुजा पर सरल कोण ∠AOB अंकित कीजिए। कागज को इस प्रकार मोड़िए कि वह घुमाव बिंदु O से गुजरता हो और ∠AOB को दो समान कोणों में विभाजित करता हो।

यह किस प्रकार कर सकते हैं?



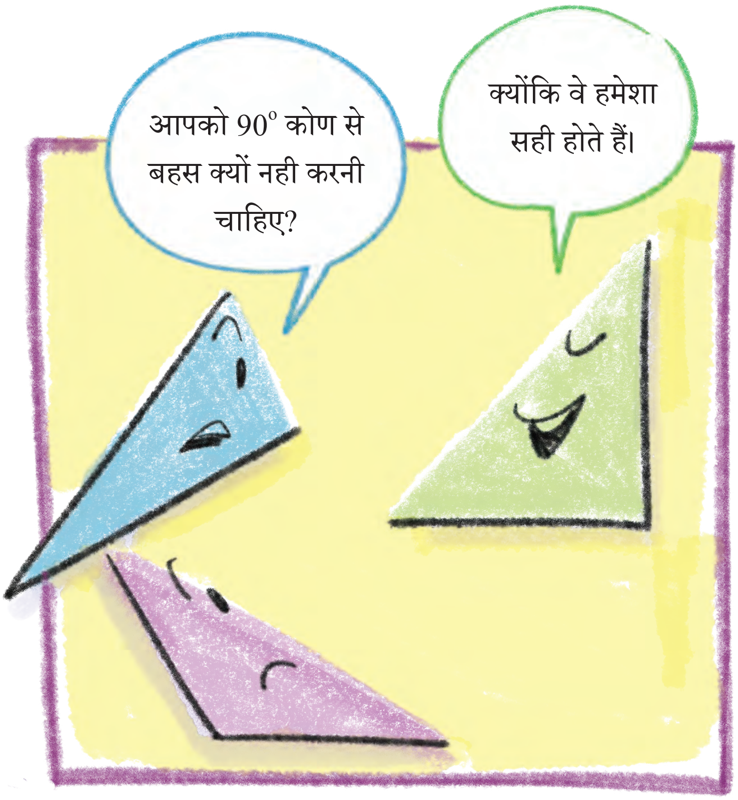




कागज को इस प्रकार मोड़िए कि OB, OA को पूरी तरह आच्छादित करे। बने हुए निशान और दोनों कोणों का अवलोकन कीजिए।

क्या कोई ऐसा तरीका भी है जिसमें अध्यारोपण करके यह पता लगाया जा सके कि दोनों कोण समान क्यों हैं? क्या अध्यारोपण घुमाव की विधि द्वारा भी कर सकते हैं?

इस प्रकार बने दोनों समान कोणों को **समकोण (Right Angle)** कहते हैं। अतः एक सरल कोण में दो समकोण होते हैं।



- यदि एक सरल कोण, एक पूर्ण घुमाव के आधे से बनता है, तो एक समकोण, पूर्ण घुमाव का कितना होगा?

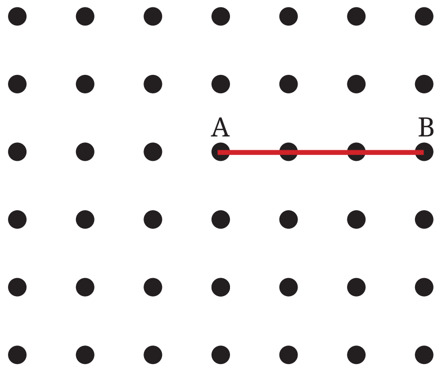
ध्यान दीजिए कि एक समकोण, 'L' की आकृति के समान होता है। यह भी आवश्यक नहीं कि वह सभी कोण जो L के समान आकृति के हैं, समकोण हों। एक कोण समकोण तब होता है, जब वह एक सरल कोण का पूर्णतया आधा होता है। दो रेखाएँ जब समकोण पर मिलती हैं तब वह **लंब रेखाएँ (Perpendicular Lines)** कहलाती हैं।

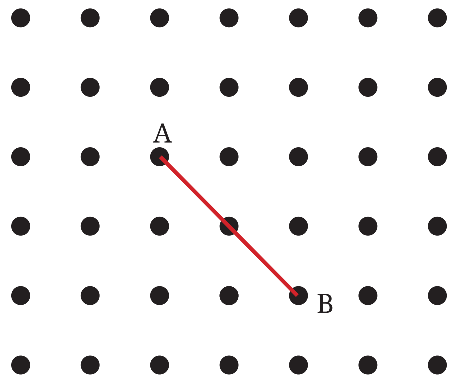
आइए, पता लगाएँ

1. आपकी कक्षा की खिड़कियों में कितने समकोण हैं? क्या अपनी कक्षा में आप और समकोण देख सकते हैं?

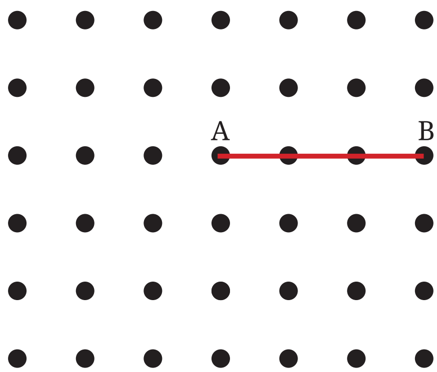
Reprint 2025-26

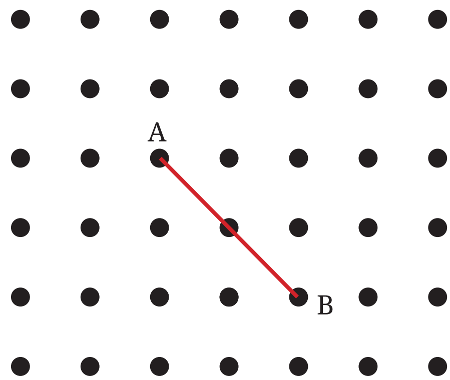
2. बिंदु A को ग्रिड के दूसरे बिंदुओं से एक सरल रेखा में इस प्रकार जोड़ें कि एक सरल कोण प्राप्त हो। इसे करने के विभिन्न तरीके क्या हो सकते हैं?



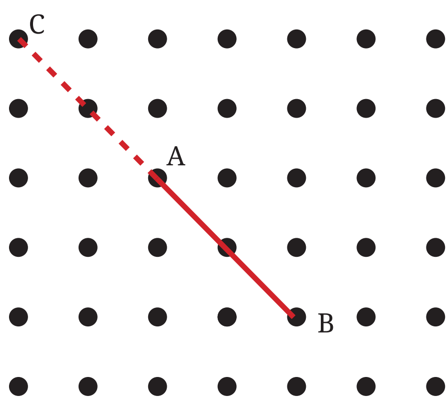


3. अब बिंदु A को ग्रिड के दूसरे बिंदुओं से एक सरल रेखा में इस प्रकार जोड़ें कि एक समकोण प्राप्त हो। इसे करने के विभिन्न तरीके क्या हो सकते हैं?





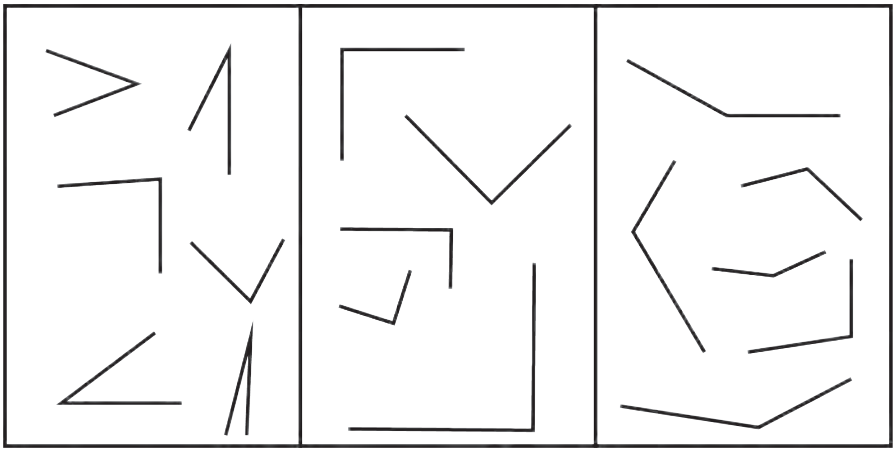
संकेत— रेखा को आगे बढ़ाएँ, जैसा कि नीचे दिए गए चित्र में दिखाया गया है। A पर समकोण प्राप्त करने के लिए, हमें इससे गुजरने वाली एक रेखा खींचनी होगी, जो सरल कोण CAB को दो बराबर भागों में विभाजित करती हो।



4. कागज को घुमाकर तिरछा निशान बनाइए। अब एक अन्य निशान बनाइए जो पिछले तिरछे निशान पर लंब हो।
   a. अब आपके पास कितने समकोण हैं? तर्क संगत उत्तर दीजिए कि ये कोण पूर्णतया समकोण क्यों हैं?
   b. वर्णन कीजिए कि आपने इसे कैसे मोड़ा ताकि जो व्यक्ति इस प्रक्रिया को करना नहीं जानता वह आपकी प्रक्रिया का अनुसरण करके समकोण बना सके।

कोणों का वर्गीकरण

जैसा कि नीचे दिखाया गया है कि कोणों को तीन समूहों में वर्गीकृत किया जाता है। सभी समकोण दूसरे समूह में हैं। अन्य दोनों समूहों में क्या समान विशेषता है?



पहले समूह में सभी कोण समकोण से कम हैं। अर्थात् दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि एक कोण पूर्ण घुमाव के चर्तुथांश से कम है। इस तरह के कोणों को **न्यून कोण (Acute Angle)** कहते हैं।

तीसरे समूह में सभी कोण समकोण से अधिक हैं किंतु सरल कोण से कम हैं। घुमाव, एक पूर्ण घुमाव के चर्तुथांश से अधिक है और आधे घुमाव से कम है। इस तरह के कोणों को **अधिक कोण (Obtuse Angle)** कहते हैं।

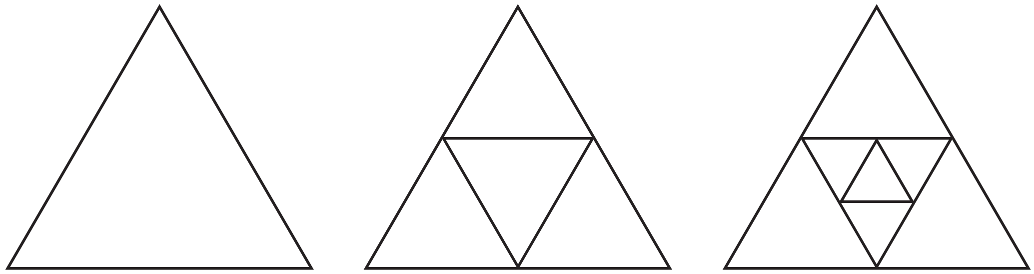
आइए, पता लगाएँ

1. पिछली आकृतियों में न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण और सरल कोण को पहचानिए।
2. कुछ न्यून कोण और अधिक कोण भिन्न दशाओं में बनाइए।

Reprint 2025-26

3. क्या आप जानते हैं कि न्यून और अधिक शब्दों का क्या अर्थ है? न्यून का अर्थ नुकीला और अधिक का अर्थ कुंद होता है। आपको क्या लगता है कि इन शब्दों का चयन क्यों किया गया होगा?

4. ज्ञात कीजिए कि नीचे दी गई आकृतियों में कितने न्यून कोण हैं—

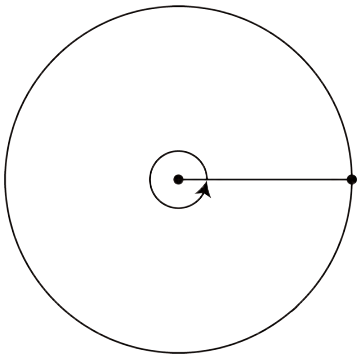


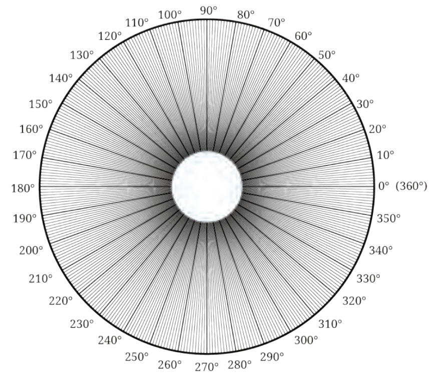
अगली आकृति क्या होगी और उसमें कितने न्यून कोण होंगे? क्या आप संख्याओं में कोई पैटर्न देखते हैं?

2.9 कोणों को मापना

हमने देखा कि दो कोणों की तुलना कैसे की जाती है। पर क्या हम वास्तव में एक संख्या का प्रयोग करके, बिना दूसरे कोण से तुलना किए यह परिमाणित कर सकते हैं कि कोण कितना बड़ा है।

हमने देखा कि एक वृत्त के द्वारा हम विभिन्न कोणों की तुलना कैसे कर सकते हैं? शायद एक वृत्त को कोणों के माप निर्धारित करने के लिए नियत किया जा सकता है?

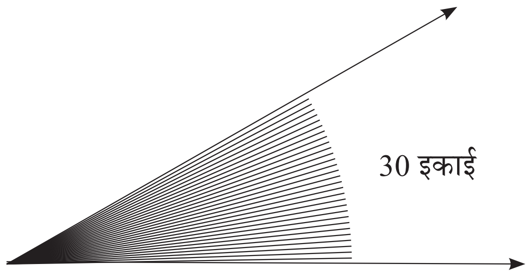




आकृति 2.12

कोणों के यथावत माप नियत करने के लिए गणितज्ञों को एक विचार आया। उन्होंने वृत्त के केंद्र पर बने कोण को 360 बराबर कोणों या भागों में विभाजित किया। इन सभी बराबर इकाई भागों का माप 1 अंश है, जिसे 1° लिखा जाता है।

इस इकाई भाग का प्रयोग किसी भी कोण को मापने के लिए किया जाता है। किसी कोण का माप इसमें निहित 1° इकाई भागों की संख्या होती है। उदाहरण के लिए, नीचे दिया गया चित्र देखिए—

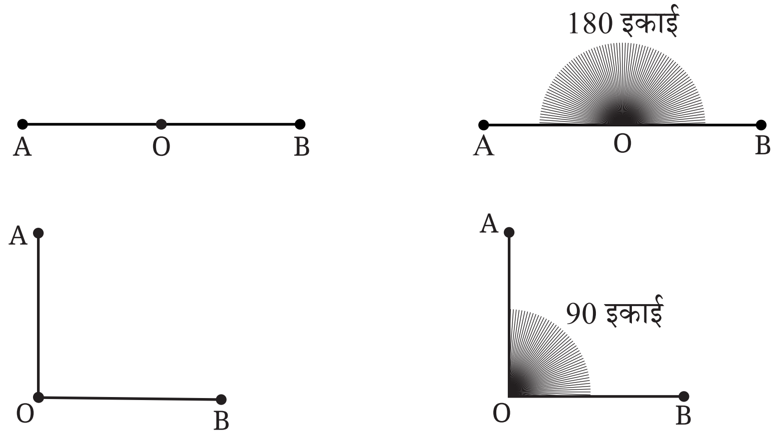


इसमें 1° कोण की 30 इकाइयाँ हैं और इसलिए हम कहते हैं कि इसका माप 30° है।

विभिन्न कोणों के माप— एक पूर्ण घुमाव का डिग्री में कितना माप होगा? जैसा कि ऊपर हमने 360 डिग्री माना तो इसका माप 360° है।

एक सरल कोण का डिग्री माप क्या होगा? एक सरल कोण, पूर्ण घुमाव का आधा होता है। क्योंकि पूर्ण घुमाव 360° है तथा पूर्ण घुमाव का आधा 180° होता है।

एक समकोण का डिग्री माप क्या होगा? दो समकोण मिलकर एक सरल कोण बनाते हैं। चूँकि एक सरल कोण का माप 180° होता है, तो एक समकोण का माप 90° होगा।



चुटकीभर इतिहास

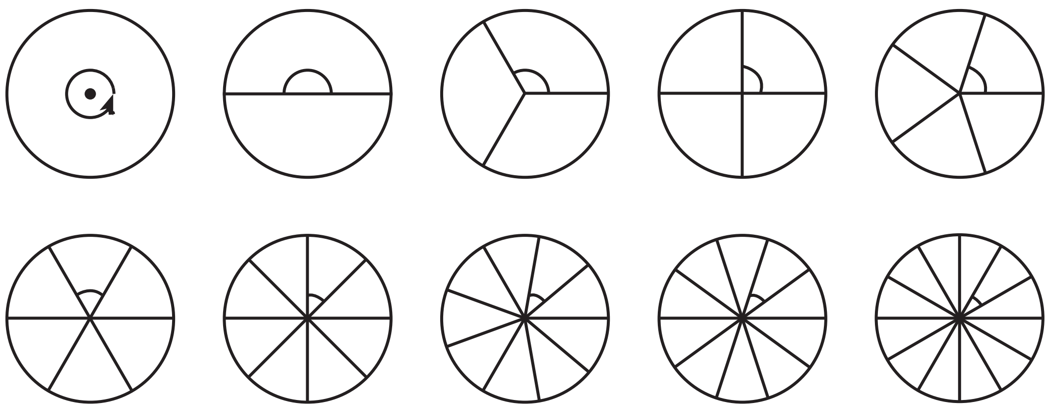
एक पूर्ण घुमाव को 360° में बाँटा गया है। अब विचारणीय बात यह है कि 360 ही क्यों? हमने 360 डिग्री ही क्यों प्रयोग किया, इसका कारण हम पूरी तरह नहीं जानते। वृत्त को 360 भागों में बाँटने का इतिहास पुराने समय की ओर ले जाता है। ऋग्वेद, जो हजारों वर्ष पुरानी मानवता की पुस्तक है, वह

Reprint 2025-26

एक पहिये के बारे में बताती है जिसमें 360 तीलियाँ हैं (छंद 1.164.48)। कई प्राचीन कलैंडर, जो लगभग तीन हजार वर्ष पुराने हैं, का प्रयोग भारत, पर्शिया, बेबिलोन और मिस्र में होता था। इन कैलेंडरों में एक वर्ष में 360 दिन होते थे। इसके अतिरिक्त बेबिलोन के गणितज्ञ षष्ठांश संख्या (sexagesimal numbers) के प्रयोग के कारण, 60 और 360 के विभाजन का अक्सर प्रयोग करते थे। वह 60 को आधार मानकर गिनती करते थे।

गणितज्ञ द्वारा वर्षों से 360 का प्रयोग करने का सर्वाधिक महत्वपूर्ण और वास्तविक उत्तर यह हो सकता है कि 360 वह सबसे छोटी संख्या है जो 7 को छोड़कर 10 तक की सभी संख्याओं से विभाजित हो जाती है। अत: कोई वृत्त को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 या 10 भागों में बराबर बाँट सकता है, और बाँटने के बाद भी प्रत्येक भाग में पूर्ण संख्या प्राप्त करता है! ध्यान दीजिए 360, संख्या 12 से भी विभाजित होती है जो एक वर्ष के महीने हैं, और 24 से भी विभाजित होती है जो एक दिन में घंटों की संख्या है। ये सभी तथ्य, संख्या 360 को अत्यधिक उपयोगी बनाते हैं।

नीचे दिए गए चित्र में वृत्त को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 और 12 भागों में बाँटा गया है। परिणामत: प्राप्त कोणों के डिग्री माप क्या होंगे? निर्देशित कोणों के समीप उनके डिग्री माप लिखिए।



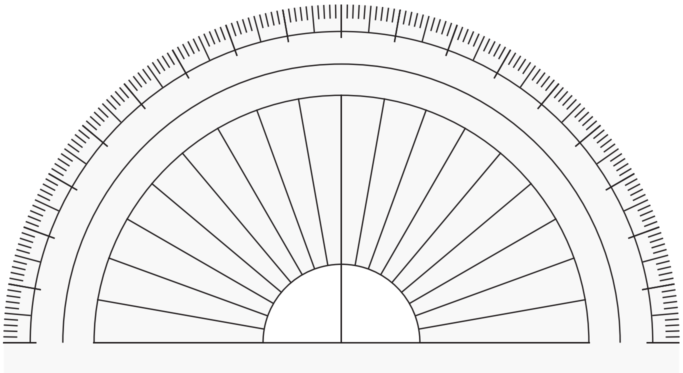
विभिन्न कोणों के डिग्री माप

हम अन्य कोणों को डिग्री में कैसे माप सकते हैं? इसके लिए हमारे पास एक उपकरण है जिसे चाँदा (Protractor) या कोणमापक कहते हैं। चाँदा एक वृत्त भी हो सकता है, जिसे आकृति 2.12 (पृष्ठ 32) के अनुसार 360 समान भागों में बाँटा गया हो। यह एक अर्ध वृत्त भी हो सकता है, जिसे 180 समान भागों में बाँटा गया हो।

Reprint 2025-26

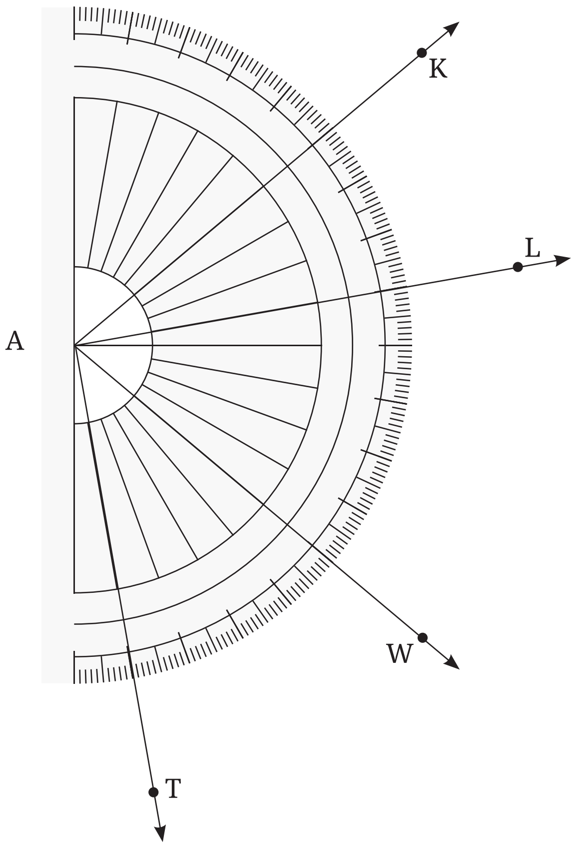
बिना अंकन का कोणमापक

यहाँ एक कोणमापक चाँदा दिया गया है। क्या आप इसके केंद्र में सरल कोण देख रहे हैं, जिसे 1 अंश (डिग्री) के 180 भागों में बाँटा गया है? यद्यपि सरल कोण को बाँटने वाली रेखाओं के कुछ भाग दृश्यमान हैं।



आधार रेखा के सबसे दाएँ भाग से चिह्नांकित करते हुए, प्रत्येक 10° पर एक लंबा चिह्न है। इस प्रकार के प्रत्येक लंबे चिह्न से 5° के बाद एक मध्यम आकार का चिह्न है।

आइए, पता लगाएँ



1. निम्नलिखित कोणों के माप लिखिए

   a. $\angle KAL$

ध्यान दीजिए कि इस कोण का शीर्ष बिंदु कोणमापक के केंद्रबिंदु पर संपाती है। अत: KA एवं AL के बीच 1° कोणों की इकाइयों की संख्या से कोण KAL की माप पता चलती है। गिनने पर, हम पाते हैं—

$$\angle KAL = 30^\circ$$

क्या मध्यम आकार के चिह्नों एवं बड़े आकार के चिह्नों का उपयोग करते हुए 5 या 10 में इकाईयों की संख्या गिनना संभव है?

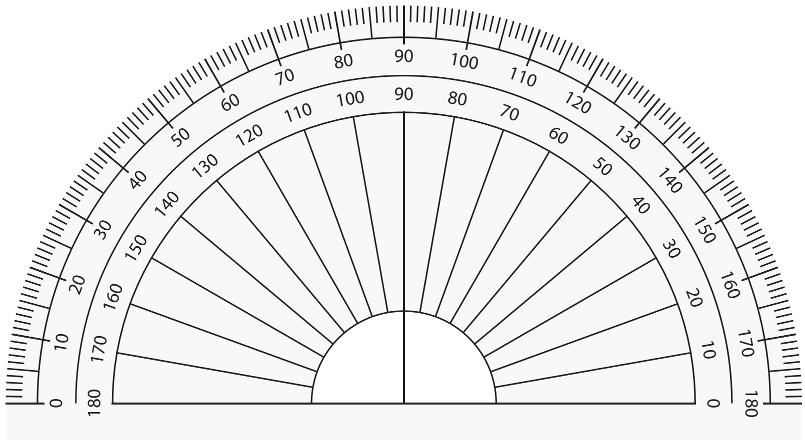
   b. $\angle WAL$

   c. $\angle TAK$

Reprint 2025-26

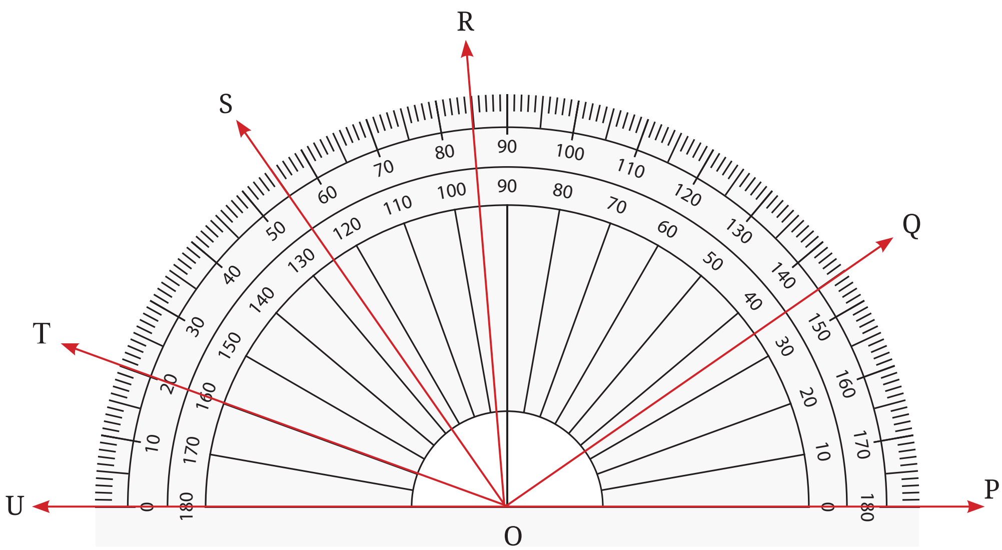
चिह्नित कोणमापक

नीचे दिया गया चित्र एक कोणमापक (चाँदा) है, जिसे आप अपने ज्यामिति बॉक्स में देख सकते हो। यह पृष्ठ 35 पर दिए गए कोणमापक के समान ही दिखाई देता है, केवल इस पर संख्याएँ लिखी हैं। क्या इन संख्याओं से कोणों को पढ़ना आसान हो जाएगा?



कोणमापक पर संख्याओं के दो सेट हैं— एक दाएँ से बाएँ की ओर बढ़ते हुए एवं दूसरा बाएँ से दाएँ की ओर बढ़ते हुए। इसमें संख्याओं के दो सेट क्यों सम्मिलित हैं?

चित्र में दिए गए विभिन्न कोणों के नाम एवं उनके माप लिखिए।



क्या आपने ∠TOQ जैसे कोण सम्मिलित किए?

Reprint 2025-26

आपने आंतरिक या बाहरी अंकित संख्याओं में से किसका उपयोग किया।

$\angle$TOS की माप क्या है?

क्या आप कोण का पता लगाने के लिए चिह्नों की संख्या गिने बिना, चिह्नित संख्याओं का उपयोग कर सकते हैं?

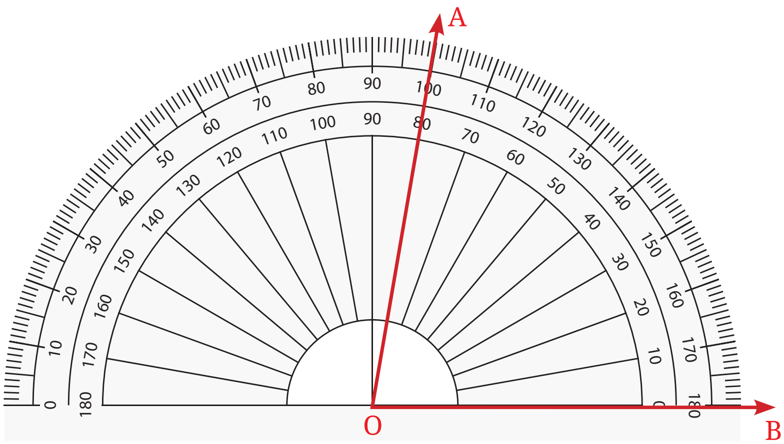
दिए गए चित्र (पृष्ठ 36) में, कोण की भुजाएँ OT एवं OS बाहरी मापक (स्केल) पर संख्याओं 20 एवं 55 से गुजरती हैं। इन दो भुजाओं के बीच 1° कोण की कितनी इकाइयाँ सम्मिलित हैं?

क्या यहाँ घटाने का उपयोग किया जा सकता है?

हम कैसे बिना घटाए कोणों की माप सीधे ज्ञात कर सकते हैं?

कोणमापक (चाँदा) का केंद्रबिंदु, कोण के शीर्षबिंदु पर रखिए।

कोणमापक को इस तरह से रखिए कि कोण की एक भुजा 0° कोण के चिह्न से होकर गुजरे, जैसा कि नीचे चित्र में दिखाया गया है।

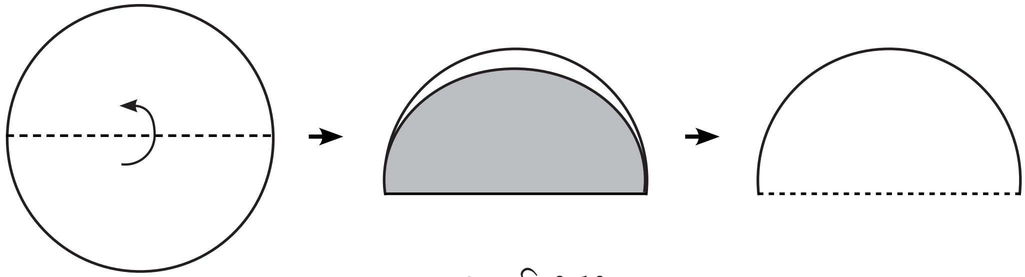


$\angle$AOB कितने अंश (डिग्री) का कोण है?

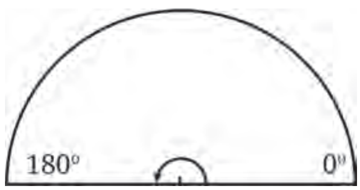
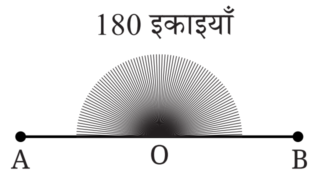
स्वयं का चाँदा बनाएँ

आपने देखा होगा कि एक चाँदे पर समान दूरी पर अलग-अलग निशान कैसे बनाए जाते हैं। अब हम जानेंगे कि हम उनमें से कुछ किस प्रकार बना सकते हैं।

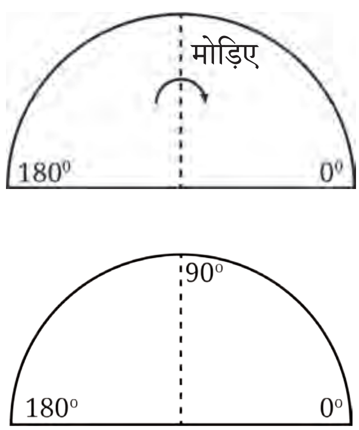
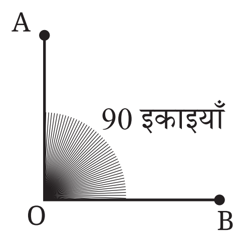
1. एक कागज पर सुविधानुसार त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। वृत्त को काटिए (आकृति 2.13)। एक वृत्त या एक पूरा चक्कर 360° है।
2. एक वृत्त को इस प्रकार मोड़िए कि दो समान आधे वृत्त प्राप्त हों। इसे मोड़ से इस प्रकार काटिए कि अर्धवृत्त बने। अर्धवृत्त के निचले दाएँ कोने पर '0°' लिखें।



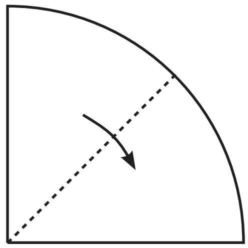
आकृति 2.13

 *आकृति 2.14*	एक वृत्त के आधे का माप एक पूरे चक्कर का $\frac{1}{2}$ होगा। अत: एक पूरे चक्कर के आधे का माप = __ का $\frac{1}{2}$ = 180° अत: अर्ध वृत्त के निचले बाएँ कोने पर 180° लिखिए।	

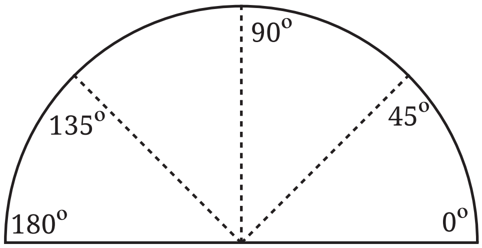
3. आकृति 2.15 के अनुसार, अर्धवृत्त को आधे से मोड़िए जिससे एक वृत्त का चतुर्थांश प्राप्त हो

 *आकृति 2.15*	वृत्त के चतुर्थांश का माप, पूरे चक्कर का $\frac{1}{4}$ होता है। पूरे चक्कर का $\frac{1}{4}$ माप = 360° का $\frac{1}{4}$ = __ या $\frac{1}{4}$ घुमाव का माप = आधे घुमाव का $\frac{1}{4}$ = 180° का $\frac{1}{2}$ = __ अत: अर्ध वृत्त के ऊपरी सिरे पर 90° अंकित कीजिए।	

4. कागज को आकृति 2.16 और 2.17 के अनुसार पुनः मोड़िए—



आकृति 2.16

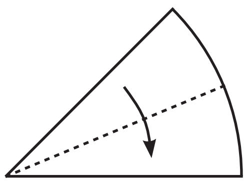


आकृति 2.17

जब कागज को मोड़ा जाता है तो यह एक वृत्त का $\frac{1}{8}$ है या एक चक्कर का $\frac{1}{8}$ है, या 360° का $\frac{1}{8}$, या 180° का $\frac{1}{4}$, या 90° का $\frac{1}{2}$ = ...।

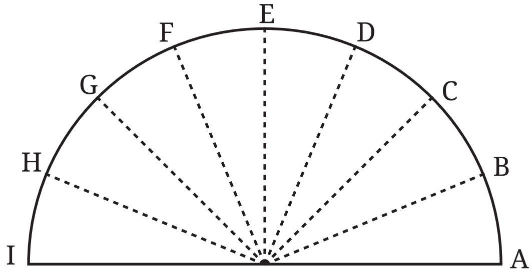
इस नए निशान से हमें 45° और 180°–45° = 135° के माप प्राप्त होते हैं। आकृति में अर्धवृत्त के सिरों पर 45° और 135° सही स्थान पर लिखिए।

5. इसी प्रकार, अगले आधे घुमाव (आकृति 2.18 अनुसार) से हमें ________________ माप का कोण प्राप्त होता है।

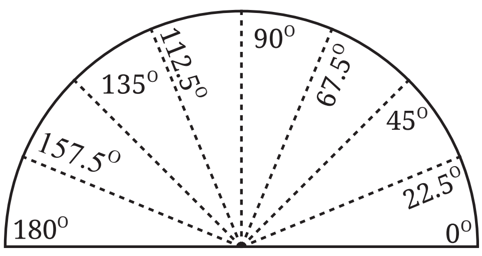


आकृति 2.18

6. मुड़े हुए कागज को खोलकर निशानों पर OB, OC, ... आदि अंकित करें जैसा कि आकृति 2.19 और 2.20 में दर्शाया गया है।



आकृति 2.19



आकृति 2.20

सोचिए!

आकृति 2.19 में, ∠AOB = ∠BOC =∠COD =∠DOE =∠EOF =∠FOG =∠GOH =∠HOI =______ क्यों?

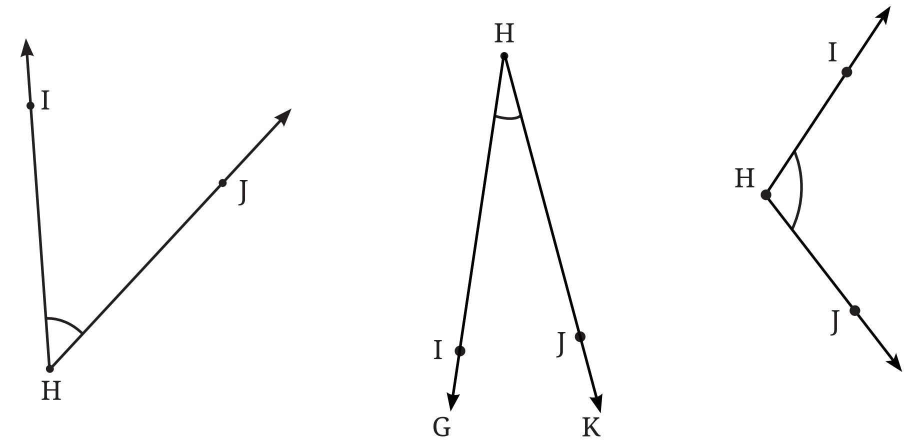
कोण समद्विभाजक

प्रत्येक चरण में, हमने आधे में मोड़ किए हैं। एक दिए हुए कोण से आधे कोण को प्राप्त करने की प्रकिया को '**कोण का समद्विभाजक करना**' कहते हैं। वह रेखा जो एक दिए गए कोण को समद्विभाजित करती है, उसे **कोण समद्विभाजक** कहते है।

स्वयं के बनाएँ हुए चाँदे में कोण समद्विभाजकों की पहचान कीजिए। कोण समद्विभाजक की अवधारणा का प्रयोग करते हुए कागज को मोड़ कर विभिन्न कोणों को बनाने का प्रयास करें।

आइए, पता लगाएँ

1. चाँदे का प्रयोग करते हुए निम्न कोणों के डिग्री माप ज्ञात कीजिए?



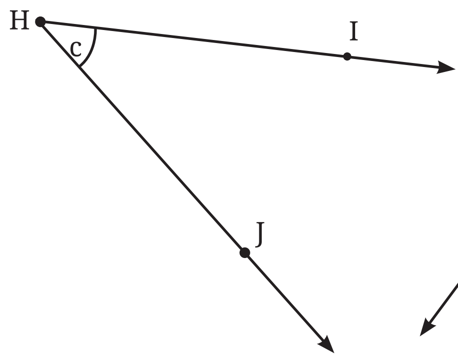
2. चाँदे का प्रयोग करते हुए अपनी कक्षा में दिख रहे विभिन्न कोणों के डिग्री माप ज्ञात कीजिए।

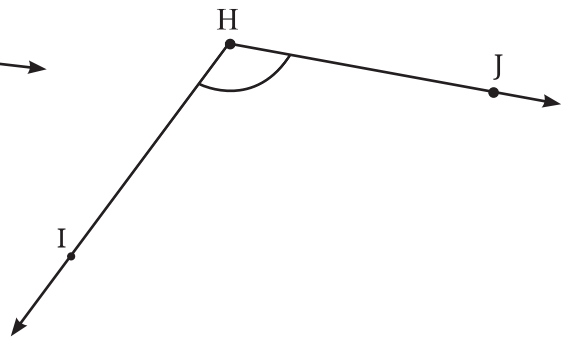
अध्यापक टिप्पणी

यह आवश्यक है कि विद्यार्थी मानक चाँद का प्रयोग करने से पहले स्वयं का बनाया हुआ चाँदा विभिन्न कोणों के माप को निकालने के लिए प्रयोग करें, जिससे वह मानक चाँद के चिह्नित निशानों के पीछे की अवधारणा को समझ सके।

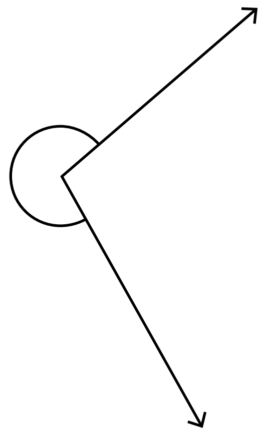
Reprint 2025-26

3. नीचे दिए गए कोणों के अंश माप ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए की क्या यहाँ कागज के चाँद का प्रयोग कर सकते हैं।



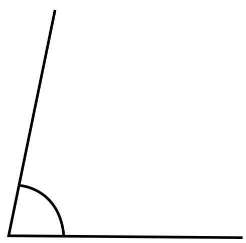


4. नीचे दिए गए कोण का अंश माप चाँद का प्रयोग करके किस प्रकार निकाला जा सकता है?

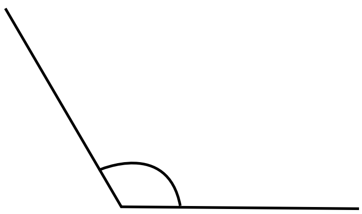


5. निम्न कोणों को मापिए और प्रत्येक का डिग्री माप लिखिए।

a.

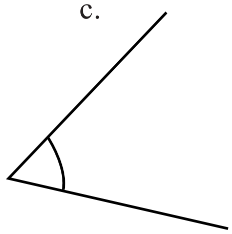


b.

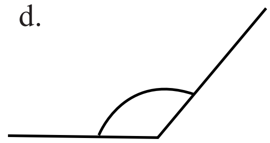


Reprint 2025-26

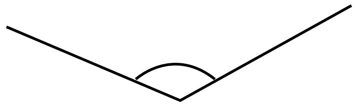
c.



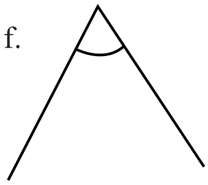
d.



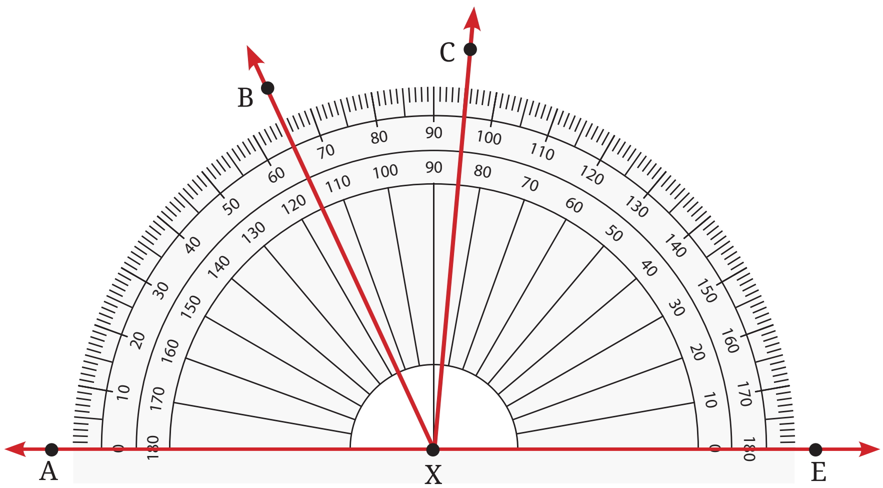
e.



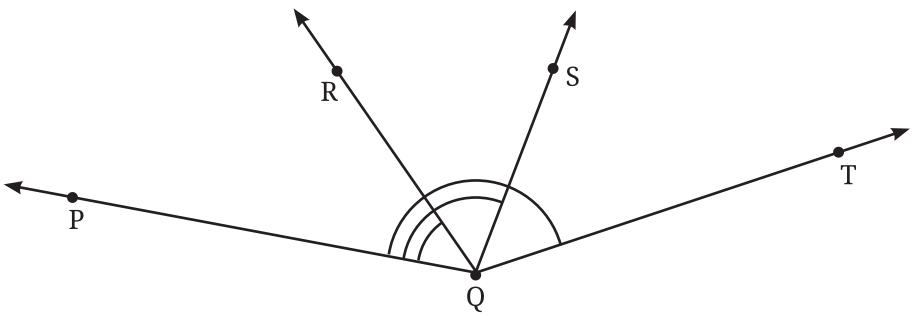
f.



6. ∠BXE , ∠CXE, ∠AXB और ∠BXC के अंश माप ज्ञात कीजिए।

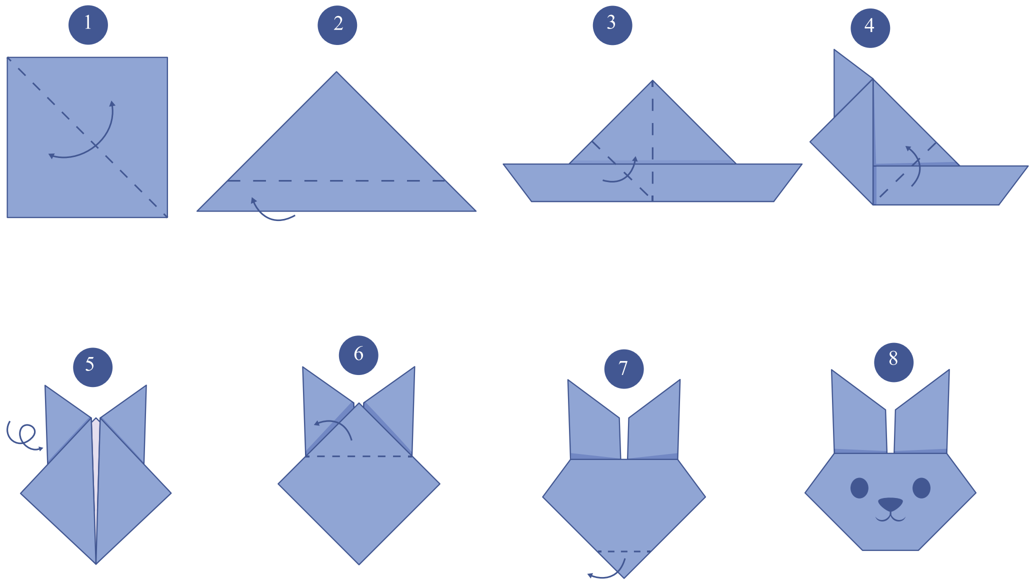


7. ∠PQR , ∠PQS और ∠PQT के अंश माप ज्ञात कीजिए।

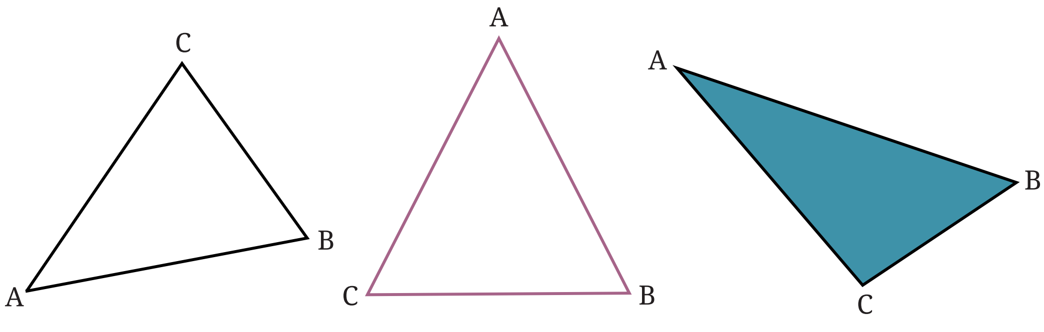


Reprint 2025-26

8. दिए गए निर्देशों के अनुसार पेपर क्राफ्ट बनाइए। अब कागज को पूरा खोलिए। मोड़े जाने पर प्राप्त निशानों पर रेखाएँ खींचिए और इस प्रकार बने कोणों को मापिए।



9. आकृति 2.21 (a) में बने त्रिभुज के तीनों कोणों को मापिए और संबंधित कोण के नीचे उसका माप लिखिए। तीनों मापों को जोड़िए। क्या प्राप्त होता है? इस प्रकिया का आकृति 2.21 (b) और (c) के लिए भी प्रयोग कीजिए। अन्य त्रिभुजों पर भी इस प्रकिया का प्रयोग कीजिए। फिर सामान्य तौर पर क्या होता है इसका अनुमान लगाइए। हम आगे की कक्षाओं में जानेंगे कि ऐसा क्यों हुआ।



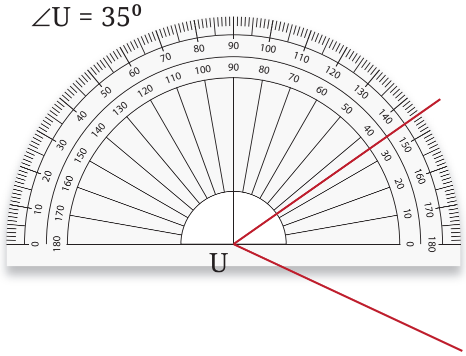
(a) (b) (c)

आकृति 2.21

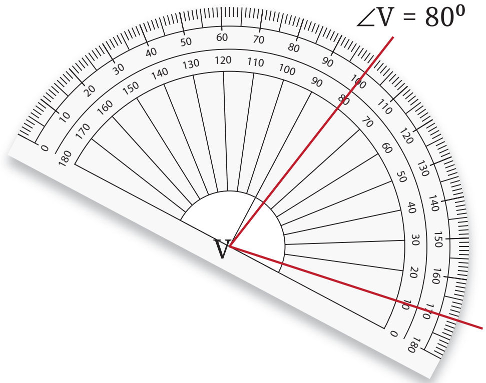
गलतियाँ देखिए, गलतियाँ सुधारिए

एक विद्यार्थी ने नीचे दिखाए गए कोणों की माप एक चाँदे का प्रयोग करके की। प्रत्येक चित्र में चाँद के गलत प्रयोग को पहचानिए और चर्चा कीजिए कि माप कैसे करना चहिए और उन्हें कैसे सुधार सकते हैं।

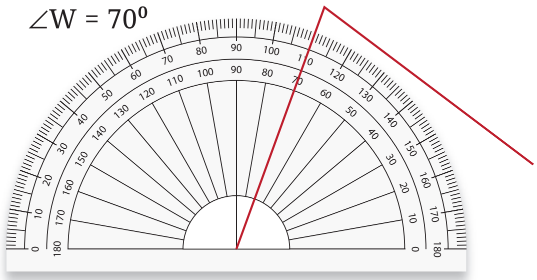
$\angle U = 35^0$



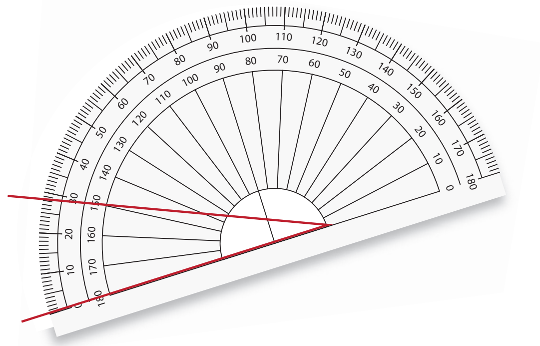
$\angle V = 80^0$



$\angle W = 70^0$

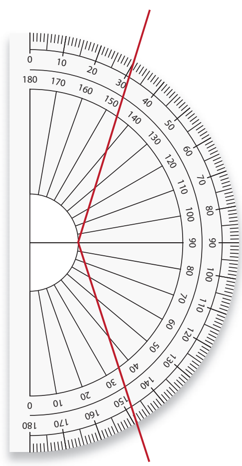


$\angle X = 150^0$

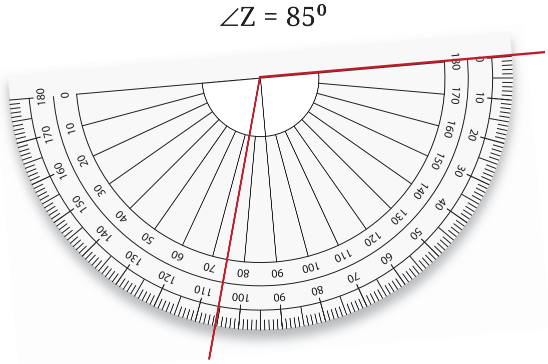


$\angle Y = 120^0$

Y



$\angle Z = 85^0$



आइए, पता लगाएँ

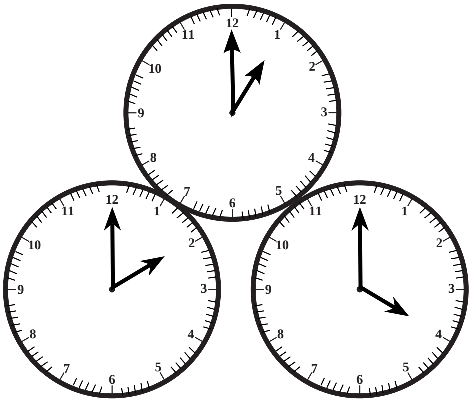
कोण कहाँ हैं?

1. घड़ी में कोण—

   a. घड़ी की सूईयाँ अलग-अलग समय पर भिन्न कोण बनाती हैं। 1 बजे सूईयों के बीच 30° का कोण होता है। क्यों?

   b. 2 बजे कोण कितना होगा? और 4 बजे? 6 बजे?

   c. घड़ी की सूईयों द्वारा बने अन्य कोणों को ढूँढ़िए।



2. एक दरवाजे का कोण—

   क्या ऐसा संभव है कि कोण का प्रयोग कर यह बताया जा सके कि दरवाजा कितना खुला है? कोण का शीर्ष और कोण की भुजाएँ क्या होंगी?

3. विद्या झूले पर अपना समय आनंद से बिता रही है। उसने ध्यान दिया कि जब उसने झूलना शुरू किया तो जितना बड़ा कोण है, उतनी ही अधिक गति वह झूले पर अर्जित कर रही है। लेकिन यहाँ कोण है कहाँ? क्या आप यहाँ पर किसी कोण को देख सकते हैं?

4. यहाँ, एक खिलौने के दोनों ओर तिरछे तख्ते (slanting slab) लगे हैं, जितना अधिक कोण या तख्ते का झुकाव होगा उतनी ही तेजी से गेंद लुढ़कती है। क्या कोणों का प्रयोग तख्तों के झुकाव के वर्णन में किया जा सकता है? प्रत्येक कोण की भुजाएँ क्या होंगी? कौन-सी भुजा दिखाई देगी और कौन-सी नहीं?

5. नीचे दिए गए चित्रों का अवलोकन कीजिए जिनमें एक कीट एवं उसकी घुमायी गई स्थितियाँ दी गई हैं। क्या घूर्णन (घुमाव) की मात्रा बताने के लिए कोणों का उपयोग किया जा सकता है? यदि हाँ, तो कैसे? कोण का शीर्षबिंदु एवं उसकी भुजाएँ कौन-सी होंगी?
संकेत— कीट को छूकर जाती हुई क्षैतिज रेखा को देखिए।

अध्यापक टिप्पणी

यह आवश्यक है कि विद्यार्थी प्रत्येक गणितीय अवधारणा के अनुप्रयोग को दैनिक जीवन में देख सके। अध्यापक ऐसे कुछ कार्यकलाप करा सकते हैं, जिसे विद्यार्थी कोणों के अनुप्रयोग को व्यावहारिक जीवन से जोड़ सकें। उदाहरण के लिए— घड़ी , दरवाजे, झूले, उतार-चढ़ाव की अवधारणा, सूर्य की स्थिति, दिशाएँ इत्यादि।

2.10 कोणों को बनाना

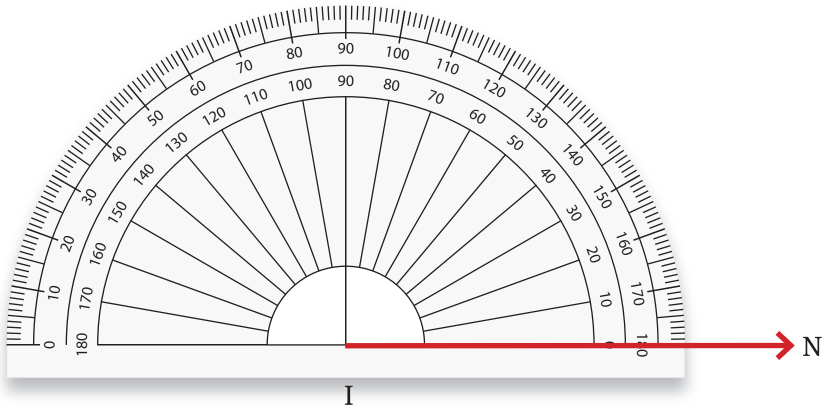
विद्या चाँदे का प्रयोग कर 30° का एक कोण बनाना चाहती है और उसे ∠TIN नाम देना चाहती है।

∠TIN में, I शीर्ष होगा और IT तथा IN कोण की भुजाएँ होंगी। भुजा IN को आधार मान लेते हुए, दूसरी भुजा IT को 30° का मोड़ लेना चाहिए।

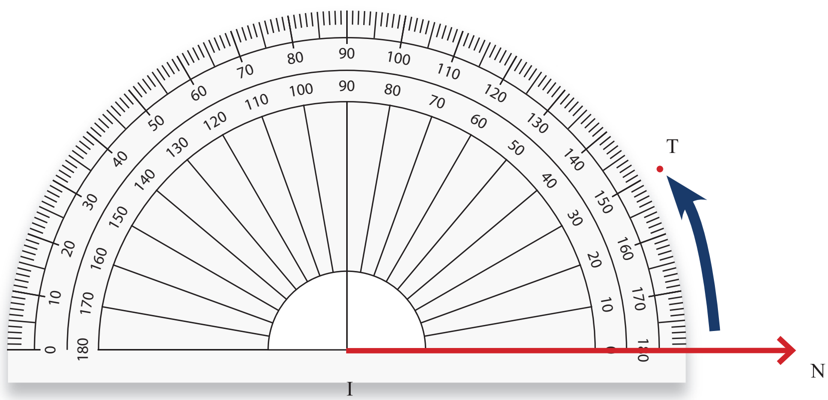
Reprint 2025-26

चरण 1— हम आधार से शुरू करेंगे और $\overrightarrow{IN}$ बनाएँगे।

चरण 2— चाँदे के केंद्र को I पर रखते हुए IN को 0 रेखा पर संरेखित (align) कीजिए।

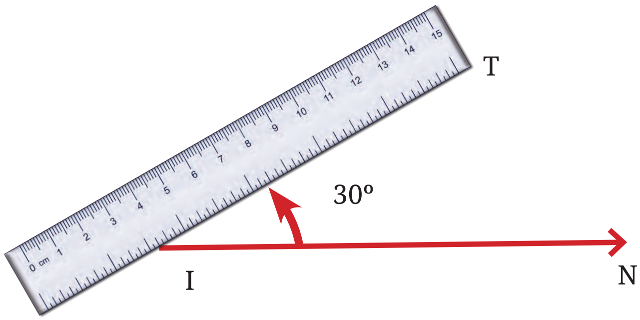


चरण 3— बिंदु 0 से शुरू करते हुए चाँदे पर 0, 10, 20, 30 तक देखिए और 30º पर T बिंदु अंकित कीजिए।



चरण 4— पैमाने (रूलर) का प्रयोग करते हुए I को T से जोड़िए।

$\angle TIN = 30^\circ$ इच्छित कोण है।



आकृति 2.22

आइए, खेलें खेल #1

यह खेल एक कोण का अनुमान लगाने से संबंधित है। इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ दो टीम, टीम 1 और टीम 2 बनाकर खेलिए। खेल के निर्देश व नियम निम्नलिखित हैं—

- टीम 1, बिना टीम 2 को दिखाए माप के कोण का चयन करती है, उदाहरणत: 49° और चाँदे की सहायता से उसे बनाती है।
- टीम 2, को वह कोण दिखाया जाता है। इसके पश्चात् वे सभी चर्चा करके कोण के डिग्री माप का अनुमान लगाकर बताएँगे। (चाँदे का प्रयोग किए बिना)
- टीम 1, चाँदे की सहायता से कोण के सही माप का प्रमाणीकरण करेंगे।
- टीम 2, अनुमानित और सही माप के निरपेक्ष अंतर का प्राप्तांक प्राप्त करेगी। उदाहरणत: यहाँ यदि टीम 2 का अनुमानित उत्तर 39° है तो प्राप्तांक 10 बिंदु (49° – 39°) होंगे।
- प्रत्येक टीम को पाँच बारी मिलेंगी। सबसे कम प्राप्तांक वाली टीम ही जीतने वाली टीम होगी।

आइए, खेलें खेल #2

अब हम खेल के नियमों में थोड़ा परिवर्तन करते हैं। इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ पुनः दो टीम, टीम 1 और टीम 2 बनाकर खेलिए। खेल के निर्देश व नियम निम्नलिखित हैं—

- टीम 1 सभी के सामने एक कोण के माप की घोषणा करती है, उदाहरणत: 34° माप का कोण।

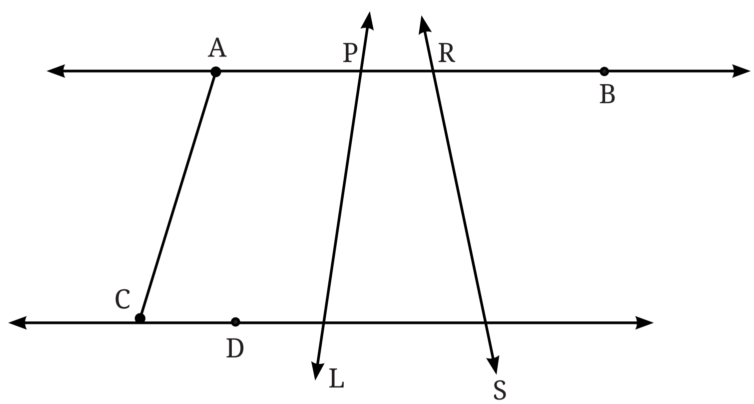
- टीम 2 से एक खिलाड़ी चाँदे का प्रयोग किए बिना इस कोण को बोर्ड पर बनाएगा। टीम 2 के अन्य सदस्य खिलाड़ी 'और बड़ा बनाओं' या 'और छोटा बनाओ!' कहकर सहायता कर सकते हैं
- टीम 1 से एक खिलाड़ी आकर बोर्ड पर बने इस कोण को सभी को दिखाते हुए चाँदे की सहायता से मापेगा।
- टीम 2 के प्राप्तांक, बनाए गए कोण और इच्छित कोण का निरपेक्ष अंतर होंगे। उदाहरण के लिए टीम 2 के खिलाड़ी ने 25° का कोण बनाया तो टीम 2 के प्राप्तांक 9 होंगे। ($34^{\circ}–25^{\circ}$)
- प्रत्येक टीम को पाँच बारी मिलेंगी। पुन: सबसे कम प्राप्तांक वाली टीम ही जीतने वाली टीम होगी।

अध्यापक टिप्पणी

इस प्रकार के खेल खेलना इसलिए भी आवश्यक है ताकि कोणों और उनके मापों का सहज ज्ञान हो सके। कोणों के सन्निकटन के अभ्यास को बनाने के लिए इस खेल को अलग-अलग दिन में कम-से-कम एक या दो बार खेलिए। ध्यान दीजिए कि विद्यार्थियों के युग्म बनाकर भी इस खेल गतिविधि को क्रियान्वित कर सकते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. आकृति 2.23 में दर्शाए सभी संभव कोणों की सूची बनाइए। क्या आप उन सभी को ढूँढ़ पाए? अब सभी कोणों के माप का अनुमान लगाइए। इसके पश्चात् चाँदे की सहायता से कोणों का माप देखिए। अपनी सभी संख्याओं (डिग्री माप) को एक सारणी में अंकित कीजिए। देखिए आपके अनुमानित उत्तर सही माप के कितने समीप हैं।



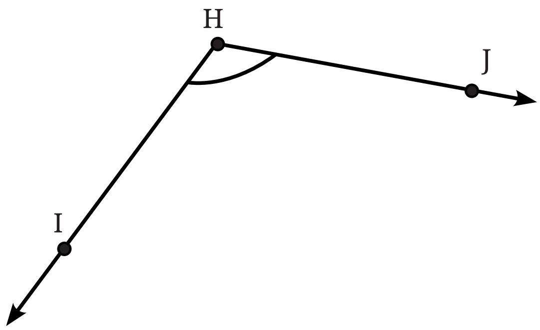
आकृति 2.23

Reprint 2025-26

2. चाँदे की सहायता से निम्न डिग्री माप के कोण बनाइए—

   a. 110° b. 40° c. 75° d. 112° e. 134°

3. एक कोण बनाइए जिसका डिग्री माप नीचे दिए गए कोण के समान हो।

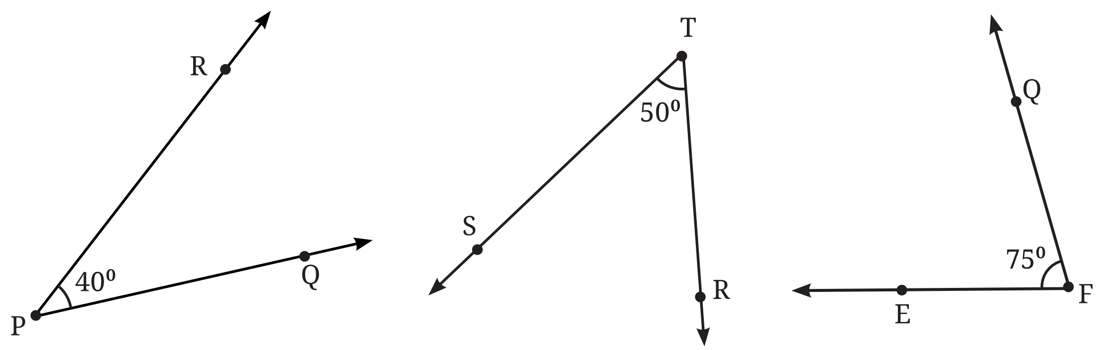


इस कोण को बनाने में प्रयुक्त सभी चरणों को भी लिखिए।

2.11 कोणों के प्रकार और उनके माप

हमने इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के कोणों के विषय में पढ़ा। हमने देखा कि एक सरल कोण 180° तथा समकोण 90° का होता है। अन्य प्रकार के कोण न्यून और अधिक का डिग्री माप में हम किस प्रकार वर्णन करेंगे?

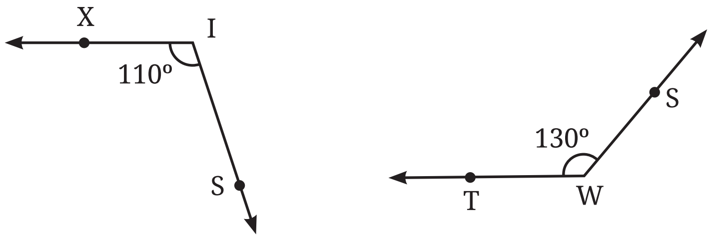
न्यून कोण (Acute Angle)— वे कोण जो समकोण से छोटे हैं, अर्थात् 90° से कम और 0° से अधिक होते हैं न्यून कोण कहलाते हैं।



न्यून कोण के उदाहरण

Reprint 2025-26

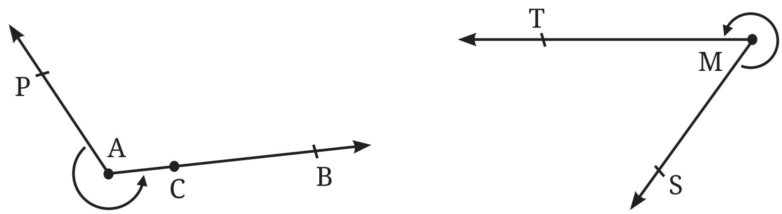
अधिक कोण (Obtuse angle)— वे कोण जो समकोण से बड़े हैं और सरल कोण से छोटे हैं अर्थात् 90° से अधिक और 180° से कम होते हैं, अधिक कोण कहलाते हैं।



अधिक कोण के उदाहरण

क्या हमने कोणों के सभी संभावित मानों का मापन किया? यहाँ एक अन्य प्रकार का कोण दिया है।

प्रतिवर्ती कोण (Reflex angle)— वे कोण जो सरल कोण से बड़े हों और पूर्ण कोण से छोटे हों अर्थात् 180° से बड़े और 360° से छोटे होते हैं, प्रतिवर्ती कोण कहलाते हैं।

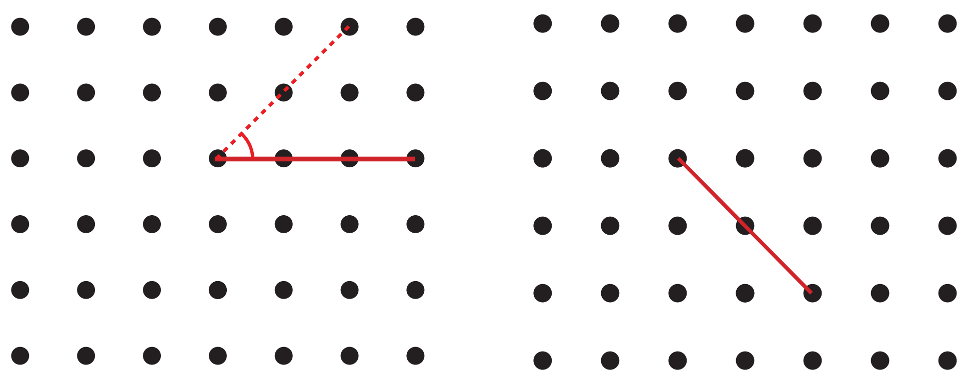


प्रतिवर्ती कोण के उदाहरण

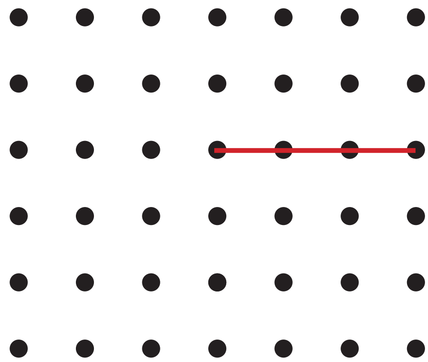
आइए, पता लगाएँ

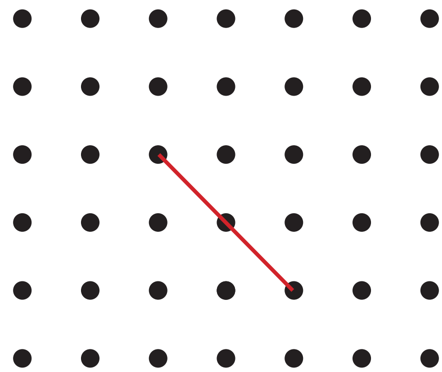
1. नीचे दिए गए प्रत्येक ग्रिड में, बिंदु A को ग्रिड के दूसरे बिंदुओं से एक सरल रेखा से इस प्रकार मिलान कीजिए कि हमें—

   a. एक न्यून कोण प्राप्त हो।

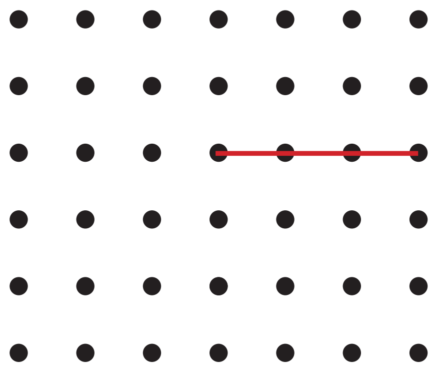


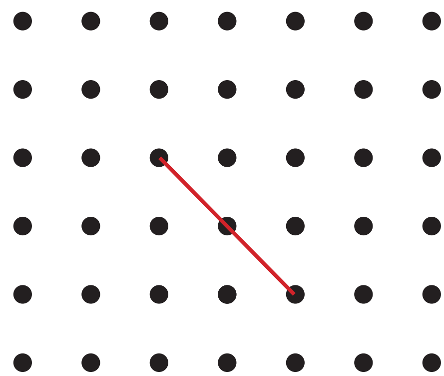
b. एक अधिक कोण प्राप्त हो।





c. एक प्रतिवर्ती कोण प्राप्त हो।

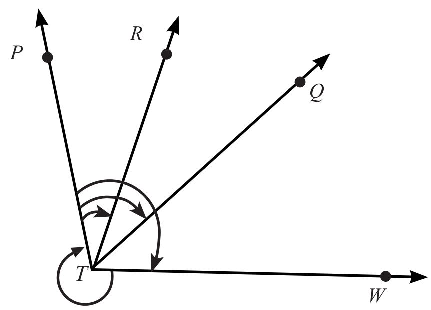




कोणों को चाप द्वारा अंकित कीजिए जिससे इच्छित कोणों की पहचान हो सके। एक आपके लिए किया गया है।

2. चाँदे की सहायता से प्रत्येक कोण का माप निकालिए। प्रत्येक कोण को न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण या प्रतिवर्ती कोण में वर्गीकृत कीजिए।

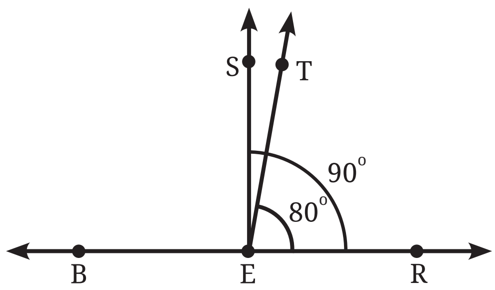
a. ∠PTR b. ∠PTQ c. ∠PTW d. ∠WTP



Reprint 2025-26

आइए खोजें!

इस चित्र में, $\angle TER = 80^\circ$ $\angle BET$ का माप क्या होगा।
$\angle SET$ का माप क्या होगा?



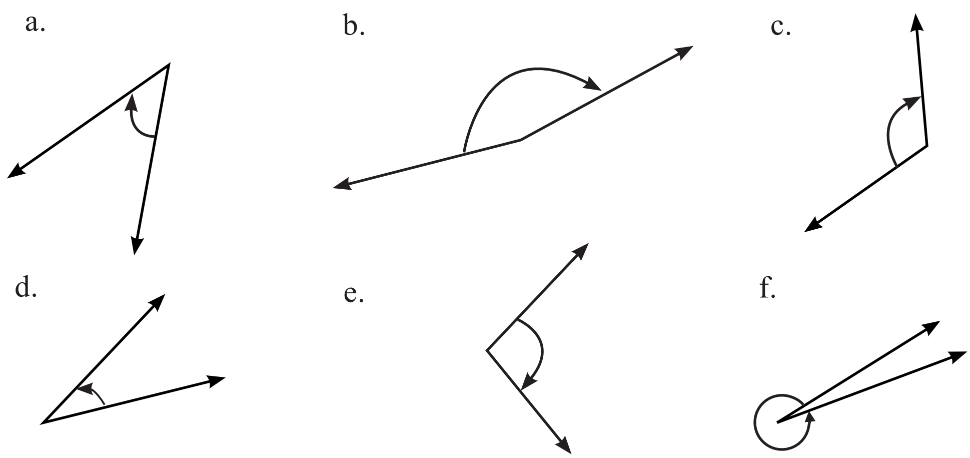
संकेत— अवलोकन कीजिए कि $\angle REB$ एक सरल कोण है। अतः $\angle REB = 180^\circ$ जिसमें से 80° का कोण $\angle TER$ से ढका है, इसी प्रकार का तर्क $\angle SET$ का माप निकालने में प्रयुक्त कर सकते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्न अंश माप वाले कोणों को बनाए—

   a. 140° b. 82° c. 195° d. 70° e. 35°

2. प्रत्येक कोण के माप का अनुमान लगाइए और फिर चाँदे से मापिए—



   इन कोणों को न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण और प्रतिवर्ती कोणों में वर्गीकृत कीजिए।

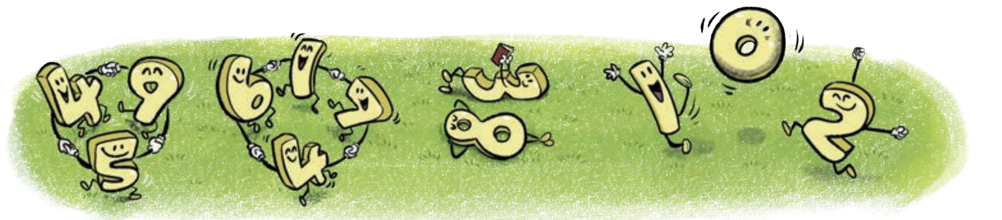
3. एक आकृति बनाइए जिसमें तीन न्यून कोण, एक समकोण और दो अधिक कोण हों।
4. अक्षर M को इस प्रकार बनाइए कि दोनों ओर के कोण 40° के हों और मध्य में कोण 60° का हो।
5. अक्षर Y को इस प्रकार बनाइए कि 150°, 60° और 150° के तीन कोण बनें।

6. अशोक चक्र में 24 तीलियाँ होती हैं। दो संलग्न तीलियों के बीच कितने अंश माप का कोण होगा? दो तीलियों के बीच सबसे बड़ा न्यून कोण क्या होगा?

7. **पहेली**— मैं एक न्यून कोण हूँ। यदि आप मेरे माप को दोगुना करते हो तो आपको न्यून कोण ही प्राप्त होता है। यदि आप मेरे माप को तीन गुना करते हो तो पुनः न्यून कोण प्राप्त होगा। यदि आप मेरे माप को चार गुना करते हो तो भी पुनः न्यून कोण ही प्राप्त होगा। पर यदि आप मेरे माप को पाँच से गुना करते हो तो एक अधिक कोण प्राप्त होगा। मेरे कोणों के संभावित माप क्या होंगे?

सारांश

- एक **बिंदु** एक स्थिति निर्धारण करती है। उसे अंग्रेजी के बड़े अक्षर से व्यक्त किया जाता है।
- दो बिंदुओं को जोड़ने वाली सबसे छोटी दूरी एक **रेखाखंड** को दर्शाती है। बिंदु S और T का मिलान करने वाले रेखाखंड को $\overline{ST}$ से दर्शाते हैं।
- एक रेखाखंड $\overline{ST}$ को दोनों तरफ बिना किसी अंत के विस्तृत करने पर एक **रेखा** प्राप्त होती है। इसे $\overleftrightarrow{ST}$ से व्यक्त किया जाता है और कभी-कभी अंग्रेजी के छोटे अक्षर जैसे m से भी व्यक्त किया जाता है।
- **किरण**, रेखा का एक भाग है जो रेखा पर स्थित कोई एक बिंदु माना D से प्रारंभ होकर एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होता है इसे $\overrightarrow{DP}$ से व्यक्त किया जाता है, जहाँ P, किरण पर स्थित अन्य बिंदु है।
- एक **उभयनिष्ठ** प्रारंभिक बिंदु से जब दो किरणें निकलती प्रतीत हैं तो एक कोण बनता है। दो किरणों $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OM}$ से कोण $\angle POM$ बनता है (इसे $\angle MOP$ भी कह सकते हैं)। यहाँ O कोण का शीर्ष है और किरणें $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OM}$ कोण की **भुजाएँ** हैं।
- घुमाव की मात्रा या कोण की एक भुजा को शीर्ष से परित, दूसरी भुजा तक लाने के लिए जितना घुमाव आवश्यक होता है, वही कोण का आकार (size) होता है।
- कोणों के आकार को **अंशों** (डिग्री) में मापा जाता है। एक पूर्ण घुमाव या मोड 360 डिग्री माना जाता है जिसे '360°' से व्यक्त किया जाता है।
- किसी कोण के डिग्री माप को **चाँद** की सहायता से माप सकते हैं।
- कोण, **सरल कोण** (180°), **समकोण** (90°), **न्यून कोण** (0° से अधिक और 90° से कम), **अधिक कोण** (90° से अधिक और 180° से कम) और **प्रतिवर्ती कोण** (180° से अधिक और 360° से कम), हो सकते हैं।



3

संख्याओं का खेल

0675CH03

हम संख्याओं का प्रयोग विभिन्न संदर्भों और विभिन्न तरीकों से अपने जीवन को व्यवस्थित करने में करते हैं। हमने संख्याओं का प्रयोग गिनने में किया तथा उन संख्याओं पर आधारभूत संक्रियाओं जैसे जोड़ना, घटाना, गुणा तथा भाग का उपयोग करते हुए दैनिक जीवन की संख्याओं से संबंधित समस्याओं को हल करने में किया।

इस अध्याय में, हम आगे की यात्रा संख्याओं के संग खेलने, अपने आस-पास संख्याओं को देखने, पैटर्नों पर ध्यान देने और नए तरीकों से संख्याओं पर विभिन्न संक्रियाओं का उपयोग करते हुए जारी रखेंगे।

- विभिन्न परिस्थितियों के विषय में सोचिए, जहाँ हम संख्याओं का उपयोग करते हैं। पाँच विभिन्न परिस्थितियों की सूची बनाइए, जहाँ हम संख्याओं का उपयोग करते हैं। अपने सहपाठियों द्वारा बनाई गई सूची को देखिए, उसे साझा कीजिए तथा उस पर चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा

3.1 संख्याएँ हमें कुछ बता सकती हैं

संख्याएँ हमें क्या बताती हैं?

उद्यान (पार्क) में कुछ बच्चे एक पंक्ति में खड़े हैं। प्रत्येक बच्चा एक संख्या बोलता है।

- आपके विचार से इन संख्याओं का क्या अर्थ होगा?

बच्चे अब अपने आप को पुनः व्यवस्थित करते हैं तथा प्रत्येक बच्चा अपनी व्यवस्था के आधार पर पुन: एक संख्या बोलता है।

क्या आप समझ पाए कि ये संख्याएँ क्या दर्शाती हैं?

संकेत— क्या उनकी ऊँचाइयों का यहाँ कोई योगदान है?

एक बच्चा '1' तब कहता है जब उसके बगल में उससे लंबा केवल एक ही बच्चा खड़ा है। एक बच्चा '2' तब कहता है जब उसके बगल में खड़े दोनों बच्चे उससे लंबे हैं। एक बच्चा '0' तब कहता है जब उसके बगल में खड़े बच्चों में से कोई भी उससे लंबा नहीं है। प्रत्येक बच्चा अपने आस-पास उससे लंबे पड़ोसियों की संख्या बताता है।

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए और अपने तर्क को साझा कीजिए—

गणित चर्चा

1. क्या बच्चे अपने आपको इस प्रकार पुन: व्यवस्थित कर सकते हैं कि अंत में खड़े बच्चे '2' कह सकें?
2. क्या हम बच्चों को एक पंक्ति में इस प्रकार खड़ा कर सकते हैं कि सभी '0' कह सकें?
3. क्या दो साथ खड़े बच्चे समान संख्या कह सकते हैं?
4. एक समूह में भिन्न ऊँचाइयों वाले 5 बच्चे हैं। क्या वे इस प्रकार खड़े हो सकते हैं कि उनमें से चार '1' कहें तथा आखिरी '0' कहें? क्यों या क्यों नहीं?
5. क्या 5 बच्चों के इस समूह में 1, 1, 1, 1, 1 का अनुक्रम संभव है?
6. क्या अनुक्रम 0, 1, 2, 1, 0 संभव है? क्यों या क्यों नहीं?
7. आप 5 बच्चों को किस प्रकार व्यवस्थित करेंगे कि अधिक से अधिक बच्चे '2' कह सकें?

3.2 महाकोष्ठ (Supercells)

नीचे दी गई सारणी में लिखी गई संख्याओं का अवलोकन कीजिए। कुछ संख्याओं को रंगीन क्यों किया गया है? चर्चा कीजिए।

43	79	75	63	10	29	28	34

200	577	626	345	790	694	109	198

यदि कोष्ठ (cell) में संख्या, संलग्न कोष्ठों की संख्याओं से बड़ी है, तो उसे रंगीन किया गया है। 626 को रंगीन किया गया है, क्योंकि यह 577 और 345 से बड़ी है, जबकि 200 को रंगीन नहीं किया गया है क्योंकि वह 577 से छोटी है। संख्या 198 को रंगीन किया गया है, क्योंकि इसका केवल एक संलग्न कोष्ठ है जिसमें संख्या 109 लिखी है और संख्या 198, संख्या 109 से बड़ी है।

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई सारणी में महाकोष्ठ को रंगीन या चिह्नित कीजिए।

6828	670	9435	3780	3708	7308	8000	5583	52

2. नीचे दी गई सारणी को चार अंकों वाली संख्याओं से इस प्रकार भरिए कि प्रत्येक रंगीन कोष्ठ ही महाकोष्ठ हो।

5346			1258				9635	

3. नीचे दी गई सारणी को इस प्रकार भरिए कि हमें अधिक से अधिक महाकोष्ठ प्राप्त हों। बिना दोहराए 100 से 1000 के बीच की संख्याओं का उपयोग कीजिए।

4. उपरोक्त सारणी में 9 संख्याओं में से कितने महाकोष्ठ हैं?
5. भिन्न संख्याओं के कोष्ठों में कितने महाकोष्ठ संभव हैं?

गणित चर्चा

क्या आपको इनमें कोई पैटर्न दिखाई देता है? दी गई सारणी को भरने का वह कौन-सा तरीका होगा जिससे हमें अधिक से अधिक महाकोष्ठ प्राप्त हों? ढूँढ़िए और अपनी योजना को साझा कीजिए।

Reprint 2025-26

प्रयास करें

6. क्या आप संख्याओं को बिना दोहराए एक रिक्त महाकोष्ठ सारणी को इस प्रकार भर सकते हैं कि उसमें कोई महाकोष्ठ न हो? क्यों या क्यों नहीं?
7. क्या एक सारणी में सबसे बड़ी संख्या वाला कोष्ठ, हमेशा महाकोष्ठ होगा? क्या एक सारणी में सबसे छोटी संख्या वाला कोष्ठ एक महाकोष्ठ हो सकता है? क्यों या क्यों नहीं?
8. एक सारणी को इस प्रकार से भरिए कि दूसरी सबसे बड़ी संख्या वाला कोष्ठ, महाकोष्ठ न हो।
9. एक सारणी को इस प्रकार से भरिए कि दूसरी सबसे बड़ी संख्या वाला कोष्ठ, महाकोष्ठ न हो, लेकिन दूसरी सबसे छोटी संख्या वाला कोष्ठ एक महाकोष्ठ हो? क्या यह संभव है?
10. इस पहेली के अन्य रूप बनाइए और अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

आइए, इस महाकोष्ठ वाले क्रियाकलाप को और अधिक पंक्तियों के साथ करते हैं।

दी गई सारणियों में समीपवर्ती कोष्ठ वे हैं, जो एकदम बाएँ, दाएँ, ऊपर और नीचे हैं।

नियम वही रहेंगे— एक कोष्ठ महाकोष्ठ होगा, यदि उसमें अंकित संख्या उसके समीपवर्ती कोष्ठों में अंकित संख्या से बड़ी हो। सारणी 1 में संख्या 8632 उसकी सभी समीपवर्ती संख्याओं 4580, 8280, 4795, 1944 से बड़ी है।

सारणी 1

2430	7500	7350	9870
3115	4795	9124	9230
4580	8632	8280	3446
5785	1944	5805	6034

1, 0, 6, 3 और 9 अंकों का किसी भी क्रम में प्रयोग करके पाँच अंकों की संख्याएँ बनाइए और सारणी 2 को पूरा कीजिए। केवल रंगीन कोष्ठ में समीपवर्ती कोष्ठों की संख्याओं से बड़ी होनी चाहिए।

सारणी में सबसे बड़ी संख्या __________ है।

सारणी में सबसे छोटी सम संख्या ________ है।

सारणी 2

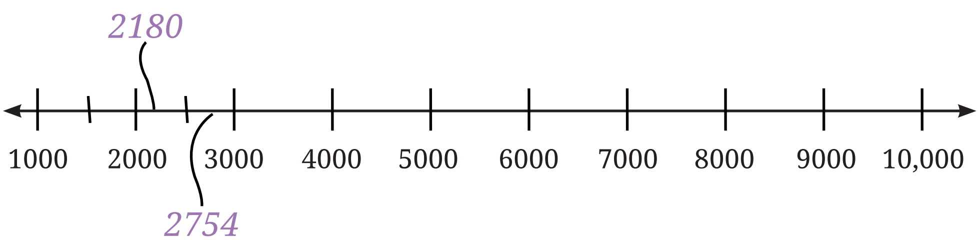
	96,301	36,109	
	13,609	60,319	19,306
		60,193	
	10,963		

सारणी में 50,000 से बड़ी, सबसे छोटी संख्या ____________ है।

दी गई सारणी को पूरा भरकर, हजार के अंक के बाद उपयुक्त स्थान पर अल्प-विराम (,) लगाइए।

3.3 संख्या रेखा पर संख्याओं के पैटर्न

अब हम संख्या रेखा से भली-भाँति परिचित हैं। आइए, देखते हैं कि क्या हम कुछ संख्याओं को संख्या रेखा पर उनके उपयुक्त स्थान पर रख सकते हैं। यहाँ संख्याएँ 2180, 2754, 1500, 3600, 9950, 9590, 1050, 3050, 5030, 5300 और 8400 हैं।

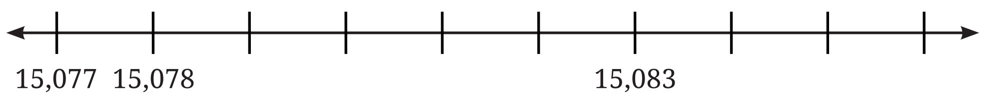


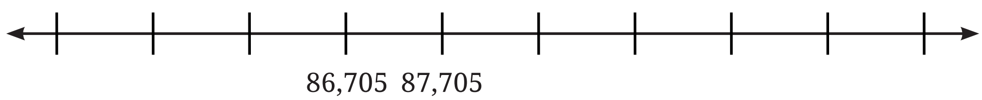
आइए, पता लगाएँ

नीचे दी गई संख्या रेखा पर चिह्नित संख्या को पहचानकर, नीचे दिए गए संख्या अनुक्रमों को पूरा कीजिए।

a. 

b. 

c. 

d. 

उपरोक्त अनुक्रमों में सबसे छोटी संख्या पर गोला लगाइए तथा सबसे बड़ी संख्या पर बॉक्स बनाइए।

3.4 अंकों के साथ खेल

हम संख्याओं को 1, 2, 3, ... से लिखना शुरू करते हैं। 1 अंक वाली 9 संख्याएँ हैं।

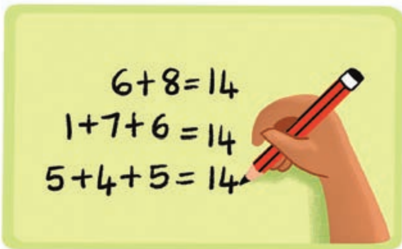
2 अंक, 3 अंक, 4 अंक और 5 अंकों वाली कुल कितनी संख्याएँ होगी ज्ञात कीजिए।

1 अंक वाली संख्याएँ 1 से 9 तक ________	2 अंकों वाली संख्याएँ ________	3 अंकों वाली संख्याएँ ________	4 अंकों वाली संख्याएँ ________	5 अंकों वाली संख्याएँ ________
9				

संख्याओं के अंकों के योग

कोमल जब कुछ संख्याओं के अंकों का योग करती है, तो देखती है कि इन सभी का योगफल समान है।

उदाहरण के लिए, संख्या 68 के अंकों का योगफल वही है, जो संख्या 176 या 545 के अंकों का योग है।



आइए, पता लगाएँ

1. अंकों का योग 14
   a. अन्य संख्याएँ लिखिए जिनके अंकों का योगफल 14 है।
   b. वह सबसे छोटी संख्या कौन-सी है, जिसके अंकों का योगफल 14 है?
   c. 5 अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है, जिसके अंकों का योगफल 14 है?
   d. वह बड़ी से बड़ी कौन-सी संख्या बनाई जा सकती है, जिसके अंकों का योगफल 14 है? क्या आप इससे भी बड़ी संख्या बता सकते हैं?

गणित चर्चा

2. 40 से 70 तक की सभी संख्याओं के अंकों का योगफल ज्ञात कीजिए। अपने अवलोकन को कक्षा के साथ साझा कीजिए।
3. 3 अंकों की उन संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जिनके अंक क्रमागत (जैसे– 345) हों। क्या आप उनमें एक पैटर्न देखते हैं? क्या यह पैटर्न जारी रहेगा?

अंक जासूस

1 से 100 तक संख्याएँ लिखने के पश्चात् दिनेश को आश्चर्य होता है कि उसने कितनी बार अंक '7' लिखा।

1 से 100 तक की संख्याओं में, अंक '7' कितनी बार आएगा? 1 से 1000 तक की संख्याओं में, अंक '7' कितनी बार आएगा?

3.5 आकर्षक विलोमाक्षर पैटर्न (Palendromic Patterns)

आप दी गई संख्याओं में क्या पैटर्न देखते हैं— 66, 848, 575, 797, 1111

इन संख्याओं को बाएँ से दाएँ तथा दाएँ से बाएँ एक जैसा पढ़ा जाता है, देखिए एवं प्रयास कीजिए। ऐसी संख्याओं को **पैलिंड्रोम** या **पैलिंड्रोमिक** संख्याएँ कहते हैं।

1, 2, 3 अंकों का प्रयोग करते हुए सभी पैलिंड्रोमिक संख्याएँ

संख्याएँ 1, 2, 3 अंकों का प्रयोग करके बनी कुछ पैलिंड्रोम संख्याएँ 121, 313 और 222 हैं।

इन अंकों की सहायता से बनने वाली सभी तीन अंकों की पैलिंड्रोमिक संख्याएँ लिखिए।

पैलिंड्रोम संख्याओं को पलटें व जोड़ें

अब इन योगफलों को देखिए और पता लगाइए कि क्या हो रहा है?

इन चरणों का अनुसरण कीजिए— दो अंकों वाली संख्या से शुरू कीजिए। इस संख्या को पलटकर, इसी संख्या में जोडिए। यदि प्राप्त संख्या पैलिंड्रोम है, तो रुक जाइए अन्यथा प्राप्त संख्या को उसके अंकों को पलटने से प्राप्त संख्या (प्रतिलोम) के साथ जोड़कर इन चरणों को दोहराइए।

$$\begin{array}{r} 34 \\ 43 \\ \hline 77 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29 \\ 92 \\ \hline 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ 84 \\ \hline 132 \\ 231 \\ \hline 363 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 76 \\ 67 \\ \hline 143 \\ 341 \\ \hline 484 \end{array}$$

इसी प्रक्रिया को कुछ अन्य संख्याओं के साथ भी कीजिए तथा इन्हीं चरणों को दोहराइए। यदि प्राप्त संख्या पैलिंड्रोम है, तो रुक जाइए। ऐसी कुछ संख्याएँ होंगी, जिनमें पैलिंड्रोम संख्या प्राप्त करने के लिए इस प्रक्रिया को कई बार दोहराना पड़ेगा।

Reprint 2025-26

क्या आपको ऐसी संख्याएँ भी प्राप्त हुईं जहाँ आप पैलिंड्रोम तक नहीं पहुँच पाएँ?

खोजिए

2 अंकों की संख्या से शुरू करके, क्या संख्या और उसके अंकों को पलटने से प्राप्त संख्या (प्रतिलोम) का पुन: योग करके हमेशा पैलिंड्रोम ही प्राप्त होता है? खोजिए और ज्ञात कीजिए।*

गणित चर्चा

पहेली

tth	th	h	t	u

अंको को शब्दों में लिखिए—

मैं 5 अंकों का एक पैलिंड्रोम हूँ।
मैं एक विषम संख्या हूँ।
मेरा दहाई का अंक, इकाई के अंक से दो गुना है।
मेरा सैकड़े का अंक, दहाई के अंक से दो गुना है।
मैं कौन हूँ? ________________

3.6 कापरेकर की जादुई संख्या

डी.आर. कापरेकर, महाराष्ट्र के देवलाली में एक सरकारी स्कूल में गणित के अध्यापक थे। उन्हें संख्याओं के साथ खेलना बहुत पसंद था। उन्होंने संख्याओं के बहुत से आकर्षक पैटर्न खोजें, जो पहले ज्ञात नहीं थे।

1949 में जब वह 4 अंकों की संख्याओं के साथ खेल रहे थे, तो खेल-खेल में उन्होंने एक जादुई तथ्य खोजा।

**(उत्तर हाँ है, 3 अंकों की संख्या के लिए उत्तर अज्ञात है। ऐसा ज्ञात हुआ है कि 196 से शुरू करने पर हमें कभी भी पैलिंड्रोम प्राप्त नहीं होगा)*

निम्नलिखित चरणों का उपयोग करते हुए, स्वयं इस जादू का अनुभव कीजिए। एक चार अंकों की संख्या माना, 6382 लीजिए।

एक चार अंकों की संख्या लीजिए।

↓

इन अंकों के उपयोग से सबसे बड़ी संख्या बनाइए, उसे A कहिए।

↓

इन अंकों के उपयोग से सबसे छोटी संख्या बनाइए, उसे B कहिए।

↓

A में से B को घटाइए। प्राप्त अंतर को संख्या C कहिए। $C = A - B$

अंक C का प्रयोग

तब, क्या होता है, जब हम इस प्रक्रिया को आगे जारी रखते हैं?

A = 8632	A = 6642	A = 7641	A =
B = 2368	B = 2466	B = 1467	B =
C = 8632–2368	C = 6642–2466	C = 7641–1467	C =
= 6264	= 4176	= 6174	

खोजिए

4 अंकों की कोई अन्य संख्या लेकर इन चरणों का अनुसरण करके प्रयास कीजिए। पता लगाइए कि क्या होता है? अपने मित्रों के साथ जाँच कीजिए कि उन्हें क्या संख्या प्राप्त हुई?

आप सदैव एक जादुई संख्या '6174' प्राप्त करेंगे। इस संख्या 6174 को कापरेकर स्थिरांक कहा जाता है।

इन्हीं चरणों को कुछ 3 अंकों वाली संख्याओं के साथ दोहराइए। कौन-सी संख्या दोहराना शुरू होगी?

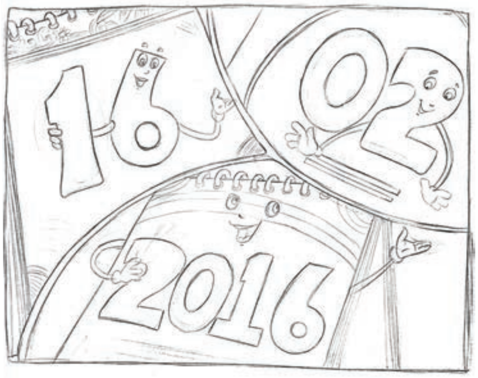
Reprint 2025-26

3.7 घड़ी और कैलेंडर की संख्याएँ

सामान्य 12 घंटे वाली घड़ी में कुछ समयों में पैटर्न दिखाई देता है। उदाहरण के लिए— 4:44, 10:10 और 12:21।

- 12 घंटे की घड़ी में इस प्रकार के सभी संभव समयों को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

मनीष का जन्मदिन 20/12/2012 को है, जहाँ अंक '2', '0', '1' और '2' उसी क्रम में दोहराए जाते हैं।



- बीते समय में इस प्रकार की कुछ अन्य तिथियों को ज्ञात कीजिए।

उसकी बहन मेघना का जन्मदिन 11/02/2011 को है, इसमें बाएँ से दाएँ तथा दाएँ से बाएँ अंकों को एक जैसा ही पढ़ा जाता है।

- बीते हुए समय से इसी प्रकार की सभी संभावित तिथियों को ज्ञात कीजिए।

जीवन इस वर्ष के कैलेंडर को देख रहा था। उसे देखकर वह आश्चर्यचकित हो गया कि 'हम कैलेंडर को प्रत्येक वर्ष क्यों बदलते हैं? क्या हम कैलेंडर का पुन: प्रयोग नहीं कर सकते?' इस विषय में आप क्या सोचते हैं?

आपने ध्यान दिया होगा कि पिछले वर्ष का कैलेंडर इस वर्ष के कैलेंडर से अलग था। इस प्रकार अगले वर्ष का कैलेंडर भी पिछले वर्षों के कैलेंडर से अलग है।

- लेकिन, क्या किसी वर्ष का कैलेंडर कुछ वर्षों बाद दोहराया जाएगा? क्या किसी वर्ष की सभी तिथियाँ और दिन, ठीक किसी दूसरे वर्ष के कैलेंडर के साथ पूर्णतया मेल करेंगी?

प्रयास करें

आइए, पता लगाएँ

1. प्रतिभा अंकों '4','7','3' और '2' का उपयोग करके 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या 7432 तथा सबसे छोटी संख्या 2347 बनाती है। इन दोनों संख्याओं का अंतर 7432 – 2347 = 5085 है। इन दोनों संख्याओं का योगफल 9779 है। निम्नलिखित कथन को हल करने के लिए 4 अंकों को चुनिए—

   a. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का अंतर 5085 से अधिक हो।

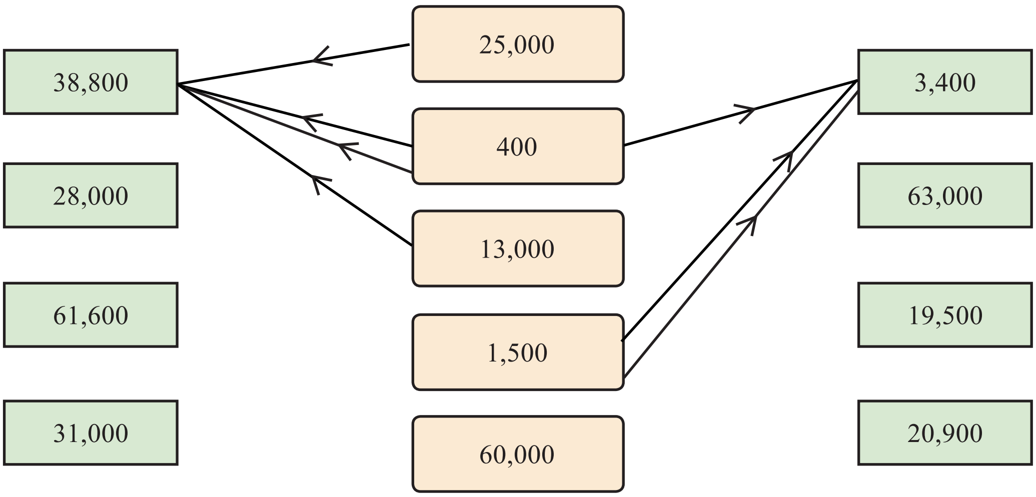
   b. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का अंतर 5085 से कम हो।

   c. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का योगफल 9779 से अधिक हो।
   d. सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या का योगफल 9779 से कम हो।

2. 5 अंकों के सबसे बड़े तथा सबसे छोटे पैलिंड्रोम (विलोमाक्षर) का योगफल क्या होगा? उनका अंतर क्या होगा?
3. घड़ी में इस समय 10:01 बजे हैं। कितने मिनट लगेंगे जब तक की घड़ी अगला पैलिंड्रोम दिखाती है? इस पैलिंड्रोम के बाद आप अगले के बारे में क्या कहेंगे?
4. संख्या 5683 को कापरेकर स्थिरांक तक पहुँचने की प्रक्रिया में कितने चरण लगेंगे?

3.8 मानसिक गणित

नीचे दी गई आकृति का अवलोकन कीजिए। आप खींची गई रेखाओं और संख्याओं के विषय में क्या सोचते हैं?



मध्य स्तंभ (कॉलम) की संख्याओं को विभिन्न तरीकों से जोड़कर, साथ वाले स्तंभों की संख्याओं को प्राप्त किया जा सकता है (1500 + 1500 + 400 = 3400)। वांछित योगफल को प्राप्त करने के लिए मध्य स्तंभ की संख्याओं का आवश्यकता अनुसार कई बार प्रयोग किया जा सकता है। वांछित योगफल को प्राप्त करने के लिए मध्य स्तंभ की संख्या और साथ वाले स्तंभ की संख्या को तीर के निशान लगाकर दर्शाइए।

नीचे दो उदाहरण दिए गए हैं, जिन्हें मानसिक रूप से हल करना अधिक सरल है।

38,800 = 25,000 + 400 × 2 + 13,000

3400 = 1500 + 1500 + 400

गणित चर्चा

क्या हम मध्य स्तंभ की संख्याओं का प्रयोग करके 1000 बना सकते हैं? क्यों नहीं? 14000, 15000 और 16000 के विषय में आपका क्या विचार है? हाँ, यह संभव है। खोज करके देखिए कैसे? कौन-सा हजार नहीं बनाया जा सकता है?

जोड़ना और घटाना

नीचे बॉक्स में दी गई संख्याओं का प्रयोग करके वांछित संख्या को प्राप्त करने के लिए हमें जोड़ने और घटाने की अनुमति है। स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण दिया गया है—

40,000	7,000
300	1,500
12,000	800

39,800 = 40,000 – 800 + 300 + 300

45,000 =

5,900 =

17,500 =

21,400 =

अंक और संक्रियाएँ

5 अंकों की दो संख्याओं को जोड़कर 5 अंकों की अन्य संख्या को प्राप्त करने का एक उदाहरण है—

12,350 +24,545 = 36,895

5 अंकों की दो संख्याओं को घटाकर 5 अंकों की संख्या को प्राप्त करने का एक उदाहरण है—

48,952 – 24,547 = 24,405

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति के लिए जहाँ भी संभव हो, वहाँ एक उदाहरण लिखिए।

5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से प्राप्त 5 अंकों की संख्या जो 90,250 से अधिक हो।	5 अंकों की संख्या + 3 अंकों की संख्या से 6 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	4 अंकों की संख्या + 4 अंकों की संख्या से 6 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से 6 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से संख्या 18,500 प्राप्त करना।
5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से 56,503 से छोटी संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 3 अंकों की संख्या से 4 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 4 अंकों की संख्या से 4 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से 3 अंकों की संख्या प्राप्त करना।	5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से संख्या 91,500 प्राप्त करना।

गणित चर्चा

क्या आप दी गई सभी स्थितियों के लिए उपयुक्त उदाहरण खोज पाए? यदि नहीं, तो सोचिए और चर्चा कीजिए कि इसका क्या कारण हो सकता है? ऐसे ही कुछ और प्रश्न तैयार कीजिए एवं अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

2. हमेशा, कभी-कभी, कभी नहीं?

नीचे कुछ कथन दिए गए हैं। सोचिए, खोजिए और ज्ञात कीजिए कि क्या प्रत्येक कथन 'हमेशा सत्य है', 'केवल कभी-कभी सत्य है' 'या कभी सत्य नहीं है'। आप ऐसा क्यों सोचते हैं? अपने तर्क लिखिए और कक्षा में चर्चा कीजिए।

a. 5 अंकों की संख्या + 5 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 5 अंकों की संख्या।

b. 4 अंकों की संख्या + 2 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 4 अंकों की संख्या।

c. 4 अंकों की संख्या + 2 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 6 अंकों की संख्या।

d. 5 अंकों की संख्या – 5 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 5 अंकों की संख्या।

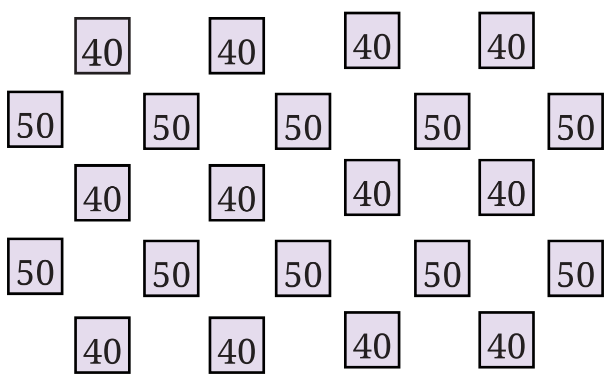
e. 5 अंकों की संख्या – 2 अंकों की संख्या से प्राप्त होती है, एक 3 अंकों की संख्या।

3.9 संख्या पैटर्न के साथ खेलना

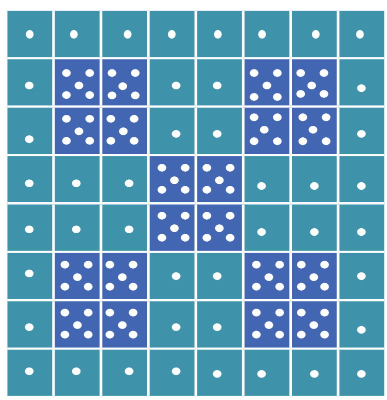
नीचे कुछ संख्याओं को कुछ पैटर्नों में व्यवस्थित किया गया है। नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए। क्या हमें उन्हें एक-एक करके जोड़ना चाहिए या इसके लिए हम किसी शीघ्र विधि का उपयोग कर हल कर सकते हैं?

इन प्रश्नों को हल करने के लिए आपने जिन अलग-अलग विधियों का प्रयोग किया है, उसे कक्षा में साझा कीजिए और चर्चा कीजिए।

a.

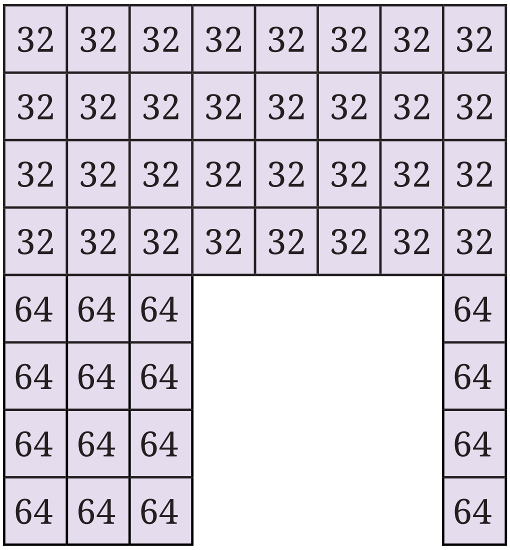


b.

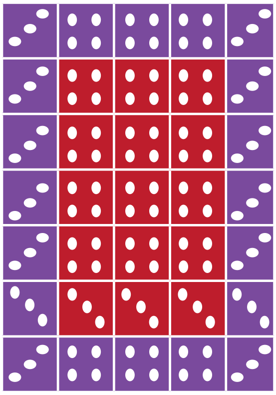


Reprint 2025-26

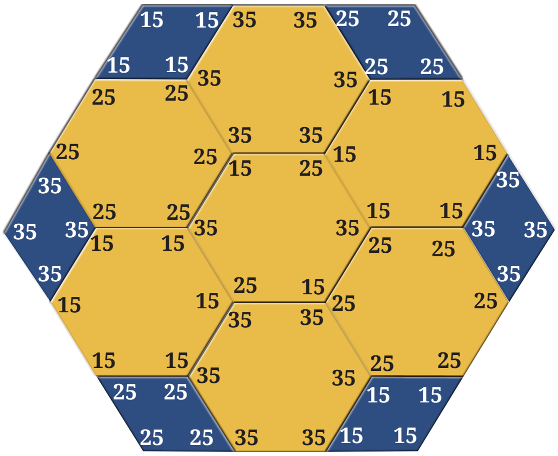
c.



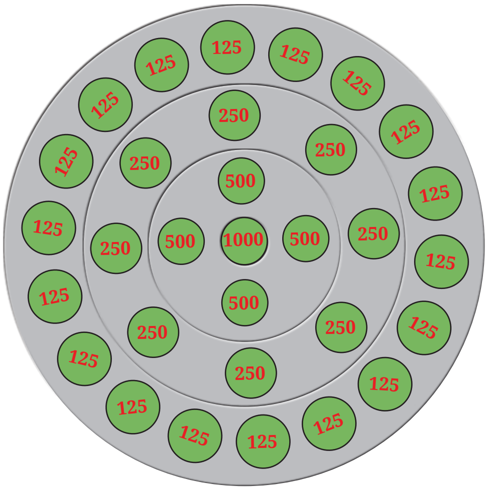
d.



e.



f.



3.10 एक अनसुलझा रहस्य—कोलाट्ज़ अनुमान (Collatz Conjecture)

नीचे दिए गए अनुक्रमों को देखिए—सभी अनुक्रमों में एक ही नियम लागू होता है—

a. 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

b. 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

c. 21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

d. 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

क्या आप बता सकते हैं कि इन अनुक्रमों को किस प्रकार बनाया गया है?

नियम— किसी भी एक संख्या से शुरू करते हैं; यदि संख्या सम संख्या है तो उसका आधा करेंगे और यदि संख्या विषम संख्या है तो उसे 3 से गुणा करके उसमें 1 जोड़ेंगे। इस प्रक्रिया को दोहराइए।

ध्यान दीजिए कि पृष्ठ संख्या 68 पर दिए गए चारों अनुक्रमों में हम अंत में 1 पर पहुँचते हैं। सन् 1937 में, जर्मन के गणितज्ञ लोथर कोलाट्ज़ (Lothar Collatz) ने अनुमान लगाया कि उपरोक्त जैसा प्रत्येक अनुक्रम हमेशा 1 पर पहुँचेगा, चाहे हमने किसी भी पूर्ण संख्या से शुरुआत की हो।

आज भी बहुत से गणितज्ञ इस पर कार्य कर रहे हैं। यह हमेशा एक अनसुलझी समस्या है कि क्या कोलाट्ज़ अनुमान सत्य है? गणित में कोलाट्ज़ अनुमान अत्यधिक विख्यात अनसुलझी समस्याओं में से एक है।

प्रत्येक अनुक्रम को अपने पसंद की पूर्ण संख्या से शुरू करके ऊपर जैसे कुछ और कोलाट्ज अनुक्रम बनाइए। क्या आप हमेशा 1 पर पहुँचते हैं?

क्या आपको लगता है कि कोलाट्ज़ के अनुमान में इस प्रकार का प्रत्येक अनुक्रम 1 पर पहुँचेगा? क्यों और क्यों नहीं?

3.11 सरल आकलन

कई बार हम वस्तुओं की सही संख्या को नहीं जानते और न ही उनकी आवश्यकता होती है और एक अनुमान ही उद्देश्य के लिए पर्याप्त होता है। उदाहरण के लिए, आपके विद्यालय के मुख्य अध्यापक, आपके विद्यालय में नामांकित विद्यार्थियों की सही संख्या जानते हों, संभवत: आप केवल अनुमानित संख्या ही जानते होंगे। आपके विद्यालय में कुल कितने विद्यार्थी हैं? लगभग 150?, 400?, 1000?

परोमिता की एक कक्षा में 32 बच्चे हैं। उनकी कक्षा के दो अन्य विभागों (सेक्शन) में 29 और 35 बच्चे हैं। इसलिए उन्होंने अनुमान लगाया कि उसकी कक्षा में लगभग 100 बच्चे हैं। कक्षा 6 के साथ उसके स्कूल में कक्षाएँ 7–10 भी हैं तथा प्रत्येक कक्षा में 3 भाग (सेक्शन) हैं। उन्होंने माना कि प्रत्येक कक्षा में बच्चों की संख्या समान है और आकलन किया कि उनके विद्यालय में विद्यार्थियों की अनुमानित संख्या लगभग 500 है।

आइए, पता लगाएँ

अब हम कुछ सरल आकलन करेंगे। यह एक मनोरंजक अभ्यास है और इसके द्वारा आप अपने आस-पास की विभिन्न संख्याओं को जानकर प्रसन्न होंगे। याद रखिए, दिए गए प्रश्नों के लिए सही संख्या जानने में हमारी रूचि नहीं है। अपने आकलन के तरीके को कक्षा के साथ साझा कीजिए।

Reprint 2025-26

1. आपके द्वारा चलने के लिए उठाए गए कदम—
   a. जिस स्थान पर आप बैठे हैं से लेकर कक्षा के दरवाजे तक
   b. विद्यालय के मैदान के चारों ओर सिरे से सिरे तक
   c. कक्षा के दरवाजे से विद्यालय के दरवाजे तक
   d. आपके विद्यालय से आपके घर तक
2. आपके द्वारा आँखों को झपकने की संख्या या आपके द्वारा ली गई साँसों की संख्या—
   a. एक मिनट में
   b. एक घंटे में
   c. एक दिन में
3. अपने आसपास ऐसी वस्तुएँ ज्ञात कीजिए जिनकी संख्या—
   a. कुछ हजार है   b. दस हजार से अधिक है

उत्तर का आकलन कीजिए

30 सेकेंड के अंदर अनुमान लगाने का प्रयास कीजिए। अपने अनुमान को अपने दोस्तों के साथ जाँचिए।

1. आप की गणित की पाठ्यपुस्तक में शब्दों की संख्या—
   a. 5000 से अधिक   b. 5000 से कम
2. आपके विद्यालय में बस द्वारा आने वाले विद्यार्थियों की संख्या—
   a. 200 से अधिक   b. 200 से कम
3. रोशन 5 व्यक्तियों के लिए फ्रूट कस्टर्ड बनाने के लिए दूध और 3 प्रकार के फल खरीदना चाहता है। उसका अनुमान है कि फ्रूट कस्टर्ड बनाने की लागत ₹100 है। क्या आप उससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?
4. गांधीनगर (गुजरात में) और कोहिमा (नागालैंड में) के बीच की दूरी का आकलन कीजिए।
   संकेत— इन शहरों का पता लगाने के लिए भारत के मानचित्र को देखिए
5. शीतल कक्षा 6 में है और कहती है कि उसने विद्यालय में आज तक लगभग 13000 घंटे व्यतीत किए हैं? क्या आप उससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

6. पुराने समय में यातायात के साधन उपलब्ध नहीं होने के कारण लोग लंबी दूरी पैदल चलकर तय करते थे। माना आप अपनी सामान्य गति से चलते हैं। आपको निम्न स्थानों से जाने में लगभग कितना समय लगेगा?
   a. आपके वर्तमान स्थान से आपके आसपास के एक पसंदीदा स्थान तक
   b. आपके वर्तमान स्थान से किसी पड़ोसी राज्य की राजधानी तक
   c. भारत के सुदूर दक्षिणी बिंदु से भारत के सुदूर उत्तरी बिंदु तक
7. आकलन के कुछ प्रश्न बनाइए और अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

3.12 खेल और जीतने की युक्तियाँ

संख्याओं का उपयोग खेल खेलने और जीतने की युक्तियों को बनाने में भी किया जा सकता है।

यहाँ एक प्रसिद्ध खेल दिया जा रहा है, जिसे 21 कहा जाता है। इसे एक सहपाठी के साथ खेलें। इसे घर में भी खेलने का प्रयास करें।

खेल 1 के लिए नियम— पहला खिलाड़ी 1 और 3 के बीच एक संख्या बोलता है। अब दोनों खिलाड़ी बारी-बारी से पहले बोली गई संख्या में 1, 2 या 3 जोड़ते हैं। जो पहले 21 पर पहुँचेगा, वह जीतेगा!

इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ कई बार खेलिए। क्या आपको जीतने की युक्ति दिखने लगी है?

कौन-सा खिलाड़ी हमेशा जीत सकता है, यदि वह सही पैटर्न से खेलता है? जीतने वाले खिलाड़ी को कौन-सी संख्या का पैटर्न आना चाहिए?

इस खेल में बहुत से परिवर्तन किए जा सकते हैं। यहाँ एक और अन्य परिवर्तन देखिए।

खेल 2 के लिए नियम— पहला खिलाड़ी 1 से 10 तक के बीच कोई संख्या बोलता है। अब दोनों खिलाड़ी बारी-बारी से पहली बोली गई संख्या में 1, 2 या 3 जोडते हैं। जो खिलाड़ी पहले 99 पर पहुँचेगा वह जीतेगा।

इस खेल को अपने सहपाठियों के साथ कई बार खेलिए। देखिए क्या आप जीतने की संगत रणनीति को समझ पा रहे हैं? कौन-सा खिलाड़ी हमेशा जीत सकता है। इस बार जीतने वाले खिलाड़ी की संख्या का पैटर्न क्या होगा?

Reprint 2025-26

इस खेल में अपने आप से परिवर्तन कीजिए। स्वयं निर्धारित कीजिए कि प्रत्येक बार में कितना जोड़ा जा सकता है और कौन-सी संख्या जीतने वाली संख्या है। अब इस खेल को कई बार खेलिए और जीतने की रणनीति को जानिए कि कौन-सा खिलाड़ी हमेशा खेल जीत सकता है।

आइए, पता लगाएँ

प्रयास करें

1. यहाँ इस ग्रिड में, केवल एक महाकोष्ठ है (अपने पड़ोस की सभी संख्याओं में बड़ी संख्या)। यदि आप इनमें से किसी एक संख्या के दो अंकों की अदला-बदली करते हैं, तो यहाँ 4 महाकोष्ठ बन जाते हैं। जानिए कि कौन-से अंकों की अदला-बदली की जानी चाहिए।

16,200	39,344	29,765
23,609	62,871	45,306
19,381	50,319	38,408

2. अपने जन्म वर्ष से शुरू करके आप कितने चरण में कापरेकर स्थिरांक पर पहुँच जाएँगे?
3. हम 35,000 और 75,000 के बीच पाँच अंकों की संख्याओं का वह समूह है, जिसके सभी अंक विषम हैं। हमारे समूह की सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है? हमारे समूह की सबसे छोटी संख्या कौन-सी है? हम में से कौन-सी संख्या 50,000 के अत्यधिक निकट है?
4. आकलन कीजिए कि आपको वर्ष में सप्ताहांतों (Weakends), त्योहारों और छुट्टियों को मिलाकर कुल कितनी छुट्टियाँ मिलती हैं। अब अपनी छुट्टियों की सही संख्या का पता लगाइए और देखिए कि सही संख्या आपके आकलन के कितना समीप है।
5. एक जग, एक बाल्टी और एक छत पर रखी टंकी की क्षमता का लीटर में आकलन कीजिए।
6. एक 5 अंकों की संख्या तथा दो 3 अंकों की संख्याएँ इस प्रकार लिखिए कि उनका योगफल 18,670 हो।
7. 210 और 390 के बीच एक संख्या चुनिए। अनुच्छेद 3.9 में दिए गए संख्या पैटर्न के समान एक पैटर्न निर्मित कीजिए, जिसमें यह चुनी गई संख्या योगफल हो।
8. अध्याय 1 की सारणी 1 से, 2 की घात का अनुक्रम याद कीजिए। इस अनुक्रम में शुरू की सभी संख्याओं के लिए कोलाट्ज अनुमान सही क्यों है?
9. यदि कोई व्यक्ति संख्या 100 से शुरू करता है, तो क्या कोलाट्ज अनुमान लागू होगा, इस विषय की जाँच कीजिए।
10. शून्य से प्रारंभ करते हुए खिलाड़ी बारी-बारी से 1 और 3 के बीच संख्या को जोड़ता है, जो व्यक्ति 22 पर पहले पहुँचेगा, वह विजयी होगा। अब जीतने की युक्ति क्या होगी?

Reprint 2025-26

सारांश

- संख्याओं का उपयोग सूचना को पहुँचाने, पैटर्न बनाने और खोजने, महत्वपूर्ण आकलन, पहेलियाँ बनाने एवं हल करने, खेलने और खेल में जीतने जैसे कई अलग-अलग उद्द्देश्यों के लिए किया जा सकता है।
- संख्याओं को सूत्रबद्ध व सही विधि से उपयोग करने के बारे में सोचने का उद्देश्य एक लाभदायक कौशल और क्षमता है (इसे अभिकलनात्मक सोच कहते हैं)।
- संख्याओं के बारे में बहुत-सी समस्याओं को उठाना तो बहुत सरल है, लेकिन उन्हें हल करना बहुत कठिन होता है। वास्तव में ऐसी बहुत-सी समस्याएँ हैं जो अभी भी अनसुलझी हैं (उदाहरण के लिए, कोलाट्ज अनुमान)।

Reprint 2025-26

4

आँकड़ों का प्रबंधन और प्रस्तुतिकरण

0675CH04

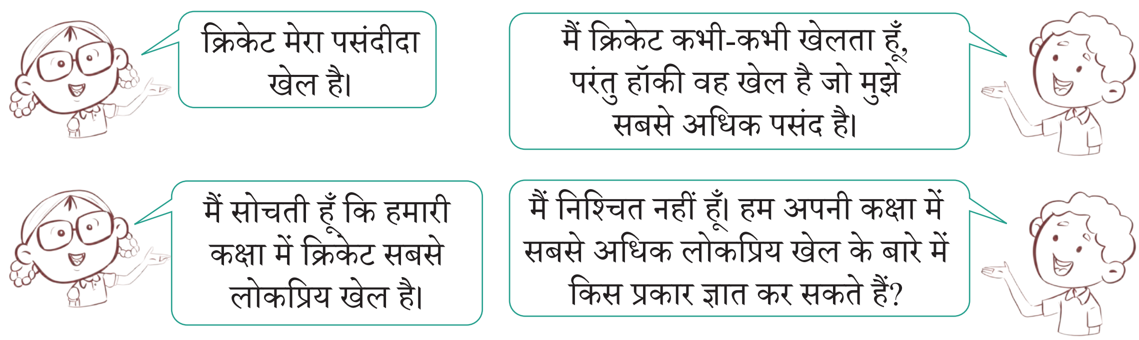
यदि आप अपने कक्षा-सहपाठियों से उनकी पसंद के रंगों के बारे में पूछेंगे, तो आपको रंगों की एक सूची प्राप्त हो जाएगी। यह सूची आँकड़ों का एक उदाहरण है। इसी प्रकार, यदि आप अपनी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी का वजन मापेंगे, तो आपको भार के मापकों का एक संग्रह प्राप्त हो जाएगा— जो पुन: **आँकड़े** ही हैं।

तथ्यों, संख्याओं, मापनों, प्रेक्षणों या वस्तुओं के अन्य विवरणों के संग्रह, जो हमें उन वस्तुओं के विषय में सूचना प्रदान करते हैं, आँकड़े कहलाते हैं।

हम सूचनाओं के युग में रह रहे हैं। हम निरंतर अपने सम्मुख नई और रोचक विधियों से प्रस्तुत किए गए आँकड़ों को बड़ी मात्रा में देखते हैं। इस अध्याय में हम ऐसी कुछ विधियों को जानेंगे, जिनसे आँकड़ों को प्रस्तुत किया जाता है। साथ ही हम यह भी ज्ञात करेंगे कि इनमें से कुछ विधियों का प्रयोग किस प्रकार आँकड़ों को सही रूप से प्रदर्शित करने, उनकी व्याख्या करने तथा उनसे निष्कर्ष निकालने के लिए किया जा सकता है।

4.1 आँकड़ों का संग्रहण और संगठन

नव्या और नरेश अपने-अपने प्रिय खेल के विषय में चर्चा कर रहे हैं—



अपनी कक्षा में सबसे अधिक लोकप्रिय खेल का पता लगाने के लिए, नव्या और नरेश को क्या करना चाहिए? क्या आप उनकी सहायता कर सकते हैं?

नरेश और नव्या ने कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी के पास जाकर यह पूछने का निर्णय किया कि उनका पसंदीदा खेल क्या है। फिर उन्होंने एक सूची तैयार की।

नव्या एक सूची दर्शा रही है—

मेहनूर – कबड्डी	पुष्कल – सतोलिया (पिट्ठू)	अनाया – कबड्डी
जुबिमोन – हॉकी	डेंसी – बैडमिंटन	जिविशा – सतोलिया (पिट्ठू)
सिमरन – कबड्डी	जीविका – सतोलिया (पिट्ठू)	राजेश – फुटबॉल
नंद – सतोलिया (पिट्ठू)	लीला – हॉकी	थारा – फुटबॉल
अंकिता – कबड्डी	अफशां – हॉकी	सौम्या – क्रिकेट
इमोन – हॉकी	कीरत – क्रिकेट	नवजोत – हॉकी
युवराज – क्रिकेट	गुरप्रीत – हॉकी	हेमल – सतोलिया (पिट्ठू)
रेहाना – हॉकी	अर्श – कबड्डी	देबव्रत – फुटबॉल
आर्ना – बैडमिंटन	भव्या – क्रिकेट	अनन्या – हॉकी
कोम्पाल – फुटबॉल	साराह – कबड्डी	हार्दिक – क्रिकेट
ताहिरा – क्रिकेट		

वह प्रसन्नतापूर्वक कहती है, "मैंने आँकड़े संग्रहित कर लिए हैं। अब मैं सबसे अधिक लोकप्रिय खेल बता सकती हूँ।"

कुछ अन्य बच्चे उस सूची को देख रहे हैं और आश्चर्य कर रहे हैं। उन्होंने कहा, "हम अभी भी सबसे अधिक लोकप्रिय खेल को नहीं देख पा रहे हैं। इस सूची से हम इसे कैसे प्राप्त कर सकते हैं?"

आइए, पता लगाएँ

1. नरेश और नव्या के कक्षा-सहपाठियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय खेल को आप कैसे ज्ञात करेंगे?
2. उनकी कक्षा में सबसे अधिक लोकप्रिय खेल कौन-सा है?
3. अपने कक्षा-सहपाठियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय खेल को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।
4. परी आगे दिए प्रश्नों के उत्तर देना चाहती है। जिन प्रश्नों के उत्तरों के लिए उसे आँकड़ों को संग्रहित करने की आवश्यकता है, उनके सम्मुख सही का चिह्न ☑ लगाइए तथा जिन प्रश्नों के उत्तरों के

लिए उसे आँकड़ों को संग्रहित नहीं करना पड़ेगा, उनके सम्मुख एक क्रॉस का चिह्न ☒ लगाइए। अपने उत्तरों की कक्षा में चर्चा कीजिए।

a. उसके कक्षा-सहपाठियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय टी.वी. शो कौन-सा है? ☐

b. भारत ने स्वतंत्रता कब प्राप्त की थी? ☐

c. उसके मोहल्ले या बस्ती में कितना पानी नष्ट हो रहा है? ☐

d. भारत की राजधानी क्या है? ☐

श्री नीलेश एक अध्यापक हैं। उन्होंने नववर्ष मनाने के लिए कक्षा में मिठाइयाँ लाने का निश्चय किया। पास की मिठाई की दुकान में जलेबी, गुलाब जामुन, गुजियाँ, बर्फी और रसगुल्ले उपलब्ध हैं। वे विद्यार्थियों की पसंद जानना चाहते थे। उन्होंने बोर्ड पर मिठाइयों के नाम लिखे तथा प्रत्येक विद्यार्थी से अपनी-अपनी प्राथमिकता बताने के लिए कहा। उन्होंने प्रत्येक विद्यार्थी के लिए एक मिलान चिह्न (tally mark) '|' लगाया और जब गिनती 5 पर पहुँची, तब उन्होंने पिछले चार चिह्नों को तिरछी काटती एक रेखा खींच कर इसे '卌' के रूप में अंकित किया।

मिठाई	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
जलेबी	卌 |	6
गुलाब जामुन	卌 ||||	9
गुजियाँ	卌 卌 |||	________
बर्फी	|||	________
रसगुल्ला	卌 ||	________

आइए, पता लगाएँ

1. मिठाइयों को सही संख्याओं में खरीदने में श्री नीलेश की सहायता करने के लिए, उपरोक्त सारणी को पूरा कीजिए—

   a. कितने विद्यार्थियों ने जलेबी का चयन किया है? ☐

   b. बर्फी को ☐ विद्यार्थियों द्वारा चुना गया।

   c. गुजियाँ को कितने विद्यार्थियों ने चुना है? ☐

   d. रसगुल्ले को ☐ विद्यार्थियों द्वारा चुना गया।

   e. कितने विद्यार्थियों ने गुलाब जामुन का चयन किया है? ☐

Reprint 2025-26

श्री नीलेश ने अपने एक कर्मचारी को सारणी में दिए गए विवरण अनुसार मिठाईयाँ खरीद कर लाने का अनुरोध किया। दी गई सारणी से उन्हें सही संख्या में मिठाइयाँ खरीदने में सहायता मिली।

2. क्या दी गई सारणी प्रत्येक बच्चे को सही प्रकार की मिठाई वितरित करने के लिए पर्याप्त है? व्याख्या कीजिए। यदि यह पर्याप्त नहीं है, तो इसका विकल्प क्या है?

आँकड़ों को संगठित (organize) करने के लिए, हम एक स्तंभ में प्रत्येक मिठाई का नाम लिख सकते हैं तथा अन्य स्तंभों में उन मिठाइयों को चुनने वाले विद्यार्थियों की संख्या लिख सकते हैं। इसके साथ ही मिलान चिह्नों का उपयोग कर सकते हैं। संख्याएँ 6, 9, ... चुनी गई मिठाइयों जलेबी, गुलाब जामुन, ... की क्रमशः **बारंबारताएँ (frequencies)** हैं।

सुश्री संध्या ने अपने विद्यार्थियों से उनके जूतों के साइज के विषय में पूछा। उन्होंने प्राप्त आँकड़ों को बोर्ड पर लिखा—

4	**5**	**3**	**4**	**3**	**4**	**5**	**5**	**4**
5	**5**	**4**	**5**	**6**	**4**	**3**	**5**	**6**
4	**6**	**4**	**5**	**7**	**5**	**6**	**4**	**5**

फिर उन्होंने विद्यार्थियों के जूतों के साइज को आरोही (ascending) क्रम में व्यवस्थित किया—
3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने में सुश्री संध्या की सहायता कीजिए—
   a. कक्षा में जूतों का अधिकतम साइज _______ है।
   b. कक्षा में जूतों का न्यूनतम साइज _______ है।
   c. _______ विद्यार्थी हैं, जो 5 के साइज का जूता पहनते हैं।
   d. _______ विद्यार्थी हैं, जो 4 से बड़े साइज का जूता पहनते हैं।
2. आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने से उक्त प्रश्नों का उत्तर देने में किस प्रकार की सहायता प्राप्त हुई?
3. क्या आँकड़ों को व्यवस्थित करने की अन्य विधियाँ भी हैं?

गणित चर्चा

4. कुछ ऐसे पेड़ों के नाम लिखिए जो आप अपने आस-पास वातावरण में देखते हैं। जब आप अपने घर से विद्यालय की ओर जाते हुए कोई पेड़ देखते हैं (या एक स्थान से दूसरे स्थान तक पैदल चलते हुए), तब प्राप्त हुए आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी में भरिए—

पेड़	पेड़ों की संख्या
पीपल	
नीम	
...	
....	

a. कौन-सा पेड़ अधिकतम संख्या में मिला?

b. कौन-सा पेड़ न्यूनतम संख्या में मिला?

c. क्या ऐसे दो पेड़ पाए गए, जिनकी संख्याएँ समान थीं?

5. एक कोरा कागज लीजिए तथा उस पर एक समाचार पत्र से लिया हुआ कोई एक छोटा समाचार चिपकाइए। प्रत्येक विद्यार्थी एक भिन्न लेख का उपयोग कर सकता है। अब कागज पर नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी तैयार कीजिए। प्रत्येक ऐसे छोटे समाचार के शब्दों में अक्षरों 'c', 'e', 'i', 'r' और 'x' की संख्याएँ गिनिए तथा निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए।

अक्षर	c	e	i	r	x	स्वयं के द्वारा चयनित किया हुआ कोई अक्षर
छोटे समाचार में प्राप्त हुए अक्षरों की संख्या						

a. सबसे अधिक बार प्राप्त हुआ अक्षर ...... है।

b. सबसे कम बार प्राप्त हुआ अक्षर .... है।

c. इन पाँचों अक्षरों 'c', 'e', 'i', 'r' और 'x' को उनकी बारंबारता के आरोही क्रम में लिखकर सूची बनाइए। अब अपनी सूची के क्रम की कक्षा-सहपाठियों की सूचियों के क्रमों से तुलना कीजिए। क्या आपका क्रम अन्य सहपाठियों के क्रमों के समान है या लगभग समान है? (लगभग प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा क्रम 'c', 'e', 'i', 'r' और 'x' प्राप्त होने की संभावना है!) आपके विचार से ऐसा क्यों है?

Reprint 2025-26

d. वह प्रक्रिया लिखिए जिसे आपने इस कार्य को पूरा करने में अपनाया है।

e. अपने मित्रों के साथ उनके द्वारा अपनाई गई प्रक्रियाओं के बारे में चर्चा कीजिए।

f. यदि आप यही कार्य एक अन्य समाचार के साथ करते हैं, तो आप किस प्रक्रिया को अपनाएँगे?

अध्यापक टिप्पणी

विद्यार्थियों को आँकड़ों को संग्रहित और संगठित करने के और अधिक अवसर प्रदान कीजिए। विद्यार्थियों से यह अनुमान लगाने के लिए कहिए कि उनकी कक्षा में विद्यार्थियों के बीच सबसे अधिक लोकप्रिय रंग, खेल, खिलौना, विद्यालयी विषय इत्यादि कौन-सा है। इसके साथ ही इस विषय में आँकड़े एकत्रित (संग्रहित) करना एक ऐसा आनंददायक क्रियाकलाप हो सकता है जिससे वे अपने कक्षा-सहपाठियों के बारे में और अधिक जानकारी प्राप्त कर पाएँगे। चर्चा कीजिए कि वे आँकड़ों को किस प्रकार विभिन्न विधियों से एकत्रित कर सकते हैं। प्रत्येक विधि के लाभ और सीमाएँ हैं। आइए, इन सभी कार्यों का पता लगाएँ एवं विद्यार्थियों के साथ इन कार्यों की चर्चा करें। इसके साथ ही उन्हें इन कार्यों को समझने दें। इसके पश्चात् विद्यार्थियों को योजना बनाने दीजिए तथा कक्षा के सम्मुख अपनी प्रक्रियाओं को प्रस्तुत करने दीजिए।

4.2 चित्रालेख

चित्रालेख (pictographs) बिना कोई संख्या लिखे आँकड़ों को दर्शाने की चित्रीय और सुझावित विधि है। नीचे दिए गए चित्र को देखिए, आपने पिछली कक्षाओं में इस तरह के चित्र देखें होंगे।

यात्रा के साधन	विद्यार्थियों की संख्या ☺=1 विद्यार्थी
निजी कार	☺ ☺ ☺ ☺
सार्वजनिक बस	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
विद्यालयी बस	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
साइकिल	☺ ☺ ☺
पैदल	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

यह चित्र आपको विद्यार्थियों द्वारा यात्रा के लिए प्रयोग किए जाने विभिन्न साधनों को एक ही दृष्टि में समझने में सहायता करेगा। इस चित्र के आधार पर अग्रलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

- यात्रा का कौन-सा साधन सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा प्रयोग किया जाता है?
- यात्रा का कौन-सा साधन सबसे कम विद्यार्थियों द्वारा प्रयोग किया जाता है?

चित्रालेख, आँकड़ों को वस्तुओं के चित्रों द्वारा दर्शाता है। इससे आँकड़ों के विषय में दिए गए प्रश्नों के उत्तर एक ही दृष्टि में देने में सहायता मिलती है।

दिए गए चित्रालेख में, एक इकाई या प्रतीक (symbol) ☺ का प्रयोग एक विद्यार्थी को दर्शाने के लिए किया गया है। ऐसे चित्रालेख भी होते हैं, जहाँ एक इकाई या प्रतीक अनेक व्यक्तियों या वस्तुओं को दर्शाते हैं।

उदाहरण— नंदकिशोर ने बेरसिया में अपने मिडिल स्कूल के बच्चों से 'वे कितनी बार रात्रि में न्यूनतम व घंटे सोते हैं?' प्रश्न के उत्तर एकत्रित किए। उसने इन आँकड़ों का एक चित्रालेख तैयार किया।

प्रतिक्रिया	बच्चों की संख्या (▲ = 10 बच्चे)
सदैव	▲ ▲ ▲ ▲ ▲
कभी-कभी	▲ ▲ ◢
कभी नहीं	▲ ▲ ▲ ▲

उपरोक्त चित्रालेख के माध्यम से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

1. उन बच्चों की संख्या क्या है, जो सदैव रात्रि में न्यूनतम 9 घंटे सोते हैं?
2. कितने विद्यार्थी कभी-कभी ही रात्रि में न्यूनतम 9 घंटे सोते हैं?
3. कितने बच्चे सदैव रात्रि में 9 घंटे से कम सोते हैं? स्पष्ट कीजिए कि आपने किस प्रकार उत्तर प्राप्त किया।

हल—

1. सारणी में, 'सदैव' के सम्मुख 5 चित्र ▲ हैं। प्रत्येक चित्र 10 बच्चों को दर्शाता है। अतः 5 चित्र ▲ प्रदर्शित करते हैं $5 \times 10 = 50$ बच्चे।
2. 'कभी-कभी' के सम्मुख 2 पूर्ण चित्र ▲ $(2 \times 10 = 20)$ और 1 आधा चित्र ◢ (10 का आधा=5) है। अतः, केवल कभी-कभी न्यूनतम 9 घंटे सोने वाले विद्यार्थियों की संख्या $20+5=25$ है।

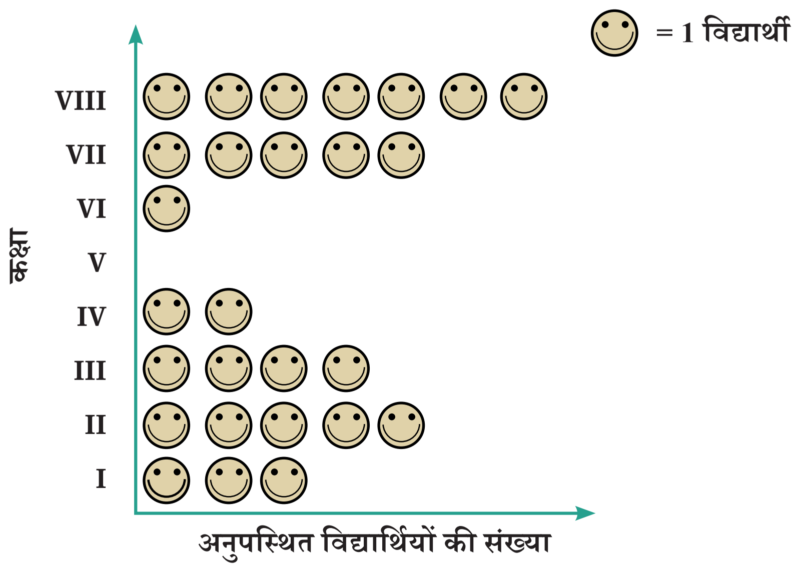
3. ‘कभी नहीं’ के सम्मुख 4 पूर्ण चित्र हैं। अत: $4 \times 10 = 40$ विद्यार्थी कभी भी रात्रि में न्यूनतम 9 घंटे नही सोते हैं, अर्थात वे सदैव 9 घंटे से कम सोते हैं।

एक चित्रालेख खींचना

एक दिन, लखनपाल ने इन आँकड़ों को संग्रहित किया कि प्रत्येक कक्षा में कितने विद्यार्थी अनुपस्थित थे—

कक्षा	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
विद्यार्थियों की संख्या	3	5	4	2	0	1	5	7

उसने इन आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए, एक चित्रालेख बनाया और उसमें 1 विद्यार्थी को से दर्शाने का निर्णय लिया—



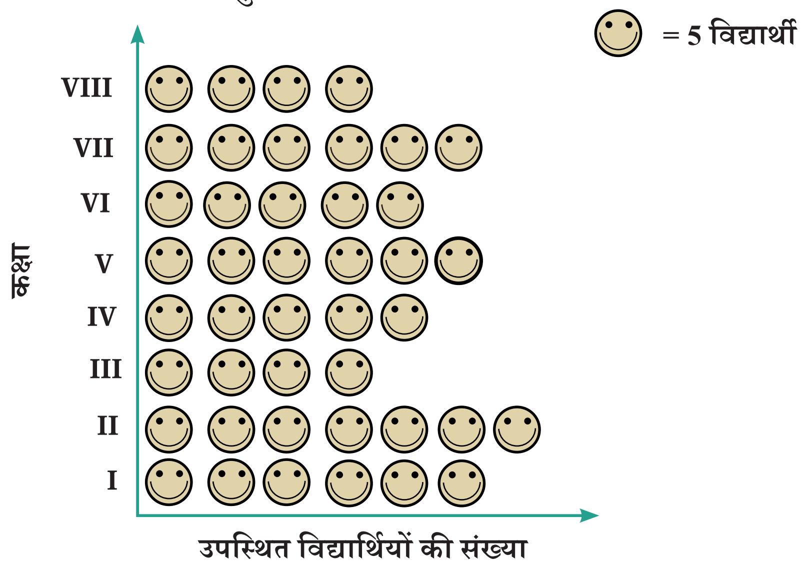
इसी समय, उसके मित्रों जरीना और संगीता ने उन विद्यार्थियों के आँकड़े संग्रहित किए, जो प्रत्येक कक्षा में उपस्थित थे—

कक्षा	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
विद्यार्थियों की संख्या	30	35	20	25	30	25	30	20

यदि वे इन आँकड़ों को चित्रालेख के माध्यम से दर्शाना चाहते हैं, तो क्या वे प्रत्येक विद्यार्थी के लिए अब भी एक प्रतीक का प्रयोग करेंगे, जैसा कि लखनपाल ने किया था। यदि हाँ, तो उन्हें किन चुनौतियों का सामना करना पड़ सकता है?

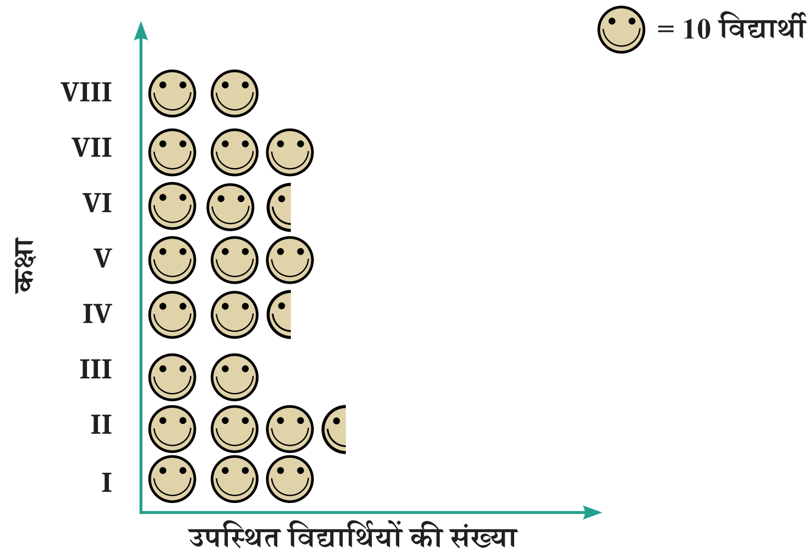
Reprint 2025-26

जरीना ने इस समस्या से निपटने के लिए एक योजना बनाई— क्योंकि यहाँ अनेक विद्यार्थी हैं, इसलिए उसने को 5 विद्यार्थियों को दर्शाने का निर्णय लिया। उसने इसकी आकृति बनाई, जिससे समय और स्थान दोनों की बचत हुई।



संगीता ने एक से 10 विद्यार्थियों को दर्शाने का निर्णय लिया।

इसलिए उसे चित्रालेख में 25 विद्यार्थियों और 35 विद्यार्थियों को दर्शाने में समस्या हुई। तब उसने सोचा कि वह 5 विद्यार्थियों को दर्शाने के लिए का उपयोग कर सकती है।



यदि कक्षा में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या 33 या 27 हो, तो एक ऐसा चित्रालेखा तैयार करते समय क्या चुनौतियाँ हो सकती हैं?

गणित चर्चा

- **चित्रालेख** आँकड़ों को दर्शाने की सुंदर चित्रीय और सुझावित विधि है। ये आँकड़ों को वस्तुओं के चित्रों द्वारा दर्शाते हैं।
- चित्रालेख प्रश्नों के उत्तर देने और आँकड़ों के विषय में तुरंत निष्कर्ष निकलने में सहायता करते हैं। (दिए गए उदाहरणों में— मनपसंद खेलों, मनपसंद रंगों, परिवहन के सबसे आम साधनों, अनुपस्थित छात्रों इत्यादि के विषय में जानकारी प्राप्त कर पाए।)
- चित्रालेखों को पढ़कर हम विभिन्न वर्गों की बारंबारता और उनकी तुलना को तुरंत समझ सकते हैं (उदाहरण के लिए— क्रिकेट, हॉकी आदि)
- चित्रालेख में वर्गों को क्षैतिज अक्ष अथवा उर्ध्वाधर। अक्ष पर रख सकते हैं। प्रत्येक वर्ग के लिए, उस वर्ग की बारंबारता के अनुसार निर्दिष्ट स्तंभों या पंक्तियों में सरल चित्र और प्रतीक बनाए जाते हैं।
- एक **पैमाना** या **कुंजी** (उदाहरण के लिए,  — एक विद्यार्थी अथवा  — 5 विद्यार्थी) को यह दर्शाने के लिए जोड़ते हैं कि प्रत्येक चिह्न या चित्र क्या प्रदर्शित करता है। प्रत्येक चिह्न या चित्र एक या अधिक इकाई को प्रदर्शित कर सकता है।
- एक ऐसे चित्रालेख को बनाना चुनौतीपूर्ण हो सकता है जिसके आँकड़ों की मात्रा अधिक है या उसकी बारंबारता पैमाने के ठीक गुणज न हों।

आइए, पता लगाएँ

1. दिया गया चित्रालेख मिडिल स्कूल, गिन्नोरी के पुस्तकालय से एक सप्ताह में विद्यार्थियों द्वारा ऋण ली गई पुस्तकों की संख्याओं को दर्शाता है—

दिन	पुस्तकों की संख्या ( =1 पुस्तक)
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

a. किस दिन न्यूनतम संख्या में पुस्तकें ऋण ली गई?

b. सप्ताह के दौरान कुल कितनी पुस्तकें ऋण ली गई?

c. किस दिन अधिकतम संख्या में पुस्तकें ऋण ली गईं, इसका संभव कारण क्या हो सकता है?

2. मगन भाई जामनगर में पतंगें बेचते हैं। निकटवर्ती गाँवों से 6 दुकानदार उनसे पतंगें खरीदने आते हैं। इन 6 दुकानदारों को उनके द्वारा बेची गई पतंगों की संख्याएँ नीचे दी हुई है—

दुकानदार	बेची गई पतंगों की संख्या
चमन	250
रानी	300
रूखसाना	100
जसमीत	450
जेठा लाल	250
पूनम बेन	700

एक चित्रालेख तैयार कीजिए, जिसमें प्रतीक पतंग  से 100 पतंगों को दर्शाया गया हो।

निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए—

a. रानी द्वारा खरीदी गई पतंगों को कितने प्रतीक दर्शाएँगे?

b. किसने अधिकतम संख्या में पतंगें खरीदीं?

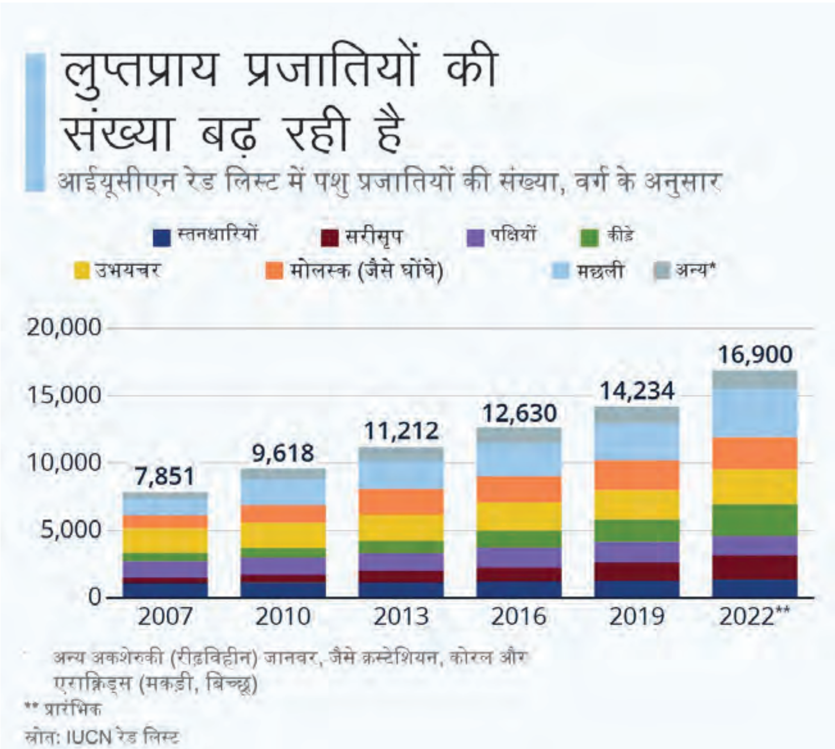
c. जसमीत और चमन में से किसने अधिक पतंगें खरीदीं?

d. रुखसाना कहती है कि पूनम बेन ने रानी द्वारा खरीदी गई पतंगों की संख्या के दुगुने से अधिक पतंगें खरीदीं। क्या वह सही है? क्यों?

4.3 दंड आलेख

क्या आपने टी.वी. या समाचार पत्र में इस प्रकार के आलेख देखे हैं?

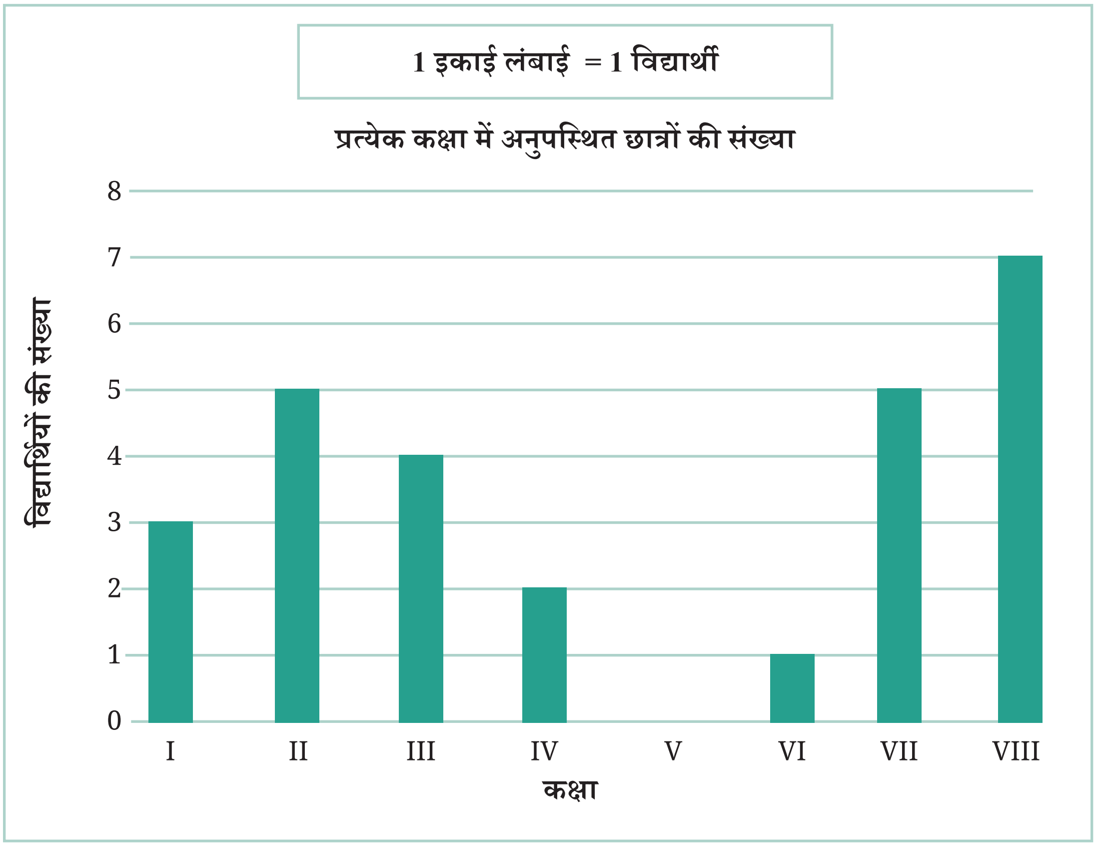
चित्रालेखों की तरह ही **दंड आलेख** भी हमें उच्चतम मान, विभिन्न श्रेणियों के मानों की तुलना करने इत्यादि जैसी सूचनाओं को तुरंत समझने और उनकी व्याख्या करने में सहायता कर सकते हैं। यद्यपि, जब आँकड़ों की मात्रा अधिक होती है तब उन्हें चित्रालेख द्वारा प्रस्तुत करने में न केवल समय अधिक लगता है, बल्कि कभी-कभी कठिन भी हो जाता है। आइए, देखें किस प्रकार इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के माध्यम से प्रस्तुत किया जा सकता है।



स्रोत— *https://www.statista.com/chart/17122/number-of-threatened-species-red-list/*

कक्षा	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
विद्यार्थियों की संख्या	3	5	4	2	0	1	5	7

उसने इन्हीं आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा प्रस्तुत किया— आइए, लखनपाल द्वारा सग्रंहित आँकड़ों को लेते हैं, जो किसी एक दिन प्रत्येक कक्षा में अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या से संबंधित हैं।



अध्यापक टिप्पणी

यदि विद्यार्थियों ने इस ओर ध्यान नहीं दिया है, तो उन्हें समदूरस्थ क्षैतिज रेखाओं के बारे में बताइए। स्पष्ट कीजिए कि बाईं ओर क्रमागत संख्याओं के प्रत्येक युग्म के बीच में समान रिक्त स्थान है।

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दंड आलेख का उपयोग करते हुए दीजिए—

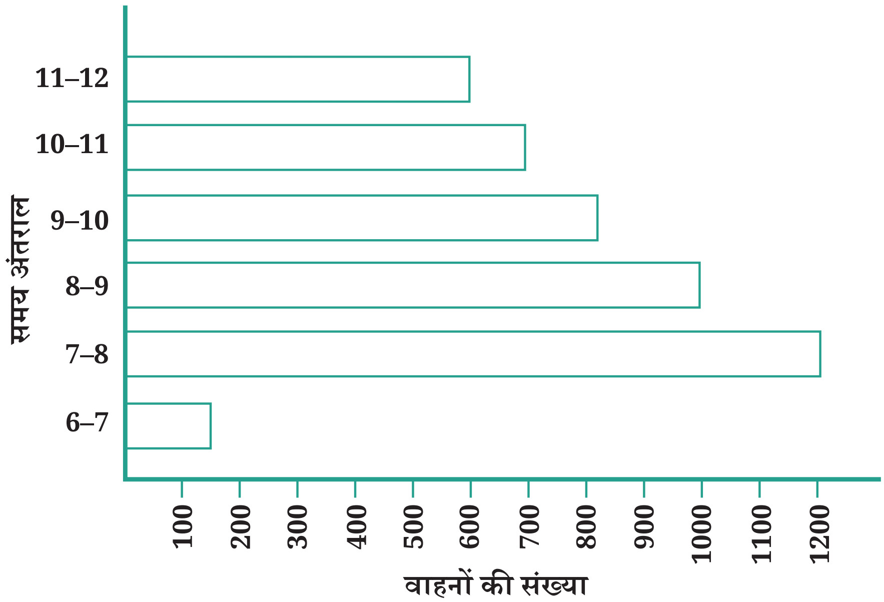
1. कक्षा 2 में उस दिन _______ विद्यार्थी अनुपस्थित थे।
2. किस कक्षा में अधिकतम संख्या में विद्यार्थी अनुपस्थित थे? _______
3. उस दिन किस कक्षा में पूर्ण उपस्थिति थी? _______

दंड आलेखों को बनाते समय, समान चौड़ाई के दंड जिनके बीच दूरी समान हो, क्षैतिज रूप में या ऊर्ध्वाधर रूप में खींचे जा सकते हैं। ऐसे में प्रत्येक दंड की लंबाई या ऊँचाई दी गई संख्या को दर्शाती है।

Reprint 2025-26

जैसा कि हमने चित्रालेखों में देखा था, बारंबारताएँ बड़े होने पर एक पैमाना (स्केल) या कुंजी का उपयोग कर सकते हैं।

आइए, यातायात पुलिस द्वारा एकत्रित किए गए दिल्ली की एक व्यस्त सड़क के चौराहे से होकर गुजरने वाले वाहनों के आँकड़ों पर एक दृष्टि डालें। सुबह 6 बजे से दोपहर 12 बजे तक प्रत्येक घंटे इस चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों की संख्या नीचे दंड आलेख में दर्शाई गई है। लंबाई की 1 इकाई 100 वाहनों को दर्शाती है।



हम देख सकते हैं कि इस चौराहे पर, अधिकतम यातायात सबसे लंबे दंड द्वारा दर्शाया गया है, जिसका समय अंतराल प्रात: 7–8 है। दंड आलेख दर्शाता है कि इस समय चौराहे से होकर 1200 वाहन गए हैं। दूसरा लंबा दंड प्रात: 8–9 के लिए है। इस दौरान इस चौराहे से होकर 1000 वाहन गए हैं। इसी प्रकार, न्यूनतम यातायात सबसे छोटे दंड द्वारा दर्शाया गया है, जिसका समय अंतराल प्रात: 6–7 है। इस दौरान केवल लगभग 150 वाहन ही इस चौराहे से होकर गए हैं। दूसरा छोटा दंड समय अंतराल प्रात: 11 से दोपहर 12 बजे का है, जब चौराहे से 600 वाहन गुजरे हैं।

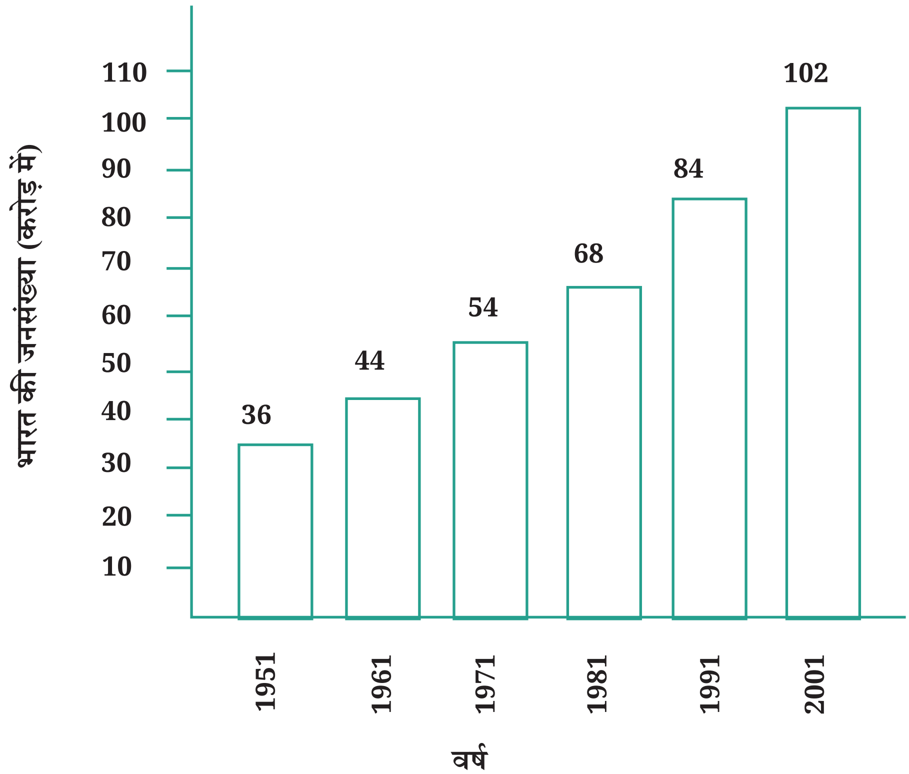
दो घंटे के अंतराल प्रात: 8 से 10 के दौरान इस चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों की संख्या लगभग 1000 + 800 = 1800 वाहन हैं, जो इस दंड आलेख द्वारा दर्शाई गई है।

Reprint 2025-26

आइए, पता लगाएँ

1. प्रात: 6 और दोपहर 12 के बीच उस चौराहे से कुल कितने वाहन गुजरे?
2. आपके विचार से समय प्रात: 6–7 के दौरान और 7–12 बजे दोपहर के बीच अन्य घंटे में, इतना कम यातायात क्यों रहा?
3. आपके विचार से प्रात: 7 और 8 के बीच यातायात अधिकतम क्यों रहा?
4. आपके विचार से प्रात: 8 के बाद 12 बजे दोपहर तक प्रत्येक घंटे में यातायात कम क्यों होता रहा?

उदाहरण—



भारत की जनसंख्या (करोड़ में)

उपरोक्त दंड आलेख 50 वर्षों के अंतराल में प्रत्येक दशक में भारत की जनसंख्या वृद्धि को दर्शाता है। प्रदर्शित की गई संख्याएँ करोड़ों में हैं। यदि आपको एक व्यक्ति को दर्शाने के लिए 1 इकाई लेनी पड़े, तब दंड बनाना संभव नहीं है। अत: हमने एक इकाई का पैमाना 10 करोड़ लिया है। यह दंड आरेख उक्त चित्र में प्रदर्शित है। अत: 5 इकाई का दंड 50 करोड़ तथा 8 इकाई का दंड़ 80 करोड़ प्रदर्शित करता है।

Reprint 2025-26

- इस दंड आरेख के आधार पर आप अपने मित्रों से कौन से प्रश्न पूछना चाहेंगे?
- 50 वर्षों में भारत की जनसंख्या में कितनी वृद्धि हुई, प्रत्येक दशक में जनसंख्या वृद्धि कितनी थी?

4.4 दंड आलेख खींचना

पिछले एक उदाहरण में, श्री नीलेश ने अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की पसंद की मिठाइयों के लिए, एक बारंबारता सारणी तैयार की थी। आइए, इन आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख तैयार करें—

1. सर्वप्रथम, हम एक क्षैतिज रेखा और एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचते हैं। क्षैतिज रेखा के अनुदिश हम प्रत्येक मिठाई का नाम लिखेंगे, तथा रखेंगे जिन पर दंड उनकी संगत बारंबारताओं के अनुसार खींचे जाएँगे। ऊर्ध्वाधर रेखा पर हम विद्यार्थियों की संख्या दर्शाने वाली बारंबारताएँ लिखेंगे।

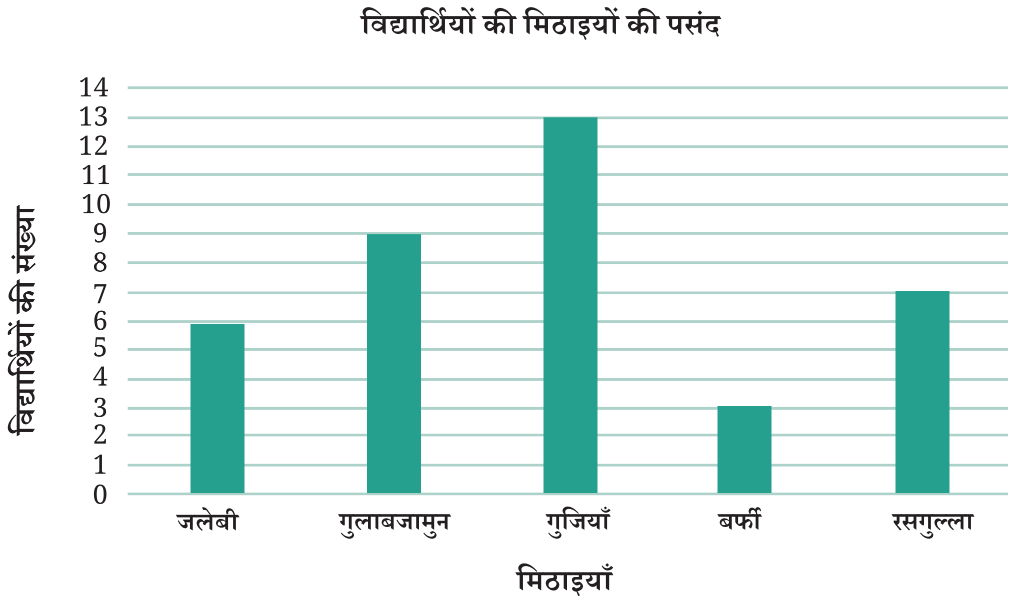
मिठाई	विद्यार्थियों की संख्या
जलेबी	6
गुलाब जामुन	9
गुजियाँ	13
बर्फी	3
रसगुल्ला	7

2. हमें एक पैमाना अवश्य चुनना चाहिए। इसका अर्थ है कि हमें यह निर्णय लेना चाहिए कि एक दंड की, एक इकाई लंबाई से कितने विद्यार्थी दर्शाए जाएँ ताकि आलेख हमारे कागज पर अच्छे प्रकार से खींचा जा सके। यहाँ, हम 1 इकाई लंबाई द्वारा 1 विद्यार्थी को दर्शाएँगे।

3. जलेबी के लिए, हम 6 इकाई की ऊँचाई (जो मिठाई जलेबी की बारंबारता है) का एक दंड खींचेंगे। इसी प्रकार, अन्य मिठाइयों के लिए भी हम उन्हीं ऊँचाइयों के दंड खींचेंगे, जितनी उनकी बारंबारताएँ हैं।

Reprint 2025-26

4. इस प्रकार, हमें नीचे दर्शाए अनुसार दंड आलेख प्राप्त होता है—

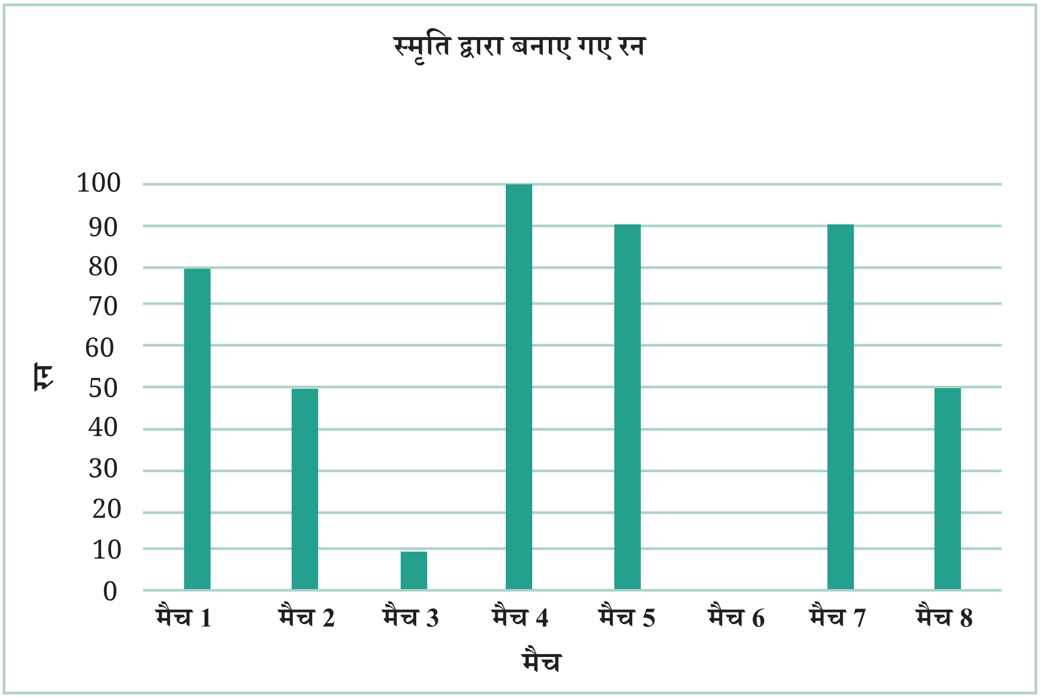


जब बारंबारताएँ बड़ी होती हैं, तो हम 1 इकाई लंबाई = 1 संख्या (बारंबारता) का उपयोग नहीं कर सकते हैं, तब हमें एक भिन्न पैमाने को चुनने की आवश्यकता होती है, जैसा कि हमने चित्रालेखों की स्थिति में किया था।

उदाहरण— स्मृति द्वारा 8 मैचों में बनाए गए रनों की संख्या नीचे सारणी में दी गई है—

मैच	मैच 1	मैच 2	मैच 3	मैच 4	मैच 5	मैच 6	मैच 7	मैच 8
रन	80	50	10	100	90	0	90	50

इस उदाहरण में, न्यूनतम स्कोर 0 है तथा अधिकतम स्कोर 100 है। 1 इकाई लंबाई = 1 रन का पैमाना लेने का अर्थ यह होगा कि हमें 1 के कदमों (steps) में 0 से 100 रनों को लेना होगा। यह अनावश्यक रूप से जटिल होगा। आइए, इसके स्थान पर हम 1 इकाई लंबाई = 10 रन लेते हैं। हम इस पैमाने को ऊर्ध्वाधर रेखा पर अंकित करते हैं तथा प्रत्येक मैच के स्कोर के अनुसार दंडों को खींचते हैं। उपर्युक्त आँकड़ों को दर्शाने वाला दंड आलेख हमें अगले पृष्ठ पर प्राप्त होता है—



उदाहरण— निम्नलिखित सारणी इमरान के परिवार की विभिन्न मदों में मासिक व्यय दर्शाती है—

मद	व्यय (₹ में)
मकान किराया	3000
भोजन	3400
शिक्षा	800
बिजली	400
परिवहन	600
विविध	1200

इन आँकड़ों को दंड आलेख के रूप में दर्शाने के निम्नलिखित चरण हैं—

- दो लंब रेखाएँ खींचिए— एक क्षैतिज और एक ऊर्ध्वाधर।
- क्षैतिज रेखा के अनुदिश 'मद' अंकित कीजिए और उनके बीच में समान दूरी रखिए। ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश संगत व्यय अंकित कीजिए।

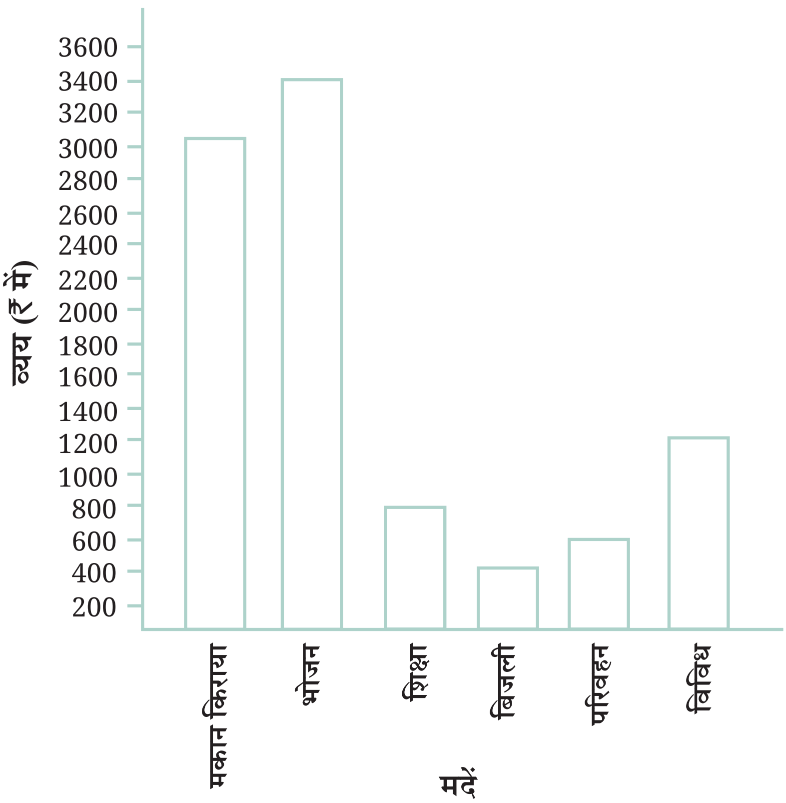
Reprint 2025-26

- समान चौड़ाई के दंड इस प्रकार बनाइए कि उनके बीच में समान (रिक्त स्थान) दूरी रहे।
- ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक उपयुक्त पैमाना चुनिए। मान लीजिए कि 1 इकाई लंबाई = ₹200 है तथा फिर संगत मानों (₹200, ₹400) इत्यादि को ऊर्ध्वाधर रेखा पर अंकित करके लिख दीजिए।

अंतत: विभिन्न मदों के लिए दंडों की ऊँचाईयाँ नीचे दर्शाए अनुसार परिकलित कीजिए—

मकान किराया	3000÷200	15 इकाई
भोजन	3400÷200	17 इकाई
शिक्षा	800÷200	4 इकाई
बिजली	400÷200	2 इकाई
परिवहन	600÷200	3 इकाई
विविध	1200÷200	6 इकाई

उपरोक्त चरणों के आधार पर नीचे दिया गया दंड आलेख प्राप्त होगा—



Reprint 2025-26

दंड आलेख का प्रयोग निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर देने में कीजिए—

1. किस मद में इमरान का परिवार सबसे अधिक और उससे कम व्यय करता है?
2. क्या बिजली पर व्यय, शिक्षा पर व्यय का आधा है?
3. क्या शिक्षा पर व्यय, भोजन पर व्यय का एक-चौथाई से कम है?

आइए, पता लगाएँ

1. सामंथा ने एक चाय बागान का भ्रमण किया तथा वहाँ देखे गए कीट पतंगों के आँकड़े संग्रहित किए—

				
घुन	झांझा (सूंड)	भृंग (झींगुर)	तितलियाँ	टिड्डा
6	10	5	3	2

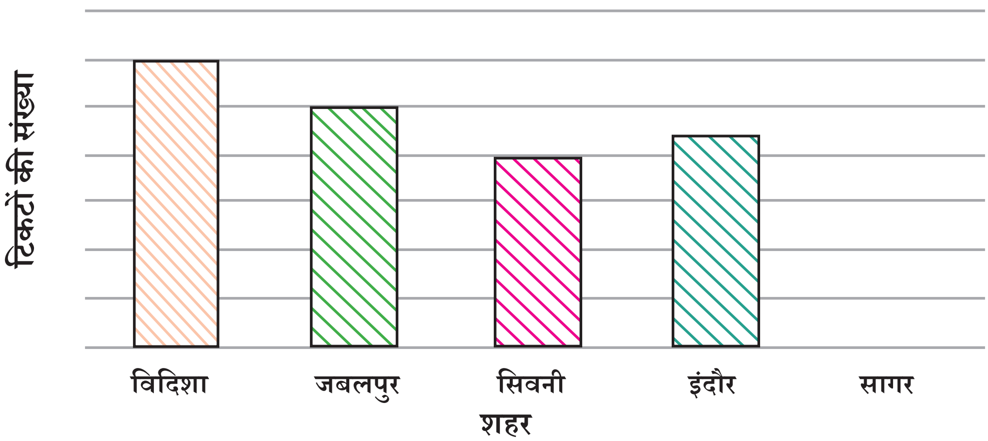
इन आँकड़ों को दर्शाने के लिए एक दंड आलेख बनाने में उसकी सहायता कीजिए।

2. पूजा ने 2 घंटे की अवधि के दौरान भोपाल रेलवे स्टेशन पर, मध्य प्रदेश के कुछ भिन्न शहरों के लिए बेचे गए टिकटों की संख्याओं के आँकड़े संग्रहित किए—

शहर	विदिशा	जबलपुर	सिवनी	इंदौर	सागर
टिकटों की संख्या	24	20	16	28	16

उन्होंने अपने विद्यार्थियों से चर्चा करने के लिए इन आँकड़ों का बोर्ड पर एक दंड आलेख तैयार किया, परंतु इस आलेख का कुछ भाग किसी ने मिटा दिया।

Reprint 2025-26



a. दंड के ऊपर विदिशा के लिए बेचे गए टिकटों की संख्या लिखिए।

b. दंड के ऊपर जबलपुर के लिए बेचे गए टिकटों की संख्या को लिखिए।

c. विदिशा का दंड 6 इकाई लंबाइयों तक है तथा जबलपुर का दंड 5 इकाई लंबाइयों तक है। इस आलेख के लिए पैमाना (स्केल) क्या है?

d. सागर के लिए सही दंड खींचिए।

e. स्केल (पैमाने) को सम्मिलित करते हुए ऊर्ध्वाधर रेखा पर सही संख्या अंकित कीजिए।

f. क्या आलेख में सिवनी और इंदौर के लिए खींचे गए दंड सही हैं? यदि नहीं तो सही दंड खींचिए।

3. चीनू ने प्रात: 9 से 10 तक अपने घर के सामने सड़क पर जाने वाले परिवहन के विभिन्न साधनों की सूची बनाई—

मोटरसाइकिल	कार	मोटरसाइकिल	बस	मोटरसाइकिल	मोटरसाइकिल
मोटरसाइकिल	ऑटो	साइकिल	बैल गाड़ी	साइकिल	ऑटो
कार	स्कूटर	कार	ऑटो	साइकिल	मोटरसाइकिल
कार	ऑटो	मोटरसाइकिल	स्कूटर	मोटरसाइकिल	कार
साइकिल	स्कूटर	साइकिल	स्कूटर	मोटरसाइकिल	बस
ऑटो	ऑटो	मोटरसाइकिल	साइकिल	बस	मोटरसाइकिल
साइकिल	स्कूटर	बस	स्कूटर	ऑटो	मोटरसाइकिल
स्कूटर	साइकिल	मोटरसाइकिल	बैल गाड़ी	ऑटो	स्कूटर
कार	स्कूटर				

a. दिए गए आँकड़ों के लिए एक बारंबारता वितरण सारणी तैयार कीजिए।

b. परिवहन के कौन-से साधन का सबसे अधिक प्रयोग किया गया?

c. यदि आप इन आँकड़ों को एकत्रित करने के लिए वहाँ होते, तो आप यह कार्य किस प्रकार करते? संबंधित चरणों या प्रक्रिया को लिखिए।

4. एक पासे को 30 बार फेंकिये तथा प्रत्येक बार प्राप्त की गई संख्या को अंकित कीजिए। मिलान चिह्नों का उपयोग करते हुए, इनके लिए एक बारंबारता वितरण सारणी तैयार कीजिए। अब वह संख्या ज्ञात कीजिए—

a. जो न्यूनतम बार आई है।

b. जो अधिकतम बार आई है।

c. जो समान बार आई हैं।

5. जसप्रीत बुमराह द्वारा उसके पिछले 30 मैचों में लिए गए विकेटों के आँकड़ों की एक बारंबारता वितरण सारणी फैज ने तैयार की।

लिए गए विकेट	मैचों की संख्या
0	2
1	4
2	6
3	8
4	3
5	5
6	1
7	1

a. यह सारणी क्या सूचना प्रदान करती है?

b. इस सारणी का शीर्षक क्या हो सकता है?

c. इस सारणी में किसने आपका ध्यान आकर्षित किया?

Reprint 2025-26

d. कितने मैचों में बुमराह ने 4 विकेट लिए?

e. मयंक कहता है कि “यदि हम उसके द्वारा पिछले 30 मैचों में लिए गए कुल विकेटों की संख्या ज्ञात करना चाहते हैं, तो हमें संख्याओं 0, 1, 2, 3, …., 7 तक को जोड़ना पड़ेगा।” क्या इस प्रक्रिया में मयंक लिए गए कुल विकेटों की संख्या ज्ञात कर पाएगा? क्यों?

f. अपने पिछले 30 मैचों में जसप्रीत बुमराह ने कुल कितने विकेट लिए हैं? इनकी सही संख्या सारणी से आप कैसे ज्ञात करेंगे?

6. निम्नलिखित चित्रालेख पाँच विभिन्न गाँवों में ट्रैक्टरों की संख्या को दर्शाता है—

इस चित्रालेख को देखिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

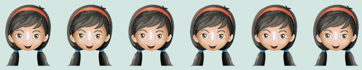
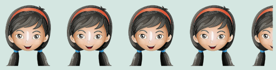
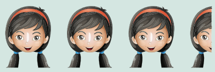
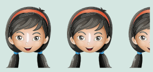
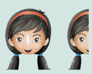
a. किस गाँव में न्यूनतम संख्या में ट्रैक्टर हैं?

b. किस गाँव में अधिकतम संख्या में ट्रैक्टर हैं?

c. गाँव B की तुलना में गाँव C में कितने ट्रैक्टर अधिक हैं?

d. कोमल कहती है, “गाँव D में ट्रैक्टरों की संख्या गाँव E के ट्रैक्टरों की संख्या की आधी है।” क्या वह सही है?

7. किसी विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में छात्राओं की संख्या एक चित्रालेख द्वारा दर्शाई गई है—

कक्षा	छात्राओं की संख्या ( = 4 छात्राएँ)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

इस चित्रालेख को देखिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

a. किस कक्षा में छात्राओं की संख्या न्यूनतम है?

b. कक्षा 5 और 6 की छात्राओं की संख्याओं के बीच का अंतर कितना है?

c. यदि कक्षा 2 में, दो और छात्राओं को प्रवेश मिला, तो आलेख में किस प्रकार का परिवर्तन होगा?

d. कक्षा 7 में कितनी छात्राएँ हैं?

Reprint 2025-26

8. मुधोल हाउंड (भारतीय कुत्तों की नस्ल का एक प्रकार) अधिकतर उत्तरी कर्नाटक के बागलकोट और विजयपुरा जिलों में पाए जाते हैं। सरकार ने इस नस्ल को बचाने के लिए एक पहल की है, जिसमें उन लोगों को सहायता प्रदान की जा रही है, जो इस प्रकार के कुत्तों को पालते हैं। इसी पहल के कारण, ऐसे कुत्तों की संख्या में वृद्धि हुई। कर्नाटक के 6 गाँवों में मुधोल कुत्तों की संख्याएँ इस प्रकार है—

   गाँव A–18, गाँव B–36, गाँव C–12, गाँव D–48, गाँव E–18, गाँव F–24

   उपरोक्त के लिए, एक चित्रालेख तैयार कीजिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

   a. इस चित्रालेख को बनाने के लिए, कौन-सा पैमाना या कुंजी उपयुक्त रहेगा?

   b. गाँव B के कुत्तों की संख्या को दर्शाने के लिए, आप कितने प्रतीकों का उपयोग करेंगे?

   c. कामिनी ने कहा कि गाँव B और गाँव D के कुत्तों की कुल संख्या अन्य 4 गाँवों की कुल संख्या से अधिक होगी। क्या वह सही है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

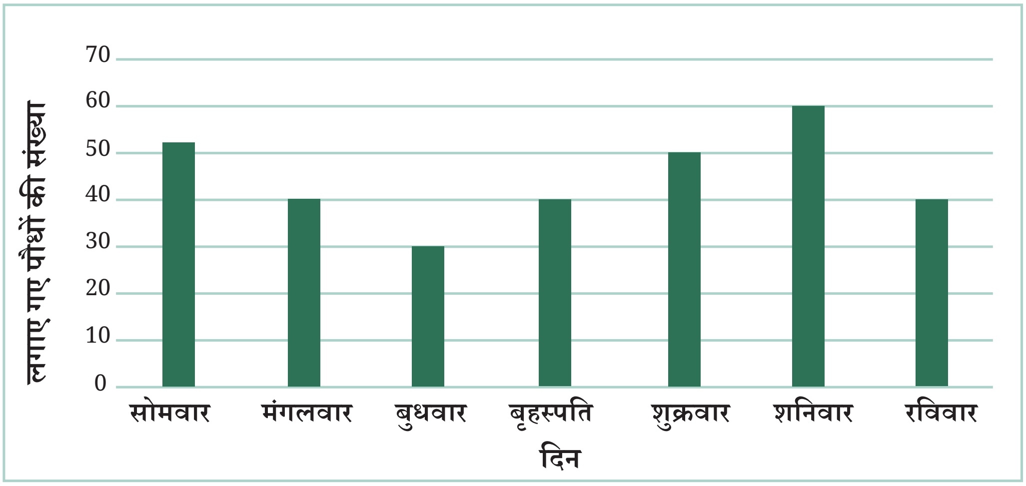
9. 120 विद्यालयी विद्यार्थियों का यह ज्ञात करने के लिए एक सर्वेक्षण किया गया कि अपने खाली समय में वे कौन-सा क्रियाकलाप करना पसंद करते हैं—

पसंदीदा क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	45
कहानी की पुस्तकें पढ़ना	30
टीवी देखना	20
संगीत सुनना	10
पेंटिंग करना	15

एक इकाई लंबाई = 5 विद्यार्थियों का स्केल (पैमाना) लेकर उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए। खेलने के अतिरिक्त कौन-सा क्रियाकलाप सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा पसंद किया गया है?

Reprint 2025-26

10. एक प्राथमिक विद्यालय के विद्यार्थियों और अध्यापकों ने अपने विद्यालय के प्रांगण तथा अपने पास के एक गाँव में जुलाई के प्रथम सप्ताह में पौधे लगाने का निर्णय लिया। उनके द्वारा लगाए गए पौधों का विवरण नीचे दिए गए दंड आरेख में वर्णित है—



a. बुधवार और बृहस्पतिवार को लगाए गए पौधों की कुल संख्या __________ है।

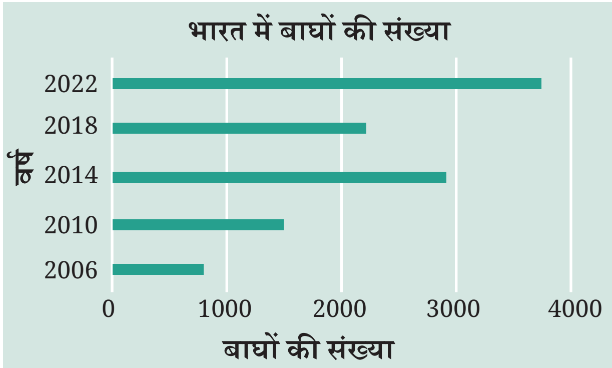
b. पूरे सप्ताह के दौरान लगाए गए पौधों की कुल संख्या __________ है।

c. अधिकतम संख्या में पौधे____________ को लगाए गए तथा न्यूनतम संख्या में पौधे __________ को लगाए गए।

आपके अनुसार इस स्थिति का क्या कारण हो सकता है? सप्ताह के कुछ विशेष दिनों में अधिक पौधे क्यों लगाए गए तथा अन्य दिनों में कम पौधे क्यों लगाए गए? क्या आप इसके संभावित कारणों या उनके स्पष्टीकरण के विषय में कुछ सोच सकते हैं? आप किस प्रकार यह प्रयास करेंगे और पता लगाएँगे कि आपके स्पष्टीकरण सही हैं?

11. भारत में बाघों (टाइगर्स) की संख्या 1900 से 1970 के बीच काफी कम हो गई। भारत में बाघों के बचाव के लिए 1973 में 'प्रोजेक्ट टाइगर' प्रारंभ किया गया। 2006 से प्रारंभ करते हुए, भारत में बाघों की यथार्थ संख्याएँ ज्ञात होना प्रारंभ हो गया। शगुफ्ता और दिव्या ने भारत में 2006 और 2022 के बीच बाघों की संख्याओं के विषय में उपलब्ध सूचनाओं की जानकारी प्राप्त की। सूचनाओं को प्रत्येक चार वर्ष के अंतराल के बाद अंकित किया। उन्होंने इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता वितरण सारणी बनाई तथा इन आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए एक दंड आलेख बनाया, परंतु इस आलेख में कुछ गलतियाँ हो गई हैं। क्या आप इन गलतियों का पता लगा सकते हैं तथा इन्हें ठीक कर सकते हैं?

वर्ष	बाघों की संख्या (लगभग)
2006	1400
2010	1700
2014	2200
2018	3000
2022	3700



- चित्रालेख की ही तरह, दंड आलेख भी आँकड़ों को दर्शाने की सुंदर चित्रीय विधि है। ये समान दूरस्थ दंडों के माध्यम से आँकड़ों को दर्शाते हैं, जिनकी चौड़ाई एक समान होती है। इन दंडों की लंबाइयाँ या ऊँचाइयाँ विभिन्न श्रेणियों की बारंबारताएँ होती हैं।
- प्रत्येक श्रेणी को एक दंड द्वारा दर्शाया जाता है, जिसकी लंबाई या ऊँचाई संगत बारंबारता (उदाहरणत: व्यय) या राशि (उदाहरणत: रन) को प्रदर्शित करती है।
- दंडों के बीच में समान दूरी यह इंगित करती है कि वे स्वतंत्र खड़े हैं तथा ये समान श्रेणियों को दर्शाते हैं।
- बारंबारता सारणी की तुलना में, दंड आलेख अधिक तेजी से आँकड़ों की व्याख्या करने में सहायक होते हैं। एक दंड आलेख को पढ़ने से, हम विभिन्न श्रेणियों (वर्गों) के आँकड़ों की एक ही दृष्टि में तुलना कर सकते हैं।
- दंड आलेख के लिए, उसके आँकड़ों में सम्मिलित न्यूनतम और अधिकतम मूल्यों को देखते हुए पैमाने का चयन करना चाहिए (उदाहरणत:— 1 इकाई लंबाई = 1 विद्यार्थी अथवा 1 इकाई लंबाई = ₹ 200) जिससे परिणामत: प्राप्त दंड आलेख कागज या पोस्टर पर ठीक से प्रदर्शित हो सके और देखने योग्य हो। पैमाने के अनुसार इकाई लंबाइयों का चिह्निकरण शून्य से प्रारंभ होना चाहिए।

अध्यापक टिप्पणी

आँकड़ा प्रबंधन के अधिगम (learning) का मुख्य बिंदु यह है कि आँकड़ों का प्रबंधन कैसे किया जाए, जिससे विद्यार्थी किसी परिकल्पना की जाँच करने या विशिष्ट निर्णय लेने के लिए, एक विशिष्ट प्रश्न या जाँच के उत्तरों को ज्ञात करने में समर्थ हो जाएँ। इसी बिंदु को आँकड़ों के संग्रह, संगठन और विश्लेषण के अभ्यास अवसरों को प्रदान करते समय ध्यान रखा जाना चाहिए।

4.5 कलात्मक और सौंदर्यात्मक विचार

पिछले अनुच्छेद में वर्णन किए गए चरणों के अतिरिक्त, आँकड़ों को चित्रीय रूप में दर्शाने के लिए कुछ अन्य अधिक कलात्मक और सौंदर्यात्मक पहलुओं पर विचार किया जा सकता है, जिससे वे अधिक प्रभावशाली बन जाएँ। जब आँकड़ों को दृश्य के रूप में प्रदर्शित करने के लिए दंड आलेख, चित्रालेख आदि का प्रयोग किया जाता है तब यह ध्यान रखना महत्वपूर्ण है कि इन आँकड़ों को इच्छित स्थान पर उचित प्रकार से रखा जाए। उदाहरणार्थ, जैसा कि हम पहले देख चुके हैं कि यह कार्य उपयुक्त पैमाना चुनकर किया जा सकता है। यह भी वाँछनीय है कि आँकड़े दिखने में आकर्षक और सरलता से समझने योग्य हो, जिससे उसे देखने वाला उससे दी जाने वाली सूचना को आसानी से समझ सके।

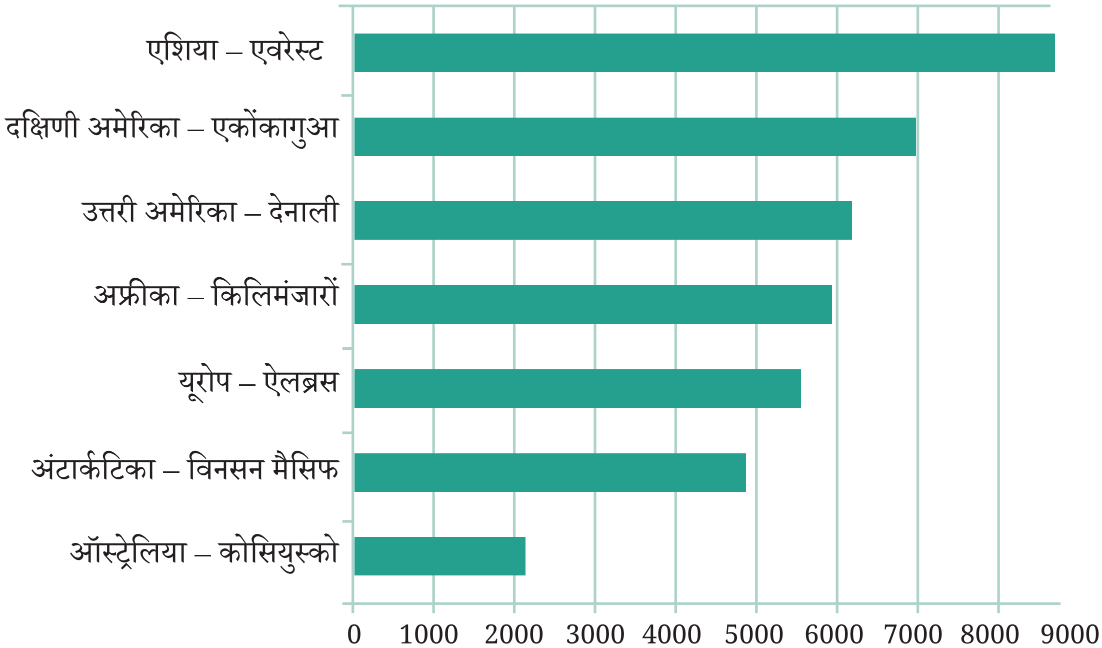
आइए, एक उदाहरण पर विचार करें। यहाँ एक सारणी दी जा रही है, जिसमें प्रत्येक महाद्वीप के सबसे ऊँचे पर्वत के नाम के साथ उसकी संगत ऊँचाई मीटर में दी गई हैं—

महाद्वीप	एशिया	दक्षिणी अमेरिका	उत्तरी अमेरिका	अफ्रीका	यूरोप	अंटार्कटिका	ऑस्ट्रेलिया
सबसे ऊँचे पर्वत	एवरेस्ट	एकोंकागुआ	देनाली	किलिमंजारो	ऐलब्रस	विनसन मैसिफ	कोसियुस्को
ऊँचाई	8848 मी	6962 मी	6194 मी	5895 मी	5642 मी	4892 मी	2228 मी

माउंट एवरेस्ट, माउंट कोसियुस्को से कितना ऊँचा है? क्या माउंट देनाली और माउंट किलिमंजारों की ऊँचाइयों में बहुत अधिक अंतर है? इन तथ्यों को संख्याओं की सारणी से देखना इतना सरल नहीं है।

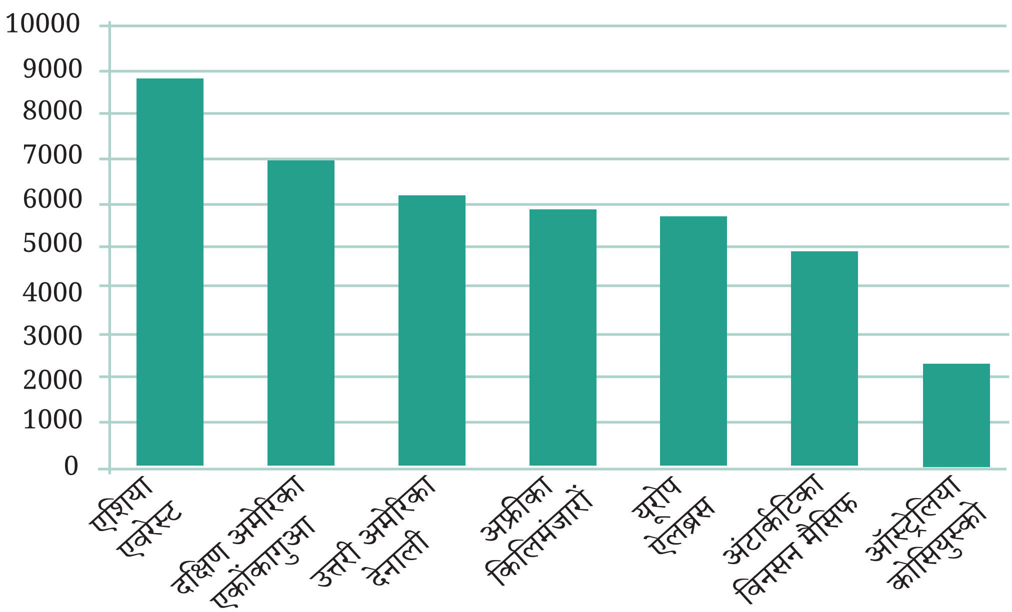
जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, हम संख्याओं की इस सारणी को एक दंड आलेख के रूप में भी दर्शा सकते हैं, जैसा कि पृष्ठ संख्या 102 पर दर्शाया गया है। यहाँ प्रत्येक मान को एक क्षैतिज दंड के रूप प्रदर्शित किया गया है। ये स्वयं के द्वारा निरूपित संख्याओं के अनुसार लंबे या छोटे हैं। इनसे एक ही दृष्टि में इन पर्वतों की ऊँचाइयों की तुलना करना सरल हो जाता है।

Reprint 2025-26



ये दंड ऊचाइयाँ दर्शाते हैं। अत: इस चित्र को इस प्रकार घुमाया जाए कि ये दंड पर्वत ऊर्ध्वाधर हो जाएँ। इस तरह ये दंड पर्वत अधिक ध्यानर्किषत एवं समझने में सरल होंगे। ऊर्ध्वाधर दंडों वाला दंड आलेख, स्तंभ आलेख (कॉलम ग्राफ) भी कहलाता है। स्तंभ में खंभे (पिर्लस) हैं जिन्हें आप किसी भवन में छत को टिकाए रखते हुए देख सकते हैं।

नीचे इन ऊँचे पर्वतों की सारणी के लिए एक स्तंभ आलेख दिया गया है। इस स्तंभ आलेख से, इन पर्वतों की ऊँचाइयों की तुलना करना तथा इनका चित्रण करना सरल हो जाता है।



सामान्यत: आँकड़ों को चित्रीय रूप में दर्शाना अधिक सहज एवं विचारोत्तेजक है, जिन ऊँचाइयों को भूमि तल से ऊपर की ओर मापा जाता है उन्हें ऊर्ध्वाधर दंडों या स्तंभों द्वारा दर्शाना अधिक उपयुक्त है। इसी प्रकार, वे लंबाइयाँ जो भूमि के समांतर हैं (उदाहरण— पृथ्वी पर किन्हीं स्थानों के मध्य दूरियाँ), उन्हें प्राय: क्षैतिज दंडों वाले दंड आलेखों से दर्शाना अधिक उपयुक्त है।

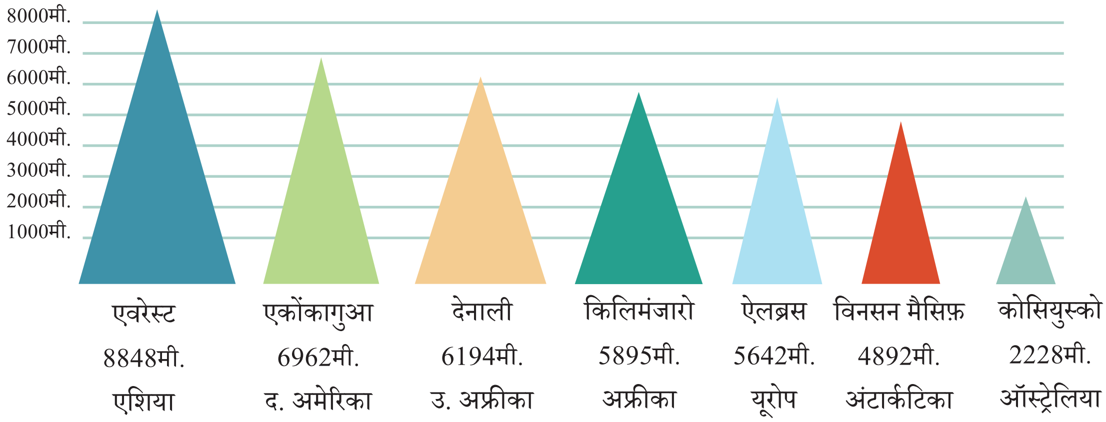
आइए, पता लगाएँ

1. यदि आप अपने विद्यालय की प्रत्येक कक्षा के सबसे लंबे बच्चों की लंबाइयों के आँकड़ों को चित्रीय रूप से दर्शाना चाहते हैं, तो क्या आप क्षैतिज दंडों वाले आलेख का उपयोग करना चाहेंगे या ऊर्ध्वाधर दंडों वाले आलेख का? क्यों?
2. यदि आप प्रत्येक महाद्वीप में सबसे लंबी नदियों और उनकी लंबाइयों की एक सारणी बना रहे हैं, तो आप ऊर्ध्वाधर दंडों वाले या क्षैतिज दंडों वाले दंड आलेख में से किस को प्राथमिकता देंगे? क्यों? इस सूचना को प्राप्त करने का प्रयास कीजिए तथा फिर संगत सारणी और दंड आलेख बनाइए। किस महाद्वीप में सबसे लंबी नदियाँ हैं?

इन्फोग्राफिक्स

जब दंड आलेखों जैसे आँकड़ों के चित्रीयकरणों को अधिक विस्तृत कलात्मक और चित्रीयकल्पना के साथ और अधिक सुंदर बना दिया जाता है, तो ये सूचना ग्राफिक्स **(Information graphics)** या संक्षेप में **इन्फोग्राफिक्स (Infographics)** कहलाती है। इन्फोग्राफिक्स का उद्देश्य आकर्षक दृश्यों का उपयोग करके सूचना को और अधिक स्पष्ट और शीघ्रता से, आकर्षक तरीके से संप्रेषित करना है।

उदाहरण के रूप में उपर्युक्त उल्लेखित प्रत्येक महाद्वीप के सबसे ऊँचे पर्वतों की सूची को देखते हैं। हमने पर्वतों को और अधिक सूचनीय बनाने के लिए क्षैतिज के स्थान पर ऊर्ध्वाधर दंडों का प्रयोग किया। परंतु हम आयत के स्थान पर त्रिभुज का प्रयोग कर सकते हैं, जो कि पर्वत के समान दिखाई देते है। साथ ही हम इसमें रंगों का भी संयोजन कर सकते हैं। उदाहरणार्थ—

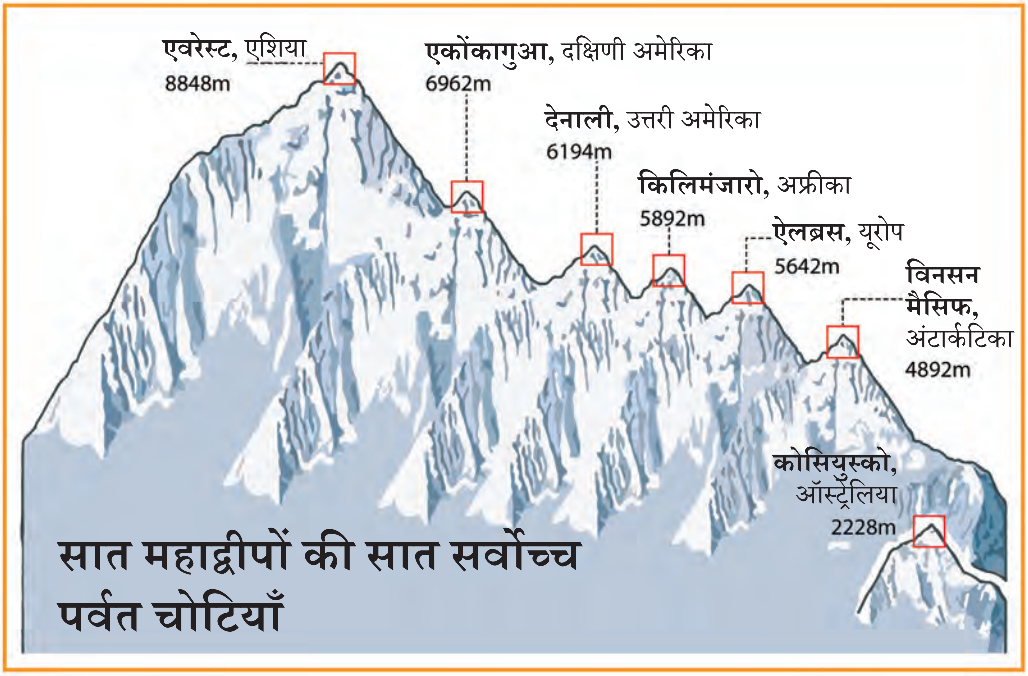


यह इन्फोग्राफिक प्रथम दृष्टि में अधिक आकर्षक और सुझावित दिखाई देता प्रतीत हो सकता है, वहीं इसमें कुछ कठिनाइयाँ भी होती हैं। पहले दंड आलेख का हमारा लक्ष्य विभिन्न पर्वतों की ऊँचाइयों को उपयुक्त ऊँचाइयों के दंडों के माध्यम से दर्शाया है, परंतु इन दंडों की चौड़ाइयाँ समान होनी चाहिए। समान चौड़ाईयों का उपयोग करने का उद्देश्य केवल यह स्पष्ट करना था कि हम केवल ऊँचाइयों की तुलना कर रहे है। परंतु इस इन्फोग्राफिक में ऊँचे त्रिभुज चौड़े भी अधिक हैं। क्या ऊँचे पर्वत सदैव चौड़े होते हैं? यह इन्फोग्राफिक एक अतिरिक्त सूचना भी दे रहा है, जो भ्रामक हो सकती है या गलत भी हो सकती है। अकस्मात् कभी-कभी अधिक आकर्षक चित्र सूचना के स्तर पर भ्रामक भी कर सकते हैं।

इस विचार को और आगे बढ़ाते हुए तथा आलेख को चित्रीय रूप से और अधिक उत्प्रेरक और सांकेतिक बनाने के लिए, हम इन पर्वतों के आकारों में और अधिक परिवर्तन कर सकते हैं, ताकि वे और पर्वतों जैसे दिखें इसके साथ ही ऊँचाइयों को वही रखते हुए अन्य विवरण भी जोड़ सकते हैं। उदाहरणत: हम एक काल्पनिक पर्वत-शृंखला की रचना कर सकते हैं, जिसमें ये सभी पर्वत सम्मिलित हों।

क्या अगले पृष्ठ पर दिया गया इन्फोग्राफिक समान चौड़ाई वाले आयताकार स्तंभों वाले दंड आलेख से उत्तम है? ये पर्वत अधिक वास्तविक प्रतीत होते हैं, परंतु क्या यह चित्र सही है?

उदाहरणार्थ— एवरेस्ट, ऐलब्रस की तुलना में दुगुना लंबा प्रतीत होता है।



5642 × 2 क्या है?

आँकड़ों को दृश्य रूप से आकर्षक रूप में प्रस्तुत करते हुए, हमें सावधान रहना चाहिए कि जो चित्र हम प्रदर्शित कर रहे हैं, कहीं वे हमें तथ्यों के विषय में गलत जानकारी तो प्रदान नहीं कर रहे हैं।

सामान्यत:, इन्फोग्राफिक्स को बनाते या पढ़ते समय सावधानी रखना महत्वपूर्ण है, ताकि हम अपने वाँछित श्रोताओं को भ्रमित नहीं करें और न ही स्वयं भ्रमित हों।

सारांश

- तथ्यों, संख्याओं, मापनों, प्रेक्षणों या वस्तुओं के अन्य विवरण जो उन वस्तुओं के बारे में सूचना प्रदान करते हैं, **आँकड़े** कहलाते हैं।
- सरलतम रूप से विश्लेषण और व्याख्या करने के लिए, आँकड़ों को मिलान चिह्नों का उपयोग करके एक सारणीबद्ध रूप में संगठित किया जा सकता है।
- विशिष्ट मान, मापन अथवा प्रेक्षण जितनी बार प्रकट होते हैं, वह संख्या उनकी **बारंबारता** कहलाती है।

- **चित्रालेख** आँकडों को चित्रों/वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में दर्शाते हैं। प्रत्येक चित्र एक बारंबारता को दर्शाता है, जो 1 या 1 से अधिक हो सकती है। इसी को चित्रालेख का **पैमाना** या **स्केल** कहा जाता है तथा इसे अवश्य ही निर्दिष्ट किया जाना चाहिए।
- **दंड आलेखों** में समान चौड़ाई के दंड होते हैं, जिनमें लंबाई या ऊँचाई उनके प्रकट होने की बारंबारता सूचित की जाती है। लंबाई या ऊँचाई को बारंबारता में बदलने वाले **स्केल** को पुनः निर्दिष्ट किया जाना चाहिए।
- आँकड़ों के विषय में सही और प्रभावी वाँछित सूचनाएँ देने के लिए तथा आलेख को चित्रीय रूप से आकर्षक बनाने के लिए, चित्रालेख या दंड आलेख के लिए एक उपयुक्त पैमाना चुनना महत्वपूर्ण है।
- एक आलेख के अन्य पहलू भी उसके प्रभावीकरण और चित्रीय आकर्षण में योगदान प्रदान करते हैं, जैसे कि किस प्रकार रंगों का उपयोग किया गया है, साथ में कौन-कौन से चित्र खींचे गए हैं तथा यह कि क्या दंड क्षैतिज हैं या उर्ध्वाधर है। ये पहलू आँकड़ा प्रबंधन प्रस्तुतिकरण के कलात्मक और सौंदर्यात्मक पक्षों के संगत हैं।
- यद्यपि, आँकडों के चित्रीय प्रस्तुतिकरण को अधिक आकर्षक या फैंसी (fancy) बनाना कभी-कभी भ्रामक होकर गलत धारणा पर पहुँचा सकता है।
- चित्रालेखों और दंड आलेखों को सही पढ़ने से, हम प्रस्तुत आँकड़ों को तुरंत ही समझ सकते हैं तथा उनके विषय में निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

Reprint 2025-26

5 अभाज्य समय

5.1 सार्व गुणज और सार्व गुणनखंड

इडली-वड़ा खेल

बच्चे वृत्ताकार बैठे हैं और संख्या का खेल, खेल रहे हैं।

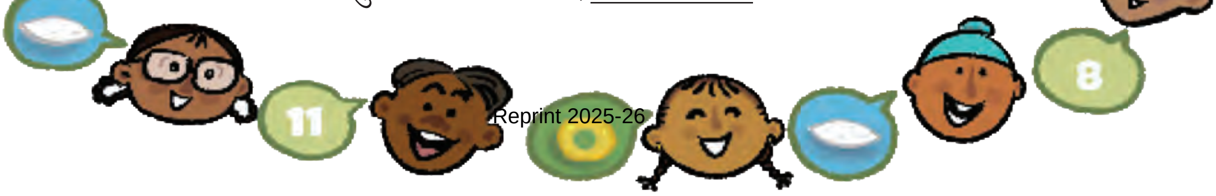
एक बच्चा '1' बोलकर खेल शुरू करता है। दूसरा खिलाड़ी '2' बोलता है और यह क्रम आगे बढ़ता रहता है, लेकिन जब 3, 6, 9... (3 के गुणज) की बारी आएगी तो खिलाड़ी संख्या बोलने के स्थान पर 'इडली' कहेगा। इसके साथ ही जब 5, 10, 15... (5 के गुणज) की बारी आएगी तो खिलाड़ी संख्या बोलने की जगह 'वड़ा' कहेगा। जब संख्या 3 और 5 दोनों का गुणज हो तो खिलाड़ी 'इडली-वड़ा' कहेगा। यदि कोई खिलाड़ी गलती करता है तो उसे खेल से बाहर कर दिया जाएगा।

खेल तब तक, कई चरणों में चलता रहेगा, जब तक कि केवल एक खिलाड़ी शेष बच जाए।

किन संख्याओं के बदले खिलाड़ी 'इडली' कहेगा? ये संख्याएँ 3, 6, 9, 12, 15, 18... और आगे इसी क्रम में होंगी।

किन संख्याओं के लिए खिलाड़ी 'वड़ा' कहेगा? ये संख्याएँ 5, 10, 15, 20 .... और आगे इसी क्रम में होंगी।

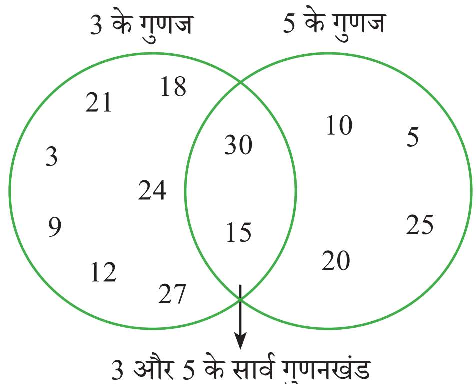
वह कौन-सी पहली संख्या होगी जिसके लिए खिलाड़ी 'इडली-वड़ा' बोलेगा? यह संख्या 15 है, जो 3 और 5 दोनों का गुणज है। ऐसी और संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 3 और 5 की गुणज हैं। ये संख्याएँ __________ कहलाती हैं।



आइए, पता लगाएँ

1. किस संख्या पर दसवीं बार 'इडली-वड़ा' कहा जाएगा?
2. यदि खेल 1 से 90 तक की संख्याओं के लिए खेला जा रहा हो तो ज्ञात कीजिए—
   a. बच्चा कितनी बार 'इडली' कहेगा (इसमें 'इडली-वड़ा' कही जाने वाली बारी भी सम्मिलित होगी)?
   b. बच्चा कितनी बार 'वड़ा' कहेगा (इसमें 'इडली-वड़ा' कही जाने वाली बारी भी सम्मिलित होगी)?
   c. बच्चा कितनी बार 'इडली-वड़ा' कहेगा?
3. क्या होगा यदि खेल 900 तक खेला जाएगा? इसके आधार पर आपके उत्तर में क्या परिवर्तन होंगे?
4. क्या यह आकृति 'इडली-वड़ा' खेल से किसी रूप में संबंधित हैं?

संकेत— कल्पना कीजिए कि आप यह खेल 30 तक खेलते हैं। अगर आप 60 तक खेल खेलते हैं, तो ऐसी ही आकृति बनाइए।



आकृति 5.1

आइए, अब 'इडली-वड़ा' खेल कुछ अलग संख्या युग्मों के साथ खेलें—

a. 2 और 5

b. 3 और 7

c. 4 और 6

हम 'इडली' छोटी संख्या के गुणज के लिए, 'वड़ा' बड़ी संख्या के गुणज के लिए और 'इडली-वड़ा' सार्व गुणज के लिए कहेंगे। यदि खेल संख्या 60 तक खेला जा रहा हो तो आकृति 5.1 के समान आकृति बनाइए।

निम्नलिखित संख्या में से कौन-सी अन्य संख्या हो सकती है—
2, 3, 5, 8, 10?

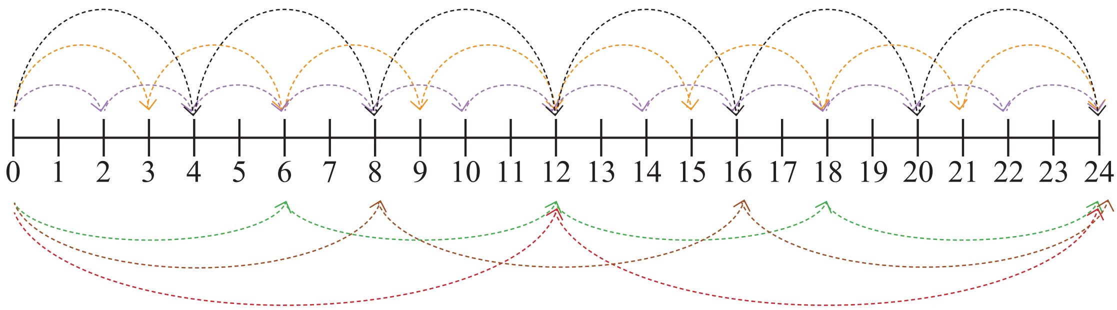
जैकपॉट के लिए छलाँग

जम्पी और ग्रम्पी एक खेल खेलते हैं।

- ग्रम्पी ने किसी संख्या पर एक खजाना रखा। उदाहरण के लिए, उसने इसे 24 पर रखा।
- जम्पी ने एक छलाँग के आकार का चयन किया। यदि उसने 4 का चयन किया, तो 0 से शुरू करते हुए उसे 4 के गुणज पर छलाँग लगानी होगी।
- जम्पी को खजाना मिल जाएगा, यदि वह उस संख्या पर पहुँच जाए जहाँ ग्रम्पी ने खजाना रखा है।

कौन-सा छलाँग का आकार जम्पी को '24' पर पहुँचाएगा?

यदि वह 4 का चयन करता है तो जम्पी पहुँचता है— 4 → 8 → 12 → 16 → 20 → 24 → 28 → ... पर अन्य सफल छलाँग के आकार— 2, 3, 6, 8 और 12 होंगे।



आप छलाँग का आकार 1 और 24 के विषय में क्या कहेंगे? हाँ, वे भी 24 पर पहुँचेंगे।

संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 सभी 24 को पूर्णतया विभाजित करती हैं। ऐसी संख्याओं को याद कीजिए जिन्हें 24 के **गुणनखंड** या **भाजक** कहा जाता है।

ग्रम्पी ने खेल के स्तर को थोड़ा कठिन किया। उसने दो अलग-अलग संख्याओं पर दो खजाने रखे। जम्पी को एक छलाँग के आकार का चयन करना है और इसी पर टिके या स्थिर रहना है। जम्पी को खजाना तभी मिलेगा, जब वह चयनित छलाँग के आकार से दोनों संख्याओं पर पहुँचेगा। पहले की तरह जम्पी 0 से प्रारंभ करता है।

ग्रम्पी ने खजाने को 14 और 36 पर रखा। जम्पी छलाँग का आकार 7 चुनता है।

Reprint 2025-26

क्या जम्पी दोनों खजानों पर पहुँचेगा? 0 से शुरू करते हुए वह 7 → 14 → 21 → 28 → 35→ 42... पर पहुँचेगा। हम देखते हैं कि वह 14 पर तो पहुँचता है, लेकिन 36 पर नहीं पहुँचता। अत: उसे खजाना नहीं मिलता। उसे कौन-से छलाँग के आकार का चयन करना चाहिए था?

14 के गुणनखंड हैं— 1, 2, 7, 14 तो, इन छलाँग के आकार से वह 14 पर अवश्य पहुँचेगा।

36 के गुणनखंड हैं— 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, इन छलाँग के आकर से वह 36 पर अवश्य पहुँचेगा।

अत: 1 या 2 के छलाँग के आकार से वह 14 और 36 दोनों पर अवश्य पहुँचेगा। यहाँ ध्यान दीजिए कि संख्या 1 और 2, संख्याओं 14 और 36 के सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखंड हैं।

वे संभव छलाँग के आकार जिनसे दोनों खजानों तक पहुँचा जा सके, उन दोनों संख्याओं के **उभयनिष्ठ गुणनखंड** हैं जिन पर खजाना रखा हुआ है।

- कौन-सा छलाँग का आकार 15 और 30 दोनों तक पहुँच सकता है? यहाँ बहुत सारे छलाँग के आकार संभव हैं। उन सभी को ढूँढ़ने का प्रयास कीजिए।
- नीचे दी गई तालिका का अवलोकन कीजिए। इस तालिका से आपने क्या समझा?

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

तालिका में—

1. क्या छायांकित बॉक्स संख्याओं के मध्य कुछ समानता है?
2. क्या वृत्त में अंकित संख्याओं के बीच कुछ समानता है?
3. ऐसी कौन-सी संख्याएँ हैं, जो छायांकित बॉक्स और वृत्त, दोनों में हैं। इन संख्याओं को क्या कहते हैं?

गणित चर्चा

आइए, पता लगाएँ

1. 310 और 410 के बीच आने वाले 40 के सभी गुणज ज्ञात कीजिए।

Reprint 2025-26

2. मैं कौन हूँ?

   a. मैं 40 से कम एक संख्या हूँ, मेरा एक गुणनखंड 7 है। मेरे अंकों का जोड़ 8 है।

   b. मैं 100 से छोटी एक संख्या हूँ। मेरे दो गुणनखंड 3 और 5 हैं। मेरा एक अंक, दूसरे से 1 अधिक है।

3. एक संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योग उस संख्या से दुगना हो, **संपूर्ण संख्या (Perfect Number)** कहलाती है। संख्या 28 एक संपूर्ण संख्या है। इसके गुणनखंड 1, 2, 4, 7, 14 और 28 है, इनका योग 56 है जो कि 28 का दुगना है। 1 से 10 तक के बीच एक संपूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए।

4. उभयनिष्ठ गुणनखंड ज्ञात कीजिए—

   a. 20 और 28 b. 35 और 50

   c. 4, 8 और 12 d. 5, 15 और 25

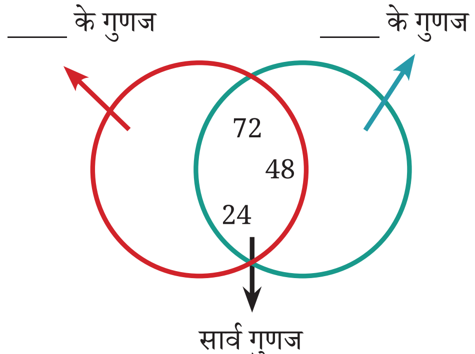
5. तीन ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जो 25 की गुणज हैं लेकिन 50 की नहीं।

6. अंशु और उसके मित्र दो संख्याएँ लेकर 'इडली-वड़ा' खेल, खेल रहे हैं। दोनों संख्याएँ 10 से छोटी हैं। पहली बार यदि कोई 'इडली-वड़ा' कहता है, तो वह संख्या 50 के पश्चात् आती है। वे दोनों संख्याएँ क्या होंगी, जिन्हें 'इडली' और 'वड़ा' कहा गया है।

7. खजाने की खोज खेल में ग्रम्पी ने खजाने को 28 और 70 पर रखा है। दोनों संख्याओं पर पहुँचने के लिए छलाँग का आकार क्या होना चाहिए।

8. नीचे दिए गए चित्र से गुणा ने उभयनिष्ठ गुणज को छोड़कर सभी संख्याओं को मिटा दिया है। पता लगाइए कि वे संख्याएँ कौन-सी हो सकती हैं? और उन लुप्त संख्याओं को खाली स्थान में लिखिए।

गणित चर्चा



9. एक सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 7 को छोड़कर 1 से 10 तक की सभी संख्याओं का गुणज हो।

प्रयास करें

10. एक सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 1 से 10 तक की सभी संख्याओं का गुणज हो।

Reprint 2025-26

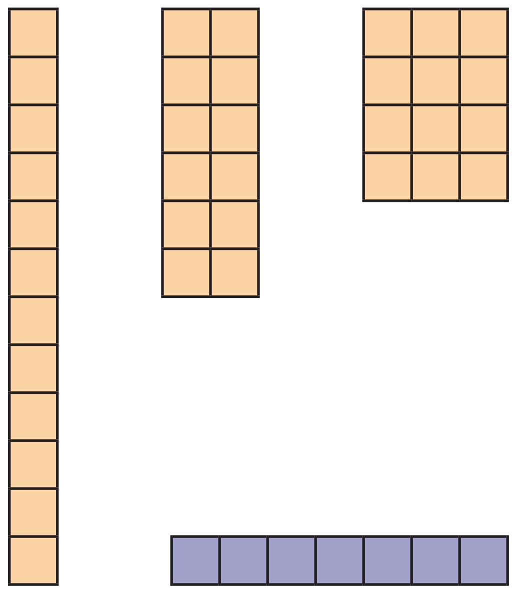
5.2 अभाज्य संख्याएँ

गुणा और अंशु अपने फार्म में उगने वाले अंजीरों को बाँधकर पैक करना चाहते हैं। गुणा प्रत्येक बॉक्स में 12 अंजीर रखना चाहता है और अंशु प्रत्येक बॉक्स में 7 अंजीर रखना चाहता है।

ऐसी कितनी व्यवस्थाएँ संभव हैं?

ऐसे विभिन्न तरीके सोचिए और ज्ञात कीजिए, जिनमें—

1. गुणा 12 अंजीर आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकता है।
2. अंशु 7 अंजीरों को आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकता है। गुणा ने व्यवस्थाओं की एक सूची बनाई है।



प्रत्येक व्यवस्था में पंक्तियों और स्तंभों (कॉलम) की संख्याओं को देखिए। ये 12 से किस प्रकार से संबंधित हैं?

उदाहरण के लिए, दूसरी व्यवस्था में 12 अंजीरों को दो स्तंभों, जिनमें प्रत्येक में 6 अंजीरों को व्यवस्थित किया गया है। या $12 = 2 \times 6$

अंशु केवल एक व्यवस्था बना सकता है— 7×1 या 1×7। यहाँ अन्य कोई आयताकार व्यवस्था संभव नहीं है।

गुणा की प्रत्येक व्यवस्था में पंक्तियों की संख्या को स्तंभों की संख्याओं से गुणन कर 12 प्राप्त होता है। अतः पंक्ति या स्तंभों की संख्या, 12 के गुणनखंड हैं।

यह दृष्टिगत होता है कि संख्या 12 को हम एक से अधिक आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं, क्योंकि 12 के दो से अधिक गुणनखंड हैं। संख्या 7 केवल एक ही तरह से व्यवस्थित हो सकती है क्योंकि इसके केवल दो गुणनखंड हैं— 1 और 7।

ऐसी संख्याएँ जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं, **अभाज्य संख्याएँ (Prime numbers) या अभाज्य (Primes)** कहलाती हैं। कुछ प्रारंभिक अभाज्य संख्याएँ हैं— 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19। ध्यान दीजिए, किसी भी अभाज्य संख्या के गुणनखंड 1 और वह संख्या स्वयं होती है।

ऐसी संख्याएँ जिनके दो से अधिक गुणज होते हैं? उन्हें **भाज्य संख्याएँ (Composite numbers)** कहते हैं। पहली कुछ भाज्य संख्याएँ हैं— 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20।

संख्या 1 के विषय में क्या कहेंगे, जिसका केवल 1 गुणनखंड है? 1 न ही अभाज्य संख्या है न ही भाज्य संख्या है।

21 से 30 के बीच कितनी अभाज्य संख्याएँ हैं? 21 से 30 के बीच कितनी भाज्य संख्याएँ हैं?

क्या हम 1 से 100 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना सकते हैं?

अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने के लिए एक रोचक तरीका दिया गया है। नीचे दिए गए चरणों का प्रयोग करते हुए देखिए कि क्या परिणाम निकलता है?

चरण 1— 1 को काट दीजिए क्योंकि यह न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य है।

चरण 2— 2 पर गोल घेरा बनाइए और 2 के अन्य सभी गुणजों, जैसे— 4, 6, 8.... इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 3— आप देखेंगे कि अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर गोल घेरा बना दीजिए। 3 के अन्य सभी गुणजों, जैसे— 6, 9, 12.... इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 4— अगली बिना कटी संख्या 5 है। 5 पर घेरा बनाइए। इसको छोड़ कर 5 के अन्य सभी गुणजों 10, 15, 20.... इत्यादि को काट दीजिए।

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

चरण 5— इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक उपरोक्त सूची की सभी संख्याओं पर या तो घेरा न लग जाए या उन्हें काट न दिया जाए।

घेरा लगी हुई सभी संख्याएँ, अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 के अतिरिक्त सभी काटी गई संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं। यह विधि इराटोस्थेनीस की छलनी (Sieve of Eratosthenes) कहलाती है।

इस विधि को 100 से बड़ी संख्याओं के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है। इराटोस्थेनीस 2200 वर्ष पूर्व एक ग्रीक गणितज्ञ थे, जिन्होंने अभाज्य संख्याओं को सूचीबद्ध करने की यह विधि विकसित की थी।

Reprint 2025-26

गुणा और अंशु आश्चर्यचकित हैं कि इस सरल विधि द्वारा अभाज्य संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं। सोचिए कि यह विधि किस प्रकार कार्य करती है। दिए गए चरणों को पुन: पढ़िए और देखिए कि प्रत्येक चरण के पश्चात् क्या-क्या होता है?

आइए, पता लगाएँ

1. हम देखते हैं कि 2 एक अभाज्य संख्या है और यह सम संख्या भी है। क्या कोई अन्य सम अभाज्य संख्या है?
2. 100 तक की अभाज्य संख्याओं की सूची देखिए। दो क्रमागत अभाज्य संख्याओं में न्यूनतम एवं अधिकतम अंतर क्या है?
3. क्या प्रत्येक पंक्ति में एक समान संख्या में अभाज्य संख्याएँ थीं? किन दहाइयों में न्यूनतम अभाज्य संख्याएँ हैं? यह भी बताइए कि पिछले पृष्ठ पर दी गई सारणी में किनमें अधिकतम अभाज्य संख्याएँ हैं?

युगों-युगों से अभाज्य संख्याएँ

अभाज्य संख्याएँ, सभी पूर्ण संख्याओं के निर्माण खंड (Building Blocks) हैं। ग्रीक सभ्यता (2000 वर्षों से भी पहले) से शुरू करते हुए, आज तक गणितज्ञ उनके रहस्यों को सुलझाने के लिए संघर्ष कर रहे हैं।

सोच के लिए खुराक— क्या कोई सबसे बड़ी अभाज्य संख्या होती है? या अभाज्य संख्याओं की सूची बिना किसी अंत के बढ़ती रहेगी? युक्लिड (Euclid) नाम के गणितज्ञ ने इसका उत्तर दिया, आप भी आगे की कक्षा में यह जान पाएँगे।

मनोरंजक तथ्य— किसी के द्वारा लिखी गई सबसे बड़ी अभाज्य संख्या इतनी बड़ी है कि वह 6500 पृष्ठों पर लिखी गई है। अतः हम उसे केवल एक कम्प्यूटर पर ही लिख सकते हैं।

4. इनमें से कौन-सी संख्याएँ अभाज्य हैं— 23, 51, 37, 26?
5. अभाज्य संख्याओं के तीन युग्म लिखिए, जो 20 से कम हों और उनका योग 5 का गुणज हो।
6. संख्या 13 और 31 अभाज्य संख्याएँ हैं। इन दोनों संख्याओं में अंक 1 और 3 समान हैं। 100 तक की संख्याओं में से ऐसे अन्य सभी अभाज्य संख्याओं के युग्म ज्ञात कीजिए।
7. 1 से 100 के बीच 7 क्रमागत भाज्य संख्याएँ लिखिए।
8. अभाज्य संख्याओं के युग्म जिनका अंतर 2 हो जुडवाँ **अभाज्य युग्म (Twin Primes)** कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, 3 और 5 जुड़वाँ अभाज्य युग्म हैं, इसी प्रकार 17 और 19 हैं। 1 से 100 के बीच अन्य जुड़वाँ अभाज्य युग्म ज्ञात कीजिए?

9. प्रत्येक कथन को सही या गलत के रूप में पहचानिए एवं स्पष्ट कीजिए—
   a. ऐसी कोई अभाज्य संख्या नहीं है जिसका इकाई का अंक 4 हो।
   b. अभाज्य संख्याओं का गुणनफल भी अभाज्य हो सकता है।
   c. अभाज्य संख्याओं के कोई गुणनखंड नहीं होते हैं।
   d. सभी सम संख्याएँ भाज्य संख्याएँ होती हैं।
   e. संख्याएँ 2 तथा 3 अभाज्य हैं। अन्य प्रत्येक अभाज्य संख्या के लिए अगली संख्या भाज्य है।
10. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या को तीन अलग-अलग अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?
    45, 60, 91, 105, 330.
11. अंक 2, 4 और 5 का एक बार प्रयोग करके आप तीन अंकों की कितनी अभाज्य संख्याएँ बना सकते हैं?
12. ध्यान दीजिए कि 3 एक अभाज्य संख्या है और $2 \times 3 + 1 = 7$ भी एक अभाज्य संख्या है। क्या और भी ऐसी अभाज्य संख्याएँ हैं, जिन्हें 2 से गुणन करके एक जोड़ने पर अन्य अभाज्य संख्या प्राप्त होती है? ऐसे कम से कम पाँच उदाहरण ज्ञात कीजिए।

5.3 खजानों को सुरक्षित रखने के लिए सह-अभाज्य संख्याएँ (Co-prime numbers)

कौन-से जोड़े सुरक्षित हैं?

खजाना ढूँढ़ने वाले खेल को पुन: देखते हैं। इस बार, खजाने दो संख्याओं पर रखे हैं। जम्पी को खजाना केवल तभी मिलेगा जब वह दोनों संख्याओं पर समान छलाँग आकार के द्वारा पहुँचेगा। यहाँ एक नया नियम भी है— 1 को छलाँग आकार लेने की अनुमति नहीं है।

ग्रम्पी खजाने को कहाँ रखे कि जम्पी दोनों संख्याओं तक न पहुँच सके।

क्या खजानों को 12 और 26 पर रखने से काम हो जाएगा? नहीं! छलाँग का आकार 2 लेने पर जम्पी 12 और 26 दोनों तक पहुँच सकता है।

4 और 9 के बारे में आप क्या कहेंगे? 1 छलाँग आकार का प्रयोग किए बिना जम्पी दोनों युग्मों तक नहीं पहुँच सकता। अत: ग्रम्पी जानता है कि युग्म 4 और 9 उसके लिए सुरक्षित है।

जाँचिए क्या ये युग्म सुरक्षित हैं—

a. 15 और 39 b. 4 और 15

c. 18 और 29 d. 20 और 55

Reprint 2025-26

सुरक्षित युग्मों के विषय में क्या विशेष है? उनमें 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। दो संख्याएँ जिनमें 1 के अतिरिक्त कोई सार्वगुणनखंड नहीं होता, **सह-अभाज्य संख्याएँ** कहलाती हैं।

उदाहरण— चूँकि 15 और 39 में 3 एक सार्व गुणनखंड है, अत: ये सह-अभाज्य नहीं है। लेकिन 4 और 9 सह-अभाज्य हैं।

- निम्नलिखित में से कौन-सा संख्या युग्म सह-अभाज्य है?

  a. 18 और 35 b. 15 और 37 c. 30 और 415

  d. 17 और 69 e. 81 और 18

- भिन्न संख्या युग्म लेकर 'इडली-वड़ा' खेल खेलते हुए, अंशु ने एक रोचक बात देखी!

  1. कभी-कभी, प्रथम सार्व गुणज, दोनों संख्याओं के गुणनफल के समान था।
  2. अन्य स्थितियों में प्रथम सार्व गुणज, दोनों संख्याओं के गुणनफल से छोटा था।

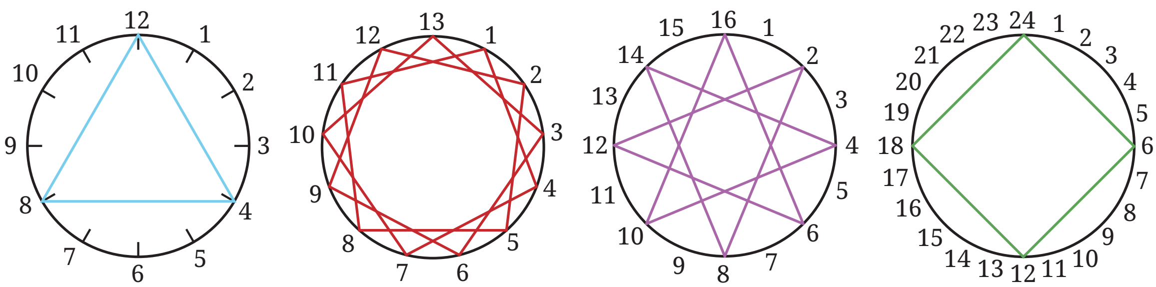
उपरोक्त प्रत्येक कथन के लिए उदाहरण खोजिए। यह संख्या युग्म के सह-अभाज्य होने से किस प्रकार संबंधित है?

गणित चर्चा

सह-अभाज्य कला

- नीचे दर्शाई गई धागे की कला को देखिए। पहली आकृति में 12 खूँटियाँ हैं। धागा हर चौथी खूँटी से बंधा है (हम कह सकते हैं कि धागे का अंतर 4 है)। दूसरी आकृति में 13 खूँटियाँ हैं और धागे का अंतर 3 है। अन्य आकृतियों के विषय में आप क्या सोचते हैं? इन आकृतियों को देखिए, अपनी जानकारी को कक्षा में साझा कीजिए और चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा



कुछ आकृतियों में धागा प्रत्येक खूँटी से बँधा है एवं कुछ में नहीं बँधा है। क्या यह दो संख्याओं (खूटियों की संख्या और धागे के अंतर) के सह-अभाज्य होने से संबंधित है?

निम्नलिखित के लिए ऐसी ही आकृतियाँ बनाइए—

a. 15 खूँटी, धागे का अतंर 10 b. 10 खूँटी, धागे का अंतर 7

b. 14 खूँटी, धागे का अंतर 6 d. 8 खूँटी, धागे का अंतर 7

5.4 अभाज्य गुणनखंडन

दो संख्याओं की सह-अभाज्यता की जाँच करना

शिक्षक— क्या 56 और 63 सह-अभाज्य हैं?

अंशु और गुणा—यदि उनका सार्व गुणनखंड संख्या 1 से अलग है, तो वे सह-अभाज्य नहीं होंगी। आइए, जाँच करते हैं।

अंशु— मैं लिख सकता हूँ कि 56=14×4 और 63=21×3। इस प्रकार 14 और 4 संख्या 56 के गुणनखंड हैं। इसी प्रकार, 21 और 3 संख्या 63 के गुणनखंड हैं। अतः इनके कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं हैं, और ये संख्याएँ सह-अभाज्य हैं।

गुणा— रुको, मैं 56=7×8 और 63=9×7 भी लिख सकता हूँ। हम देख सकते हैं कि 7 दोनों संख्याओं का गुणनखंड है। अतः ये दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य नहीं हैं।

स्पष्ट रूप से गुणा सही है क्योंकि 7 एक सार्व गुणनखंड है।

लेकिन अंशु ने गलती कहाँ की?

$56 = 14 \times 4$ हमें बताता है कि 14 और 4 दोनों 56 के गुणनखंड हैं, लेकिन इससे 56 के सभी गुणनखंडों का पता नहीं चलता। क्या 63 के गुणनखंड के लिए भी ऐसा ही है?

एक अन्य उदाहरण 80 और 63 का लेते हैं। दोनों संख्याओं का गुणनखंड निकालने के अनेक तरीके हैं।

$80 = 40 \times 2 = 20 \times 4 = 10 \times 8 = 16 \times 5 = ???$

$63 = 9 \times 7 = 3 \times 21 = ???$

हमने ??? लिखा है क्योंकि इन संख्याओं के गुणनखंड करने के और भी तरीके हैं। लेकिन यदि हम उनमें से कोई एक गुणनखंड लें, उदाहरण के लिए, $80 = 16 \times 5$ और $63 = 9 \times 7$ तो इनमें कोई सार्व गुणनखंड नहीं हैं। क्या हम यहाँ यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 80 और 63 सह-अभाज्य हैं। चूँकि ऊपर अंशु की गलती दर्शाती है अत: हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। क्योंकि गुणनखंडन के अन्य तरीके भी हैं।

इसका अर्थ है कि दो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं या नहीं, इसकी जाँच करने के लिए हमें और अधिक व्यवस्थित दृष्टिकोण की आवश्यकता है।

Reprint 2025-26

अभाज्य गुणनखंडन

एक संख्या 56 को उदाहरण के रूप में लेते हैं जो कि भाज्य संख्या है, जैसा कि हमने देखा कि **56 = 4 × 14** लिखा जा सकता है। अतः 4 और 14 दोनों 56 के गुणनखंड हैं। अब इनमें से एक लेते हैं मान लीजिए, 14 यह भाज्य संख्या है और हम इसे 14 = 2 × 7 लिख सकते हैं। अत: **56 = 4 × 2 × 7** यहाँ 4 एक भाज्य संख्या है और 4 = 2 × 2. अत: **56 = 2 × 2 × 2 × 7**। गुणनखंड 2 और 7 जो यहाँ उल्लेखित हैं, अभाज्य संख्याएँ हैं। अत: हम इन्हें और आगे विभाजित नहीं कर सकते।

निष्कर्ष में, हमने 56 को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा है। यह 56 का **अभाज्य गुणनखंडन** (Prime Factorization) कहलाता है। एकक गुणनखंड, अभाज्य गुणनखंड (Prime factors) कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, 2 और 7 संख्या 56 के अभाज्य गुणनखंड हैं।

1 से बड़ी प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन होता है। यहाँ अवधारणा है— भाज्य संख्या को गुणनखंडों के रूप में तब तक लिखिए जब तक केवल अभाज्य संख्या न रह जाए।

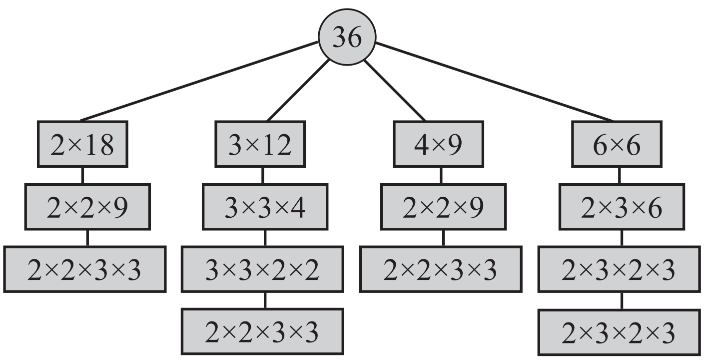
संख्या 1 का कोई अभाज्य गुणनखंडन नहीं है। यह किसी भी अभाज्य संख्या से विभाजित नहीं होता।

अभाज्य संख्या, जैसे 7 का अभाज्य गुणनखंडन क्या होगा? यह केवल 7 है (हम इसे और अधिक विभाजित नहीं कर सकते)।

आइए कुछ और उदाहरण देखें—

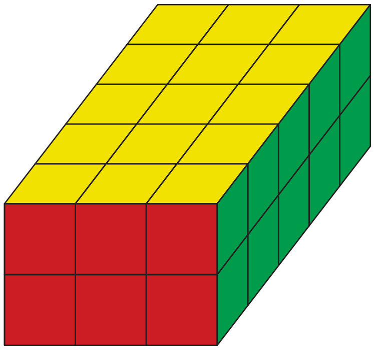
अलग-अलग तरीकों से विभाजित करते हुए हमने 63 को लिखा 3 × 3 × 7 और 3 × 7 × 3। क्या ये अलग-अलग हैं? वास्तव में नहीं! वही अभाज्य संख्याएँ 3 और 7 दोनों स्थितियों में दिखाई दे रही हैं। दोनों स्थितियों में संख्या 3, दो बार और संख्या 7, एक बार दिखाई दे रही है।

आकृति में, 36 के अभाज्य गुणनखंडन को चार विभिन्न तरीकों से दिखाया गया है। देखिए इन सभी चारों स्थितियों में दो बार 2 और दो बार 3 प्राप्त हो रहा है। उन्हें पुन: गुणन करके देखिए। हमें चारों स्थितियों में 36 प्राप्त होता है।



यदि अभाज्य गुणनखंडन के क्रम को छोड़ दिया जाए, तो किसी भी संख्या के लिए केवल एक अभाज्य गुणनखंडन होता है। हम नीचे बता रहे हैं कि क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। फिर भी जैसा कि हमने इन उदाहरणों में देखा कि हम परिणाम तक विभिन्न तरीकों से पहुँच सकते हैं।

क्या क्रम महत्वपूर्ण है?



इस चित्र की मदद से क्या आप समझा सकते हैं कि **30 = 2 × 3× 5** क्यों होता है, चाहे आप 2, 3 और 5 को किसी भी तरह से गुणन करें?

जब हम संख्याओं का गुणन करते हैं, तो हम यह किसी भी क्रम में कर सकते हैं। परिणाम एक समान होगा। इसीलिए, जब दो बार 2 और दो बार 3 को किसी भी क्रम में गुणन किया जाता है तो हमें 36 प्राप्त होता है। आगे की कक्षा में, हम इसका **गुणन की क्रमविनिमेयता और साहचर्यता** के नाम से अध्ययन करेंगे।

अतः क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। साधारणतया अभाज्य संख्याओं को हम बढ़ते क्रम में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, 225 = 3 × 3 × 5 × 5 और 30 = 2 × 3 × 5।

दो संख्याओं के गुणनफल का अभाज्य गुणनखंडन

जब हम किसी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं, तो सबसे पहले हम इसे दो गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, 72 = 12 × 6, इसके पश्चात् हम दोनों प्राप्त गुणनखंडों वाली प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं। उपरोक्त उदाहरण में 12 = 2 × 2 × 3 और 6 = 2 × 3। क्या अब, आप 72 का अभाज्य गुणनखंडन बता सकते हैं?

वास्तविक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन प्राप्त करने के लिए दोनों के गुणनखंडों को एक साथ लिखना होगा।

$$72 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं— $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$। गुणन करके जाँचिए कि हमें फिर से 72 प्राप्त होता है।

अवलोकन कीजिए कि 72 के गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड कितनी बार आया।

इसकी तुलना इस तथ्य से कीजिए कि जब 12 और 6 के गुणनखंडों को एक साथ लिखते हैं तो ये संख्याएँ कितनी बार आती हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित संख्याओं का अभाज्य-गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—
   64, 105, 243, 320, 141, 1728, 729, 1024, 1331, 1000
2. किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में एक बार 2, दो बार 3 और एक बार 11 हो, तो वह संख्या क्या होगी?
3. 30 से छोटी ऐसी तीन अभाज्य संख्याएँ बताइए, जिनका गुणनफल 1955 हो?
4. बिना गुणा किए निम्न संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

   a. 56×25 b. 108×75 c. 1000×81
5. वह छोटी से छोटी संख्या क्या होगी जिसके अभाज्य गुणनखण्डन में

   a. तीन अलग अभाज्य संख्याएँ हों।

   b. चार अलग अभाज्य संख्याएँ हों।

अभाज्य गुणनखंडन, संख्याओं के अध्ययन के लिए एक मौलिक आवश्यकता है। आइए, दो उपयोगी विधियों पर चर्चा करें।

अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो संख्याओं की सह-अभाज्यता की जाँच करना

आइए पुन: संख्याएँ 56 और 63 लें। कैसे जाँचें कि ये सह-अभाज्य हैं? आइए, हम दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं—

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \text{ और } 63 = 3 \times 3 \times 7$$

हम देखते हैं कि संख्या 7, 56 का अभाज्य गुणनखंड है और 63 का भी। अतः 56 और 63 सह-अभाज्य संख्याएँ नहीं हैं।

80 और 63 के बारे में आप क्या कहेंगे? उनके अभाज्य गुणनखंड इस प्रकार हैं—

$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \text{ और } 63 = 3 \times 3 \times 7$$

इसमें कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है। क्या इस आधार पर हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वे सह-अभाज्य हैं। माना कि उनका एक भाज्य सार्व गुणनखंड है। तो क्या इस भाज्य सार्व गुणनखंड के अभाज्य गुणनखंड 80 और 63 के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित हैं?

अत: हम कह सकते हैं कि यदि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है तो वे दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

आइए, हम कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण— 40 और 231 लीजिए। इनके अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं—

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \text{ और } 231 = 3 \times 7 \times 11$$

हम देख सकते हैं कि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है जो 40 और 231 को विभाजित करता हो। संख्या 40 के अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 हैं जबकि 231 के अभाज्य गुणनखंड 3, 7 और 11 हैं। अत: 40 और 231 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

उदाहरण— 242 और 195 लीजिए। इनका अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार है—

$$242 = 2 \times 11 \times 11 \text{ और } 195 = 3 \times 5 \times 13$$

242 के अभाज्य गुणनखंड 2 और 11 हैं। 195 के अभाज्य गुणनखंड 3, 5 और 13 हैं। इनके कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है। अतः 242 और 195 सह-अभाज्य हैं।

अभाज्य गुणनखंडन का प्रयोग करके एक संख्या का दूसरी संख्या से विभाजन की जाँच करना

हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या, दूसरी संख्या से विभाजित होती है, तो दूसरी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, पहली संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित होगा।

हम कहते हैं कि 48, संख्या 12 से विभाजित होती है क्योंकि जब हम 48 को 12 से भाग देते हैं तो शेषफल शून्य प्राप्त होता है। बिना लंबी विभाजन विधि के हम कैसे जाँचें कि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है?

उदाहरण— क्या 168 संख्या 12 से विभाजित होगी? दोनों के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \text{ और } 12 = 2 \times 2 \times 3$$

क्योंकि हम किसी भी क्रम में गुणन कर सकते हैं। अत: यह स्पष्ट है कि

$$168 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 = 12 \times 14$$

अतः 168 संख्या 12 से विभाजित होती है।

Reprint 2025-26

उदाहरण— क्या 75 संख्या 21 से विभाजित होती है? दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

$$75 = 3 \times 5 \times 5 \text{ और } 21 = 3 \times 7$$

जैसा कि हमने पिछले उदाहरण की चर्चा में देखा यदि 75, संख्या 21 का गुणज है तो 21 के सभी अभाज्य गुणनखंड, 75 के भी अभाज्य गुणनखंड होंगे। लेकिन 7, संख्या 21 का अभाज्य गुणनखंड है पर 75 का अभाज्य गुणनखंड नहीं है। अत: 75, संख्या 21 से विभाजित नहीं होती।

उदाहरण— क्या 42 संख्या 12 से विभाजित होता है? दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

$$42 = 2 \times 3 \times 7 \text{ और } 12 = 2 \times 2 \times 3$$

12 के सभी अभाज्य गुणनखंड, संख्या 42 के गुणनखंडों में सम्मिलित हैं। लेकिन 12 का अभाज्य गुणनखंडन, 42 के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित नहीं है। यह इसलिए होता है जब हम 12 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं, तो 2 दो बार आता है परंतु जब हम 42 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं तो 2 एक बार आता है। इसका अर्थ है 42, संख्या 12 से विभाजित नहीं होता।

अत: हम कह सकते हैं कि जब एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है तो दूसरी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन पहली संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित होते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या निम्नलिखित संख्या युग्म सह-अभाज्य संख्याएँ हैं? पहले अनुमान लगाइए फिर अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

   a. 30 और 45 b. 57 और 85

   c. 121 और 1331 d. 343 और 216

2. क्या पहली संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है? अभाज्य गुणनखंडन का प्रयोग कीजिए।

   a. 225 और 27 b. 96 और 24

   c. 343 और 17 d. 999 और 99

3. पहली संख्या का अभाज्य गुणनखंडन $2 \times 3 \times 7$ है और दूसरी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन $3 \times 7 \times 11$ है। क्या ये दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं? क्या इनमें से एक संख्या दूसरी संख्या को विभाजित करती है?

4. गुणा कहता है, "कोई भी दो अभाज्य संख्याएँ सह-अभाज्य होती हैं।" क्या वह सही है?

5.5 संख्याओं की विभाज्यता की जाँच

अभी तक, हमने विभिन्न संदर्भों में संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात किए हैं, यह पता लगाने के लिए कि वह अभाज्य संख्या है या नहीं, अथवा संख्या युग्म सह-अभाज्य है या नहीं।

छोटी संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात करना सरल है। बड़ी संख्याओं के गुणनखंड हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, एक संख्या 8560 लेते हैं। क्या इसके 2 से 10 तक (2, 3, 4, 5,...,9,10) कोई गुणनखंड हैं?

ये संख्याएँ गुणनखंड हैं या नहीं, यह बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया के आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। क्या आप उन्हें ज्ञात कर सकते हो?

10 से विभाज्यता

आइए, 10 को उदाहरण के रूप में लेते हैं। क्या 8560 संख्या 10 से विभाजित होती है? दूसरे तरीके से हम पूछ सकते हैं कि क्या 10 संख्या 8560 का एक गुणनखंड है?

इसके लिए, हम 10 के गुणजों के पैटर्न को देखते हैं।

10 के कुछ प्रारंभिक गुणज इस प्रकार है— 10, 20, 30, 40... इस क्रम को जारी रखिए और पैटर्न का अवलोकन कीजिए।

क्या संख्या 125 संख्या 10 का गुणज है? क्या पिछले अनुक्रम में यह संख्या दिखाई देती है? क्यों या क्यों नहीं?

क्या अब आप बता सकते हैं कि 8560 संख्या 10 से विभाजित है?

इस कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 10 से विभाजित होती हैं वे '0' पर समाप्त होती हैं। क्या आप इससे सहमत हैं?

गणित चर्चा

5 से विभाज्यता

5 एक अन्य संख्या है, जिसकी विभाज्यता को सरलता से जाँचा जा सकता है। हम इसे कैसे करेंगे?

5 के गुणजों, जैसे— 5, 10, 15, 20, 25, – – – की सूची बनाकर इसकी खोज कीजिए। इन संख्याओं में आप क्या देखते हैं? क्या आप इनके अंतिम अंक में कोई पैटर्न देखते हैं?

399 से छोटी सबसे बड़ी संख्या क्या है जो 5 से विभाजित होती है? क्या 8560 संख्या 10 से विभाजित होती है?

कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 5 से विभाजित होती हैं वे या तो '0' पर समाप्त होती हैं या '5' पर समाप्त होती हैं। क्या आप सहमत हैं?

गणित चर्चा

2 से विभाज्यता

2 के कुछ प्रारंभिक गुणज 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, … हैं। आप यहाँ क्या देखते हैं? क्या इनके अंतिम अंक में आपको कोई पैटर्न दिखता है?

क्या संख्या 682, 2 से विभाजित होती है? क्या हम इसका उत्तर बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया के दे सकते हैं?

क्या संख्या 8560, 2 से विभाजित होती है? क्यों या क्यों नही?

- इस कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं वे '0', '2', '4', '6' या '8' पर समाप्त होती हैं। क्या आप इससे सहमत हैं? 399 और 411 के बीच 2 के सभी गुणज क्या हैं?

4 से विभाज्यता

कोई संख्या 4 से विभाजित होती है, इसकी जाँच भी आसानी से की जा सकती है।

इसके गुणजों— 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32... को देखिए।

क्या आप इनमें किसी पैटर्न को देखते हैं, जिसका उपयोग किया जा सके? 10, 5 और 2 के गुणजों के अंतिम अंकों में पैटर्न रहे हैं, जिसका उपयोग हमने इनकी विभाज्यता की जाँच करने के लिए किया। इसी प्रकार से, क्या हम अंतिम अंक देखकर बता सकते हैं कि कोई संख्या 4 से विभाजित होगी?

यह पैटर्न यहाँ लागू नहीं होता। अब 12 और 22 को देखिए इनका अंतिम अंक समान है, परंतु 12 तो 4 का गुणज है जबकि 22 नहीं है। इसी प्रकार से 14 और 24 में अंतिम अंक समान हैं, परंतु 14, संख्या 4 का गुणज नहीं है जबकि 24 है। इसी प्रकार 16 और 26 या 18 और 28 हैं। इसका अर्थ यह है कि संख्या के अंतिम अंक को देखकर हम नहीं बता सकते कि वह संख्या 4 का गुणज है या नहीं।

क्या हम इस प्रश्न का उत्तर संख्या के अंतिम के अधिक अंक देखकर दे सकते हैं? 1 से 200 के बीच 4 के गुणजों की सूची बनाइए और पैटर्न खोजिए।

- 330 और 340 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 4 से विभाज्य हों। साथ ही, 1730 और 1740, तथा 2030 और 2040 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 4 से विभाज्य हों। आप क्या देखते हैं?

- क्या 8536 संख्या 4 से विभाज्य है?

- इन कथनों पर विचार कीजिए—

1. किसी संख्या की 4 से विभाज्यता का निर्धारण करते समय उस संख्या के केवल अंतिम दो अंक महत्व रखते हैं।
2. यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित हो जाती है तो वह मूल संख्या भी 4 से विभाजित होती है।
3. यदि कोई संख्या 4 से विभाजित होती है तो उसके अंतिम दो अंकों से बनी संख्या भी 4 से विभाजित होती है।

क्या आप इससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

8 से विभाज्यता

यह जानना रोचक है कि 8 से विभाज्यता की जाँच भी सरलता से की जा सकती है। क्या इसके लिए अंतिम दो अंकों का उपयोग किया जा सकता है?

120 और 140 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 8 से विभाज्य हों। साथ ही 1120 और 1140 तथा 3120 और 3140 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 8 से विभाज्य हों। आप क्या देखते हैं?

8560 के अंतिम दो अंक इस प्रकार बदलिए ताकि परिणामी संख्या 8 का गुणज हो।

इन कथनों पर विचार करें—

1. दी गई संख्या 8 से विभाज्य है, यह पता करने के लिए केवल अंतिम 3 अंक ही महत्व रखते हैं।
2. यदि अंतिम 3 अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य है तो वह मूल संख्या भी 8 से विभाज्य होगी।
3. यदि मूल संख्या 8 से विभाज्य है, तो उसके अंतिम 3 अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य होगी।

गणित चर्चा

क्या आप इससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

हमने देखा है कि कोई संख्या गुणनखंड है या नहीं, यह जाँचने के लिए हमेशा लंबी विभाजन विधि की आवश्यकता नहीं होती है। हमने कुछ अवलोकनों के उपयोग से 10, 5, 2, 4, 8 के लिए सरल विधियाँ निकाली। क्या हमारे पास अन्य संख्याओं के लिए भी ऐसी सरल विधियाँ हैं? हम अगली कक्षाओं में 3, 6, 7 और 9 से विभाज्यता के परीक्षण करने के सरल तरीकों पर विचार करेंगे।

आइए, पता लगाएँ

1. 2024 एक अधिवर्ष है (अर्थात फरवरी में 29 दिन होते हैं)। अधिवर्ष हर उस वर्ष में होता है जो 4 के गुणज होते हैं, सिवाय उन वर्षों के जो 100 से तो विभाजित हैं लेकिन 400 से नहीं।
   a. आपके जन्म के वर्ष से लेकर अब तक कौन-से वर्ष अधिवर्ष थे?
   b. वर्ष 2024 से 2099 तक कितने अधिवर्ष होंगे?
2. सबसे बड़ी और सबसे छोटी 4 अंकों की संख्याओं का पता लगाइए, जो 4 से विभाज्य हों और पैलिंड्रोम भी हों?
3. खोजिए और ज्ञात कीजिए कि क्या प्रत्येक कथन सदैव सत्य है, कभी-कभी सत्य है या कभी भी सत्य नहीं हैं। आप अपने तर्क के समर्थन में उदाहरण दे सकते हैं।

Reprint 2025-26

a. दो सम संख्याओं का योगफल, 4 का गुणज होता है।
b. दो विषम संख्याओं का योगफल, 4 का गुणज होता है।

4. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को (a) 10, (b) 5, (c) 2 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

78, 99, 173, 572, 980, 1111, 2345

5. शिक्षक ने पूछा कि क्या 14560, संख्याओं 2, 4, 5, 8 और 10 सभी से विभाज्य है। गुणा ने इनमें से केवल दो संख्याओं से 14560 की विभाज्यता की जाँच की और कहा कि 14560 उन सभी संख्याओं से भी विभाज्य है। वे दो संख्याएँ क्या हो सकती हैं?
6. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ 2, 4, 5, 8 और 10 सभी से विभाज्य हैं?

572, 2352, 5600, 6000, 77622160

7. दो संख्याएँ लिखिए जिनका गुणनफल 10000 हो। दोनों संख्याओं का इकाई का अंक शून्य नहीं होना चाहिए।

5.6 संख्याओं के साथ मनोरंजन

विशेष संख्याएँ

इस बॉक्स में चार संख्याएँ हैं। आपको कौन-सी संख्या विशेष लगती है? आपको ऐसा क्यों लगता है?

9	16
25	43

देखिए गुणा के सहपाठियों ने क्या साझा किया—

- कर्णावती कहती है, "9 विशेष है क्योंकि यह एक अंकीय संख्या है जबकि अन्य संख्याएँ दो अंकीय हैं।"
- गुरप्रीत कहता है, "9 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र संख्या है जो 3 का गुणज है।"
- मुरुगन कहता है, "16 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र सम संख्या है और 4 का एकमात्र गुणज भी।"
- गोपिका कहती है, "25 विशेष है क्योंकि यह 5 का एकमात्र गुणज है।"

Reprint 2025-26

- याज़ीकी कहती है, "43 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र अभाज्य संख्या है।"
- राधा कहती है, "43 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र ऐसी संख्या है जो वर्ग नहीं है।"

गणित चर्चा

नीचे कुछ बॉक्स हैं, जिनमे प्रत्येक बॉक्स में चार संख्याएँ हैं। प्रत्येक बॉक्स के लिए यह कहने का प्रयास कीजिए की प्रत्येक संख्या अन्य की तुलना में किस प्रकार विशेष है। अपने सहपाठियों के साथ साझा कीजिए और पता लगाइए कि किसने वही कारण बताए जो आपने दिए। क्या किसी ने अलग कारण बताए जो शायद आपने न सोचे हों?

5	7
12	35

3	8
11	24

27	3
123	31

17	27
44	65

एक अभाज्य पहेली

गणित चर्चा

बाईं ओर का चित्र एक पहेली दर्शाता है। दाहिनी ओर का चित्र उस पहेली का हल है। सोचिए पहेली सुलझाने के क्या नियम हो सकते हैं?

			75
			42
			102
170	30	63	

5	5	3	75
2	3	7	42
17	2	3	102
170	30	63	

नियम

ग्रिड को केवल अभाज्य संख्याओं से भरिए ताकि प्रत्येक पंक्ति का गुणनफल पंक्ति के दाईं ओर की संख्या हो और प्रत्येक स्तंभ का गुणनफल स्तंभ के नीचे की संख्या हो।

			105
			20
			30
28	125	18	

			8
			105
			70
30	70	28	

			63
			27
			190
45	42	171	

			343
			66
			44
28	154	231	

सारांश

- यदि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है, तो दूसरी संख्या पहली संख्या का **गुणनखंड** होगा। उदाहरण के लिए, संख्या 4, 12 का गुणनखंड है क्योंकि 12 संख्या 4 से विभाजित होती है ($12 \div 4 = 3$)।
- 2, 3, 5, 7, 11,... जैसी संख्याएँ **अभाज्य संख्याएँ** कहलाती हैं जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं, संख्या 1 और वह संख्या स्वयं।
- **भाज्य संख्याएँ** 4, 6, 8, 9, ... ऐसी संख्याएँ होती हैं जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं संख्या 1 और स्वयं के अतिरिक्त कम से कम एक और गुणनखंड। उदाहरण के लिए, 8 का एक गुणनखंड 4 है, 9 का गुणनखंड 3 है। इसलिए 8 और 9 दोनों भाज्य संख्याएँ हैं।
- प्रत्येक संख्या जो 1 से बड़ी है अभाज्य गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखी जा सकती है। इसे संख्या का **अभाज्य गुणनखंडन** कहते हैं। उदाहरण के लिए, $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$
- किसी संख्या का अभाज्य संख्या के रूप में गुणनखंडन करने का केवल एक ही तरीका है जिसमें क्रम महत्वपूर्ण नहीं है।
- दो संख्याएँ जिनका **सार्व गुणनखंड** 1 के अतिरिक्त कोई और सार्व गुणनखंड न हो सह-अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
- दो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं, यह जाँचने के लिए उन दोनों का अभाज्य गुणनखंडन करेंगे और जाँच करेंगे की क्या दोनों का कोई सार्व गुणनखंड है। यदि नहीं, तो वे दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। यदि हाँ, तो वे सह-अभाज्य नहीं हैं।
- यदि पहली संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, दूसरी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित हो तो पहली संख्या दूसरी संख्या का गुणनखंड है।

Reprint 2025-26

6 परिमाप और क्षेत्रफल

0675CH06

6.1 परिमाप

क्या आपको याद है कि एक संवृत्त (बंद) समतल आकृति का परिमाप क्या होता है? आइए, हम अपनी समझ को ताज़ा करें।

किसी भी बंद समतल आकृति का परिमाप उसकी सीमा के साथ-साथ तय की गई वह दूरी है जब आप उसके चारों ओर एक चक्कर लगाते हैं। एक **बहुभुज** अर्थात् रेखाखंडों से बनी एक बंद समतल आकृति के लिए परिमाप इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों के योग के रूप में परिभाषित किया जाता है, जैसे— इसकी बाहरी सीमा के साथ-साथ कुल दूरी।

बहुभुज का परिमाप = उसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों का योगफल।

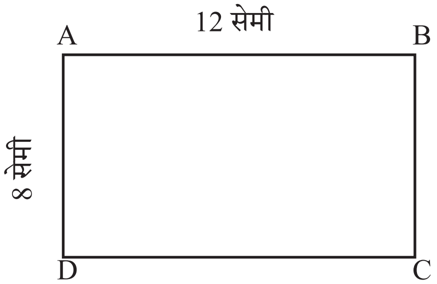
आइए, अब हम आयत, वर्ग और त्रिभुज के परिमाप के सूत्रों को दोहराते हैं।

आयत का परिमाप

एक आयत ABCD पर विचार कीजिए, जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 12 सेमी और 8 सेमी है। इसका परिमाप क्या होगा?

आयत का परिमाप = आयत की चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

$$= AB + BC + CD + DA$$



$= AB + BC + AB + BC$

$= 2 \times AB + 2 \times BC$

$= 2 \times (AB + BC)$

$= 2 \times$ (12 सेमी + 8 सेमी)

$= 2 \times$ (20 सेमी)

= 40 सेमी

आयत की आमने-सामने की भुजाएँ हमेशा एकसमान होती हैं। अत:
$AB = CD$ और
$AD = BC$

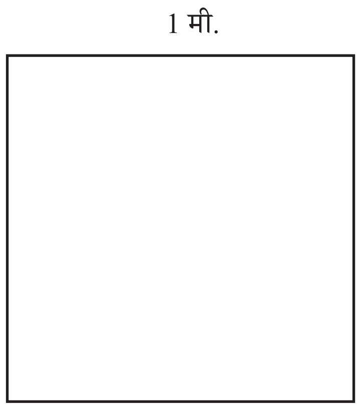
इस उदाहरण से हम देखते हैं कि—

आयत का परिमाप = लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई

आयत का परिमाप = $2 \times$ (लंबाई + चौड़ाई)

आयत का परिमाप उसकी लंबाई और चौड़ाई के योग का दोगुना होता है।

वर्ग का परिमाप



देबोजीत 1 मी. भुजा वाले वर्गाकार फोटो फ्रेम के चारों ओर एक रंगीन टेप लगाना चाहता है, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। उसे कितनी लंबी रंगीन टेप की आवश्यकता होगी? चूँकि देबोजीत वर्गाकार फोटो फ्रेम के चारों ओर रंगीन टेप लगाना चाहता है, इसलिए उसे वर्गाकार फोटो फ्रेम के परिमाप को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

इसलिए, आवश्यक टेप की लंबाई = वर्ग का परिमाप

= वर्ग की चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

= 1 मी. + 1 मी. + 1 मी. + 1 मी. = 4 मी.

हम जानते हैं कि वर्ग की चारों भुजाओं की लंबाई बराबर होती है। इसलिए प्रत्येक भुजा की लंबाई को जोड़ने के स्थान पर, हम वर्ग की एक भुजा की लंबाई को 4 से गुणा कर सकते हैं।

अतः आवश्यक टेप की लंबाई = 4×1 मी. = 4 मी.

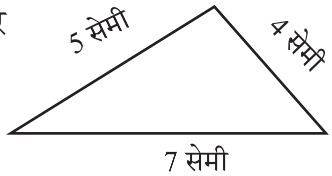
इस उदाहरण से हम देखते हैं कि—

वर्ग का परिमाप = $4 \times$ एक भुजा की लंबाई।

वर्ग का परिमाप उसकी एक भुजा की लंबाई का चौगुना (Quadruple) है।

Reprint 2025-26

त्रिभुज का परिमाप



एक त्रिभुज पर विचार कीजिए जिसकी तीन भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 7 सेमी हैं। इस त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

त्रिभुज का परिमाप = 4 सेमी + 5 सेमी + 7 सेमी

= 16 सेमी

त्रिभुज का परिमाप = उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

उदाहरण— अक्षी 3 मी. लंबाई और 2 मी. चौड़ाई के एक आयताकार मेजपोश (टेबल कवर) के चारों ओर एक फीता (लेस) लगाना चाहती है। अक्षी को कितने लंबे फीते की आवश्यकता है?

हल

आयताकार मेजपोश की लंबाई = 3 मी.

आयताकार मेजपोश की चौड़ाई = 2 मी.

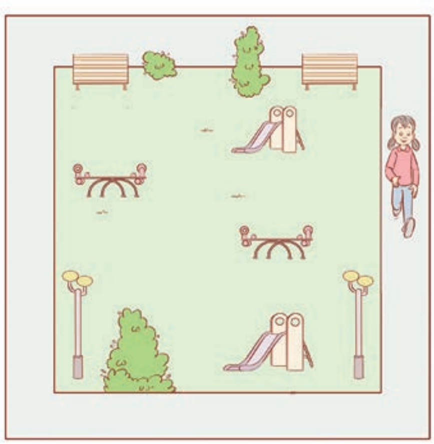
अक्षी मेजपोश के चारों ओर फीता लगाना चाहती है। इसलिए, आवश्यक फीते की लंबाई आयताकार मेजपोश के परिमाप के बराबर होगी।

अब, आयताकार मेजपोश का परिमाप = 2×(लंबाई + चौड़ाई)

= 2 (3 मी. + 2 मी.) = 2 × 5 मी. = 10 मी.

अतः आवश्यक फीते की लंबाई 10 मी. है।

उदाहरण— ऊषा 75 मी. भुजा वाले वर्गाकार पार्क के चारों ओर तीन चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



हल

वर्गाकार पार्क का परिमाप = 4 × एक भुजा की लंबाई

= 4 × 75 मी. = 300 मी.

ऊषा द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी = 300 मी.

इसलिए, ऊषा द्वारा तीन चक्करों में तय की गई कुल दूरी = 3 × 300 मी. = 900 मी.

Reprint 2025-26

आइए, पता लगाएँ

1. लुप्त पदों को ज्ञात कीजिए—

   a. आयत का परिमाप = 14 सेमी; चौड़ाई = 2 सेमी; लंबाई = ________?

   b. वर्ग का परिमाप = एक भुजा की लंबाई 20 सेमी = _______?

   c. आयत का परिमाप = लंबाई 12 मी. = चौड़ाई 3 मी. = ______?.

2. तार के टुकड़े का प्रयोग करके एक आयत बनाया गया है जिसकी भुजाओं की लंबाई 5 सेमी और 3 सेमी है। यदि तार को सीधा करके एक वर्ग बनाया जाए, तब वर्ग की एक भुजा की लंबाई क्या होगी?

3. यदि एक त्रिभुज का परिमाप 55 सेमी है और दो भुजाओं की लंबाई क्रमश: 20 सेमी और 14 सेमी है, तो तीसरी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

4. एक आयताकार पार्क जिसकी लंबाई 150 मी. और चौड़ाई 120 मी. है, पार्क के चारों ओर ₹40 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

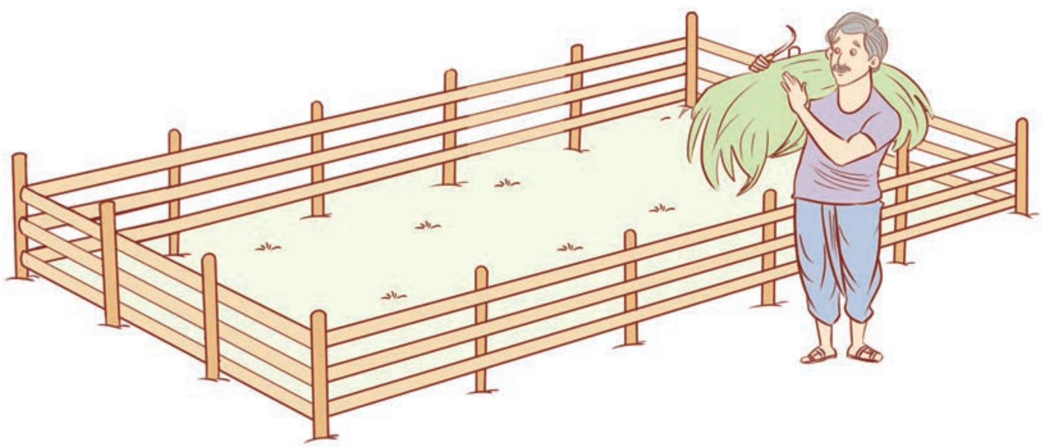
5. एक धागे के टुकड़े की लंबाई 36 सेमी है। प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी, यदि इस धागे से बनाया जाता है—

   a. एक वर्ग

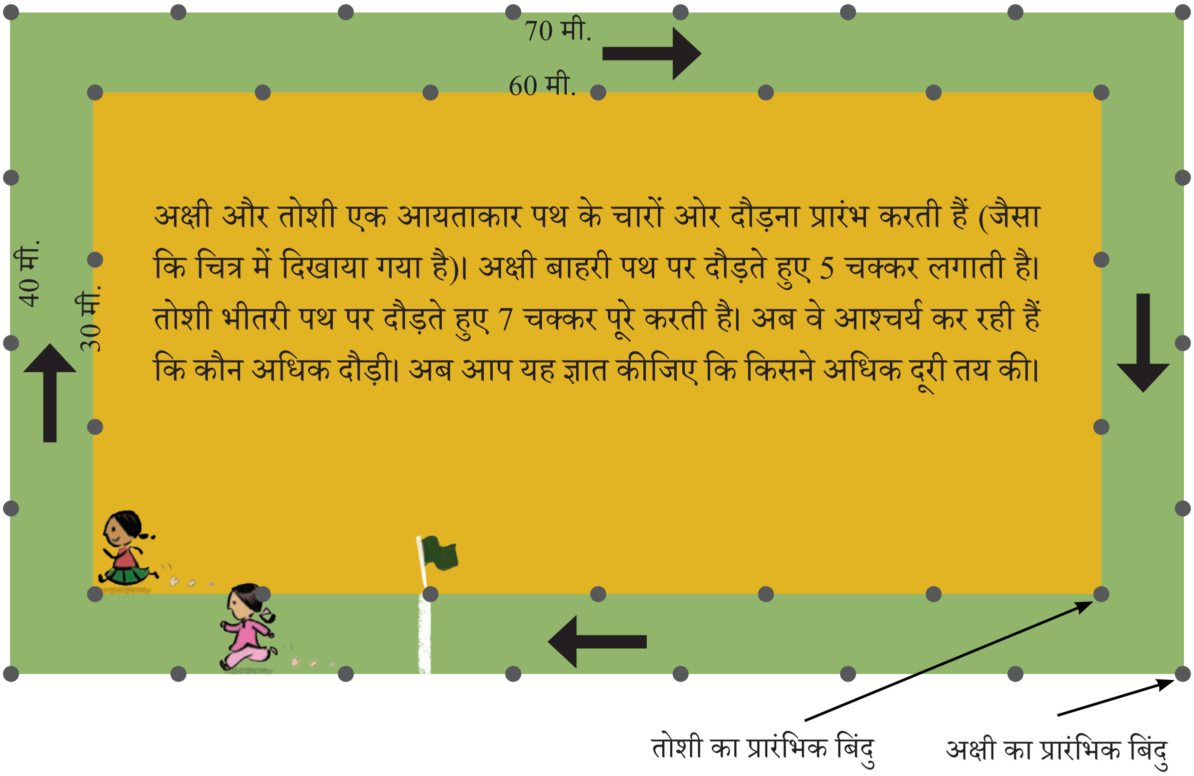
   b. एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की हों, और

   c. एक सम षट्भुज (छ: भुजाओं वाली बंद आकृति जिसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की हों)?

6. एक किसान के आयताकार भूखंड की लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 230 मी. तथा 160 मी. है। वह भूखंड के चारों ओर रस्सी द्वारा तीन पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। किसान के द्वारा प्रयोग की गई रस्सी की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए।



माथा-पच्ची!



प्रत्येक पथ एक आयत है। अक्षी के पथ की लंबाई 70 मी. और चौड़ाई 40 मी. है। इस पथ पर एक पूरा चक्कर लगाने पर 220 मी. की दूरी तय होगी, अर्थात् $2 \times (70+40)$ मी. = 220 मी.। यह अक्षी द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी है।

आइए, पता लगाएँ

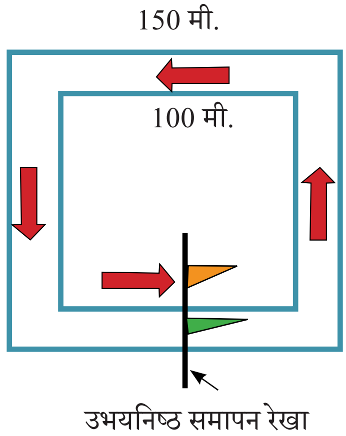
1. अक्षी द्वारा 5 चक्करों में तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।
2. तोशी द्वारा 7 चक्करों में तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए। अक्षी और तोशी में से किसने अधिक दूरी तय की?
3. सोचिए और निर्देशानुसार स्थितियों को चिह्नित कीजिए—
   a. अक्षी 250 मी. दौड़ने के पश्चात् जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'A' चिह्नित कीजिए।
   b. 500 मी. दौड़ने के पश्चात् अक्षी जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'B' चिह्नित कीजिए।
   c. अब, अक्षी 1000 मी. दौड़ चुकी है। अब बताइए, उसने अपने पथ पर कितने चक्कर पूरे लगाए? उसकी इस स्थिति के बिंदु पर 'C' चिह्नित कीजिए।
   d. 250 मी. दौड़ने के पश्चात् तोशी जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'X' चिह्नित कीजिए।

Reprint 2025-26

e. 500 मी. दौड़ने के पश्चात् तोशी जहाँ पहुँचेगी, उस बिंदु पर 'Y' चिह्नित कीजिए।

f. अब, तोशी 1000 मी. दौड़ चुकी है। उसने अपने पथ पर कितने चक्कर पूरे किए? उसकी स्थिति के बिंदु पर 'Z' चिह्नित कीजिए।

गहन सोच— सामान्यत: दौड़ में सभी धावकों के लिए एक समान अंतिम रेखा होती है। यहाँ दो वर्गाकार दौड़-पथ है, जिसमें भीतरी पथ की प्रत्येक भुजा 100 मी. है तथा बाहरी पथ की प्रत्येक भुजा 150 मी. है। दोनों धावकों के लिए समापन रेखा को चित्र में झंडों द्वारा दर्शाया गया है, जो पथों की भुजाओं में से एक भुजा के मध्य में हैं।

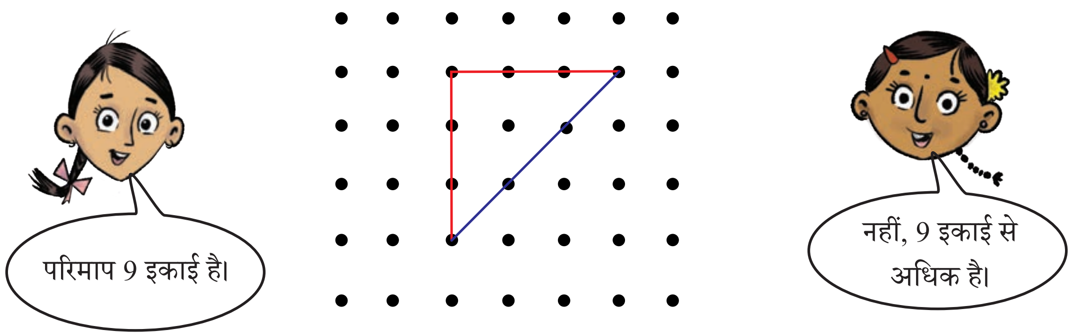


यदि कुल दौड़ 350 मी. की है, तो हमें यह पता लगाना होगा कि इन दो पथों पर दोनों धावकों की प्रारंभिक स्थिति कहाँ होनी चाहिए ताकि 350 मी. दौड़ने के पश्चात् दोनों की समापन रेखा एक समान हो। भीतरी पथ पर धावक के प्रारंभिक या शुरुआती बिंदु को A के रूप में और बाहरी पथ पर धावक के शुरुआती या प्रारंभिक बिंदु को B के रूप में चिह्नित कीजिए।

आकलन और सत्यापन करना

एक कागज या अखबार का टुकड़ा लीजिए। इस टुकड़े को अलग-अलग तरीकों से काटकर कुछ यादृच्छिक आकार बनाइए। प्रत्येक आकृति की सीमाओं की कुल लंबाई का अनुमान लगाइए। अब पैमाना (scale) अथवा मापन फीता (measuring tape) से प्रत्येक आकृति के परिमाप को मापिए और सत्यापन कीजिए।

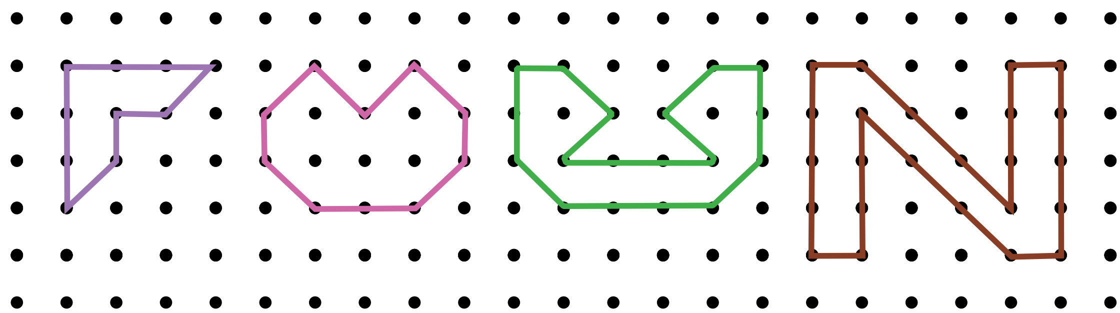
अक्षी का कहना है कि इस त्रिभुज का परिमाप 9 इकाई है। तोशी का मानना है कि यह 9 इकाई नहीं हो सकती और परिमाप 9 इकाई से अधिक होगा। आप क्या सोचते हैं?



Reprint 2025-26

इस आकृति में दो अलग-अलग इकाई की रेखाएँ हैं। लाल रेखा और नीली रेखा की लंबाई मापिए— क्या वे समान हैं? हम लाल रेखाओं को सीधी रेखाएँ और नीली रेखाओं को विकर्ण रेखाएँ कहेंगे। अतः इस त्रिभुज का परिमाप 6 सीधी इकाई + 3 विकर्ण इकाई है। इसे हम संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं— 6s + 3d इकाइयाँ।

नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप सीधी और विकर्ण रेखा इकाइयों का उपयोग करके निकालें।



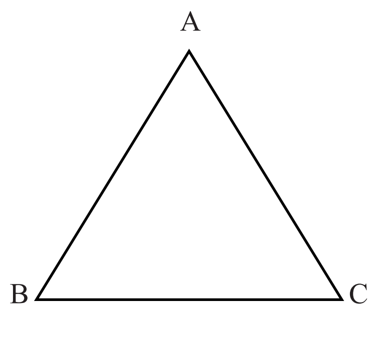
सम बहुभुज का परिमाप

वर्ग की तरह, बंद आकृतियाँ जिनकी सभी भुजाएँ और सभी कोण बराबर हों, **सम बहुभुज** कहलाते हैं। हमने अध्याय 1 में, 'आकृति अनुक्रम 1' सम बहुभुज का अध्ययन किया था। सम बहुभुजों के उदाहरण हैं— समबाहु त्रिभुज (जिसकी तीनों भुजाएँ और तीनों कोण बराबर होते हैं) और सम पंचभुज (जिसके पाँचों भुजाएँ और पाँचों कोण बराबर होते हैं)।

समबाहु त्रिभुज का परिमाप

हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज का परिमाप उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग होता है।

इस अवधारणा का उपयोग करके, हम एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कर सकते हैं।



समबाहु त्रिभुज का परिमाप = AB+BC+CA

= AB + BC + AC = AB + AB + AB

= एक भुजा की लंबाई का 3 गुना

समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × एक भुजा की लंबाई

Reprint 2025-26

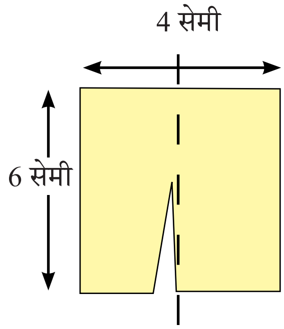
एक वर्ग और एक समबाहु त्रिभुज के बीच क्या समानता है?

अपने आस-पास विभिन्न वस्तुएँ खोजिए जो कि सम आकृतियाँ हों और उनका परिमाप ज्ञात कीजिए। साथ ही अन्य सम बहुभुजों के परिमाप के लिए अपनी समझ को व्यापक (generalised) रूप दीजिए।

अध्यापक टिप्पणी

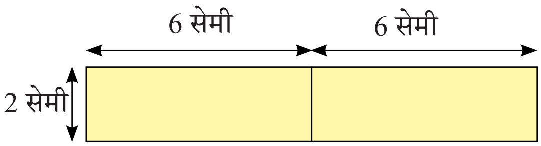
सम बहुभुजों के विषय में अधिक बातचीत कीजिए तथा विद्यार्थियों को सम बहुभुज के परिमाप के लिए एक सामान्य सूत्र (general formula) बनाने हेतु प्रोत्साहित कीजिए।

विभाजित कीजिए और फिर से जोड़िए



एक आयताकार कागज की पर्ची, जिसकी विमाएँ (भुजाएँ) 6 सेमी × 4 सेमी है, को दो बराबर टुकड़ों में काटा गया है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। इन दोनों टुकड़ों को विभिन्न तरीकों से जोड़ा जाता है।

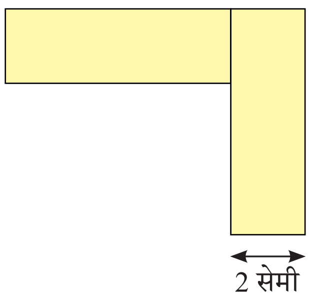
a.



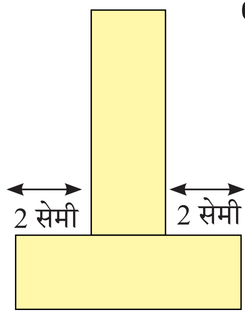
उदाहरण के लिए, व्यवस्था a. का परिमाप 28 सेमी हैं।

नीचे दी गई अन्य सभी व्यवस्थाओं की सीमा की लंबाई (अर्थात् परिमाप) ज्ञात कीजिए।

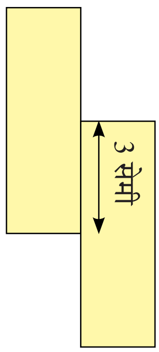
b.



c.



d.



उपर्युक्त चित्रित दोनों टुकड़ों को व्यवस्थित करके एक आकृति बनाइए जिसका परिमाप 22 सेमी हो।

Reprint 2025-26

6.2 क्षेत्रफल

पिछली कक्षाओं में हमने बंद (नियमित एवं अनियमित) आकृतियों के क्षेत्रफलों का अध्ययन किया है। आइए, इनके बारे में कुछ मुख्य बातें दोहराएँ।

किसी बंद आकृति से घिरे क्षेत्र का माप (की मात्रा) उस आकृति का **क्षेत्रफल** कहलाता है।

क्या आपको याद है कि पिछली कक्षाओं में हमने आयत और वर्ग के क्षेत्रफलों के सूत्र वर्गाकार खानों वाले कागज (ग्रिड पेपर) की सहायता से ज्ञात किए थे।

वर्ग का क्षेत्रफल = ________	आयत का क्षेत्रफल = ________

अध्यापक टिप्पणी

वर्गाकार खानों वाले कागज (ग्रिड पेपर) की सहायता से एक आयत और एक वर्ग के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने में विद्यार्थियों की सहायता कीजिए। विद्यार्थियों को वर्गाकार ग्रिड पेपर दीजिए और उन्हें सूत्र तक पहुँचने दीजिए।

आइए, इन अवधारणाओं से जुड़ी वास्तविक जीवन की कुछ समस्याओं को देखते हैं—

उदाहरण— एक फर्श 5 मी. लंबा और 4 मी. चौड़ा है। 3 मी. भुजा की वर्गाकार कालीन फर्श पर बिछा दी जाती है। कालीन रहित फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल

फर्श की लंबाई = 5 मी.

फर्श की चौड़ाई = 4 मी.

फर्श का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = 5 मी. × 4 मी. = 20 वर्ग मी.

वर्गाकार कालीन की लंबाई = 3 मी.

कालीन का क्षेत्रफल = लंबाई × लंबाई = 3 मी. × 3 मी. = 9 वर्ग मी.

अत: कालीन बिछे हुए फर्श का क्षेत्रफल 9 वर्ग मी. है।

इसलिए, फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल जिस पर कालीन नहीं बिछा है, वह है— फर्श का क्षेत्रफल–कालीन बिछे फर्श का क्षेत्रफल = 20 वर्ग मी. – 9 वर्ग मी. = 11 वर्ग मी.

उदाहरण— 12 मी. लंबे और 10 मी. चौड़े भूखंड के चारों कोनों पर 4 मी. भुजा की चार फूलों की वर्गाकार क्यारियाँ बनी हैं। क्यारियों को छोड़कर शेष भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Reprint 2025-26

हल

भूखंड की लंबाई (l) = 12 मी.

भूखंड की चौड़ाई (w) = 10 मी.

संपूर्ण भूखंड का क्षेत्रफल = लंबाई (l) × चौड़ाई (w) = 12 मी. × 10 मी. = 120 वर्ग मी.

चारों फूलों की क्यारियों में प्रत्येक क्यारी की भुजा की लंबाई (s) = 4 मी.

फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल = भुजा (s) × भुजा (s) = 4 मी. × 4 मी. = 16 वर्ग मी.

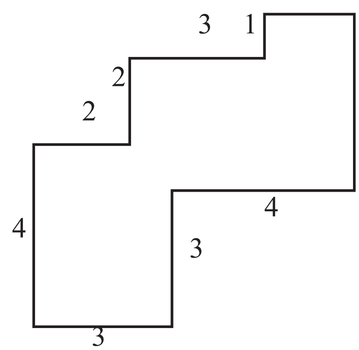
अतः 4 फूलों की क्यारियों का क्षेत्रफल = 4 × 16 वर्ग मी. = 64 वर्ग मी.

अतः शेष भूखंड का क्षेत्रफल है— संपूर्ण भूखंड का क्षेत्रफल – 4 फूलों की क्यारियों का क्षेत्रफल = 120 वर्ग मी. – 64 वर्ग मी. = 56 वर्ग मी.

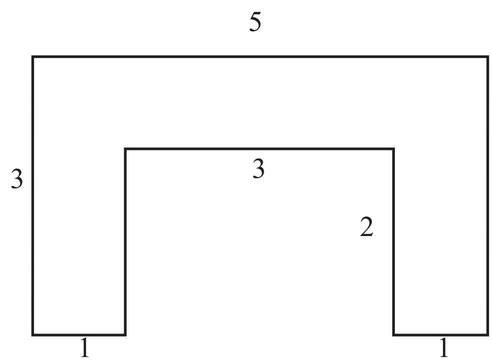
आइए, पता लगाएँ

1. 25 मी. लंबे आयताकार बाग का क्षेत्रफल 300 वर्ग मी. है। इस बाग की चौड़ाई क्या है?
2. 8 रुपये प्रति 100 वर्ग मी. की दर से 500 मी. लंबे और 200 मी. चौड़े आयताकार भूखंड पर टाइल लगाने की लागत क्या होगी?
3. एक आयताकार नारियल वाटिका 100 मी. लंबी और 50 मी. चौड़ी है। यदि प्रत्येक नारियल के पेड़ के लिए 25 वर्ग मी. जगह चाहिए, तो इस वाटिका में अधिकतम कितने पेड़ लगाए जा सकते हैं?
4. नीचे दी गई आकृतियों को आयताकार भागों में बाँटकर, उनके क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (सभी माप मीटर में दिए गए हैं)।

a.

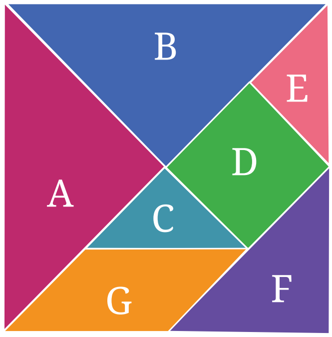


b.



आइए, पता लगाएँ

आपकी पाठ्यपुस्तक के अंत में दिए गए टैनग्राम के टुकड़े काटिए।

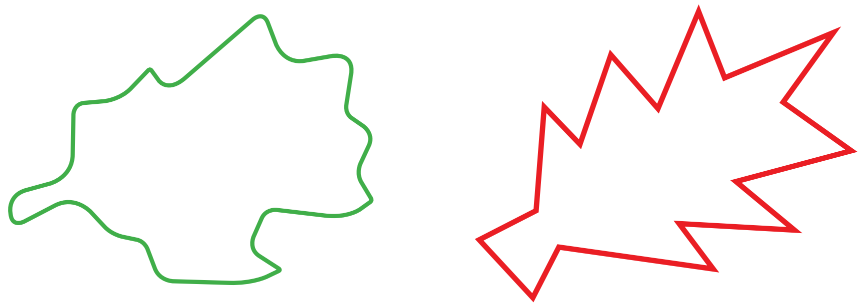


1. खोजिए और पता लगाइए कि कितने टुकड़ों का क्षेत्रफल एक समान है।
2. आकार D, आकार C की तुलना में कितने गुना बड़ा है? C, D और E में क्या संबंध है।
3. किस आकार का क्षेत्रफल अधिक है— आकार D या आकार F? अपने उत्तर का कारण बताइए।
4. किस आकार का क्षेत्रफल अधिक है— आकार F या G का? अपने उत्तर का कारण बताइए।
5. आकार G की तुलना में आकार A का क्षेत्रफल कितना है? क्या यह दोगुना बड़ा है? क्या यह चार गुना बड़ा है?

   संकेत— टैनग्राम के टुकड़ों को काटने के पश्चात् एक टुकड़े को दूसरे के ऊपर रखकर हमें ज्ञात होता हैं कि टुकड़े A और B का क्षेत्रफल एक समान है, टुकड़े C और E का क्षेत्रफल एक समान है। आप इन टुकड़ों से देख सकते हैं कि C और E टुकड़े, D को पूरा ढक लेते हैं। इसका अर्थ है कि, D का क्षेत्रफल C या E से दोगुना है।
6. क्या अब आप सातों टुकड़ों से बने बड़े वर्ग के क्षेत्रफल को C आकार के क्षेत्रफल के रूप में लिख सकते हैं?
7. इन सातों टुकड़ों को व्यवस्थित करके एक आयत बनाइए। अब इस आयत का क्षेत्रफल, आकार 'C' के क्षेत्रफल के रूप में लिखने पर क्या प्राप्त होता है? अपने उत्तर का कारण बताइए।
8. क्या इन सातों टुकड़ों से बने वर्ग और आयत के परिमाप भिन्न हैं या समान हैं? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

Reprint 2025-26

- नीचे दी गई आकृतियों को देखिए और अनुमान लगाइए कि इनमें से किसका क्षेत्रफल बड़ा है?

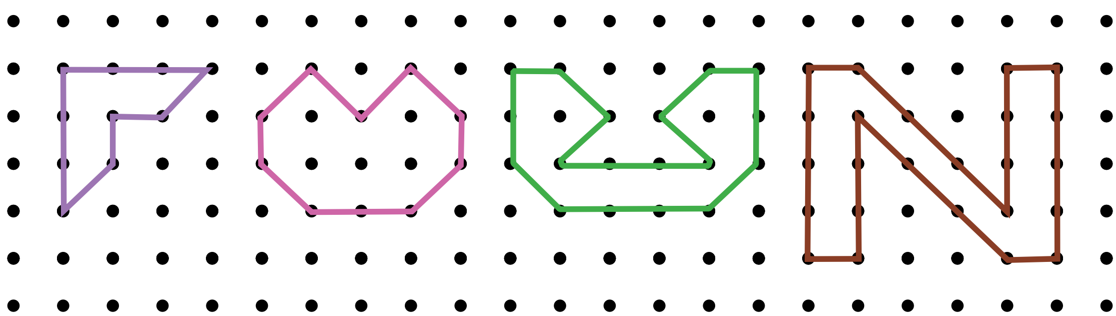


हम वर्गांकित कागज (squared paper) या ग्राफ पेपर, जिसके प्रत्येक वर्ग का माप 1 इकाई × 1 इकाई या 1 वर्ग इकाई है, का प्रयोग करके किसी भी सरल बंद आकृति के क्षेत्रफल का आकलन कर सकते हैं।

क्षेत्रफल का आकलन करने के लिए हम आकार को एक पारदर्शी कागज पर ट्रेस (trace) करेंगे और इस कागज को वर्गांकित कागज या ग्राफ पेपर पर रखेंगे। इसके पश्चात् निम्न नियमों का पालन कीजिए—

1. एक वर्गांकित कागज या ग्राफ पेपर के एक पूरे छोटे वर्ग का क्षेत्रफल, एक वर्ग इकाई लिया जाता है।
2. आधे वर्ग से कम क्षेत्रफल को अनदेखा कीजिए।
3. यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग किसी क्षेत्र में है, तो उसे 1 वर्ग इकाई गिनिए।
4. यदि वर्ग का ठीक आधा भाग गिना जाए तो उसका क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई लीजिए।

- निम्न आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—



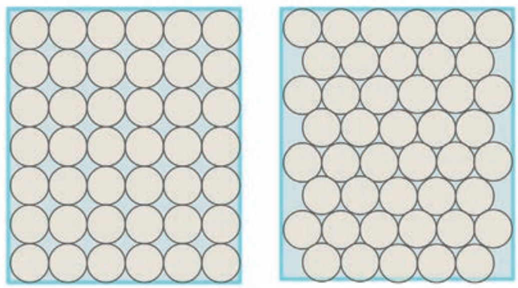
Reprint 2025-26

आइए खोजें!

सामान्यत: हम क्षेत्रफल को वर्गों से क्यों मापते हैं?

एक ग्राफ शीट पर 3 लंबाई के व्यास (चौड़ाई) वाला एक वृत्त बनाइए। वर्गों को गिनकर उनका प्रयोग वृत्तीय क्षेत्र (Circular region) के क्षेत्रफल के आकलन में कीजिए।

दर्शाई गई आकृति में हम देख सकते हैं कि वृत्तों को हम उनके बीच बिना जगह छोड़े पैक नहीं कर सकते हैं। अतः इकाई के रूप में वृत्तों का प्रयोग करके किसी क्षेत्रफल को बिल्कुल सही मापना, कठिन होगा। यहाँ आकृति में, दो समान आयतों को दो अलग-अलग तरीकों से वृत्तों द्वारा बंद किया गया है— पहले आयत में 42 वृत्त हैं और दूसरे में 44 वृत्त हैं।



विभिन आकारों (त्रिभुज एवं आयत) का प्रयोग करके किसी दिए गए स्थान को (बिना आच्छादन या जगह छोड़े) भरने का प्रयास कीजिए और यह पता लगाइए कि क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किसी और आकृति की अपेक्षा एक वर्गाकार आकृति का प्रयोग करने पर क्या लाभ होते हैं। उन बिंदुओं को लिखिए जो यह दर्शाते हैं कि क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग ही सबसे सही आकार है।

1. गलियारे के बाहरी फर्श का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) ज्ञात कीजिए।
2. आपके विद्यालय के खेल के मैदान का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) ज्ञात कीजिए।

आइए खोजें!

एक वर्गाकार ग्रिड पेपर (1 वर्ग = 1 वर्ग इकाई) पर, जितने संभव हों उतने आयत बनाइए जिनकी भुजाएँ पूर्ण संख्याएँ हों तथा जिनका क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई हो।

गणित चर्चा

a. किस आयत का परिमाप सबसे अधिक है?
b. किस आयत का परिमाप सबसे कम है?

c. यदि आप 32 वर्ग सेमी क्षेत्रफल का आयत लेते, तो आपका उत्तर क्या होता? किसी भी क्षेत्रफल को देखते हुए, अधिकतम और न्यूनतम परिमाप वाले आयत के आकार की पहचान बताना संभव है? अपने उत्तर के लिए उदाहरण और कारण दीजिए।

6.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल

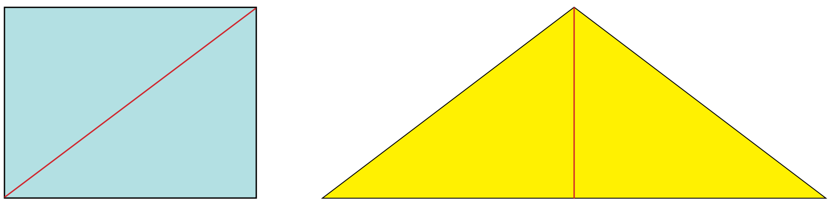
कागज के एक टुकड़े पर आयत खींचिए और इसका एक विकर्ण बनाइए। उस आयत को विकर्ण से काटते हुए दो त्रिभुज प्राप्त कीजिए।

जाँच कीजिए क्या दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूरी तरह आच्छादित (overlap) करते हैं। क्या उनका क्षेत्रफल एक समान है?

इसके साथ ही इस प्रक्रिया का प्रयोग करके आप एक वर्ग की भी जाँच सकते हैं।

क्या आप इस प्रक्रिया से कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? यहाँ लिखिए—

अब नीचे दी गई आकृतियों को देखिए। क्या नीले आयत का क्षेत्रफल, पीले त्रिभुज के क्षेत्रफल से बड़ा है या छोटा है या बराबर है? क्यों?



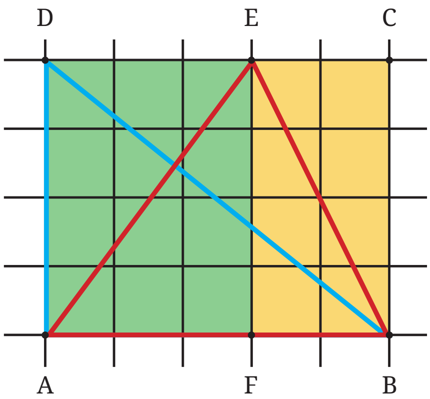
क्या तुम नीले आयत एवं पीले त्रिभुज के मध्य और इनके क्षेत्रफल में कुछ संबंध देख सकते हो? यहाँ संबंध लिखिए।

अध्यापक टिप्पणी

विद्यार्थियों को उनके निष्कर्षों को जोड़ने और जिन संबंधों का अवलोकन उन्होंने किया है उन्हें अपने शब्दों में लिखने में सहायता कीजिए। इससे वे एक साधारण कथन तक पहुँच जाएँगे। एक विकर्ण की परिभाषा को कक्षा में स्मरण करवाइए।

Reprint 2025-26

दिए गए अभ्यासों का अवलोकन करने पर प्राप्त निष्कर्षों एवं संबंधों की जाँच के लिए ग्रिड पेपर पर कुछ उपयुक्त त्रिभुज बनाइए।



पिछली कक्षाओं की अपनी समझ का प्रयोग कर ग्रिड पेपर द्वारा किसी भी बंद आकृति के क्षेत्रफल की गणना कीजिए और—

1. नीले त्रिभुज BAD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

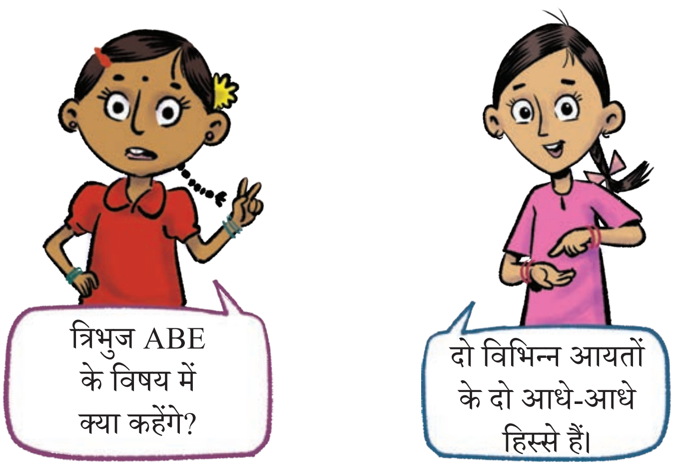
   ____

2. लाल त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।.

   ____

आयत ABCD का क्षेत्रफल = ____________________

अतः त्रिभुज BAD का क्षेत्रफल, आयत ABCD के क्षेत्रफल का आधा है।



त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल = त्रिभुज AEF का क्षेत्रफल + त्रिभुज BEF का क्षेत्रफल।

यहाँ, त्रिभुज AEF का क्षेत्रफल = आयत AFED के क्षेत्रफल का आधा।

इसी प्रकार, त्रिभुज BEF का क्षेत्रफल = आयत BFEC के क्षेत्रफल का आधा।

अतः, त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल = आयत AFED के क्षेत्रफल का आधा + आयत BFEC के क्षेत्रफल का आधा

= आयत AFED और आयत BFEC के क्षेत्रफलों के योग का आधा

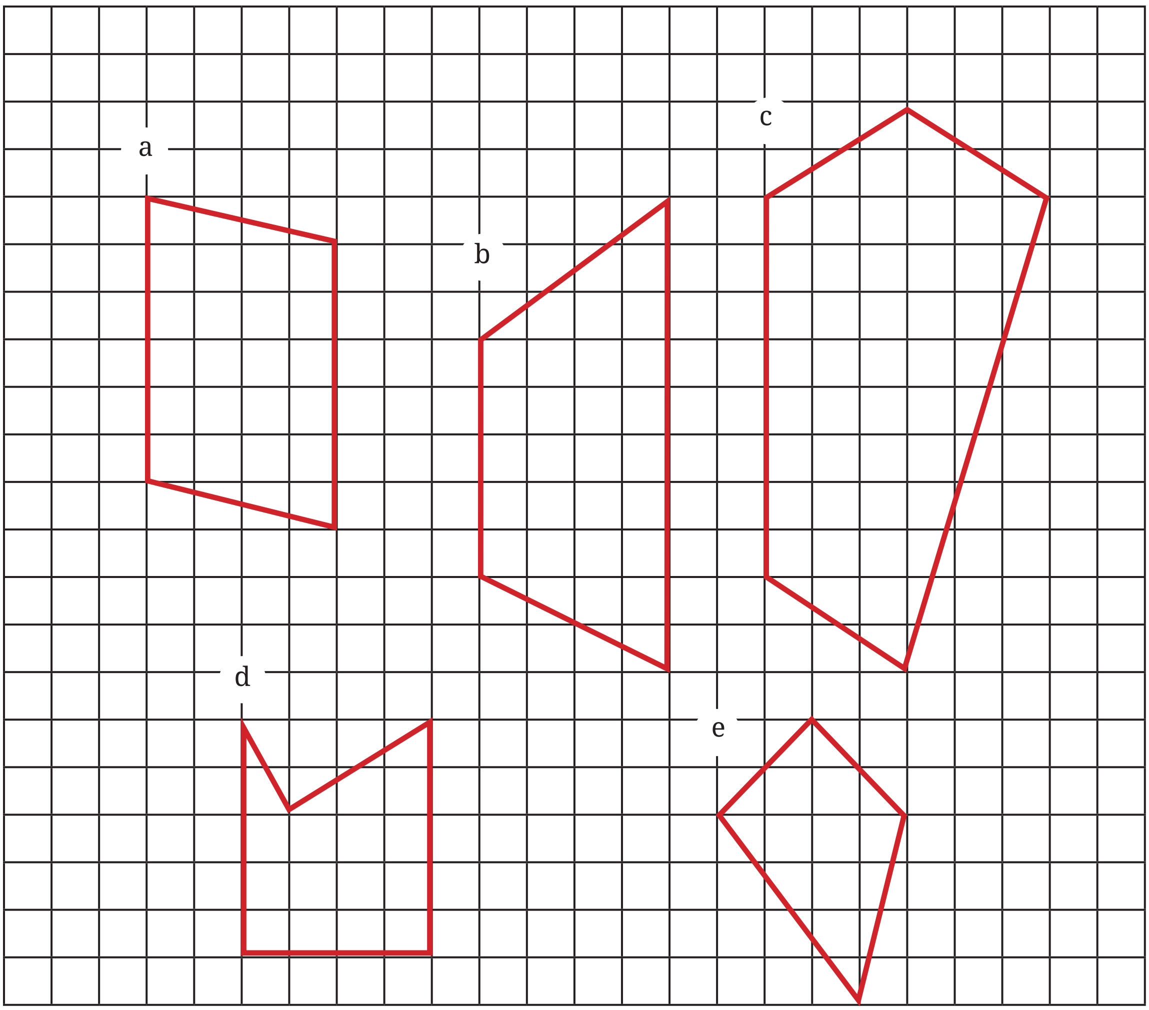
= आयत ABCD के क्षेत्रफल का आधा

निष्कर्ष ____

____

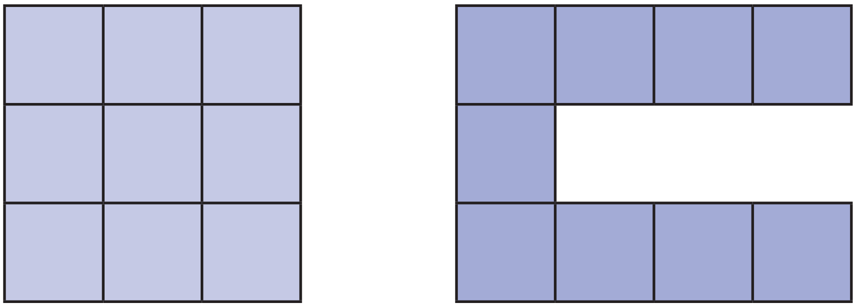
आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई आकृतियों को आयत और त्रिभुजों में विभाजित करके क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—



'अधिक' या 'कम' बनाना

इन दो आकृतियों का अवलोकन कीजिए। क्या इनमें कोई समानता या भिन्नता है?



9 इकाई वर्गों (9 वर्ग इकाई के क्षेत्रफल) का प्रयोग करके हमने दो भिन्न परिमापों की आकृतियाँ बनाई हैं यहाँ पहली आकृति का परिमाप 12 इकाई है और दूसरी का परिमाप 20 इकाई है।

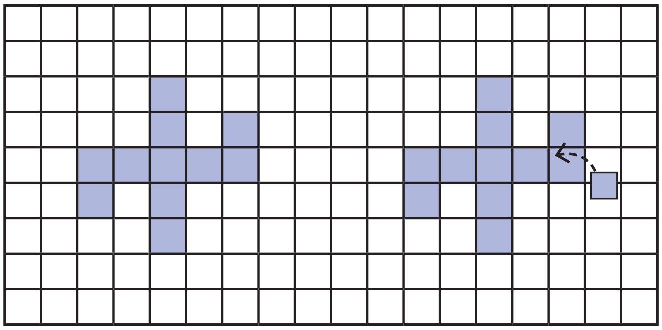
अन्य परिमाप प्राप्त करने के लिए 9 वर्ग इकाइयों वाली आकृतियाँ व्यवस्थित करें या बनाएँ। यह ध्यान रखिए कि वर्गों की भुजाएँ एक-दूसरे के साथ कम से कम एक दिशा पर पूरी तरह से संरेखित हों और सभी वर्गों को मिलाकर एक जुड़ी हुई आकृति बने।

9 इकाई वर्ग का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित को हल कीजिए—

1. सबसे छोटा संभव परिमाप क्या होगा?
2. सबसे बड़ा संभव परिमाप क्या होगा?
3. 18 इकाई परिमाप वाली एक आकृति बनाइए।
4. क्या आप उपरोक्त तीन परिमापों में से प्रत्येक के लिए अन्य आकार की आकृति बना सकते हैं या क्या उस परिमाप से केवल एक ही आकृति बन सकती है? आपका तर्क क्या होगा?

आइए, कुछ पेचीदा करते हैं, नीचे एक आकृति दी गई है, जिसका परिमाप 24 इकाई है।

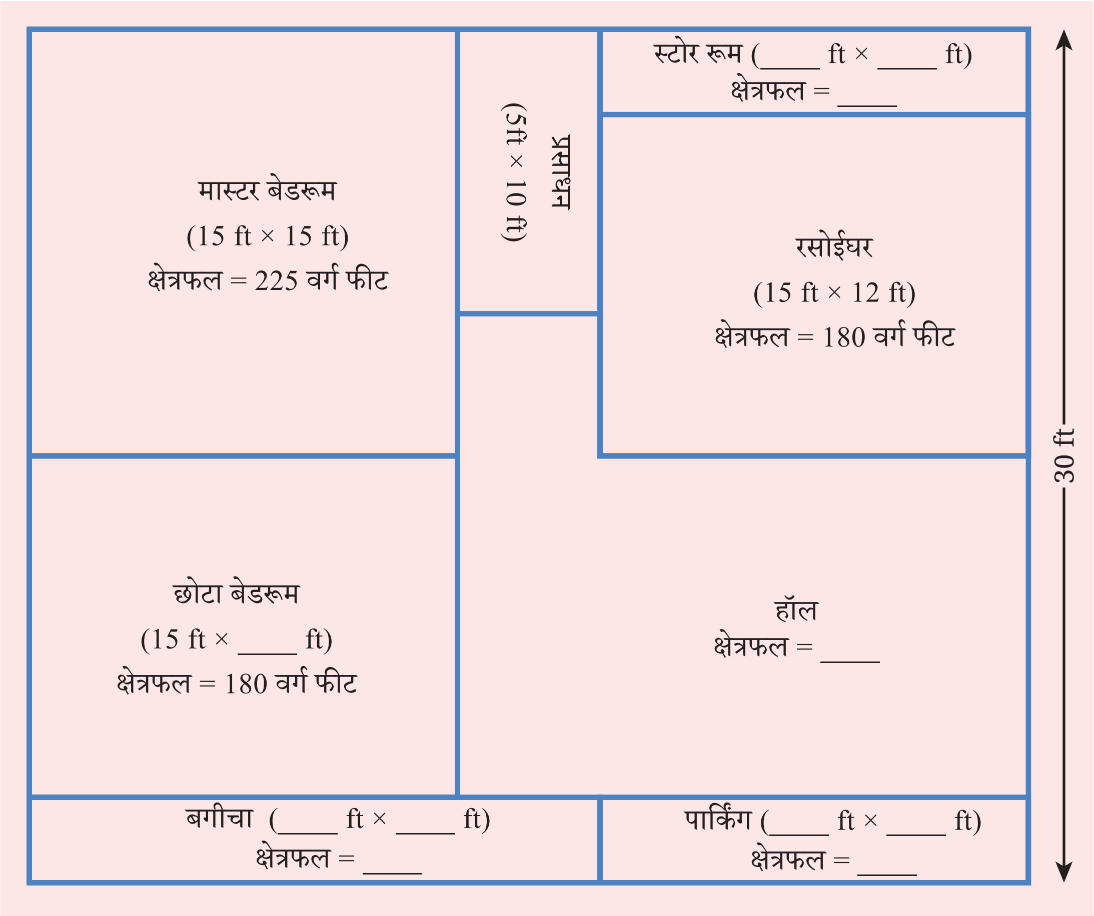
आकृति के पूरे परिमाप की पुनः गणना किए बिना अवलोकन कीजिए, विचार कीजिए और ज्ञात कीजिए कि यदि एक नया वर्ग आकृति में चित्रानुसार जोड़ दिया जाए, तो परिमाप में क्या परिवर्तन होगा?



नए वर्ग को भिन्न-भिन्न स्थानों पर रखिए और सोचिए कि परिमाप में क्या परिवर्तन हो रहे हैं।

क्या आप इस वर्ग को इस प्रकार रख सकते हैं कि परिमाप में— a) वृद्धि हो ; b) कमी हो; c) समान रहे?

नीचे दी गई आकृति में चरण के घर का नक्शा दर्शाया गया है। यह एक आयताकार भूखंड (प्लॉट) है। इस नक्शे को देखिए। आपने क्या अवलोकन किया?



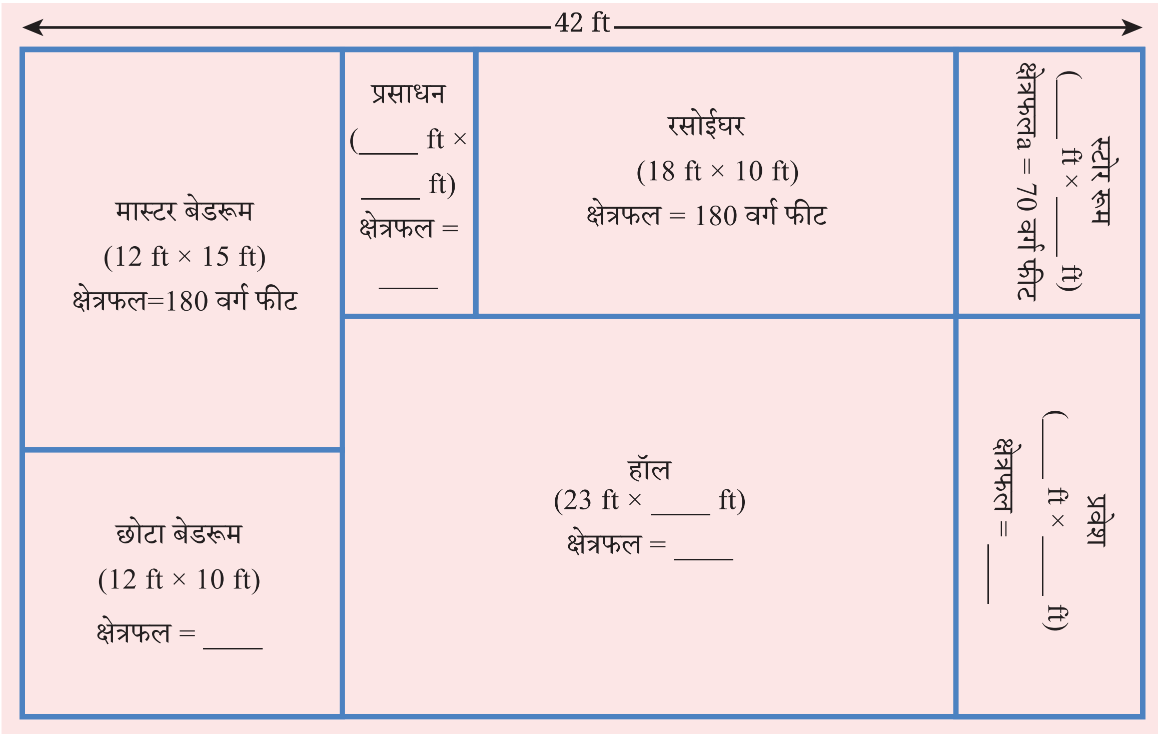
कुछ माप दिए गए हैं।

a. लुप्त माप की इकाई ज्ञात कीजिए।

b. उसके घर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Reprint 2025-26

अब, शरण के घर की लुप्त माप की इकाइयाँ और घर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। नक्शा चित्र नीचे दिया गया है—



कुछ माप दिए गए हैं—

a. लुप्त माप ज्ञात कीजिए।

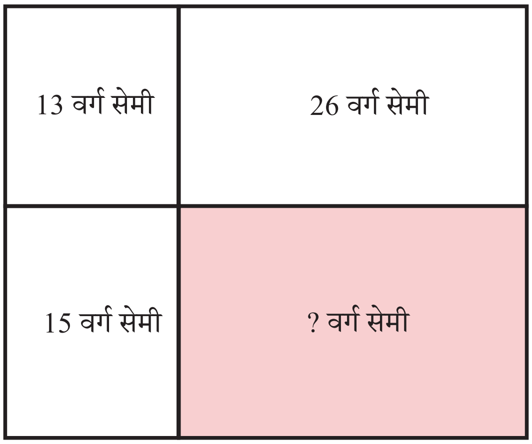
b. उसके घर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

शरण के घर में सभी कक्षों की विमाएँ क्या होंगी? शरण और चरण के घरों के क्षेत्रफलों और परिमापों की तुलना कीजिए।

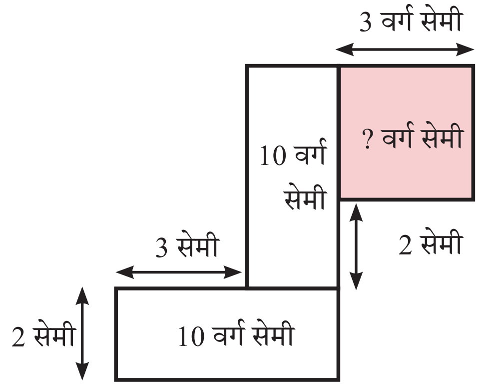
क्षेत्रफल पहेलियाँ

प्रत्येक हर आकृति में लुप्त, एक भुजा की लंबाई या एक क्षेत्र के क्षेत्रफल का मान ज्ञात कीजिए।

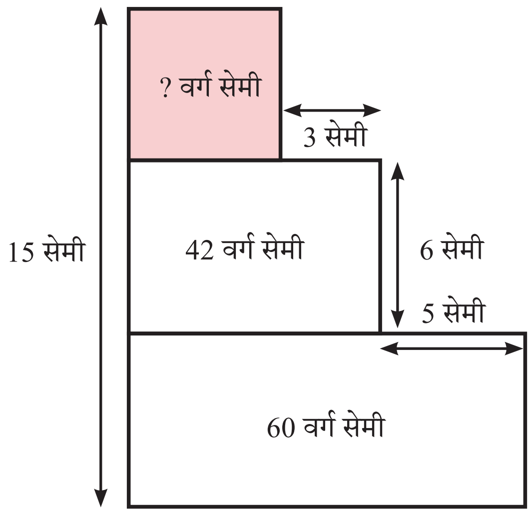
a.



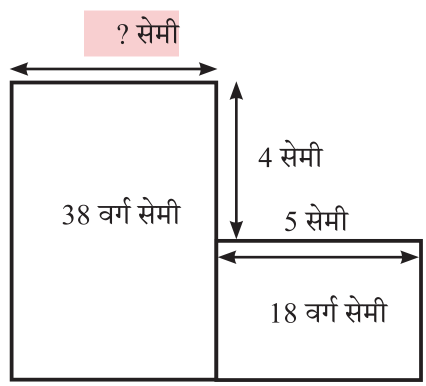
b.



c.



d.



आइए, पता लगाएँ

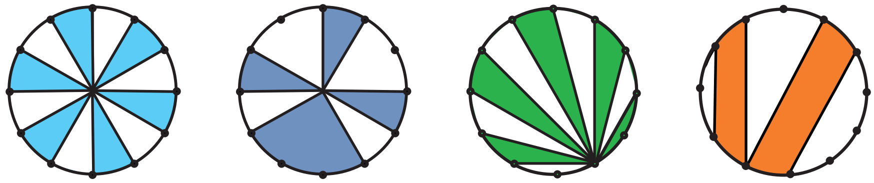
1. एक आयत की विमाएँ बताइए जिसका क्षेत्रफल उन दो आयतों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होगा, जिनकी विमाएँ 5 मी. × 10 मी. और 2 मी. × 7 मी. हैं।
2. 1000 वर्ग मी. क्षेत्रफल वाले आयताकार पार्क की लंबाई 50 मी. है, पार्क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. एक कमरे के फर्श की लंबाई 5 मी. तथा चौड़ाई 4 मी. है। 3 मी. भुजा वाले एक वर्गाकार कालीन को फर्श पर बिछाया गया है। फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस पर कालीन नहीं बिछा है।
4. 15 मी. लंबे और 12 मी. चौड़े एक पार्क के चारों कोनों को खोद कर फूलों की क्यारियाँ बनाई गई हैं, जिनकी लंबाई व चौड़ाई क्रमश: 2 मी. और 1 मी. है। एक लॉन बनाने के लिए अब कितना क्षेत्रफल उपलब्ध है?
5. आकृति A और आकृति B के परिमाप का क्षेत्रफल क्रमश: 18 वर्ग इकाई और 20 वर्ग इकाई है। आकृति A का परिमाप आकृति B से बड़ा है। दी गई स्थिति को पूरा करती हुई दो आकृतियाँ बनाएँ।
6. अपनी पुस्तक के एक पृष्ठ पर एक आयताकार हाशिया (border) बनाएँ जो ऊपर और नीचे से 1 सेमी की दूरी पर हो और बाईं व दाईं ओर से 1.5 सेमी दूरी पर हो। हाशिये का परिमाप क्या होगा?
7. 12 इकाई × 8 इकाई आकार का एक आयत बनाइए। इसके अंदर एक अन्य आयत बनाइए जो बाह्य आयत को स्पर्श न करता हो और केवल आधा क्षेत्रफल घेरता हो।
8. एक वर्गाकार कागज को आधा मोड़ा गया। फिर मोड़ से वर्ग को दो आयतों में काटा गया। वर्ग के आकार को न देखते हुए, निम्न में से एक कथन हमेशा सत्य होगा। यहाँ कौन-सा कथन सत्य है?
    a. प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल, वर्ग के क्षेत्रफल से बड़ा होगा।
    b. वर्ग का परिमाप, दोनों आयतों के परिमापों के योग से बड़ा होगा।
    c. दोनों आयतों के परिमाप को साथ जोड़ने पर वह हमेशा वर्ग के परिमाप के $1\frac{1}{2}$ गुने के बराबर होगा।
    d. वर्ग का क्षेत्रफल हमेशा दोनों आयतों के क्षेत्रफलों को साथ जोड़ने पर प्राप्त क्षेत्रफल से तीन गुना बड़ा होगा।

Reprint 2025-26

सारांश

- एक बहुभुज का परिमाप उसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों के योग के बराबर होता है।
    - a. एक आयत का परिमाप, उसकी लंबाई और चौड़ाई के योग का दोगुना होता है।
    - b. एक वर्ग का परिमाप, उसकी किसी एक भुजा की लंबाई का चार गुना होता है।
- किसी बंद आकृति द्वारा घेरे गए क्षेत्र के माप को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।
- सामान्यत: क्षेत्रफल को वर्ग इकाई में मापा जाता है।
- एक आयत का क्षेत्रफल उसकी लंबाई और चौड़ाई का गुणनफल होता है। वर्ग का क्षेत्रफल इसकी किसी एक भुजा की लंबाई को इसी से गुणा करके प्राप्त होता है।
- दो बंद आकृतियाँ, समान क्षेत्रफल वाली किंतु भिन्न परिमापों की या समान परिमाप की किंतु भिन्न क्षेत्रफलों वाली हो सकती हैं।
- क्षेत्रों के क्षेत्रफल का आकलन (निश्चित तौर पर निर्धारण) किया जा सकता है यदि ऐसे क्षेत्रों को इकाई वर्गों में या और अधिक सामान्य आकार वाले आयतों और त्रिभुजों में तोड़ा जाए, जिनके क्षेत्रफल की गणना की जा सके।

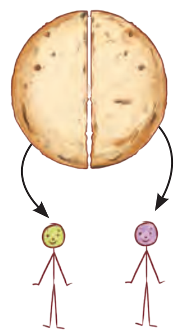
Reprint 2025-26



7 भिन्न

स्मरण कीजिए कि जब कुछ पूर्ण संख्या वाली वस्तुएँ समान रूप से साझा की जाती हैं, तो भिन्न हमें बताता है कि प्रत्येक का कितना भाग है।

शबनम— क्या आपको याद है, यदि एक रोटी दो बच्चों के बीच समान रूप से बाँटी जाए, तो प्रत्येक बच्चे को कितनी रोटी मिलेगी?



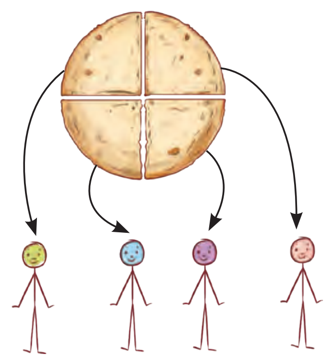
मुक्ता— प्रत्येक बच्चे को आधी रोटी मिलेगी।

शबनम— एक के आधे भाग को भिन्न में $\frac{1}{2}$ लिखा जाता है। हम कभी-कभी इसे 'एक बटा दो' भी पढ़ते हैं।

मुक्ता— यदि एक रोटी 4 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटी जाए, तो प्रत्येक बच्चे को कितनी रोटी मिलेगी?

शबनम— प्रत्येक बच्चे को $\frac{1}{4}$ रोटी मिलेगी।

मुक्ता— और कौन-सा भाग अधिक है, $\frac{1}{2}$ रोटी या $\frac{1}{4}$ रोटी?



शबनम— जब 2 बच्चे 1 रोटी को बराबर बाँटते हैं, तो प्रत्येक बच्चे को $\frac{1}{2}$ रोटी मिलेगी। जब 4 बच्चे एक रोटी को समान रूप से बाँटते हैं, तो प्रत्येक बच्चे को $\frac{1}{4}$ रोटी मिलेगी। चूँकि दूसरे समूह में अधिक बच्चे समान संख्या में रोटी बाँटते हैं, इसलिए प्रत्येक बच्चे को कम भाग मिलेगा। अत: $\frac{1}{2}$ रोटी $\frac{1}{4}$ रोटी से अधिक है।

$$\boxed{\frac{1}{2} > \frac{1}{4}}$$

7.1 भिन्नात्मक इकाइयाँ और समान भाग

बेनी— कौन-सा भिन्न बड़ा है? $\frac{1}{5}$ या $\frac{1}{9}$?

अरविन— 9 संख्या, 5 से बड़ी है। अत: मुझे लगता है कि $\frac{1}{9}$ संख्या $\frac{1}{5}$ से बड़ी है। क्या मैं सही हूँ?

बेनी— नहीं! यह एक सामान्य गलती है। इन भिन्नों को भागों के रूप में सोचिए।

अरविन— यदि एक रोटी को 5 बच्चों में बाँटा जाए तो प्रत्येक को रोटी का $\frac{1}{5}$ भाग मिलेगा। यदि रोटी को 9 बच्चों में बाँटा जाए, तो प्रत्येक को रोटी का $\frac{1}{9}$ भाग मिलेगा।

बेनी— बिल्कुल सही! अब पुन: सोचिए कौन-सा भाग अधिक हैं?

अरविन— यदि मैं किसी वस्तु को अधिक लोगों में बाँटता हूँ, तो मुझे कम भाग प्राप्त होगा। अत: $\frac{1}{9} < \frac{1}{5}$

बेनी— अब सही समझे!

ओह, तो $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$ से अधिक है!

जब एक इकाई को कई समान भागों में विभाजित किया जाता है, तो प्रत्येक भाग को **भिन्नात्मक इकाई** कहा जाता है। ये सभी भिन्नात्मक इकाइयाँ हैं—

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{50}, \ldots, \frac{1}{100},$ आदि।

हम कभी-कभी भिन्नात्मक इकाइयों को **इकाई भिन्न** भी कहते हैं।

आइए, पता लगाएँ

रिक्त स्थानों में भिन्न संख्याओं को भरिए—

1. तीन अमरूदों का भार 1 किग्रा है। यदि वे लगभग समान आकार के हों, तो प्रत्येक अमरूद का लगभग भार _____ किग्रा होगा।
2. एक थोक व्यापारी ने 1 किग्रा चावल को समान भार के चार पैकेटों में पैक किया। प्रत्येक पैकेट का भार _____ किग्रा है।
3. चार मित्रों ने 3 गिलास गन्ने का रस का आर्डर दिया और इसे आपस में बराबर-बराबर बाँटा। प्रत्येक ने _____ गिलास गन्ने का रस पिया।

गणित चर्चा

4. एक बड़ी मछली का भार $\frac{1}{2}$ किग्रा है। एक छोटी मछली का भार $\frac{1}{4}$ किग्रा है। दोनों का सम्मिलित वजन है _____ किग्रा।

गणित चर्चा

अतीत से ज्ञान!

भिन्न शब्द का प्रयोग और नामकरण भारत में प्राचीन काल से होता आ रहा है। *ऋग्वेद* में भिन्न $\frac{3}{4}$ को *त्रि-पद* कहा गया है। इसका वही अर्थ है जो आज कई भारतीय भाषाओं में $\frac{3}{4}$ के लिए प्रयुक्त शब्दों का होता है, जैसे— हिंदी में बोलचाल की भाषा, 'तीन पाव' और तमिल में 'मुक्काल'। वास्तव में भिन्न के लिए जो शब्द हम आज अनेक भारतीय भाषाओं में प्रयोग करते हैं वे प्राचीन समय से प्रचलित हैं।

आपके घर, नगर या राज्य में विभिन्न भाषाओं में भिन्नों के लिए उपयोग होने वाले शब्दों को खोजिए एवं उन पर चर्चा कीजिए। अपने दादा-दादी, माता-पिता, शिक्षकों और सहपाठियों से पूछिए कि वे विभिन्न भिन्नों के लिए कौन-कौन से शब्दों का उपयोग करते हैं, जैसे— एक और आधा, तीन चौथाई, एक चौथाई, आधा, चौथाई तथा दो और आधा, इन्हें यहाँ लिखिए—

__________ __________ __________ __________ __________ __________

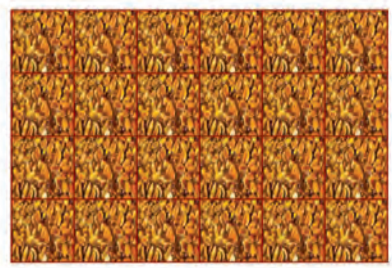
5. दिए गए भिन्न शब्दों को छोटे से बड़े के क्रम में व्यवस्थित कीजिए और खाली बॉक्स में भरिए—
एक और आधा, तीन चौथाई, एक चौथाई, आधा, चौथाई, दो और आधा

अपना उत्तर यहाँ लिखिए।

Reprint 2025-26

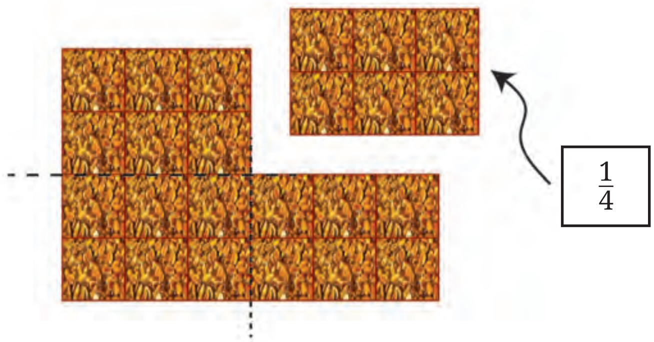
7.2 संपूर्ण के हिस्सों के रूप में भिन्नात्मक इकाइयाँ

दिए गए चित्र में एक संपूर्ण चिक्की दिखाई गई है।

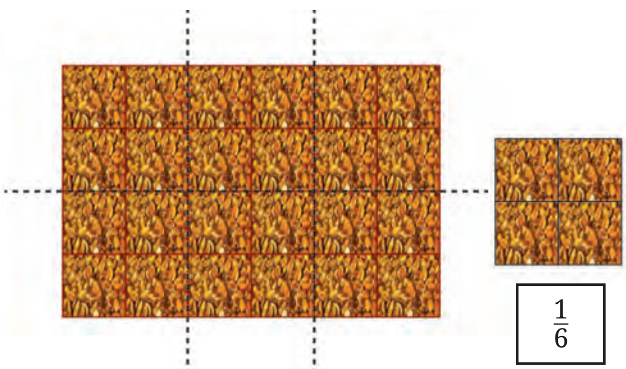


एक संपूर्ण चिक्की

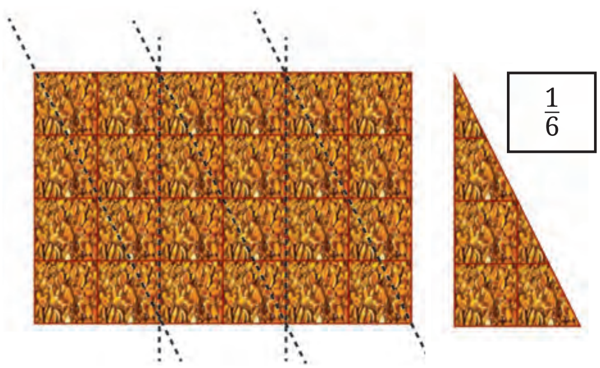
नीचे 2 हिस्सों में तोड़ी गई चिक्की का चित्र दिखाया गया है। प्रत्येक टुकड़ा मूल चिक्की का कितना हिस्सा है?



हम देख सकते हैं कि बड़े टुकड़े में $\frac{1}{4}$ चिक्की के 3 भाग हैं। अत: हम बड़े टुकड़े को भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{4}$ का उपयोग करके माप सकते हैं। हम देखते हैं कि बड़ा टुकड़ा $\frac{3}{4}$ चिक्की है।



6 बराबर टुकड़ों में काटी गई एक संपूर्ण चिक्की



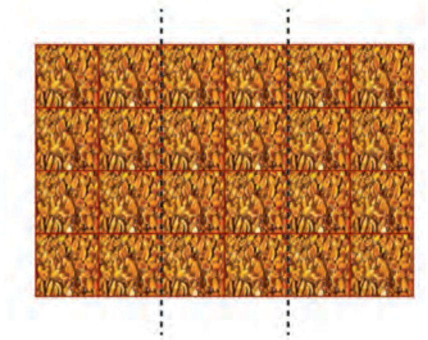
अन्य तरीके से 6 बराबर टुकड़ों में काटी गई एक संपूर्ण चिक्की

एक संपूर्ण चिक्की को विभिन्न तरीकों से 6 बराबर भागों में बाँटने पर, हमें अलग-अलग आकारों के $\frac{1}{6}$ चिक्की के टुकड़े मिलते हैं। क्या वे समान आकार के हैं?

गणित चर्चा

Reprint 2025-26

नीचे दर्शाई गई चिक्की की भिन्नात्मक इकाई क्या है?



एक संपूर्ण चिक्की

$\boxed{\frac{1}{3}}$

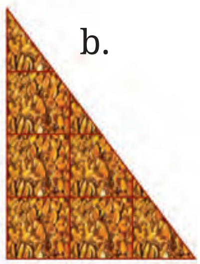
हमें चिक्की को 3 बराबर भागों में बाँटने पर यह टुकड़ा मिलता है। अत: यह $\frac{1}{3}$ चिक्की है।

आइए, पता लगाएँ

नीचे दिए गए चित्र एक संपूर्ण चिक्की की विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ दर्शाते हैं। प्रत्येक टुकड़ा पूरी चिक्की का कितना भाग है?

a.

b.

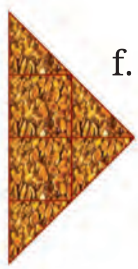


c.

d.

e.

f.



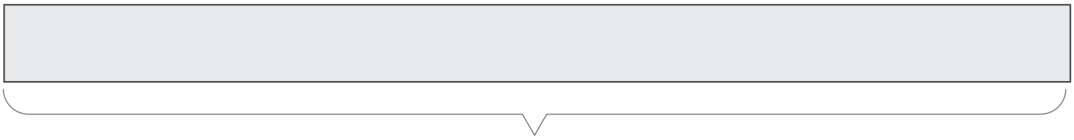
g.

h.

Reprint 2025-26

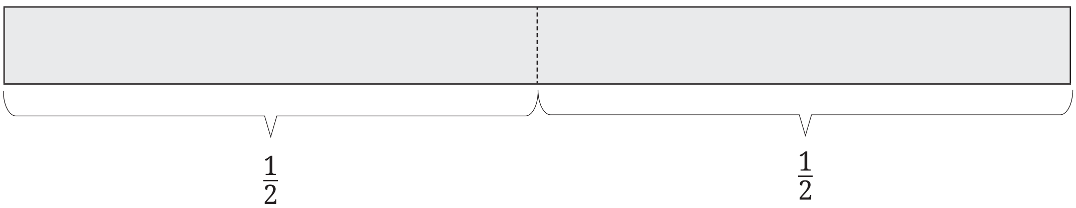
7.3 भिन्नात्मक इकाइयों द्वारा मापना

एक कागज की पट्टी लीजिए। हम इस कागज की पट्टी को एक इकाई लंबा मानेंगे।

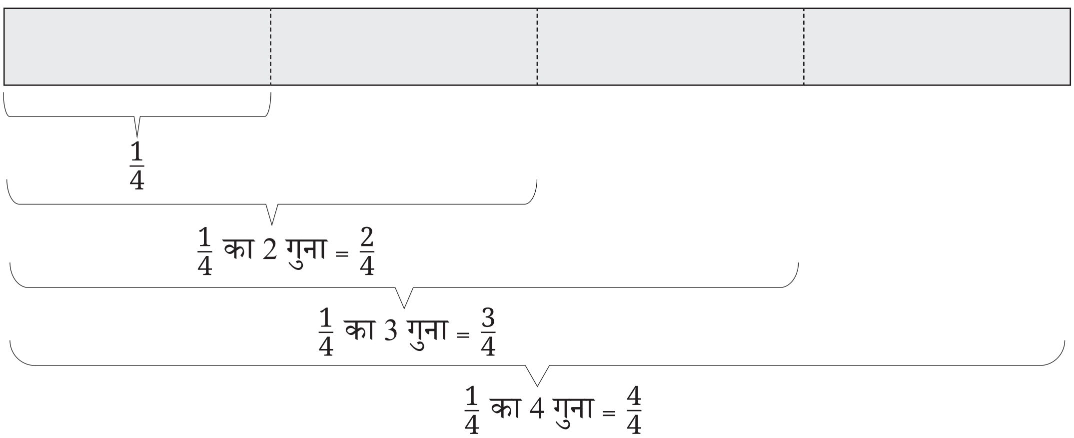


एक कागज की पट्टी

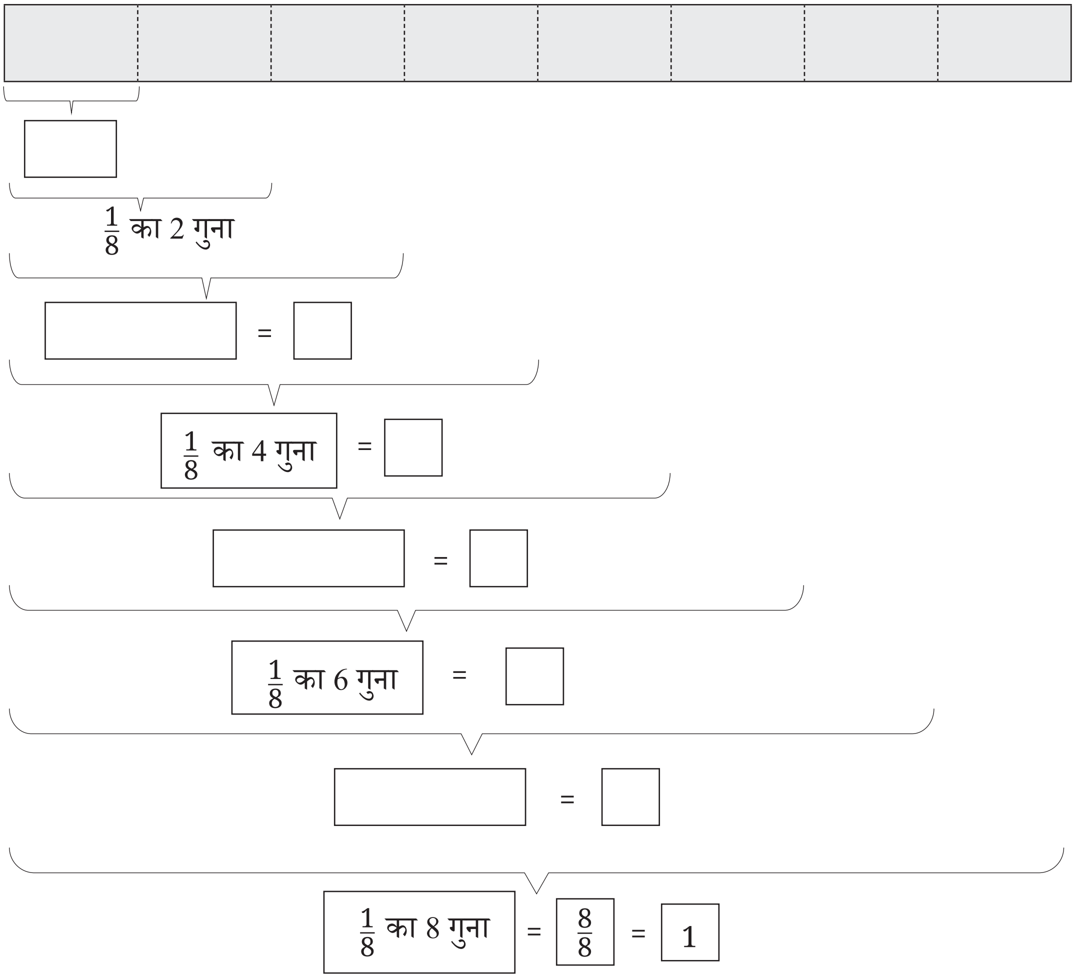
पट्टी को दो समान भागों में मोड़िए और फिर पट्टी को पुन: खोलें। पट्टी की लंबाई को एक इकाई मानते हुए, मोड़ के निशान (क्रीज) द्वारा बनाई गई पट्टी के दो नए भागों की लंबाइयाँ क्या हैं?



पूर्व में मोड़ी गई पट्टी को यदि पुन: दो समान भागों में मोड़ें तो आपको क्या प्राप्त होगा? अब आपको चार समान भाग मिलेंगे।



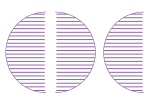
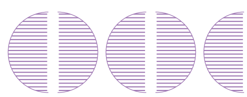
इसे पुन: दोहराएँ। रिक्त बॉक्स को भरिए।



भिन्नात्मक मात्राओं को भिन्नात्मक इकाइयों का उपयोग करके मापा जा सकता है।

एक अन्य उदाहरण लेते हैं—


एक संपूर्ण रोटी प्रदर्शित करता है।

				
$\frac{1}{2}$ = 1 गुना आधा	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 2 गुना आधा	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 3 गुना आधा	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 4 गुना आधा	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 5 गुना आधा

हम भिन्नात्मक इकाइयों को एक साथ एकत्र कर बता सकते हैं कि कुल कितनी मात्रा है।

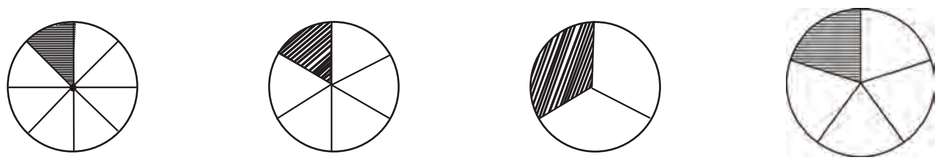
Reprint 2025-26

आइए, पता लगाएँ

1. $\frac{1}{2}$ की इस तालिका को 2 और चरणों तक जारी रखें।
2. क्या आप $\frac{1}{4}$ के लिए समान तालिका बना सकते हैं?
3. कागज की पट्टी की सहायता से $\frac{1}{3}$ बनाएँ। क्या आप $\frac{1}{6}$ बनाने में इसका उपयोग कर सकते हैं।
4. एक चित्र बनाएँ और उपरोक्त के अनुसार योग कथन लिखिए—

   a. $\frac{1}{4}$ रोटी का 5 गुना   b. $\frac{1}{4}$ रोटी का 9 गुना
5. प्रत्येक भिन्नात्मक इकाई का सही चित्र के साथ जोड़ा बनाइए—

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6}$



भिन्नों को पढ़ना

हम भिन्न $\frac{3}{4}$ को आमतौर पर 'तीन-चौथाई' या तीन बटा चार पढ़ते हैं, लेकिन इसे '3 गुना $\frac{1}{4}$' के रूप में पढ़ने से हमें भिन्न के आकार को समझने में सहायता मिलती है, क्योंकि यह स्पष्ट दिखाता है कि भिन्नात्मक इकाई $\left(\frac{1}{4}\right)$ है और यहाँ ऐसी कितनी भिन्नात्मक इकाइयाँ (3) हैं।

स्मरण कीजिए की हम भिन्न की ऊपरी संख्या और निचली संख्या को क्या कहते हैं। भिन्न $\frac{5}{6}$ में, 5 **अंश** है और 6 **हर** है।

अध्यापक टिप्पणी

बच्चों को विभिन्न आकृतियों, जैसे— वृत्त, वर्ग, आयत, त्रिभुज आदि का उपयोग करके भिन्नात्मक इकाइयों को समझने के लिए अनेक अवसर दीजिए।

7.4 संख्या रेखा पर भिन्नों की माप अंकित करना

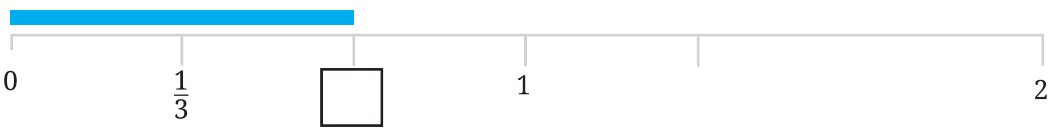
हमने संख्या रेखा पर 1, 2, 3, ... इकाइयों के बराबर माप अंकित किए है। आइए, अब संख्या रेखा पर भिन्नों की मापें अंकित करने का प्रयास करें।

नीली रेखा की लंबाई कितनी है? बॉक्स में वह भिन्न लिखें जो नीली रेखा की लंबाई बताता है।

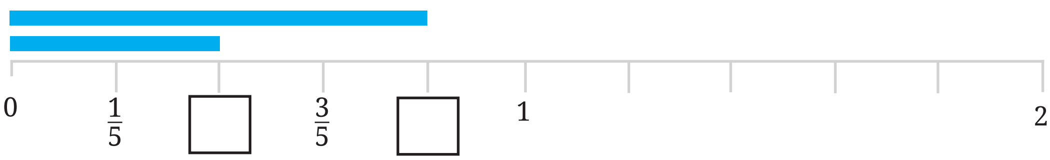
0 और 1 की बीच की दूरी एक इकाई लंबी है। यह दो बराबर भागों में विभाजित है। अत: प्रत्येक भाग की लंबाई $\frac{1}{2}$ इकाई लंबी है। अत: नीली रेखा $\frac{1}{2}$ इकाई लंबी है।

अब, क्या आप नीचे दर्शाई गई विभिन्न नीली रेखाओं की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं? इसे बॉक्स में भी लिखिए।

1. यहाँ भिन्नात्मक इकाई, 1 इकाई की लंबाई को तीन बराबर भागों में विभाजित कर रही है। नीली रेखा की लंबाई बताने वाले भिन्न को संबंधित बॉक्स में अथवा अपनी कॉपी में लिखिए।



2. यहाँ एक इकाई को 5 बराबर भागों में बाँटा गया है। नीली रेखाओं की लंबाई बताने वाली भिन्न को संबंधित बॉक्स में अथवा अपनी नोटबुक (कॉपी) में लिखिए।



3. अब एक इकाई को 8 बराबर भागों में बाँटा गया है। उचित भिन्नों को अपनी नोटबुक (कॉपी) में लिखिए।

आइए, पता लगाएँ

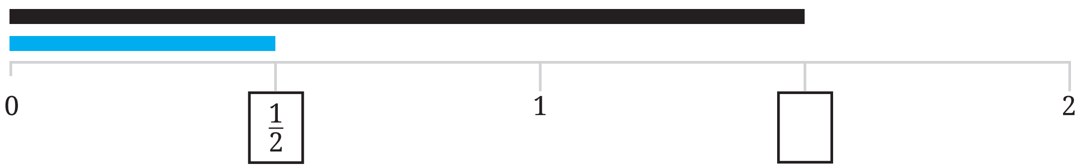
गणित चर्चा

1. संख्या रेखा पर $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ और $\frac{4}{5}$ लंबाई की रेखाओं को दर्शाइए।

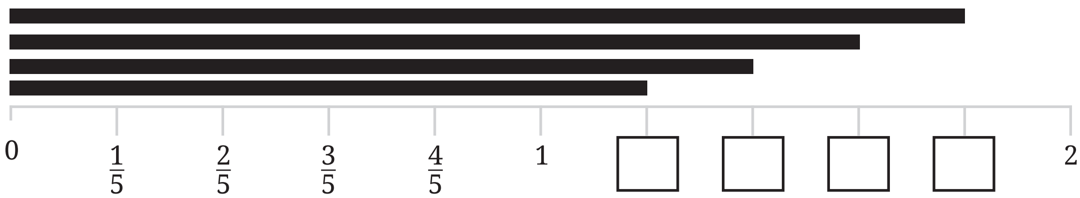
2. अपनी पसंद की पाँच और भिन्नों को लिखिए और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाइए।

3. 0 और 1 के मध्य कितनी भिन्न होती हैं? सोचिए, अपने सहपाठियों से चर्चा कीजिए और अपना उत्तर लिखिए।

4. नीचे दर्शाई गई नीली रेखा और काली रेखा की लंबाई क्या है? 0 और 1 के मध्य की दूरी 1 इकाई लंबी है और यह दो बराबर भागों में विभाजित की गई है। अतः प्रत्येक भाग की लंबाई $\frac{1}{2}$ है। इसलिए नीली रेखा $\frac{1}{2}$ इकाई लंबी है। काली रेखा की लंबाई बताने वाली भिन्न को बॉक्स में लिखिए।



5. काली रेखाओं की लंबाई बताने वाली भिन्नों को संबंधित बॉक्स में लिखिए।



अध्यापक टिप्पणी

इन रेखाओं को श्यामपट्ट पर अंकित कीजिए और विद्यार्थियों से उनकी नोटबुक (कॉपी) में उत्तर लिखने के लिए कहिए।

7.5 मिश्रित भिन्न

एक से बड़ी भिन्ने

आपने, अभी संख्या रेखा पर कुछ भिन्नों को अंकित किया था। क्या आपने देखा कि सभी नीली रेखाओं की लंबाई 1 से कम थी और सभी काली रेखाओं की लंबाई 1 से अधिक थी?

उन सभी भिन्नों को लिखिए जिन्हें आपने पहले संख्या रेखा पर अंकित किया था।

आइए, अब इन भिन्नों को दो समूहों में वर्गीकृत करें—

1 इकाई से छोटी लंबाई	**1 इकाई से बड़ी लंबाई**

क्या आपने ध्यान दिया कि 1 इकाई से बड़ी भिन्नों में कुछ बातें समान हैं?

1 इकाई से छोटी सभी भिन्नों में अंश, हर से छोटा है, जबकि 1 इकाई से बड़ी भिन्नों में अंश, हर से बड़ा है।

हम जानते हैं कि $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ और $\frac{7}{2}$ सभी 1 इकाई से बड़ी हैं। किंतु क्या हम देख सकते हैं कि उनमें कितनी पूर्ण इकाइयाँ हैं?

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

मैं जानती हूँ कि $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. यदि मैं एक और $\frac{1}{3}$ जोड़ती हूँ, तो मुझे 1 इकाई से अधिक प्राप्त होगा। अत: $\frac{4}{3} > 1$.

आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. $\frac{7}{2}$ में कितनी पूर्ण इकाइयाँ हैं?
2. $\frac{4}{3}$ और $\frac{7}{3}$ में कितनी पूर्ण इकाइयाँ हैं?

एक से बड़ी भिन्नों को मिश्रित संख्याओं के रूप में लिखना

हमने देखा है कि— $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

इसी प्रकार हम अन्य भिन्नों को भी लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए,

$$\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{3 \times \frac{1}{3} = 1} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक में पूर्ण इकाइयों की संख्या ज्ञात कीजिए—

   a. $\frac{8}{3}$ b. $\frac{11}{5}$ c. $\frac{9}{4}$

   हमने देखा

   $$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

   भिन्न मिश्रित संख्या

   इस प्रकार इस संख्या को "दो और दो-तिहाई" भी कहा जाता है। हम इसे $2\frac{2}{3}$ के रूप में लिखते हैं।

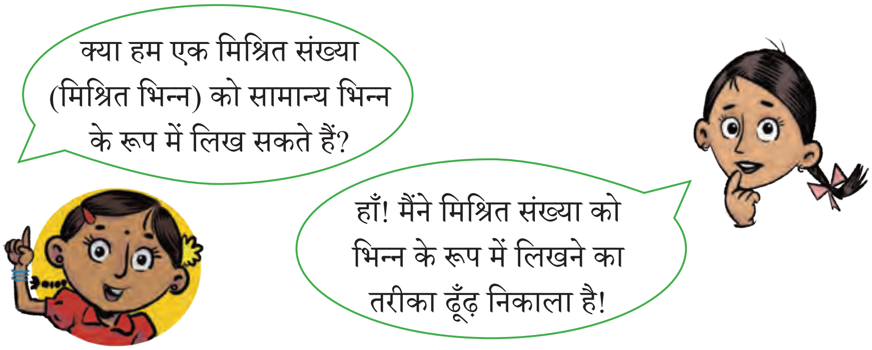
2. क्या 1 से बड़े सभी भिन्नों को इस प्रकार से मिश्रित संख्या के रूप में लिख सकते हैं?

एक **मिश्रित संख्या/मिश्रित भिन्न** में एक पूर्ण संख्या होती है (जो पूर्ण भाग कहलाता है) और एक वह भिन्न जो कि 1 से कम होता है (जो भिन्नात्मक भाग कहलाता है)।

3. निम्नलिखित भिन्नों को मिश्रित भिन्न के रूप में लिखिए (उदाहरणार्थ, $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$)

   a. $\frac{9}{2}$ b. $\frac{9}{5}$ c. $\frac{21}{19}$ d. $\frac{47}{9}$ e. $\frac{12}{11}$ f. $\frac{19}{6}$

Reprint 2025-26



जया— मैं जानती हूँ, जब मेरे पास $3 + \frac{3}{4}$ हैं, इसका अर्थ है $1 + 1 + 1 + \frac{3}{4}$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

तो मुझे प्राप्त होता है,

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$$

अत: $\left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(3 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$

आइए, पता लगाएँ

निम्नलिखित मिश्रित संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखिए—

(a) $3\frac{1}{4}$ (b) $7\frac{2}{3}$ (c) $9\frac{4}{9}$

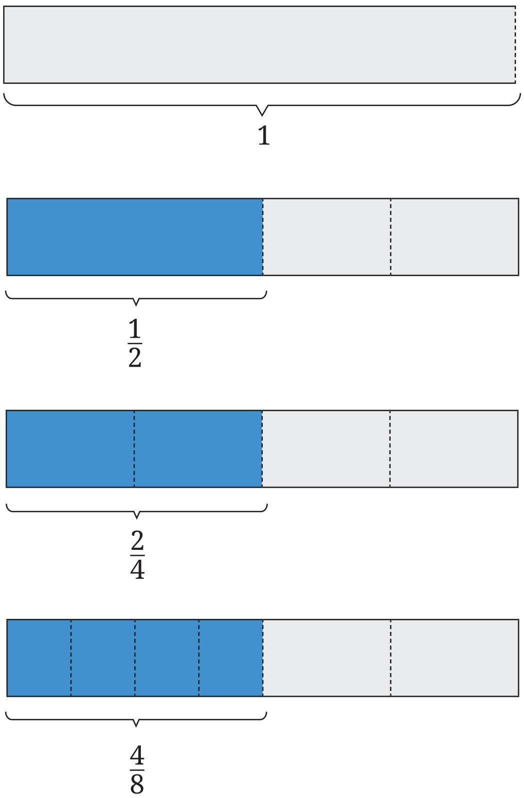
(d) $3\frac{1}{6}$ (e) $2\frac{3}{11}$ (f) $3\frac{9}{10}$

गणित चर्चा

7.6 तुल्य भिन्न

समान भिन्नात्मक लंबाई ज्ञात करने के लिए भिन्न दीवार (पट्टियों) का प्रयोग करना!

पिछले खंड में आपने विभिन्न भिन्नों को दर्शाने के लिए भिन्नात्मक इकाइयों वाले पेपर फोल्डिंग (पट्टी) का प्रयोग किया था। आइए, उसी पेपर स्ट्रिप (पट्टी) के साथ कुछ और गतिविधि करें।



आप क्या देखते हैं?

- क्या $\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{4}$ की लंबाई बराबर हैं?
- क्या $\frac{2}{4}$ और $\frac{4}{8}$ की लंबाई बराबर हैं?

हम कह सकते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

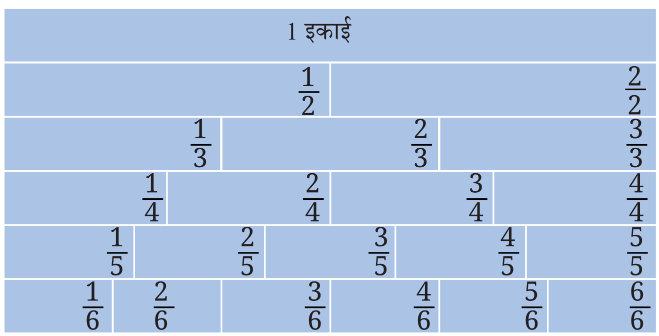
ये 'समतुल्य भिन्न' हैं जोकि समान लंबाई को दर्शाती हैं, लेकिन यह विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों के पदों में व्यक्त हैं।

अब कागज की पट्टियों का उपयोग कर जाँचिए कि क्या $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{6}$ समतुल्य भिन्न हैं अथवा नहीं?

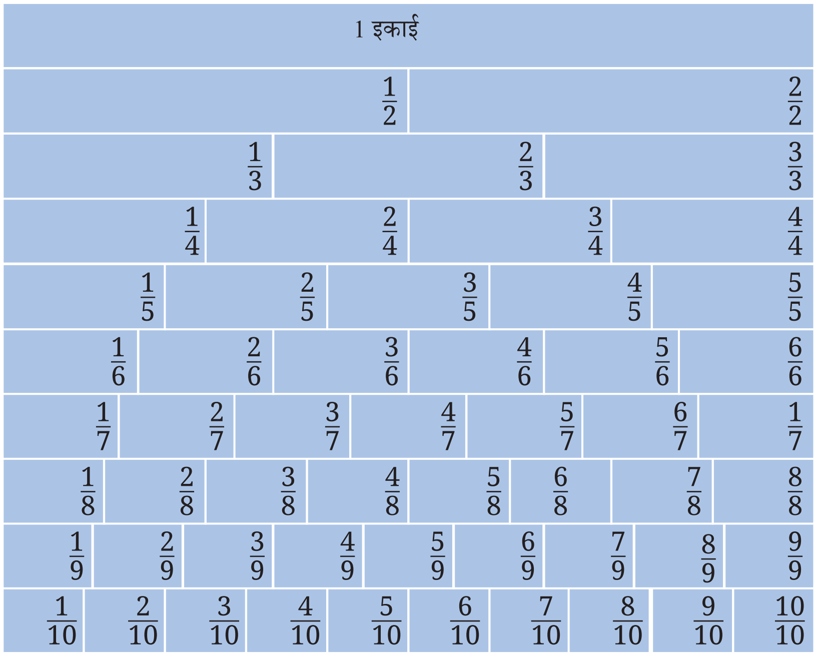
नीचे दिए गए चित्रानुसार दी गई पट्टियों का प्रयोग कर स्वयं की भिन्नात्मक पट्टी की दीवार बनाइए।

भिन्न पट्टी की दीवार को देखकर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. क्या $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{6}$ की लंबाई बराबर हैं?
2. क्या $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{6}$ तुल्य भिन्न हैं? क्यों?
3. $\frac{1}{6}$ लंबाई के कितने टुकड़ों से $\frac{1}{2}$ लंबाई प्राप्त होगी?
4. $\frac{1}{6}$ लंबाई के कितने टुकड़ों से $\frac{1}{3}$ लंबाई प्राप्त होगी?



हम इस विचार का विस्तार करके, भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{10}$ वाली भिन्न पट्टी की दीवार बना सकते हैं। (भिन्नों की यह दीवार पुस्तक के अंत में दी गई है।)



आइए, पता लगाएँ

1. क्या $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ तुल्य भिन्न हैं? क्यों?

2. $\frac{2}{6}$ के लिए दो तुल्य भिन्न लिखिए।

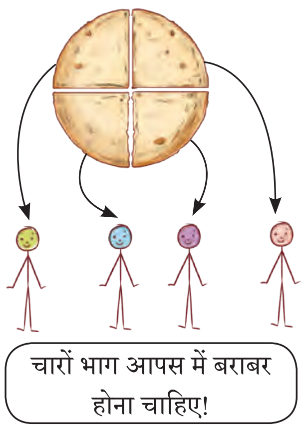
3. $\frac{4}{6} = \boxed{\frac{\ }{\ }} = \boxed{\frac{\ }{\ }} = \boxed{\frac{\ }{\ }} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (जितनी संभव हों उतनी लिखिए।)

समान भागों का प्रयोग कर तुल्य भिन्न समझना

एक रोटी को चार बच्चों में बराबर बाँटा गया। प्रत्येक बच्चे को रोटी का कितना भाग मिला?

संलग्न चित्र में चार बच्चों के बीच एक रोटी का बँटवारा दिखाया गया है।

प्रत्येक बच्चे को प्राप्त रोटी का भिन्न $\frac{1}{4}$ है।



आप इस घटना को भाग विधि, जोड़ विधि और गुणन विधि के माध्यम से भी व्यक्त कर सकते हैं।

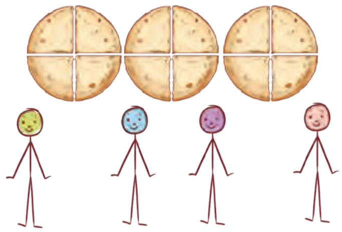
भाग विधि से $1 \div 4 = \frac{1}{4}$

योग विधि से $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

गुणन विधि से $1 = 4 \times \frac{1}{4}$

आइए, पता लगाएँ

1. तीन रोटियों को चार बच्चों में बराबर बाँटा गया है। चित्र में विभाजन दिखाएँ और प्रत्येक बच्चे को कितना भाग मिला है, भिन्न में लिखिए। संगत विभाजन क्रिया, योग क्रिया और गुणन क्रिया भी लिखिए।



   प्रत्येक बच्चे को रोटी का मिला भाग—

   विभाजन क्रिया—

   योग क्रिया—

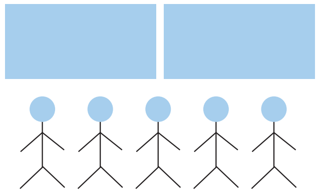
   गुणन क्रिया—

   अपने चित्र और उत्तरों की तुलना अपने सहपाठियों से कीजिए।

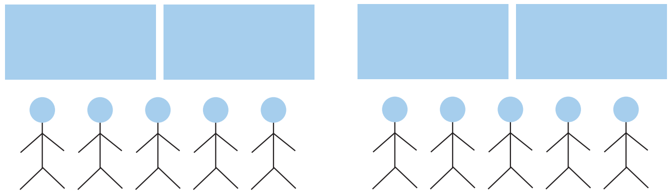
2. एक चित्र बनाकर दर्शाइए कि जब 2 रोटियाँ 4 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटी जाती हैं तो प्रत्येक बच्चे को कितना भाग मिलता है इसके संगत भाग क्रिया, योग क्रिया और गुणन क्रिया भी लिखिए।

3. अनिल एक समूह में था, जहाँ 2 केक को 5 बच्चों में बराबर बाँटा गया। अनिल को कितना केक मिला होगा?

समूह 1



समूह 2



इस प्रकार दोनों स्थितियों में प्रत्येक बच्चे का भाग समान है!

इसलिए $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$!

आइए, हम निम्नलिखित स्थितियों में प्रत्येक बच्चे के हिस्से की जाँच करते हैं।

- 1 रोटी 2 बच्चों में बराबर बाँटी जाती है।
- 2 रोटियाँ 4 बच्चों में बराबर बाँटी जाती हैं।
- 3 रोटियाँ 6 बच्चों में बराबर बाँटी जाती हैं।

आइए, चित्र बनाएँ और इसे साझा करें!

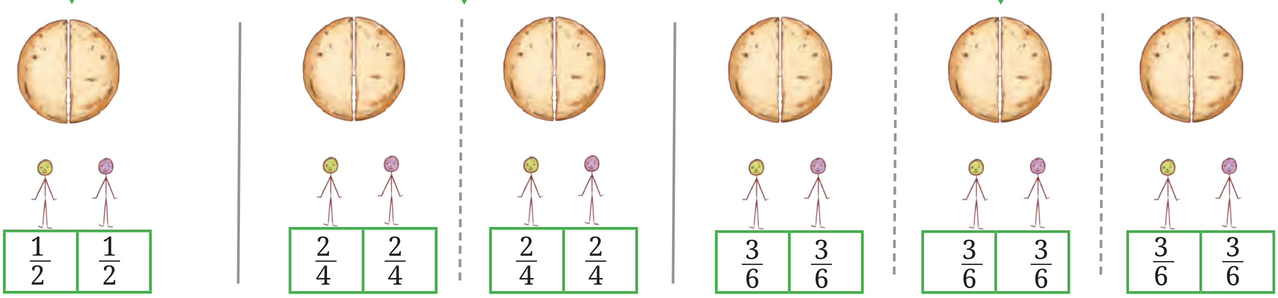
क्या आपने ध्यान दिया कि सभी स्थितियों में प्रत्येक बच्चे का भाग बराबर है?

अतः हम कह सकते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

एक रोटी 2 बच्चों के बीच बराबर बाँटी जाती है।

2 रोटियाँ 4 बच्चों के बीच बराबर बाँटी जाती है।

3 रोटियाँ 6 बच्चों के बीच बराबर बाँटी जाती है।



जिन भिन्नों के भाग समान होते हैं उन्हें 'तुल्य भिन्न' कहा जाता है

इसलिए, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ और $\frac{3}{6}$ सभी **तुल्य भिन्न** हैं।

$\frac{1}{2}$ के तुल्य कुछ और भिन्नों को ज्ञात कीजिए। इन्हें यहाँ बॉक्स में लिखिए।

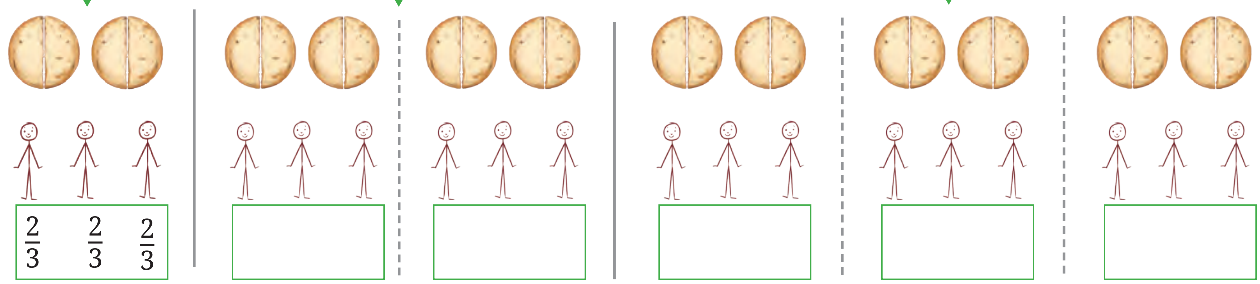
$\square$ $\square$ $\square$ $\square$

निम्नलिखित स्थितियों में रोटी को बराबर-बराबर बाँटिए और प्रत्येक बच्चे के हिस्से को लिखिए। क्या इन सभी स्थितियों में प्रत्येक बच्चे का हिस्सा समान है? क्यों?

2 रोटियों को 3 बच्चों में बराबर हिस्सों में बाँटा

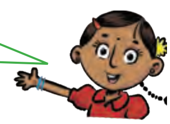
4 रोटियों को 6 बच्चों में बराबर हिस्सों में बाँटा

6 रोटियों को 9 बच्चों में बराबर हिस्सों में बाँटा



$\frac{2}{3}$ भिन्न $\frac{4}{6}$ का सरलतम रूप भी कहलाता है। यह $\frac{6}{9}$ का भी सरलतम रूप है।

क्या आपने इनमें से प्रत्येक भिन्न में अंश और हर के बीच संबंध के बारे में कुछ ध्यान दिया है?



आइए, पता लगाएँ

लुप्त संख्याएँ ज्ञात कीजिए—

गणित चर्चा

a. 4 मित्रों के बीच बराबर-बराबर बाँटा गया 5 गिलास जूस, 8 दोस्तों के बीच बराबर-बराबर बाँटे गए _____ गिलास जूस के समान है।

अतः $\frac{5}{4} = \frac{\square}{8}$

b. 4 किग्रा आलू को बराबर-बराबर 3 थैलों में भरा गया। ऐसे ही 12 किग्रा आलू को समान रूप से भरने के लिए ____ थैलों की आवश्यकता होगी?

अतः $\frac{4}{3} = \frac{12}{\square}$

Reprint 2025-26

c. 5 बच्चों के बीच बराबर बाँटी गई 7 रोटियाँ और _____ बच्चों के बीच बराबर बाँटी गई ______ रोटियाँ समान होंगी।

अत: $\frac{7}{5} = \frac{\square}{\square}$

किस समूह में प्रत्येक बच्चे को अधिक चिक्की प्राप्त होती है?

1 चिक्की को 2 बच्चों में बराबर बाँटा जाए या 5 चिक्कियों को 8 बच्चों में बराबर बाँटा जाए।

मुक्ता— इसके लिए हमें $\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{8}$ के बीच तुलना करनी चाहिए कि कौन अधिक है?

शबनम— ठीक है, हमने देखा कि $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ है, और स्पष्टत:— $\frac{4}{8} < \frac{5}{8}$

इसलिए जिन बच्चों के लिए 5 चिक्की को 8 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है, उन्हें उन बच्चों से अधिक मिलेगा, जिनके लिए 1 चिक्की को 2 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है। दूसरे समूह के प्रत्येक बच्चे को अधिक चिक्की मिलेगी।

निम्नलिखित समूह के विषय में क्या कहेंगे? किस समूह में प्रत्येक बच्चे को अधिक हिस्सा मिलेगा?

1 चिक्की को 2 बच्चों में बराबर बाँटा जाए या 4 चिक्कियों को 7 बच्चों में बराबर बाँटा जाए।

शबनम— इस बार किस समूह के बच्चों को अधिक चिक्की मिलेगी?

मुक्ता हमें— $\frac{1}{7}$ और $\frac{4}{7}$ की तुलना करनी चाहिए।

अब

$\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$ अत:, $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

शबनम— लेकिन आपने अंश और हर को पुन: 4 से गुणा क्यों किया?

मुक्ता— तुम देखोगी!

जब 4 चिक्कियों को 7 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है, तो प्रत्येक को $\frac{4}{7}$ चिक्की मिलेगी। जब 4 चिक्कियों को 8 बच्चों में बराबर बाँटा जाता है, तो प्रत्येक को $\frac{4}{8}$ चिक्की मिलेगी। अत: $\frac{4}{7} > \frac{4}{8}$

यदि बाँटी जाने वाली इकाइयों की संख्या समान है, लेकिन जिन बच्चों के बीच बाँटी जानी है उनकी संख्या अधिक है, तो भाग कम होगा।

इसलिए, $\frac{4}{7} > \frac{4}{8}$ और $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, अत: $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$
अब मैं समझी कि तुमने अंश और हर को 4 से गुणन क्यों किया?

मान लीजिए कि बच्चों की संख्या समान रखी गई है, किंतु बाँटी जाने वाली इकाइयों की संख्या बढ़ गई। अब आप प्रत्येक बच्चे को मिलने वाले हिस्से के विषय मे क्या कहेंगे? क्यों? चर्चा कीजिए कि कैसे आपका तर्क यह स्पष्ट करता है कि $\frac{1}{5} < \frac{2}{5}$, $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$, और $\frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

अब, निर्णय कीजिए कि दोनों समूहों में किस समूह के बच्चों को अधिक हिस्सा मिलेगा?

गणित चर्चा

1. **समूह 1**— 3 गिलास गन्ने के रस को 4 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

   समूह 2— 7 गिलास गन्ने के रस को 10 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

2. **समूह 1**— 4 गिलास गन्ने के रस को 7 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

   समूह 2— 5 गिलास गन्ने के रस को 7 बच्चों में बराबर बाँटा गया।

कौन से समूहों की तुलना करना आसान है? क्यों?

शबनम— पहले दो समूहों की तुलना करने के लिए हमें भिन्नों $\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{10}$ के तुल्य भिन्न ज्ञात करना है।

मुक्ता— क्या ऐसे $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ और $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$?

क्या ऐसा नहीं है कि जब बच्चों की संख्या समान है, तो तुलना करना आसान है।

Reprint 2025-26

शबनम— यहाँ एक शर्त है। दो भिन्नों के लिए प्रयोग की गई भिन्नात्मक इकाइयाँ समान होनी चाहिए! जैसे— $\frac{2}{6}$ और $\frac{3}{6}$ दोनों में भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{6}$ है (अर्थात्, हर समान हैं)। किंतु $\frac{6}{8}$ और $\frac{21}{30}$ में भिन्नात्मक इकाइयाँ समान नहीं है (दोनों में हर असमान हैं)।

मुक्ता— ठीक है, तो आओ हम तुल्य भिन्न बनाना शुरू करते हैं—

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} \ldots$ लेकिन मुझे कब रुकना है?

शबनम— समझी! कैसा रहेगा यदि हम $4 \times 10 = 40$ तक लिखें।

मुक्ता— आपका अर्थ दो हरों का गुणनफल?

ठीक है!

हमारे पास $\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{10}$ हैं। दोनों हरों (4 और 10) का गुणनफल 40 है।

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \ldots = \frac{27}{36} = \frac{30}{40}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{28}{40}$$

तब तक लिखेंगे जब तक हर 40 न हो जाए।

शबनम— अतः $\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{10}$ की समान भिन्नात्मक इकाई (समान हर) के साथ तुल्य भिन्न $\frac{30}{40}$ और $\frac{28}{40}$ या $\frac{15}{20}$ और $\frac{14}{20}$ हैं।

स्पष्टतया $\frac{30}{40} > \frac{28}{40}$, अत: हम कह सकते हैं कि $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$

दिए गए भिन्न युग्मों के लिए तुल्य भिन्नों को ज्ञात कीजिए, जिसमें भिन्नात्मक इकाइयाँ समान हों।

a. $\frac{7}{2}$ और $\frac{3}{5}$ b. $\frac{8}{3}$ और $\frac{5}{6}$ c. $\frac{3}{4}$ और $\frac{3}{5}$ d. $\frac{6}{7}$ और $\frac{8}{5}$

e. $\frac{9}{4}$ और $\frac{5}{2}$ f. $\frac{1}{10}$ और $\frac{2}{9}$ g. $\frac{8}{3}$ और $\frac{11}{4}$ h. $\frac{13}{6}$ और $\frac{1}{9}$

एक भिन्न को सरलतम रूप में व्यक्त करना

किसी भिन्न के अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, तो भिन्न अपने **न्यूनतम** या **सरलतम रूप** में कही जाती है। दूसरे शब्दों में, एक भिन्न को न्यूनतम रूप में कहा जाता है यदि उसका अंश और हर जितना संभव हो उतना छोटे हों।

किसी भी भिन्न को न्यूनतम पदों में व्यक्त करने के लिए एक तुल्य भिन्न ज्ञात की जा सकती है, जिसका अंश और हर जितना संभव हो उतना छोटा हो।

आइए, देखें कैसे भिन्न को न्यूनतम पदों में व्यक्त करते हैं।

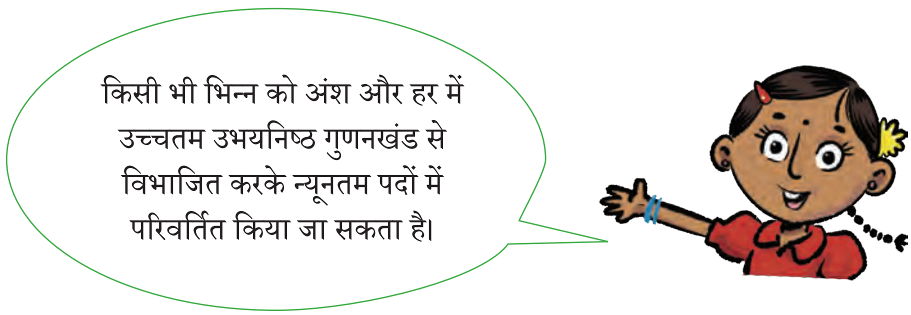
उदाहरण— क्या भिन्न $\frac{16}{20}$ न्यूनतम पदों में है? नहीं, संख्या 16 और 20 का उभयनिष्ठ गुणनखंड 4 है।

आइए, अब $\frac{16}{20}$ को न्यूनतम पदों में व्यक्त करते हैं।

हम जानते हैं कि 16 (अंश) और 20 (हर) दोनों 4 से विभाज्य हैं।

अतः $\frac{16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{4}{5}$

अब, 4 और 5 का कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। इसलिए $\frac{16}{20}$ का न्यूनतम व्यक्त पद $\frac{4}{5}$ है। अतः $\frac{4}{5}$ को $\frac{16}{20}$ का सरलतम रूप कहा जा सकता है, क्योंकि 4 और 5 का 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।



एक भिन्न को न्यूनतम पदों में विभिन्न चरणों में भी व्यक्त किया जा सकता है।

मान लीजिए, हमें $\frac{36}{60}$ को न्यूनतम पदों व्यक्त करना है। सर्वप्रथम हम देखते हैं कि अंश और हर दोनों सम हैं। अतः हम दोनों को 2 से विभाजित करके देखते हैं और पाते हैं कि $\frac{36}{60} = \frac{18}{30}$

पुनः अंश और हर दोनों सम हैं, अतः हम पुनः उन्हें 2 से विभाजित कर सकते हैं; हमें $\frac{18}{30} = \frac{9}{15}$ प्राप्त होता है।

अब हम देखते हैं कि 9 और 15 दोनों 3 के गुणज हैं, अतः दोनों को 3 से विभाजित करने पर $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ प्राप्त होता है।

अब 3 और 5 का 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है, अतः $\frac{36}{60}$ न्यूनतम रूप में $\frac{3}{5}$ है।

वैकल्पिक रूप में, हम देख सकते थे कि $\frac{36}{60}$ में अंश और हर दोनों 12 के गुणज हैं— हम देखते हैं कि $36 = 3\times12$ और $60 = 5\times12$, इसलिए हम सीधे यह निष्कर्ष निकाल सकते थे कि $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ है।

आप किसी भी विधि से कीजिए, एक ही उत्तर मिलेगा! किंतु कभी-कभी चरणों में हल करना सरल होता है।

आइए, पता लगाएँ

निम्नलिखित भिन्नों को न्यूनतम पदों में व्यक्त कीजिए—

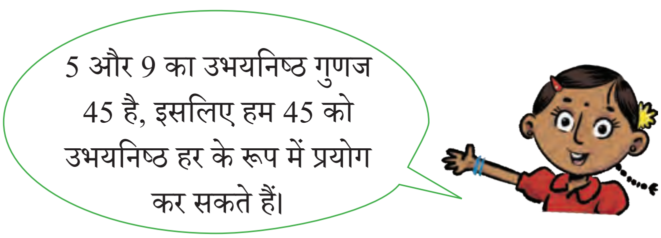
a. $\frac{17}{51}$ b. $\frac{64}{144}$ c. $\frac{126}{147}$ d. $\frac{525}{112}$

7.7 भिन्नों की तुलना

कौन-सा भिन्न बड़ा है, $\frac{4}{5}$ या $\frac{7}{9}$? इस प्रकार के दो भिन्नों की सीधे तुलना करना कठिन हो सकता है। यद्यपि हम जानते हैं कि समान हर वाली दो भिन्नों के तुल्य भिन्न कैसे प्राप्त करते हैं।
आइए, देखें कि हम इसका उपयोग कैसे कर सकते हैं—

$$\frac{4}{5} = \frac{4\times9}{5\times9} = \frac{36}{45}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7\times5}{9\times5} = \frac{35}{45}$$



स्पष्टत: $\frac{36}{45} > \frac{35}{45}$

अत: $\frac{4}{5} > \frac{7}{9}$!

आइए, इसे किसी अन्य युग्म $\frac{7}{9}$ और $\frac{17}{21}$ के लिए प्रयास करें।

9 और 21 का उभयनिष्ठ गुणज 63 है, तो हम लिख सकते हैं—

$$\frac{7}{9} = \frac{7\times7}{9\times7} = \frac{49}{63}, \quad \frac{17}{21} = \frac{17\times3}{21\times3} = \frac{51}{63}$$

स्पष्टत: $\frac{49}{63} < \frac{51}{63}$

अत: $\frac{7}{9} < \frac{17}{21}$!

संक्षेप में!

दो या दो से अधिक भिन्नों की मापों की तुलना के चरण—

चरण 1— दिए गए भिन्नों को तुल्य भिन्नों में बदलें ताकि उन सभी को समान हर/समान भिन्नात्मक इकाई में परिवर्तित किया जा सके।

चरण 2— अब केवल अंशों की तुलना कर, तुल्य भिन्नों की तुलना कीजिए अर्थात् प्रत्येक में कितनी भिन्नात्मक इकाइयाँ हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित भिन्नों की तुलना कीजिए और अपने उत्तर का कारण बताइए—

   a. $\frac{8}{3}, \frac{5}{2}$ b. $\frac{4}{9}, \frac{3}{7}$ c. $\frac{7}{10}, \frac{9}{14}$

   d. $\frac{12}{5}, \frac{8}{5}$ e. $\frac{9}{4}, \frac{5}{2}$

2. निम्नलिखित भिन्नों को आरोही क्रम में लिखिए।

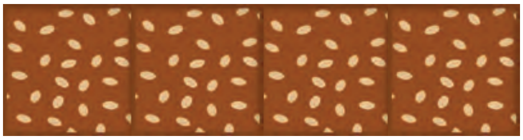
   a. $\frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{2}{5}$ b. $\frac{19}{24}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$

3. निम्नलिखित भिन्नों को अवरोही क्रम में लिखिए।

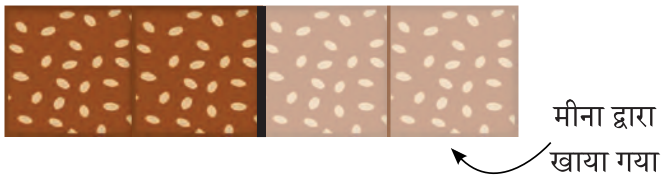
   a. $\frac{25}{16}, \frac{7}{8}, \frac{13}{4}, \frac{17}{32}$ b. $\frac{3}{4}, \frac{12}{5}, \frac{7}{12}, \frac{5}{4}$

7.8 भिन्नों को जोड़ना और घटाना

मीना के पिता ने कुछ चिक्की बनाई। मीना ने इसका $\frac{1}{2}$ भाग खाया और उसके छोटे भाई ने इसका $\frac{1}{4}$ भाग खाया। मीना और उसके भाई ने मिलकर चिक्की का कितना भाग खाया?



हम दृश्यीकरण के माध्यम से उत्तर तक पहुँच सकते हैं। चिक्की का एक टुकड़ा लीजिए और इसे पहले इस तरह दो हिस्सों में बाँटिए।

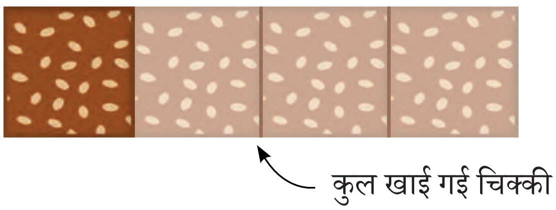


चित्रानुसार मीना ने इसका आधा भाग खाया।

अब शेष बचे हिस्से को पुनः दो भागो में बाँटे जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इनमें से प्रत्येक टुकड़ा संपूर्ण चिक्की का $\frac{1}{4}$ है।

जैसा कि चित्र में दिखाया गया है कि मीना के भाई ने संपूर्ण चिक्की का $\frac{1}{4}$ भाग खाया।

कुल खाई गई चिक्की है, $\frac{1}{2}$ (मीना के द्वारा) और $\frac{1}{4}$ (उसके भाई द्वारा)



कुल खाई गई चिक्की $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

संपूर्ण चिक्की का कितना भाग शेष बचा?

समान हर या समान भिन्नात्मक इकाई वाले भिन्नों का योग (जोड़)

उदाहरण— $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{5}$ का योग ज्ञात कीजिए।

आइए, दोनों को आयताकार पट्टी (स्ट्रिप) द्वारा दर्शाते हैं। यहाँ दोनों भिन्नों में भिन्नात्मक इकाई समान है, जो $\frac{1}{5}$ है, इसलिए प्रत्येक पट्टी को 5 बराबर भागों में बाँटा जायेगा।

अतः $\frac{2}{5}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—

और $\frac{1}{5}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—

दोनों भिन्नों का योग छायांकित भागों की कुल संख्या ज्ञात करने के समान है, जो प्रत्येक समान भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{5}$ को दर्शाता है।

इस स्थिति में कुल छायांकित भाग 3 हैं। चूँकि प्रत्येक छायांकित भाग भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{5}$ को दर्शाता है, हम देखते हैं कि 3 छायांकित भाग मिलकर भिन्न $\frac{3}{5}$ को व्यक्त करता है।

अत: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$?

उदाहरण— $\frac{4}{7}$ और $\frac{6}{7}$ का योग ज्ञात कीजिए।

आइए, पुनः दोनों को आयताकार पट्टी द्वारा दर्शाते हैं। यहाँ दोनों भिन्नों में भिन्नात्मक इकाई समान है, अर्थात् $\frac{1}{7}$, अत: प्रत्येक पट्टी को 7 बराबर भागों में बाँटेंगे।

तब $\frac{4}{7}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—

और $\frac{6}{7}$ को इस प्रकार दर्शाया जाएगा—

इस स्थिति में छायांकित भागों की कुल संख्या 10 है, और इसका प्रत्येक छायांकित भाग भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{7}$ को दर्शाता है। इसलिए 10 छायांकित भाग मिलकर भिन्न $\frac{10}{7}$ को दर्शाते हैं, जैसा कि नीचे दी गई पट्टी में देखा जा सकता है।

समान भिन्नात्मक इकाई वाले भिन्नों को जोड़ते समय, प्रत्येक भिन्न से भिन्नात्मक इकाइयों की संख्या जोड़ेंगे।

अत: $\frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7}$

$= 1 + \frac{3}{7}$

$= 1\frac{3}{7}$

संख्या रेखा का प्रयोग कर $\frac{4}{7} + \frac{6}{7}$ को जोड़िए। क्या आपको समान उत्तर मिला?

विभिन्न हर या भिन्नात्मक इकाई वाले भिन्नों का योग

उदाहरण— $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{3}$ का योग ज्ञात कीजिए।

विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों वाले भिन्नों को जोड़ने के लिए, पहले भिन्न को समान हर या समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलेंगे। यहाँ समान हर $3 \times 4 = 12$ बनाए जा सकते हैं अर्थात् हम भिन्नात्मक इकाई $\frac{1}{12}$ वाली तुल्य भिन्न ज्ञात कर सकते हैं।

Reprint 2025-26

आइए, प्रत्येक दी गई भिन्न के लिए तुल्य भिन्न लिखिए।

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}, \ \frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$

अब $\frac{3}{12}$ और $\frac{4}{12}$ की भिन्नात्मक इकाई समान है, जो कि $\frac{1}{12}$ है।

अतः $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

योग की यह विधि जो कितनी भी भिन्नों को जोड़ने के लिए काम करती है, सामान्यतः पहली बार ब्रह्मगुप्त द्वारा वर्ष 628 ईस्वी में बताई गई थी। हम भिन्नों के विकास के इतिहास का वर्णन अध्याय में आगे विस्तार से करेंगे। अभी केवल भिन्नों के योग के लिए ब्रह्मगुप्त की विधि के चरणों को समझते हैं।

भिन्नों के योग के लिए ब्रह्मगुप्त विधि

1. तुल्य भिन्नों को ज्ञात कीजिए ताकि सभी भिन्नों की भिन्नात्मक इकाई समान हों। यह हरों का एक उभयनिष्ठ गुणज ज्ञात करके किया जा सकता है (उदाहरणार्थ, हरों का गुणनफल या हरों का लघुतम सार्वगुणज)

2. समान भिन्नात्मक इकाई वाली इन तुल्य भिन्नों को जोड़िए। यह अंशों को जोड़कर और हर को समान रखकर किया जा सकता है।

3. यदि आवश्यकता हो तो प्राप्त परिणाम को न्यूनतम पदों में लिखिए।

आइए, ब्रह्मगुप्त विधि का एक और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण— $\frac{2}{3}$ और $\frac{1}{5}$ का योग ज्ञात कीजिए।

दिए गए भिन्नों के हर 3 और 5 हैं। 3 और 5 का लघुतम सामान्य गुणज 15 है। अब हम देखते हैं,

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}, \ \frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15}$

इसलिए, $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$

Reprint 2025-26

उदाहरण— $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ का योग ज्ञात कीजिए।

6 और 3 का लघुतम सामान्य गुणज 6 है।

$\frac{1}{6}$ केवल $\frac{1}{6}$ ही रहेगा।

$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$

इसलिए, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

अब यदि आवश्यक हो तो भिन्न $\frac{3}{6}$ को पुनः न्यूनतम पदों में व्यक्त कर सकते हैं, यह अंश और हर दोनों को 3 (3 और 6 का सबसे बड़ा सामान्य गुणनखंड) से विभाजित करके किया जा सकता है।

$\frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$

अतः $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

आइए, पता लगाएँ

1. ब्रह्मगुप्त विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित भिन्नों का योग कीजिए।

   a. $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}$ b. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ d. $\frac{2}{3}+\frac{2}{7}$ e. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

   f. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ g. $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ h. $\frac{3}{5}+\frac{5}{8}$ i. $\frac{9}{2}+\frac{5}{4}$ j. $\frac{8}{3}+\frac{2}{7}$

   k. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ l. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{3}{7}$ m. $\frac{9}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}$

2. रहीम ने हरा पेंट बनाने के लिए $\frac{2}{3}$ लीटर पीले पेंट को $\frac{3}{4}$ लीटर नीले पेंट के साथ मिलाया। उसने कुल कितने लीटर हरा पेंट बनाया?

3. एक मीटर परिधि के मेजपोश का संपूर्ण बॉर्डर (किनारा) बनाने के लिए गीता ने $\frac{2}{5}$ मीटर लेस खरीदी और शमीम ने $\frac{3}{4}$ मीटर लेस खरीदी। उन दोनों के द्वारा खरीदी गई लेस की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए। क्या खरीदी गई लेस संपूर्ण बॉर्डर (किनारा) को ढकने के लिए पर्याप्त है?

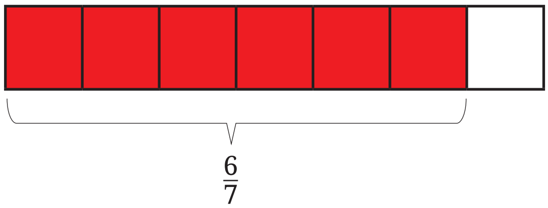
Reprint 2025-26

समान भिन्नात्मक इकाई या हर वाले भिन्नों को घटाना

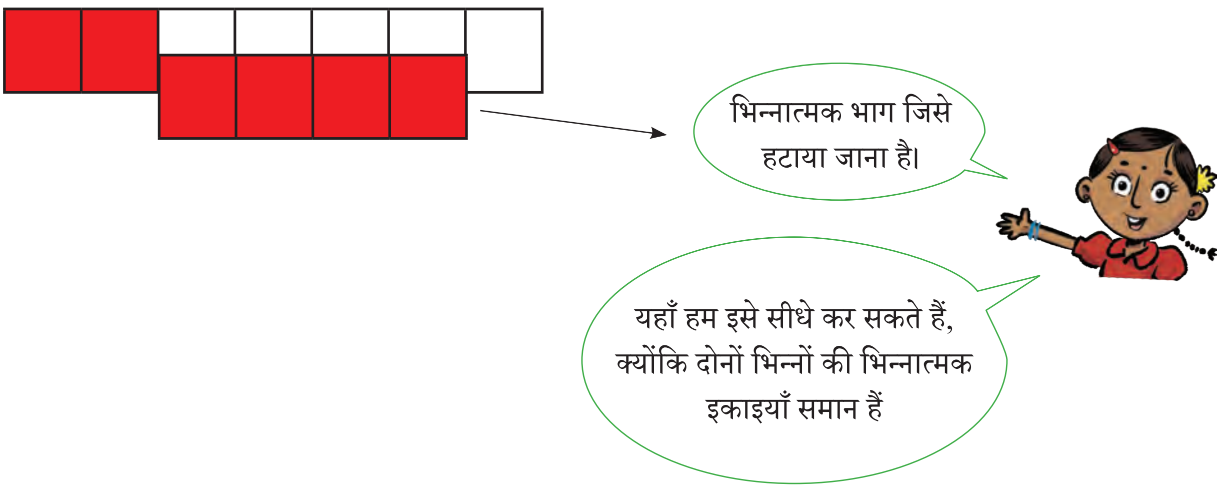
भिन्नों को घटाते समय भी ब्रह्मगुप्त विधि समान रूप से लागू होती है।

आइए, $\frac{6}{7}$ से $\frac{4}{7}$ को घटाने की समस्या से शुरू करें, अर्थात् $\frac{6}{7} - \frac{4}{7}$ क्या है?

इस समस्या को हल करने के लिए हम आयताकार पट्टी का पुनः प्रयोग कर सकते हैं। यहाँ, दोनों भिन्न पहले बड़े भिन्न को आयताकार पट्टी से प्रदर्शित करते हैं, जैसा कि दर्शाया गया है—



प्रत्येक छायांकित भाग $\frac{1}{7}$ को प्रदर्शित करता है। अब हमें $\frac{4}{7}$ घटाना है। ऐसा करने के लिए 4 छायांकित भागों को हटा देते हैं।



अतः हमारे पास 2 छायांकित भाग बचे हैं अर्थात् $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

यही अभ्यास संख्या रेखा के साथ करने का प्रयास कीजिए।

आइए, पता लगाएँ

1. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ 2. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9}$ 3. $\frac{10}{27} - \frac{1}{27}$

विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों या हरों वाले भिन्नों को घटाना

उदाहरण— $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ का मान क्या है?

जैसा कि हम पहले ही समान भिन्नात्मक इकाई वाली भिन्नों का घटाना जानते हैं। आइए, दिए गए भिन्नों को समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलते हैं।

हाँ! यह करके हम दो भिन्नों को आसानी से घटा सकते हैं।

$$\frac{3}{4} = \frac{(3\times3)}{(4\times3)} = \frac{9}{12}$$

सोचिए! हमने अंश और हर दोनों को 3 से गुणा करने के लिए क्यों चुना?

और इसी प्रकार

$$\frac{2}{3} = \frac{(2\times4)}{(3\times4)} = \frac{8}{12}$$

पुनः हमने अंश और हर दोनों को 4 से गुणा करने के लिए क्यों चुना?

अतः $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$

ब्रह्मगुप्त विधि से दो भिन्नों को घटाना—

1. दिए गए भिन्नों को समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलिए अर्थात्, समान हर में।
2. समान भिन्नात्मक इकाई वाली भिन्नों को घटाइए। यह हर को समान रखकर और अंशों को घटाकर किया जा सकता है।
3. प्राप्त परिणाम को आवश्यकतानुसार न्यूनतम पदों में सरल बनाइए।

आइए, पता लगाएँ

1. ब्रह्मगुप्त विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित को घटाइए—

   a. $\frac{8}{15} - \frac{3}{15}$ b. $\frac{2}{5} - \frac{4}{15}$ c. $\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$ d. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

2. संकेतानुसार घटाइए—

   a. $\frac{13}{4}$ से $\frac{10}{3}$ b. $\frac{18}{5}$ से $\frac{23}{3}$ c. $\frac{29}{7}$ से $\frac{45}{7}$

3. निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए—

   a. जया का विद्यालय उसके घर से $\frac{7}{10}$ किमी दूर है। वह प्रतिदिन विद्यालय पहुँचने के लिए $\frac{1}{2}$ किमी ऑटो से जाती है और शेष दूरी पैदल चलकर तय करती है। वह स्कूल पहुँचने के लिए प्रतिदिन कितना पैदल चलती है?

   b. जीविका पार्क का एक पूरा चक्कर लगाने में $\frac{10}{3}$ मिनट लेती है और उसकी मित्र नमिता उसी कार्य को करने में $\frac{13}{4}$ मिनट का समय लेती है। दोनों में से कौन कम समय में पूरा चक्कर लगाती है और कितना कम समय लेती है?

7.9 एक चुटकी इतिहास

क्या आप जानते हैं कि प्राचीन भारत में भिन्न को क्या कहा जाता था? संस्कृत में भी इसे *भिन्न* कहा जाता है, जिसका अर्थ है टूटा हुआ। इसे *भाग* या *अंश* अर्थात् भाग या खंड (टुकड़ा) भी कहा जाता था।

आज हम जिस प्रकार से भिन्न लिखते हैं, उसकी उत्पत्ति भारत में हुई थी। प्राचीन भारतीय गणितीय ग्रंथ जैसे कि बख्शाली पांडुलिपि (लगभग 300 ईस्वी) में जब वे $\frac{1}{2}$ लिखना चाहते थे, तो वे इसे $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ के रूप में लिखते थे जो कि वास्तव में आज हम जिस तरह लिखते हैं, उससे बहुत मिलता-जुलता है। भिन्नों के साथ लिखने और काम करने की यह विधि भारत में अगली कई शताब्दियों तक प्रयोग होती रही, जिनमें आर्यभट्ट (499 ईस्वी), ब्रह्मगुप्त (628 ईस्वी), श्रीधराचार्य (लगभग 750 ईस्वी)

और महावीराचार्य (लगभग 850 ईस्वी) के साथ अन्य लोग भी सम्मिलित हैं। '$\frac{1}{2}$' और अन्य भिन्नों में अंश और हर के बीच के रेखाखंड को बाद में मोरक्को के गणितज्ञ अल-हसर (12 वीं शताब्दी में) ने लिखा। अगली कुछ शताब्दियों में यह संकेत पद्धति यूरोप और पूरे विश्व में फैल गई।

भिन्न का उपयोग प्राचीन मिस्र और बेबीलोनिया सभ्यता जैसी अन्य संस्कृतियों में भी किया गया, किंतु वे मुख्य रूप में भिन्नात्मक इकाइयों का ही उपयोग करते थे, अर्थात् अंश 1 वाली भिन्नें। सामान्यतः भिन्नों को भिन्नात्मक इकाइयों के योग के रूप में व्यक्त किया जाता था, जिन्हें अब 'मिस्र भिन्न' कहा जाता है। संख्याओं को भिन्नात्मक इकाइयों के योग के रूप में लिखना, उदाहरणार्थ, $\frac{19}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ एक कला हो सकती है और यह सुंदर पहेलियों की ओर ले जाती है। हम आगे ऐसी ही एक पहेली पर विचार करेंगे।

सामान्य भिन्न (जहाँ आवश्यक नहीं कि अंश 1 हो) को सर्वप्रथम भारत में अंकगणितीय संक्रियाओं, जैसे— योग, घटाना, गुणा और यहाँ तक कि भिन्नों के विभाजन के नियमों के साथ परिचित किया गया था। *शुल्व-सूत्र* नामक प्राचीन भारतीय ग्रंथ से पता चलता है कि वैदिक काल में ही भारतीयों ने भिन्नों के साथ संक्रियाओं के नियमों की खोज कर ली थी। भिन्नों के साथ काम करने की और उनकी गणना करने के सामान्य नियमों और कार्यप्रणाली को पहली बार औपचारिक और आधुनिक रूप में ब्रह्मगुप्त द्वारा संहिताबद्ध किया गया था।

ब्रह्मगुप्त की विधि ही है जिसका प्रयोग आज हम भिन्नों को हल करने एवं उनकी गणना करने में करते हैं। उदाहरणार्थ, ब्रह्मगुप्त ने निम्नलिखित तरीके से भिन्नों को जोड़ने और घटाने का तरीका बताया—

"प्रत्येक भिन्न के अंश और हर को अन्य हरों से गुणा करने पर भिन्न एक उभयनिष्ठ हर में बदल जाता है। फिर योग के संबंध में, अंश (उक्त सरलीकरण से प्राप्त) को जोड़ा जाता है। घटाने के संबंध में, उनके अंतर को लिया जाता है।" (ब्रह्मगुप्त: ब्रह्मस्फुट सिद्धांत, श्लोक 12.2, 628 ईस्वी)

भिन्नों से संबंधित भारतीय अवधारणाएँ और विधियाँ अगली कुछ शताब्दियों में अरबों के माध्यम से यूरोप में पहुँची और 17वीं शताब्दी तक यूरोप में उसका सामान्य उपयोग होने लगा और फिर दुनिया भर में फैल गईं।

पहेली!

यदि कोई समान भिन्नात्मक इकाइयों का उपयोग करता है, तो योगफल 1 प्राप्त करने के लिए भिन्नात्मक इकाइयों को जोड़ना आसान है। उदाहरणार्थ—

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, आदि।

क्या आप सभी विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों को जोड़कर 1 प्राप्त करने का कोई तरीका सोच सकते हैं?

दो विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों को जोड़कर 1 प्राप्त करना संभव नहीं है। इसका कारण यह है कि $\frac{1}{2}$ सबसे बड़ी भिन्नात्मक इकाई है, एवं $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ प्राप्त करने के लिए हमें कम से कम एक $\frac{1}{2}$ को किसी छोटी भिन्नात्मक इकाई से बदलना होगा, किंतु तब योगफल 1 से कम होगा! अत: दो विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों का योग 1 प्राप्त करना संभव नहीं है।

फिर भी हम 1 को तीन विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयों के योग के रूप में लिखने का तरीका ढूँढ़ने का प्रयत्न कर सकते हैं।

प्रयास करें

1. क्या आप तीन विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ ढूँढ़ सकते हैं, जिनका योगफल 1 हो?

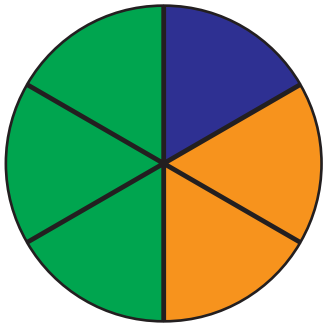
   इस समस्या का केवल एक हल है (3 भिन्नात्मक संख्याओं के क्रम बदलने तक)! क्या आप इसे ढूँढ़ सकते हैं? आगे बढ़ने से पहले इसे ढूँढ़ने का प्रयत्न करें।

यहाँ हल को प्राप्त करने का क्रमबद्ध तरीका दिया गया है। हम जानते हैं कि $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ होगा। विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ प्राप्त करने के लिए हमें कम से कम एक $\frac{1}{3}$ को बढ़ाना होगा, एवं अन्य $\frac{1}{3}$ को उस बढ़त के संतुलन के लिए घटाना होगा। $\frac{1}{3}$ को अन्य भिन्नात्मक इकाई तक बढ़ाने का एकमात्र तरीका है, इसे $\frac{1}{2}$ से बदलना। अत: $\frac{1}{2}$ एक भिन्नात्मक इकाई अवश्य होना चाहिए।

अब $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, अब अलग भिन्नात्मक इकाई प्राप्त करने के लिए हमें एक $\frac{1}{4}$ को बढ़ाना होगा एवं अन्य $\frac{1}{4}$ को उस बढ़त के संतुलन के लिए घटाना होगा। अब $\frac{1}{4}$ को $\frac{1}{2}$ से अलग अन्य

भिन्नात्मक इकाई तक बढ़ाने का एकमात्र तरीका है, इसे $\frac{1}{3}$ से बदलना है। अत: दो भिन्नात्मक इकाइयाँ अवश्य $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ होंगी! फिर तीसरी भिन्नात्मक संख्या क्या होनी चाहिए, जिससे कि तीनों भिन्नात्मक इकाइयों का योगफल 1 हो?

इससे स्पष्ट होता है कि क्यों उपरोक्त समस्या का केवल एक ही हल है।



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

क्या होगा यदि हम चार विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ खोजें, जिनका योगफल 1 हो?

2. क्या आप चार विभिन्न भिन्नात्मक इकाइयाँ ढूँढ़ सकते हैं, जिनका योगफल 1 हो?

परिणामत: इस समस्या के छ: हल हैं! क्या आप उनमें से कम से कम एक ढूँढ़ सकते हैं?

प्रयास करें

क्या आप सभी हल ढूँढ़ सकते हैं? आप दो एवं तीन भिन्नात्मक इकाइयों की स्थिति के समान तर्क का प्रयोग कर प्रयास कर सकते हैं या अपनी स्वयं की विधि भी ढूँढ़ सकते हैं। जैसे ही आप एक हल ढूँढ़ लेते हैं, इसके दृश्यात्मक चित्रण के लिए तब एक वृत्त को हिस्सों में बाँटने का प्रयत्न करें, जैसा कि ऊपर चित्र में किया गया है।

सारांश

- **समान भाग (हिस्से) के रूप में भिन्न**— जब एक पूर्ण संख्या वाली इकाई को समान भागों में बाँटा एवं साझा किया जाता है, तो एक **भिन्न** प्राप्त होती है।
- **भिन्नात्मक इकाइयाँ**— जब एक संपूर्ण मूल इकाई को समान भागों में बाँटा जाता है, तो प्रत्येक **भाग भिन्नात्मक** इकाई कहलाता है।

- **भिन्नों को पढ़ना**— किसी भिन्न जैसे $\frac{5}{6}$ में, 5 को **अंश** एवं 6 को **हर** कहा जाता है। इसे 5 बटा 6 पढ़ा जाता है।
- **मिश्रित भिन्न** में एक पूर्ण संख्यात्मक भाग एवं एक भिन्नात्मक भाग होता है।
- **संख्या रेखा**— भिन्नों को संख्या-रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है। प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या-रेखा पर इससे संबंधित एक बिंदु होता है।
- **तुल्य भिन्न**— जब दो या अधिक भिन्न समान भाग (हिस्सा) प्रदर्शित करती हैं, तो उन्हें **तुल्य भिन्न** कहा जाता है।
- **न्यूनतम पद**— भिन्न, जिसके अंश एवं हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, वह भिन्न **न्यूनतम पद** में या **सरलतम रूप** में कहलाती है।
- **भिन्नों के योग (जोड़ने) की ब्रह्मगुप्त विधि**— भिन्नों को जोड़ते समय उन्हें समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलें (अर्थात् समान हर वाली), और तब योग प्राप्त करने के लिए प्रत्येक भिन्न में भिन्नात्मक इकाइयों की संख्या को जोड़ें। यह हर को समान रखते हुए अंशों को जोड़कर प्राप्त किया जाता है।
- **भिन्नों को घटाने की ब्रह्मगुप्त विधि**— भिन्नों को घटाते समय उन्हें समान भिन्नात्मक इकाई वाली तुल्य भिन्नों में बदलें (अर्थात् समान हर वाली), और तब घटाने के लिए प्रत्येक भिन्न में भिन्नात्मक इकाइयों की संख्या को घटाएँ। यह हर को समान रखते हुए अंशों को घटाकर प्राप्त किया जाता है।

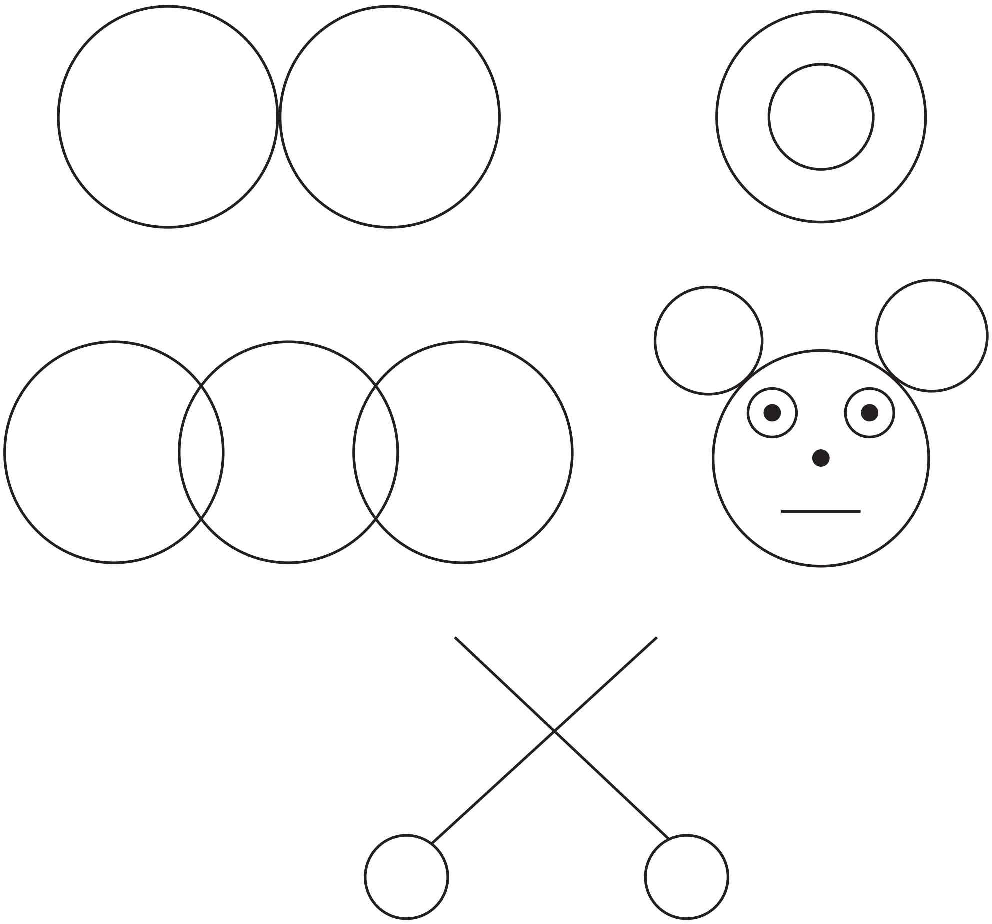
Reprint 2025-26

8 रचनाओं के साथ खेलना

0675CH08

8.1 कलाकृति

निम्नलिखित रचनाओं का ध्यानपूर्वक अवलोकन कीजिए और मुक्त-हस्त (फ्री हैंड) द्वारा इन्हें बनाने का प्रयास कीजिए।

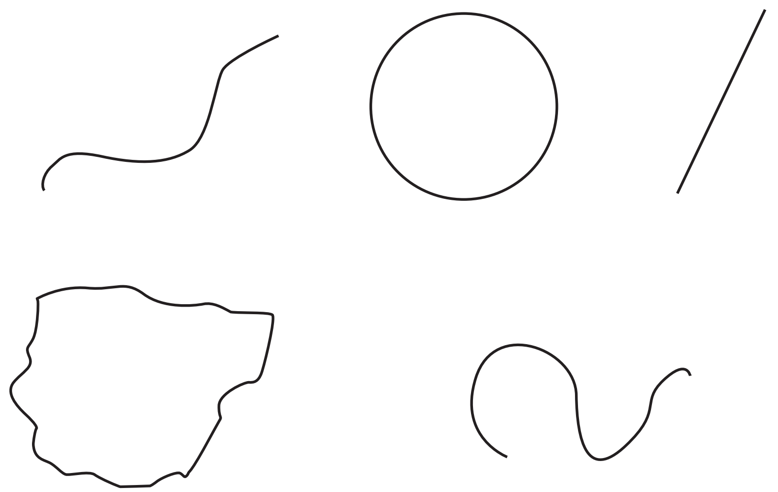


आकृति 8.1

अब अपने हाथों में एक परकार (कंपास) और रूलर (स्केल) लीजिए। आइए, देखें कि क्या हम इन उपकरणों की सहायता से इन आकृतियों को बना सकते हैं।

आइए, उससे पहले हम परकार से परिचित होते हैं। परकार किस प्रकार बना है, अवलोकन कीजिए। परकार की सहायता से हम क्या-क्या बना सकते हैं? पता लगाइए।

क्या आप वक्रों के विषय में जानते हैं? ये सभी पेंसिल द्वारा कागज पर बनाई गई आकृतियाँ हो सकती हैं, इनमें सरल रेखाएँ, वृत्त तथा अन्य आकृतियाँ सम्मिलित हैं, जैसा नीचे चित्र में दर्शाया गया है—



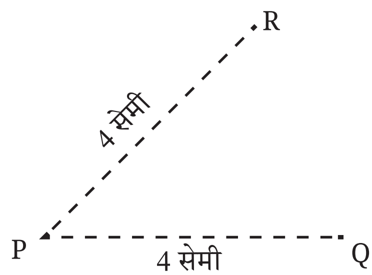
कागज पर एक बिंदु 'P' अंकित कीजिए। फिर बिंदु P से 4 सेमी दूरी पर विभिन्न दिशाओं में जितने संभव हो उतने बिंदुओं को अंकित कीजिए।

सोचिए— बिंदु P से 4 सेमी दूरी पर अंकित सभी बिंदुओं की कल्पना कीजिए। वे कैसे दिखाई देते हैं?

इसे बनाने का प्रयास कीजिए और वक्र रेखा के कुछ बिंदु लेकर जाँचिए कि वक्र रेखा पर अंकित बिंदु सही हैं? क्या वे P से ठीक 4 सेमी की दूरी पर हैं?

पता लगाइए, यदि अभी तक आपने ऐसा नहीं किया है, तो देखिए कि क्या परकार इस कार्य के लिए उपयोग किया जा सकता है।

इसके लिए परकार की सहायता से बिंदु P से 4 सेमी दूरी पर कुछ बिंदु अंकित कीजिए। यह किस प्रकार किया जा सकता है?



आप एक परकार को रूलर (स्केल) के साथ इस प्रकार खोलिए कि परकार एवं पेंसिल की नोक रूलर पर 4 सेमी की दूरी पर हों। (आकृति 8.2 देखिए)

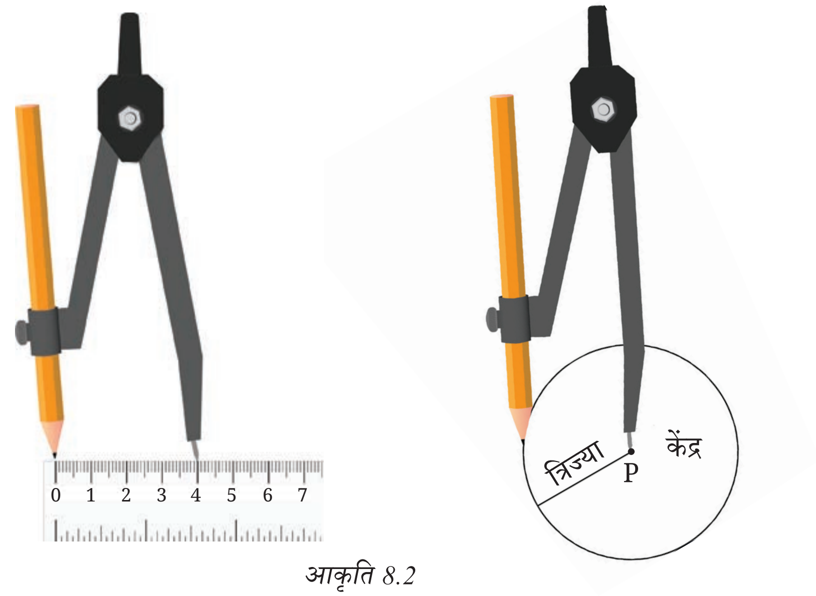
अब, परकार से पूरा वक्र बनाने का प्रयास कीजिए।

(संकेत— परकार की नोंक को स्थिर रखिए तथा केवल पेंसिल को घुमाइए)

इस वक्र का आकार कैसा है? यह एक वृत्त है!

इस वृत्त पर एक बिंदु लीजिए। P से इस बिंदु की दूरी क्या होगी— 4 सेमी के बराबर, या 4 सेमी से कम या 4 सेमी से अधिक? इसी प्रकार P तथा वृत्त पर एक अन्य बिंदु के बीच की दूरी क्या होगी?

जैसा कि आकृति में दिखाया गया है, बिंदु P वृत्त का केंद्र कहलाता है, केंद्र और वृत्त पर स्थित किसी बिंदु के बीच की दूरी, इसकी (वृत्त की) त्रिज्या कहलाती है।



आकृति 8.2

परकार के प्रयोग का पता लगाने के बाद आगे बढ़ें और चित्र 8.1 में दिए गए चित्रों को पुन: बनाएँ।

क्या आप इन आकृतियों को वहाँ दिखाई गई आकृतियों के समान बना सकते हैं? यदि आप चाहते हैं, तो पुन: प्रयास कीजिए।

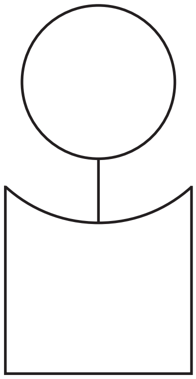
क्या उपकरणों का प्रयोग रचना को और आसान बनाता है? अब अग्रलिखित आकृतियों को बनाने का प्रयास कीजिए।

Reprint 2025-26

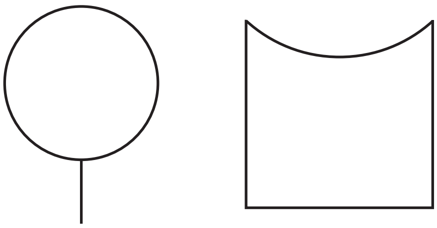
रचना कीजिए

1. एक व्यक्ति

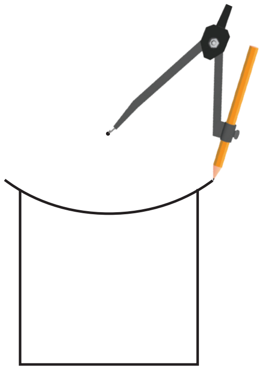
आप इसे कैसे बनाएँगे?



इस आकृति के दो घटक हैं।



पहले भाग को बनाने के लिए आपने तरीका खोज लिया होगा। दूसरा भाग बनाने के लिए इसे देखिए।

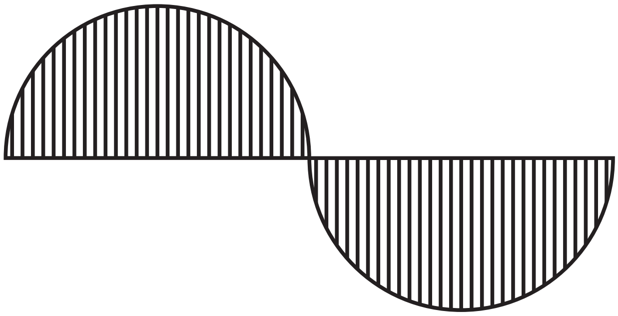


यहाँ चुनौती यह है कि परकार के सिरे को कहाँ रखा जाए और इस वक्र को बनाने के लिए कितनी त्रिज्या लेनी होगी। परकार में एक त्रिज्या निश्चित करके, परकार के सिरे को

अलग-अलग स्थान पर रखकर देखिए कि किन बिंदुओं से हमें वक्र प्राप्त होगा। परकार की नोंक को कहाँ रखना है, इसका अनुमान लगाएँ।

2. तरंगित तरंग (लहर)

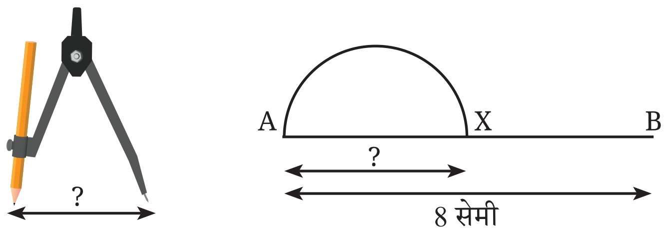
यह बनाइए



चूँकि केंद्रीय रेखाखंड की लंबाई निर्दिष्ट नहीं है, इसलिए हम इसे किसी भी लंबाई का ले सकते हैं।

हम AB को एक केंद्रीय रेखाखंड के रूप में लेते हैं, जहाँ AB = 8 सेमी है।

यहाँ, पहली लहर को अर्धवृत्त के रूप में खींचा गया है।



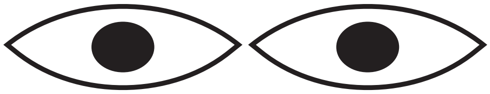
आइए, पता लगाएँ

1. यह अर्धवृत बनाने के लिए परकार में कितनी लंबाई की त्रिज्या रखनी होगी? AX की लंबाई क्या होनी चाहिए?
2. भिन्न लंबाई की एक केंद्रीय रेखा (खंड) लीजिए तथा इस पर लहर बनाने का प्रयास कीजिए।
3. उन आकृतियों को पुन: बनाएँ जहाँ लहरें अर्धवृत से छोटी हैं (जैसा कि पिछले पृष्ठ पर दी 'एक व्यक्ति' के गले की आकृति में दिखाई देता है।) यहाँ चुनौती यह है कि दोनों लहरें समान हों। यह कठिन हो सकता है।

प्रयास करें

3. आँखें

आप परकार की सहायता से ये आँखें कैसे बनाएँगे?

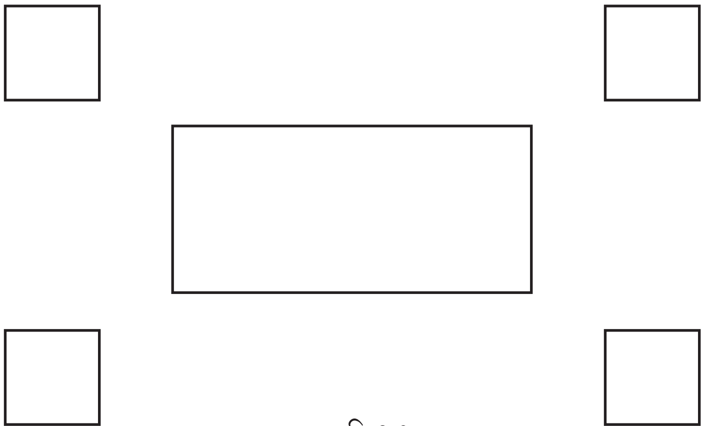


संकेत के लिए, इस अध्याय के अंत में दिए गए हैं।

रूलर (स्केल) और परकार की सहायता से अपनी पसंद की कोई अन्य कलाकृति बनाइए।

8.2 वर्ग और आयत

आइए, कुछ मूल आकृतियाँ देखें जिनकी सीमा सरल रेखाओं से बनी हैं।

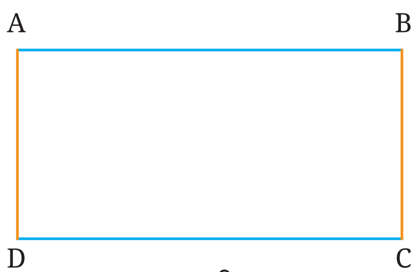


आकृति 8.3

ये आकृतियाँ कैसी हैं? हाँ, ये हमारे परिचित वर्ग और आयत हैं। परंतु इन्हें वर्ग या आयत क्या बनाता है?

माना, यह आयत ABCD है।

बिंदु A, B, C और D आयत के शीर्ष बिंदु हैं। रेखाएँ (रेखाखंड) AB, BC, CD और DA इसकी भुजाएँ हैं। ∠A, ∠B, ∠C और ∠D इसके कोण हैं।



आकृति 8.4

नीली भुजाएँ AB और CD इसकी सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं, क्योंकि वे एक-दूसरे के सम्मुख स्थित हैं।

इसी प्रकार, AD और BC सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म है।

याद कीजिए, एक आयत में—

R1) सम्मुख भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं, और

R2) सभी कोण 90° के होते हैं।

जैसा कि आयतों के संदर्भ में किया है, वर्ग के लिए भी कोनों और भुजाओं को उसी प्रकार परिभाषित किया गया है।

एक वर्ग निम्नलिखित दो गुणों को संतुष्ट करता है—

S1) सभी भुजाएँ समान होती हैं, और

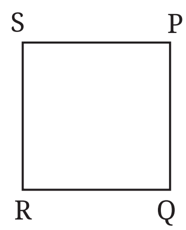
S2) सभी कोण 90° के होते हैं।

आकृति 8.4 में आयत को देखिए, इसका नाम ABCD दिया गया है। इस आयत को नामित करने के और भी तरीके, जैसे— BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD और BADC हैं। तो, क्या एक आयत का नाम उसके कोनों के लेबलों के किसी भी संयोजन का उपयोग करके रखा जा सकता है? नहीं! उदाहरण के लिए, इसे ABDC या ACBD से नामित (नामकरण) नहीं किया जा सकता। क्या आप देख सकते हैं कि कौन से नाम मान्य हैं और कौन से मान्य नहीं हैं?

एक वैध नाम में आयत के कोनों का क्रम किसी भी कोने से शुरू होकर आयत के चारों ओर एक ही दिशा में बना रहता है।

इनमें से कौन-सा नाम चित्र में दिखाए गए वर्ग के लिए मान्य नहीं है?

1. PQSR
2. SPQR
3. RSPQ
4. QRSP

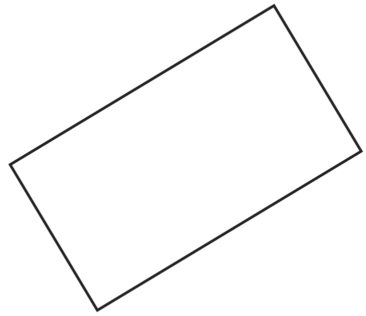


घुमाए गए वर्ग और आयत

यहाँ चित्र में एक वर्गाकार कागज का टुकड़ा दिया गया है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं और सभी कोण 90° के बराबर हैं। इसे चित्र में दिखाएँ अनुसार घुमाया जाता है। क्या यह अब भी एक वर्ग है?

आइए, जाँचें कि क्या यह अभी भी वर्ग के गुणों को संतुष्ट करता है।

- क्या अब भी इसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं? हाँ
- क्या अब भी सभी कोणों की माप 90° है? हाँ

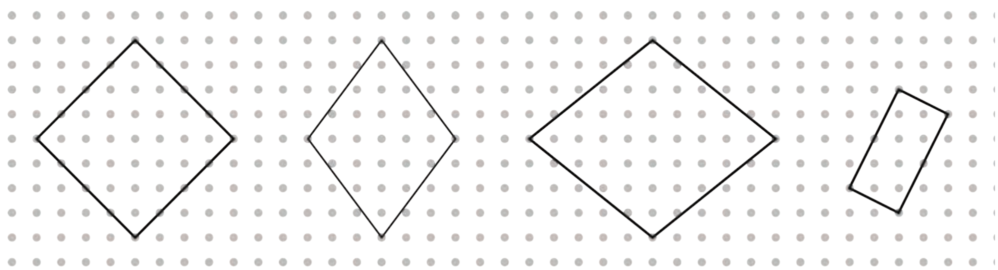


वर्ग को घुमाने पर इसकी भुजाओं की लंबाई तथा कोणों के माप नहीं बदलते। इसलिए, यह घुमाई हुई आकृति वर्ग के दोनों गुणों को संतुष्ट करती है, अत: यह अब भी एक वर्ग है।

इसी तर्क के आधार पर एक घुमाया गया आयत भी आयत ही रहता है।

आइए, पता लगाएँ

1. डॉट पेपर पर एक आयत और चार वर्गों का प्रारूप खींचिए (जैसा आकृति 8.3 में दिखाया गया है) आकृति को पुन: इस प्रकार बनाने के लिए कि चारों वर्ग सममित रूप से आयत के चारों ओर रखे जाएँ, आप क्या करेंगे? अपने सहपाठियों के साथ चर्चा कीजिए।
2. पहचानिए कि क्या इस संग्रह में कोई वर्ग है। यदि आवश्यकता हो तो मापन का प्रयोग कीजिए।



A B C D

सोचिए— उपरोक्त आकृति में बिना मापन उपकरणों को प्रयोग किए, क्या यह बताना संभव है कि भुजाएँ बराबर हैं या नहीं, कोण समकोण हैं या नहीं? क्या हम यह केवल डॉट पेपर में शीर्षों की स्थिति देखकर ज्ञात कर सकते हैं?

3. डॉट पेपर पर एक कम से कम 3 घुमाएँ गए वर्ग और 3 घुमाएँ गए आयत खींचिए। उन्हें इस प्रकार खींचिए कि उनके कोने डॉट पेपर के डॉट्स (बिंदु) पर हों। जाँच कीजिए कि आपने जो वर्ग और आयत बनाए हैं, वे उनके संगत गुणों को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

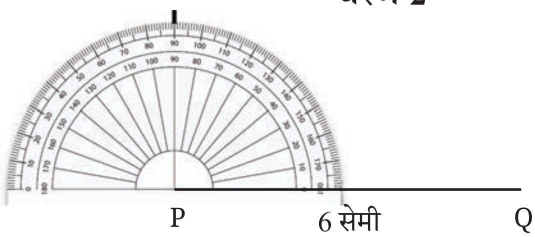
8.3 वर्ग और आयत की रचना

अब, हम वर्ग और आयत की रचना करना शुरू करेंगे। आप 6 सेमी भुजा वाले एक वर्ग की रचना कैसे करेंगे?

सहायता के लिए आप निम्नलिखित आकृतियाँ देख सकते हैं। 6 सेमी भुजा का एक वर्ग PQRS बनाया गया है।

चरण 1

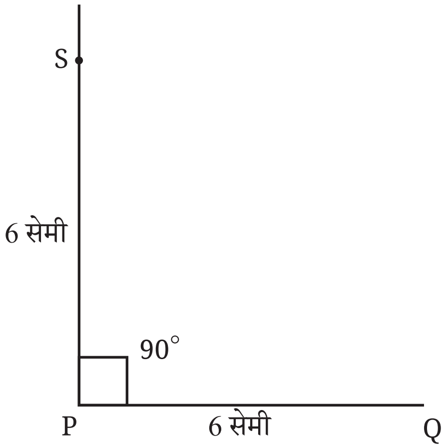
चरण 2



P से होकर PQ पर लंब खींचने के लिए एक बिंदु चिह्नित कीजिए।

चरण 3

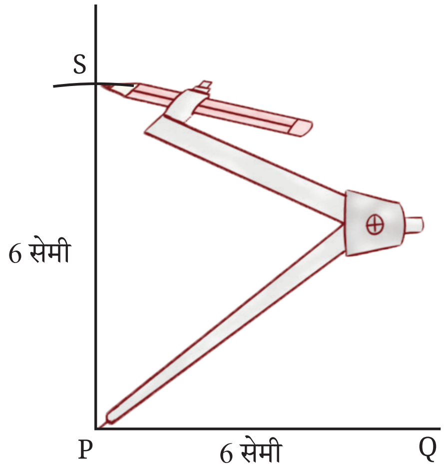
विधि 1



रूलर का उपयोग करके लंब पर S इस प्रकार अंकित करें कि PS = 6 सेमी हो।

विधि 2

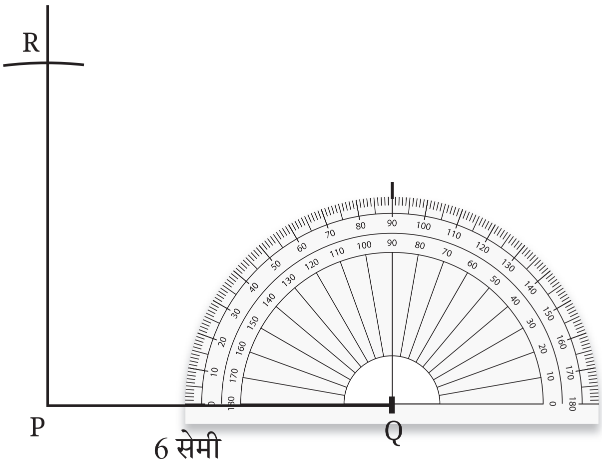
यह परकार की सहायता से भी किया जा सकता है।



क्या आप समझ सकते हैं कि PS की लंबाई 6 सेमी क्यों होनी चाहिए?

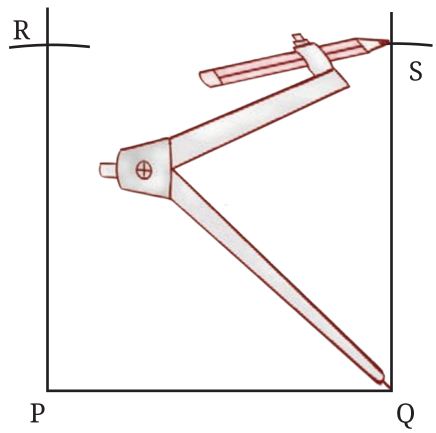
चरण 4

रेखाखंड PQ पर Q से होकर जाने वाला लंब खींचे

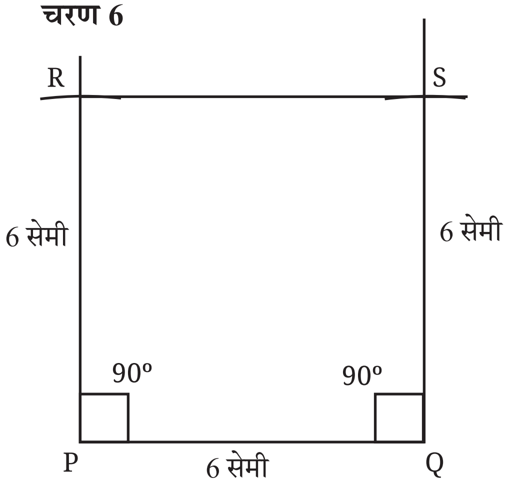


चरण 5

यदि हमने परकार का प्रयोग किया होता, तो अगला बिंदु आसानी से चिह्नित किया जा सकता था!



चरण 6



भुजा RS की लंबाई कितनी है तथा ∠R एवं ∠S की माप क्या है?

Reprint 2025-26

रचना कीजिए

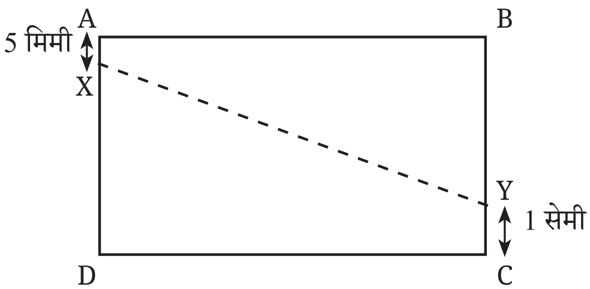
1. 6 सेमी और 4 सेमी लंबी भुजाओं वाले एक आयत की रचना कीजिए? रचना के बाद जाँच कीजिए कि क्या ये आयत के दोनों गुणों को संतुष्ट करता है?
2. 2 सेमी और 10 सेमी भुजाओं वाले एक आयत की रचना कीजिए? रचना के बाद जाँच कीजिए कि क्या ये आयत के दोनों गुणों को संतुष्ट करता है?
3. क्या 4 भुजाओं वाली ऐसी आकृति की रचना करना संभव है, जिसमें—
   - सभी कोण 90° के बराबर हों, परंतु
   - सम्मुख भुजाएँ बराबर नहीं हों?

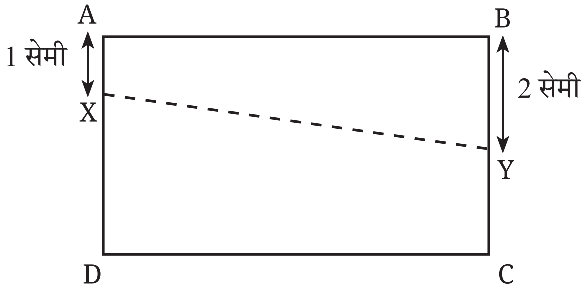
प्रयास करें

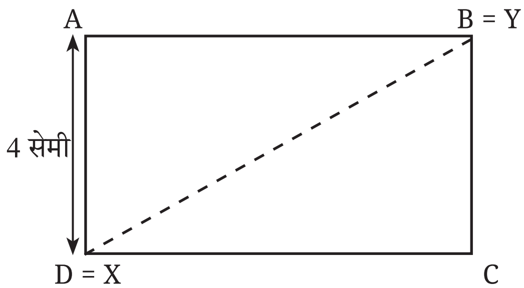
8.4 आयतों में एक खोज

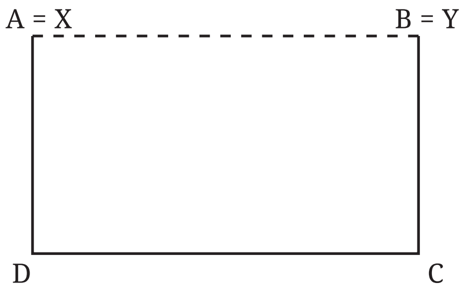
एक आयत ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 7 सेमी और BC = 4 सेमी हो।

एक ऐसे बिंदु X की कल्पना कीजिए, जिसे भुजा AD पर कहीं भी चिह्नित किया जा सकता है। इसी प्रकार, एक ऐसे बिंदु Y की कल्पना कीजिए, जिसे भुजा BC पर कहीं भी ले जाया जा सकता है। ध्यान दीजिए की X को अंत्य-बिंदु A और D पर भी रखा जा सकता है। इसी प्रकार, Y को अंत्य-बिंदु B और C पर भी रखा जा सकता है।









Reprint 2025-26

किन स्थानों पर बिंदु X और Y परस्पर निकटतम होंगे? आपके अनुसार वे कब परस्पर अधिकतम दूरी पर होंगे? आपका सहज-ज्ञान क्या कहता है? अपने सहपाठियों के साथ चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा

अब, अपने अनुमानों के बिंदु X और Y को भुजाओं पर वास्तविक रूप में रख कर अपने अनुमानों का सत्यापन करें। मापिए वे कितने निकट या दूर हैं?

X और Y के बीच की दूरी को रेखाखंड XY की लंबाई माप कर ज्ञात किया जा सकता है।

बिंदु X और Y के बीच की न्यूनतम दूरी की तुलना AB की लंबाई से किस प्रकार की जा सकती है?

X और Y की स्थिति बदलें और जाँचें कि क्या कोई अन्य स्थिति है जहाँ वे अपने निकटतम या अधिकतम दूर हैं। आप X और Y के विभिन्न स्थानों को लेकर इस आयत की अनेक प्रतिलिपियों की रचना कर सकते हैं।

X और Y की विभिन्न स्थितियों के लिए XY की लंबाइयों का हिसाब आप कैसे रखेंगे?

ऐसा करने की एक विधि यह है। मान लीजिए कि यहाँ X और Y की कुछ स्थितियाँ हैं, जिन पर आप विचार कर चुके हैं—

- जब A से X की दूरी 5 मिमी है तथा B से Y की दूरी 3 सेमी है, तब XY = ___ सेमी ____ मिमी है।
- जब A से X की दूरी 1 सेमी है तथा B से Y की दूरी 1 सेमी है, तब XY = ____ सेमी ____ मिमी है।
- जब A से X की दूरी 2 सेमी है तथा B से Y की दूरी 4 सेमी है, तब XY = ____ सेमी ____ मिमी है। तथा आगे भी।

क्या इसे लिखने की कोई संक्षिप्त विधि है? हम देखते हैं कि इन सभी वाक्यों में केवल X और Y की स्थितियाँ तथा XY की लंबाइयों में परिवर्तन हो रहे हैं। अतः हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं—

A से X की दूरी	**B से Y की दूरी**	**XY की लंबाई**

क्या आपने यह जाँचा, कि जब X और Y को क्रमश: A और B से समान दूरी पर रखते हैं, तब XY की लंबाई क्या होती है? उदाहरण के लिए, जैसा कि निम्नलिखित स्थितियों में होता है—

A से X की दूरी	B से Y की दूरी	XY की लंबाई
5 मिमी	5 मिमी	
1 सेमी	1 सेमी	
1 सेमी 5 मिमी	1 सेमी 5 मिमी	

और आगे इसी प्रकार।

इनमें से प्रत्येक स्थिति का अवलोकन कीजिए?

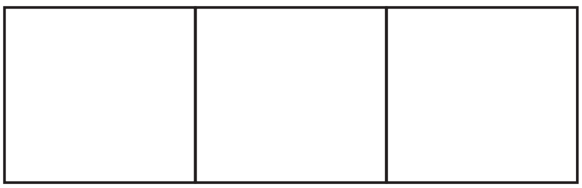
1. AB की लंबाई की तुलना में XY की लंबाई कैसे है? तथा
2. चार चतुर्भुजीय आकृति ABYX का आकार।

X और Y के बीच अधिकतम दूरी को AC या BD की लंबाई से कैसे तुलना करेंगे?

रचना कीजिए

आयतों को तोड़ना

एक ऐसे आयत की रचना कीजिए जिसे 3 समरूप वर्गों में विभाजित किया जा सके।



हल

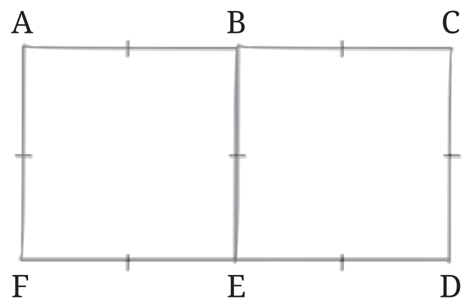
यदि यह कठिन प्रतीत होता है, तो आइए इस समस्या को सरल करने का प्रयास कीजिए।

खोजिए

क्या आप ऐसे आयत की रचना कर सकते हैं, जिसे दो समरूप वर्गों में विभाजित किया जा सकता है? क्या आप यह प्रयास कर सकते हैं?

यह बुद्धिमानी होगी कि पहले योजना बनाई जाएँ और फिर रचना की जाएँ। परंतु हम योजना कैसे बनाएँ? क्या इसके विषय में आप कोई तरीका सोच सकते हैं?

एक तरीका यह है कि अंतिम आकृति का एक कच्चा चित्र बनाकर उसकी कल्पना की जाएँ।



इस आकृति से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

क्या आप समान भुजाओं की पहचान कर सकते हैं?

चूंकि दोनों वर्ग समरूप हैं, इसलिए

AB = BC और FE = ED है।

चूँकि ABEF और BCDE वर्ग हैं, इसलिए इन वर्गों में से प्रत्येक की सभी भुजाएँ समान हैं। इसे निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है—

AF = AB = BE = FE

BE = BC = CD = ED

अतः सभी छोटे रेखाखंड समान हैं।

समान भुजाओं को दर्शाने के लिए एक परिपाटी का अनुसरण किया जाता है। ऐसा इन भुजाओं पर एक चिह्न '।' अंकित करके किया जाता है। ऊपर दी कच्ची (रफ) आकृति को देखिए। उपरोक्त विश्लेषण द्वारा क्या आप इसकी रचना करने का प्रयास कर सकते हैं? याद रखिए, आपको ऐसे आयत की रचना करने के लिए कहा गया है, जिसे तीन समरूप वर्गों में विभाजित किया जा सके तथा इसके लिए कोई मापन नहीं दिए गए हैं।

आयत ACDF बनाने में AF को कोई भी लंबाई निर्दिष्ट कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, हम यदि AF = 4 सेमी निर्दिष्ट करते हैं, तो AC की लंबाई क्या होनी चाहिए?

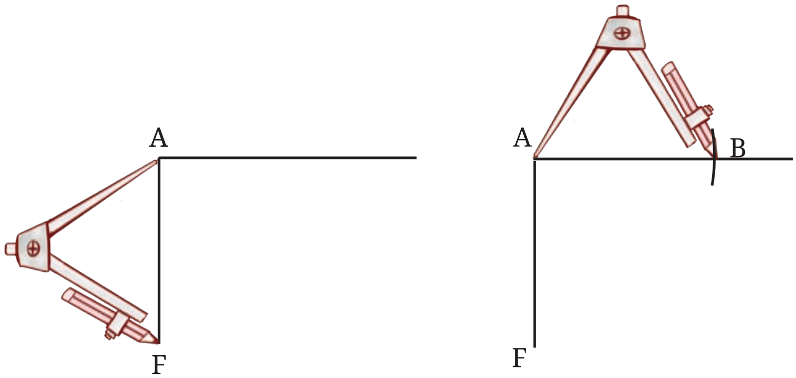
खोजिए

क्या अब आयत को पूरा किया जा सकता है?

वस्तुत:, हम रूलर से AF की लंबाई को मापे बिना ही, AF खींच कर रचना प्रारंभ कर सकते हैं। इसके बाद, हम AF पर एक लंब इस प्रकार खींच सकते हैं जो दूसरी भुजा को समाहित करने के लिए पर्याप्त, लंबी हो। क्योंकि AB = AF है, इसलिए हमें उपरोक्त लंब पर AF के बराबर की लंबाई काटनी है, जिससे हमें बिंदु B प्राप्त होगा। बिना रूलर के हम यह कार्य कैसे करते हैं? क्या यह कार्य परकार का उपयोग करते हुए किया जा सकता है?

Reprint 2025-26

अवलोकन करें, कि परकार का प्रयोग कर किस प्रकार AF की लंबाई मापी जाती है।



इसका उपयोग B और C बिंदुओं को अंकित करने के लिए कीजिए तथा आयत को पूरा कीजिए।

इस विचार के साथ एक आयत बनाने का प्रयास कीजिए जिसे तीन समान वर्गों में विभाजित किया जा सके।

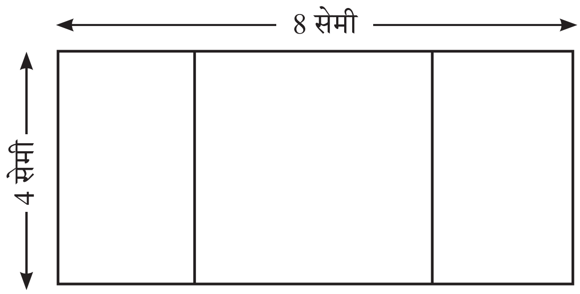
उस आयत की भुजाओं की लंबाई बताइए, जिसे निम्नलिखित में विभाजित नहीं किया जा सकता है—

- दो समरूप वर्ग
- तीन समरूप वर्ग

रचना कीजिए

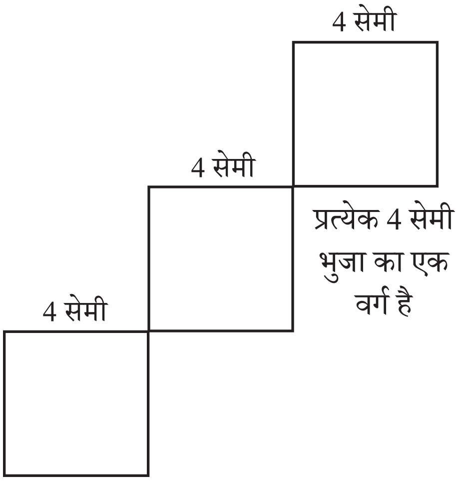
1. एक आयत के अंदर वर्ग

8 सेमी और 4 सेमी भुजाओं वाले एक आयत की रचना कीजिए। इस आयत के अंदर आप नीचे आकृति में दर्शाए अनुसार एक वर्ग की रचना किस प्रकार करेंगे, जिससे कि यह वर्ग आयत के ठीक बीचों-बीच रहे?



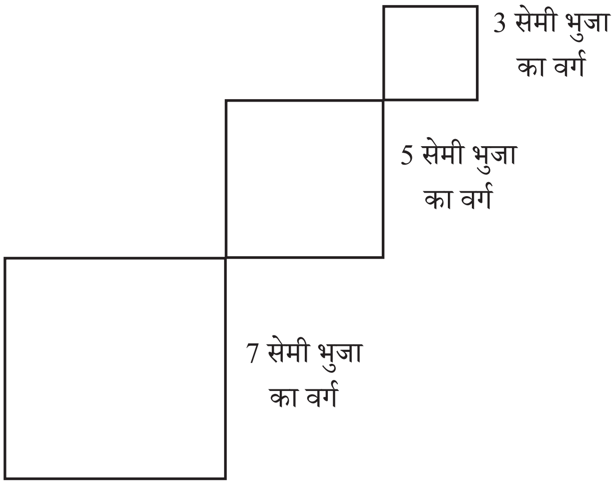
संकेत— एक कच्ची (रफ) आकृति खींचिए। इस वर्ग की भुजा क्या होगी? बाहरी आयत और वर्ग के कोनों के बीच में कितनी दूरी होगी?

2. गिरते हुए वर्ग



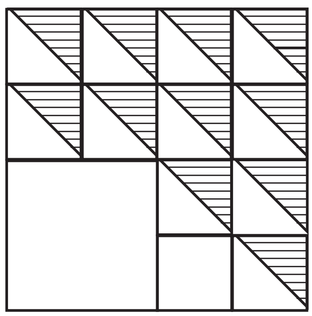
सुनिश्चित करें कि वर्ग उसी तरह संरेखित हों जिस तरह वे दिखाए गए हैं।

अब, यह प्रयास कीजिए

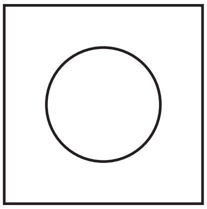


3. छायांकन

दी गई आकृति को बनाइए। अपनी इच्छा से मापन चुनिए। ध्यान दीजिए कि बड़ी चतुर्भुजीय आकृति एक वर्ग है तथा इसी प्रकार छोटी आकृतियाँ भी वर्ग हैं।



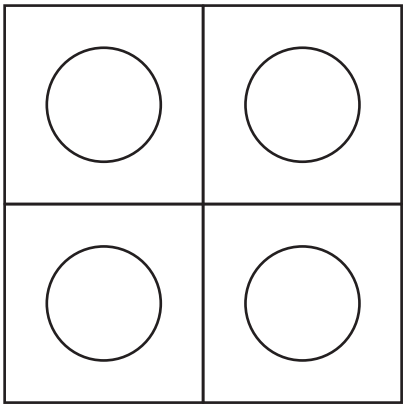
4. वर्ग जिसके अंदर छेद है



ध्यान दें कि वृत्ताकार छेद, वर्ग के ठीक बीचों बीच है।

संकेत— सोचिए कि वृत्त का केंद्र कहाँ होना चाहिए।

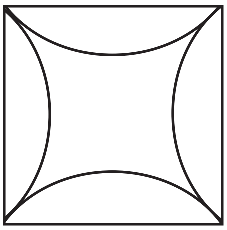
5. अधिक छेदों वाले वर्ग

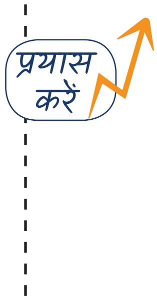


6. वक्रों वाला वर्ग

यह 8 सेमी की भुजा का एक वर्ग है।

संकेत— सोचिए कि परकार के नुकीले सिरे को कहाँ रखा जाए ताकि चारों चाप (arc) प्रत्येक भुजा से समान रूप से उभरें। प्रयत्न कीजिए!

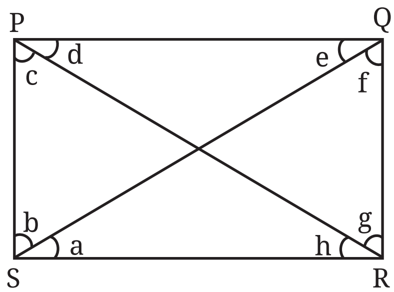




8.5 आयतों और वर्गों के विकर्णों की खोज करना

एक आयत PQRS पर विचार कीजिए। PR और QS को मिलाइए। ये दोनों रेखाखंड इस आयत के **विकर्ण (diagonals)** कहलाते हैं।

विकर्णों की लंबाइयों की तुलना कीजिए। पहले पूर्वानुमान लगाइए, फिर आकृति में दिखाए अनुसार बिंदुओं को अंकित करते हुए आयत बनाकर विकर्णों को मापिए।



Reprint 2025-26

आयत PQRS में P और R पर बने समकोणों को सम्मुख कोण (opposite angles) कहा जाता है। सम्मुख कोणों के अन्य युग्म Q और S पर बनें हैं।

ध्यान दीजिए कि एक विकर्ण, सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म के कोणों को दो छोटे कोणों में विभाजित करता है। दी गई आकृति में विकर्ण PR, $\angle R$ को दो छोटे कोणों में विभाजित करता है, जिन्हें g और h कहा गया है। यही विकर्ण कोण P को कोणों c और d में भी विभाजित करता है। क्या g और h बराबर हैं? क्या c और d बराबर हैं?

पहले पूर्वानुमान लगाइए, फिर कोणों को मापिए। आप क्या देखते हैं? उन कोण-युग्मों की पहचान कीजिए जो बराबर हैं।

खोजिए

एक आयत की रचना किस प्रकार करें कि विकर्ण सम्मुख कोणों को बराबर भागों में विभाजित करे?

आप अपने प्रेक्षणों को किस प्रकार अंकित करेंगे? पहले, उन मापदंडों (parameters) की पहचान कीजिए, जिन पर ध्यान देने की आवश्यकता है। वे आयत की भुजाएँ हैं तथा दो विकर्णों द्वारा बनाए गए 8 कोण हैं। क्या कोई अन्य मापन भी हैं, जिन पर आप अपनी दृष्टि रखना चाहेंगे?

भुजाएँ	A	B	C	D	E	F	G	H

अपने प्रयोग में क्या आपने उस स्थिति पर विचार किया था, जिसमें आयत की चारों भुजाएँ बराबर हैं? अर्थात् क्या आपने एक वर्ग की स्थिति पर विचार किया था? देखिए की इस विशिष्ट स्थिति में क्या होता है।

- कोणों और भुजाओं के संदर्भ में आपने कौन-कौन से व्यापक नियम प्रेक्षित किए? उन्हें बनाने का प्रयास कीजिए तथा अपने सहपाठियों से उनकी चर्चा कीजिए।

  कोई यह किस प्रकार सुनिश्चित कर सकता है कि जो भी नियम आपने देखे हैं, वे सदैव सत्य होंगे?

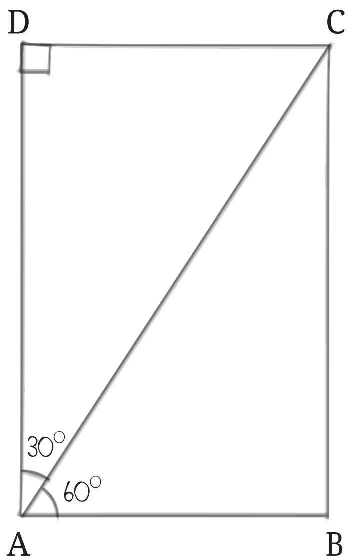
गणित चर्चा

रचना कीजिए

1. एक आयत की रचना कीजिए, जिसमें एक विकर्ण सम्मुख कोणों को 60° और 30° के कोणों में विभाजित करता हो।

हल

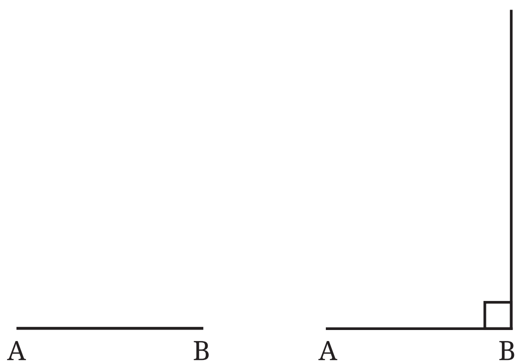
एक कच्ची (रफ) आकृति से प्रारंभ करते हैं।



इसके भागों को किस क्रम में बनाया जा सकता है?

हम संक्षिप्त रूप में, रेखाचित्र के संभव क्रम को बनाते हैं।

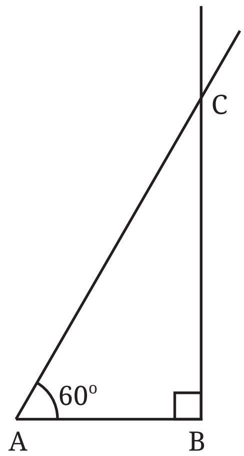
चरण 1



किसी AB रेखा को कल्पना के अनुसार खींचा गया है। अगला बिंदु क्या होगा जिसे अंकित करना है।

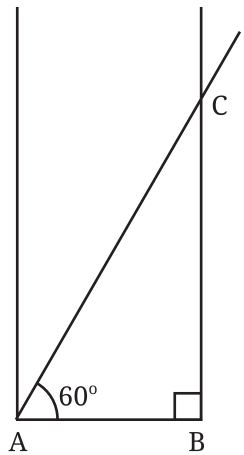
Reprint 2025-26

चरण 2



चरण 3

हम वह रेखा जानते हैं जिस पर बिंदु D स्थित है। AB पर बिंदु A से गुजरने वाली एक लंब रेखा बनाइए।



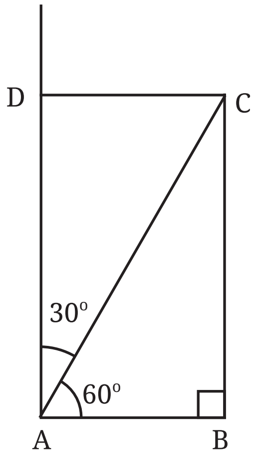
अब $\angle A$ दो कोणों में विभाजित किया गया है। एक कोण 60° का है। जाँचिए कि दूसरा कोण क्या है।

बिंदु D को ज्ञात करने की कम से कम दो विधियाँ हैं—

- पहला, हम इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि आयत में सभी कोण समकोण होते हैं।
- दूसरा, आयत की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

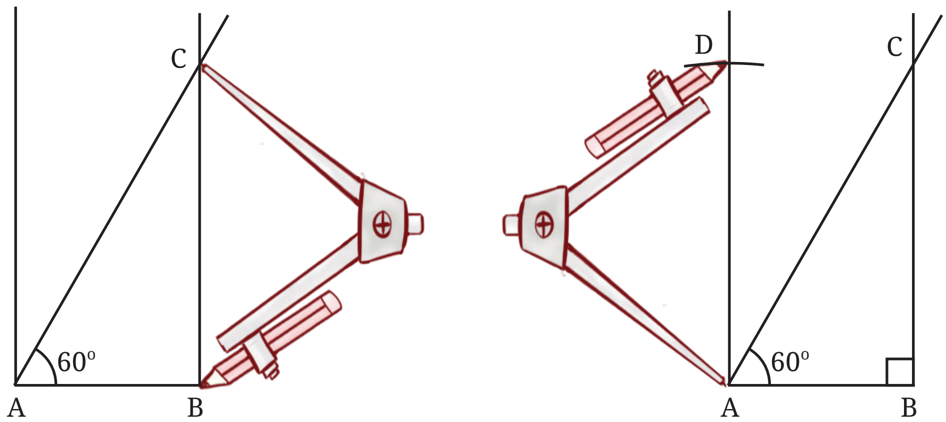
चरण 4

विधि 1



BC पर बिंदु C से लंब रेखा खींचिए जिससे बिंदु D प्राप्त हो।

विधि 2



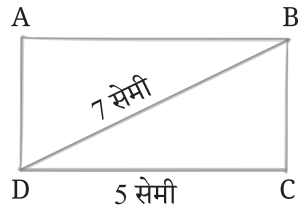
परकार की सहायता से बिंदु D को इस प्रकार अंकित कीजिए कि AD = BC हो। CD को मिलाइए ताकि वांछित आयत प्राप्त हो।

हमने देखा कि जब आयत की भुजाएँ दी होती हैं तो उसकी रचना कैसे की जाती है, लेकिन उस स्थिति में हम क्या करेंगे जब एक भुजा और एक विकर्ण दिया गया हो?

2. एक आयत की रचना कीजिए, जिसकी एक भुजा 5 सेमी है तथा विकर्ण की लंबाई 7 सेमी है।

हल

आइए, एक कच्ची (रफ) आरेख खींचते हैं।



आइए, रचना के चरणों पर निर्णय लें। किस रेखा को सबसे पहले खीचा जा सकता है?

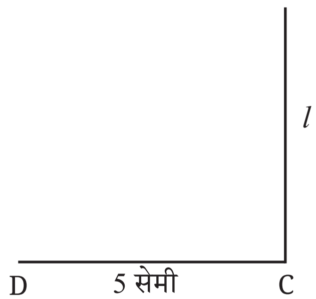
चरण 1

5 सेमी की लंबाई वाले आधार CD की सरलता से रचना की जा सकती है।

अब आगे?

चरण 2

CD के बिंदु C पर लंबवत रेखा बनाइए। इसे हम रेखा 'l' कहेंगे।



यह आसान है क्योंकि हम जानते हैं कि यह रेखा 'l' आधार पर लंब होगी। बिंदु B इसी रेखा l पर कहीं स्थित होना चाहिए।

हम इसका पता किस प्रकार लगाएँगे? B की स्थिति के बारे में हम और क्या जानते हैं?

हम जानते हैं कि यह D से 7 सेमी की दूरी पर है।

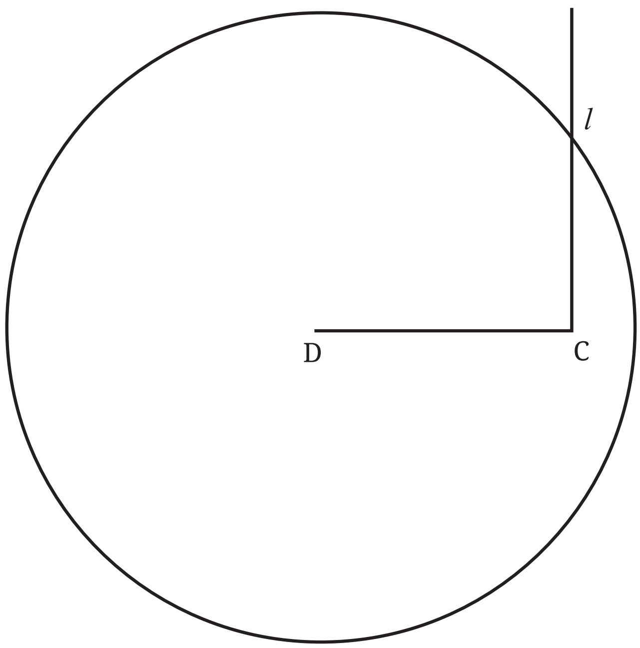
एक विधि यह है कि एक रूलर लिया जाए तथा उसे इस प्रकार घुमाया जाए कि रेखा *l* पर बिंदु D से 7 सेमी दूरी पर बिंदु B प्राप्त हो जाए। परंतु इसके लिए प्रयास और त्रुटि विधि की आवश्यकता है। ऐसा करने की एक अन्य प्रभावशाली विधि है, जिसमें प्रयास और त्रुटि विधि की आवश्यकता नहीं होती।

इसके लिए, D से 7 सेमी की दूरी पर वांछित बिंदु प्राप्त करने के स्थान पर, आइए उन सभी बिंदुओं को प्राप्त करने की एक तरीका खोजें जो D से 7 सेमी की दूरी पर है।

हम जानते हैं कि यह आकार क्या है।

चरण 3

विधि 1



केंद्र D लेकर, त्रिज्या 7 सेमी का एक वृत्त खींचिए।

क्या आप यहाँ बिंदु B को निर्धारित कर सकते हैं? स्मरण कीजिए की यह बिंदु D से 7 सेमी की दूरी पर है तथा रेखा *l* पर स्थित है।

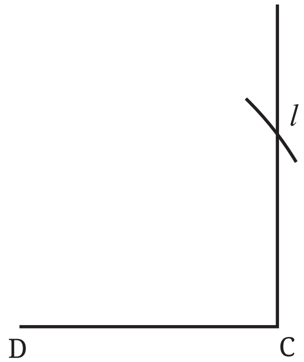
उस बिंदु पर विचार कीजिए, जहाँ यह वृत्त तथा रेखा प्रतिच्छेद करते हैं। इसकी बिंदु D से दूरी क्या है? यदि आवश्यकता हो, तो अपनी आकृति की जाँच कीजिए। आप क्या देखते हैं?

वह बिंदु जहाँ वृत्त रेखा *l* को प्रतिच्छेद करता है, वही वांछित बिंदु B है।

Reprint 2025-26

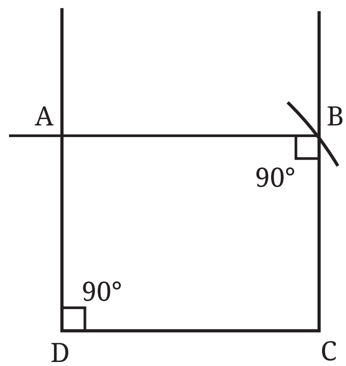
विधि 2

बिंदु B को निर्धारित करने के लिए क्या संपूर्ण वृत्त का खींचना आवश्यक था? हम देख सकते हैं कि रेखा *l* के समीप, केवल एक चाप खींचने की ही आवश्यकता है। अतः तीसरा चरण चित्र में दिखाए अनुसार किया जा सकता है।



आयत के तीनों बिंदुओं को चिह्नित करने के बाद हमें अब केवल इस आयत को पूरा करना है। स्मरण कीजिए कि हम पिछले प्रश्न में भी ऐसी ही स्थिति में थे। हमने यहाँ से आयत को पूरा करने की दो विधियाँ देखीं। हम इनमें से किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

चरण 4



DC और BC पर लंब खींचिए जो क्रमशः बिंदुओं D और B से होकर जाएँ। जिस बिंदु पर ये रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं, वह चौथा बिंदु A है।

जाँच कीजिए कि क्या ABCD वास्तव में एक आयत है जो गुणों R1 तथा R2 को संतुष्ट करता है।

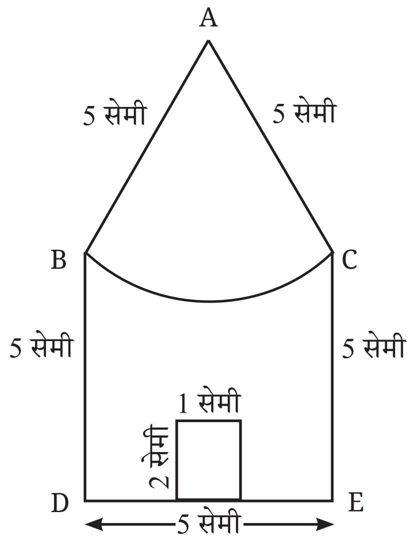
रचना कीजिए

1. एक आयत की रचना कीजिए जिसमें एक विकर्ण सम्मुख कोणों को 50° और 40° में विभाजित करता हो।
2. एक आयत की रचना कीजिए जिसमें एक विकर्ण सम्मुख कोणों को 45° और 45° में विभाजित करता हो। आप इसकी भुजाओं के बारे में क्या देखते है?
3. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 4 सेमी है और विकर्ण की लंबाई 8 सेमी है।
4. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 3 सेमी है और विकर्ण की लंबाई 7 सेमी है।

8.6 दो दिए हुए बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु

रचना कीजिए

घर



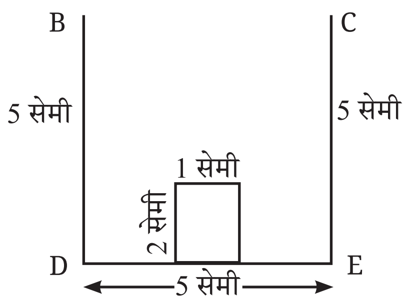
इस आकृति को पुनः बनाइए।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त घर की सीमा (border) को बनाने वाले सभी रेखाखंडों की लंबाई 5 सेमी है।

हल

पहला कार्य इसकी पहचान करना है कि रेखाओं और वक्रों को किस अनुक्रम में खींचा जाना है।

चरण 1

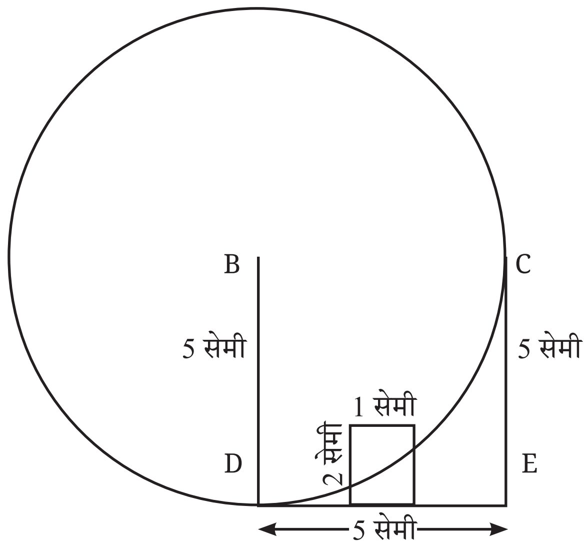


क्या आप इस आकृति को पूरा कर सकते हैं? प्रयास कीजिए!

हमें बिंदु A को निर्धारित करने की आवश्यकता है, जो बिंदु B और बिंदु C से 5 सेमी की दूरी पर है। आपने अनुभव कर लिया होगा कि यह केवल रूलर के उपयोग से किया जा सकता है। हालाँकि, इसमें बहुत सारे प्रयास और त्रुटियाँ हो सकती हैं। इस रचना को सरल कैसे किया जा सकता है। यदि आपने यह अनुमान लगा लिया है कि ऐसा परकार के उपयोग से किया जा सकता है, तो आप सही हैं। आगे बढ़िए तथा खोजिए कि किस प्रकार बिना 'प्रयास और त्रुटि' के बिंदु A को निर्धारित किया जा सकता है।

इस समस्या में बिंदु A को निर्धारित करने और पिछले भाग के दूसरे उदाहरण के हल के तीसरे चरण में बिंदु B को निर्धारित करने में एक समानता है। (पृष्ठ संख्या 209 देखिए)

चरण 2



एक वक्र को खींचिए जिसके सभी बिंदु B से 5 सेमी की दूरी पर हैं। B केंद्र वाले वृत की त्रिज्या 5 सेमी होनी चाहिए।

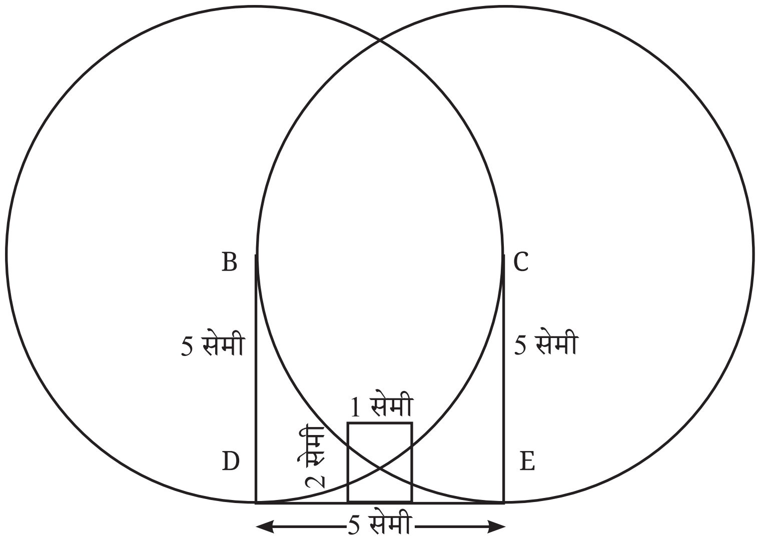
क्या इससे बिंदु A को निर्धारित करने में सहायता मिलती है? रचना कीजिए तथा इस आकृति में खोज कीजिए।

वृत पर स्थित वह बिंदु जिसकी C से दूरी 5 सेमी है, से बिंदु A निर्धारित किया जा सकता है। पुन: यह एक रूलर के उपयोग से किया जा सकता है। परंतु, क्या हम इसके लिए एक परकार का भी प्रयोग कर सकते हैं?

चरण 3

विधि 1

केंद्र C और त्रिज्या 5 सेमी लेकर, परकार की सहायता से एक वृत्त खींचिए।



क्या आप बिंदु A को निर्धारित कर पाए? अपनी कॉपी पर इस आकृति को जाँचिए। आप क्या देखते हैं?

उस बिंदु को देखिए, जहाँ दोनों वृत्त प्रतिच्छेद करते हैं। यह बिंदु B से कितनी दूरी पर है?

यह बिंदु C से कितनी दूरी पर है।

अत: बिंदु A यहाँ स्थित है।

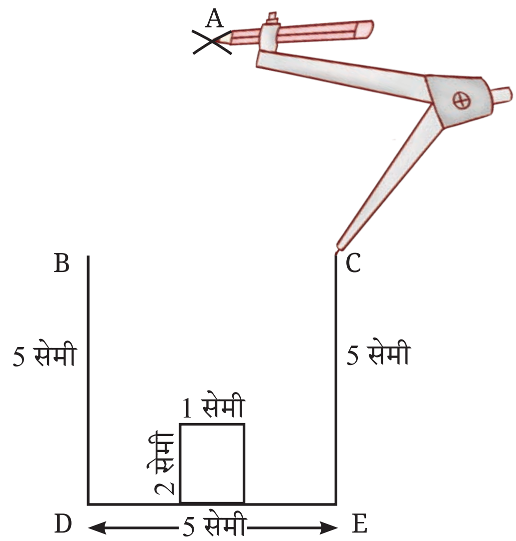
सोचिए

क्या बिंदु A को प्राप्त करने के लिए दोनों वृत्तों को पूरा खींचना आवश्यक था? हमें केवल इन वृत्तों के भागों की ही आवश्यकता थी।

विधि 2

अत: बिंदु A को बिंदु B और बिंदु C से 5 सेमी त्रिज्या की चापों को खींचकर भी प्राप्त किया जा सकता था, जिनकी त्रिज्या बिंदु B और C से 5 सेमी थी।

Reprint 2025-26



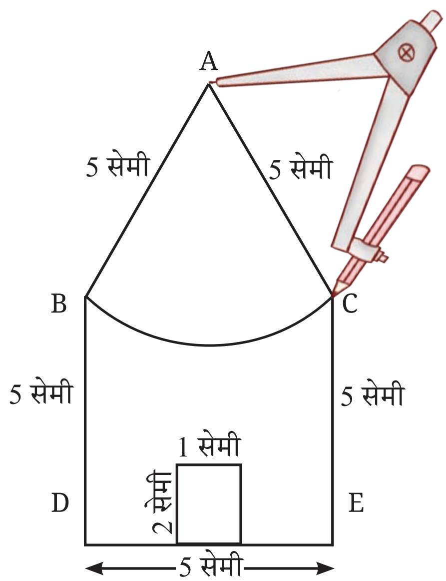
A को B और C से सरल रेखाओं द्वारा जोड़िए।

बिंदु A को प्राप्त करने के बाद, बचे हुए चापों की रचना ही शेष है। हम इसे कैसे करेंगे?

क्या हम इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि A, B और C दोनों से 5 सेमी की दूरी पर है?

चरण 4

परकार में 5 सेमी त्रिज्या लीजिए और A से B और C को स्पर्श करते हुए चाप खींचे; जैसा कि नीचे दिए गए चित्र में दर्शाया गया है।



अब घर तैयार है!

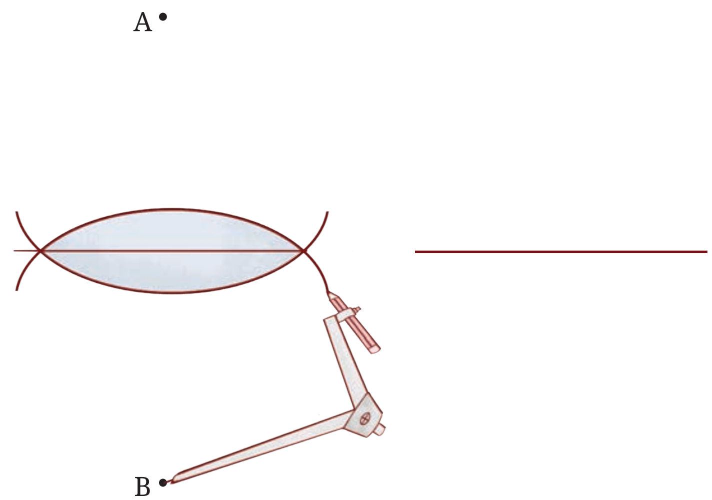
रचना कीजिए

1. इससे बड़े एक घर का निर्माण कीजिए जिसकी सभी भुजाएँ 7 सेमी लंबी हों।
2. घर की रचना में सम्मिलित संकल्पनाओं का प्रयोग करते हुए, सेक्शन कलाकृति से 'एक व्यक्ति', 'तरंगित लहर' और 'आँखें' का पुन: सृजन करने का प्रयास करें।
3. क्या चार समान भुजाओं वाली एक आकृति बनाई जा सकती है, जो वर्ग न हो? यदि ऐसी आकृति का अस्तित्व है, तो क्या आप इसकी रचना कर सकते हैं?

संकेत

A) आँखें [8.1 'कलाकृति' एवं उपरोक्त 'रचना कीजिए'— 2 से (पृष्ठ संख्या 215)]

आकृति में रचना का एक भाग दिखाया गया है। इसे ध्यान से देखिए। इसमें आप बहुत हल्के रंग के दो क्षैतिज रेखाखंड देखेंगे। ज्यामितीय रचनाओं में हमें कुछ सहायक वक्र या आकृतियाँ बनानी होती हैं, जो आकृति का अंश नहीं होते किंतु रचना में सहायक होते हैं।

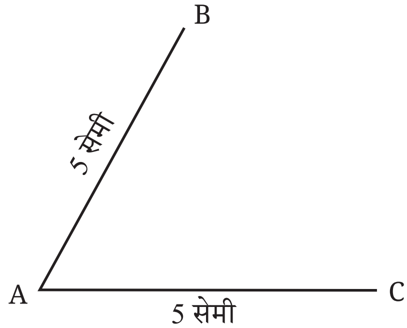


आँख के ऊपर और नीचे के वक्रों को बनाने की प्रक्रिया वही है जिसे आकृति 'एक व्यक्ति' में प्रयोग किया गया था। बिंदु A और B वे स्थान हैं जहाँ परकार के सिरे को आँख के वक्रों को खींचते समय रखा जाता है। ध्यान रहे कि ऊपरी और निचले वक्र मिलकर एक सममित आकृति बनाएँ। ऐसा करने के लिए, इन बिंदुओं A और B को कहाँ रखा जाए या निर्धारित किया जाए? एक अनुमान लगाइए।

आँखों को जितना संभव हो सममित और समरूप बनाने का प्रयास कीजिए। संभव है इसमें बहुत प्रयासों की आवश्यकता हो।

B) [उपरोक्त 'रचना कीजिए'— 3 से (पृष्ठ संख्या 215)]

रचना के उद्देश्य से, आइए हम भुजा की लंबाई 5 सेमी मान लेते हैं। दी गई आकृति पर विचार करें।



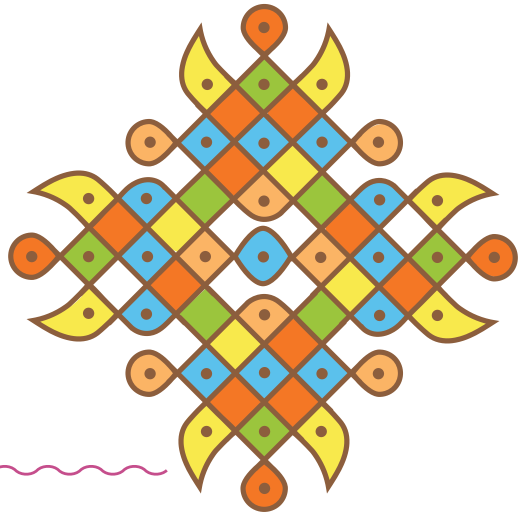
हमें इस चार भुजा वाली आकृति को बनाने के लिए केवल एक और बिंदु की आवश्यकता है। माना कि वह बिंदु D है, जो बिंदु B और C से 5 सेमी दूरी पर होना चाहिए। इस तरह का बिंदु कैसे ज्ञात किया जा सकता है?

क्या 'घर' समस्या में प्रयुक्त किसी भी विधि का प्रयोग यहाँ किया जा सकता है?

सारांश

- वृत्त के सभी बिंदु, केंद्र से समान दूरी पर होते हैं, यह दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।
- वृत्त और उसके भागों की रचना के लिए परकार का प्रयोग किया जा सकता है।
- एक दी हुई आकृति की रचना की योजना बनाने के लिए पहले रफ आकृति बनाना सहायक हो सकता है।
- एक आयत की रचना की जा सकती है, यदि उसकी भुजाओं अथवा एक भुजा और विकर्ण की लंबाई दी हो।

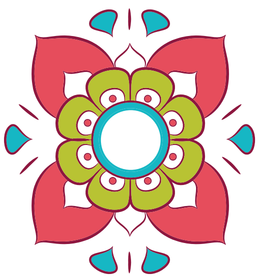
9 सममिति



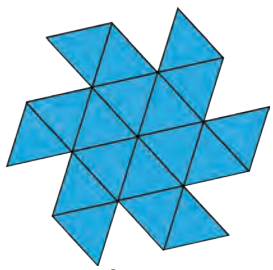
आप अपने चारों ओर देखिए, आपको ऐसी कई वस्तुएँ मिल सकती हैं, जो आपका ध्यान आकर्षित करती हैं। उनमें से कुछ नीचे दी गई हैं।

फूल

तितली



रंगोली



फिरकी

ऊपर दिए गए चित्रों में सुंदरता प्रतीत होती है।

फूल को हम किसी भी तरफ से देखें वह हर तरफ से सुंदर, आकर्षक एवं जैसा है वैसा ही दिखाई देता है। तितली के विषय में आपका क्या विचार है? तितली के रंग बहुत आर्कषक हैं। क्या आपको तितली के विषय में कुछ और आकर्षक लगता है?

ऊपर की सभी आकृतियों को देखने से ऐसा प्रतीत होता है कि आकृति के कुछ भाग दोहराए गए हैं और ये दोहराव एक निश्चित पैटर्न में घटित होते दिख रहे हैं। क्या आप देख सकते हैं कि रंगोली की आकृति में क्या दोहराया गया है? फूल को केंद्र के चारों ओर 90 अंश तक घुमाया जाता है तो

उसकी लाल पंखुडियाँ अपने आप वापस आ जाती हैं। इसके साथ ही रंगोली के अन्य भागों के साथ भी ऐसा ही होता है।

फिरकी के विषय में आप क्या सोचते है? क्या आप देख सकते हैं कि फिरकी के संदर्भ में कौन-सा पैटर्न दोहराया जा रहा है?
(संकेत— पहले षटभुज को देखें)

बादल

क्या आप बता सकते हैं कि षटभुज की प्रत्येक भुजा पर कौन-सी आकृति दोहराई जाती है? प्रत्येक भुजा पर चिपकाई गई आकृति का आकार क्या है? क्या आप इसे पहचानते हैं? जब आप षटभुज की सीमा रेखाओं के साथ आगे की ओर बढ़ते हैं तब आकृतियाँ कैसे बनती हैं? अन्य चित्रों के विषय में आप क्या कह सकते हैं? विशेष रूप से उन संरचनाओं के विषय में क्या कह सकते हैं जो आपको आकर्षित करती हैं इसके साथ ही आप बताइए कि इन संरचनाओं में कौन-से पैटर्न दोहराए जा रहे हैं?

दूसरी ओर बादलों की इस आकृति को देखिए। यहाँ पर कोई दोहराव वाला पैटर्न नहीं है।

हम यह भी कह सकते हैं कि पहली चार आकृतियाँ सममित (symmetrical) हैं और अंतिम एक सममित नहीं है। सममिति (symmetry) का अर्थ है जो किसी आकृति के भाग या भागों में किसी निश्चित पैटर्न में दोहराई जाए।

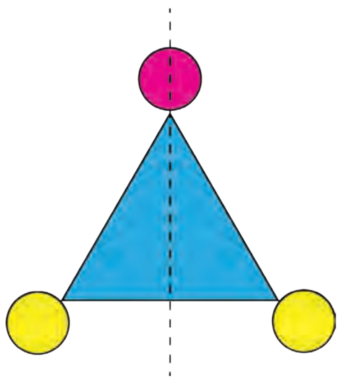
ताजमहल

गोपुरम्

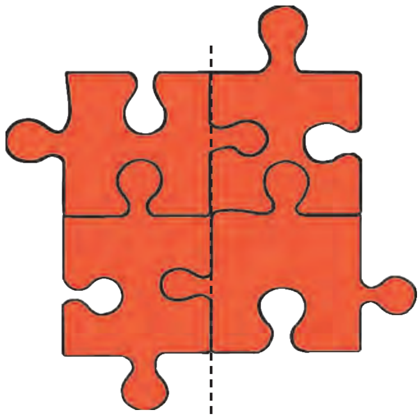
आप इन सुंदर संरचनाओं में कौन-सी सममितियाँ देखते हैं?

9.1 सममिति की रेखा

नीचे दी गई आकृति (a) में नीले रंग का त्रिभुज है जिसमें एक बिंदुकित रेखा बनी हुई है। यदि आप त्रिभुज को बिंदुकित रेखा के अनुदिश मोड़ते हैं तो क्या होगा? रेखा के अनुदिश मोड़ने पर त्रिभुज का एक आधा भाग दूसरे आधे भाग को पूर्णतया आच्छादित लेता है। इन्हें **दर्पण के आधे** भाग कहा जाता है!



(a)



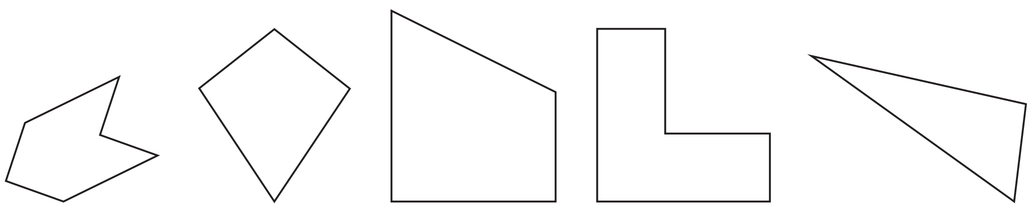
(b)

आकृति (b) में पहेली के 4 टुकड़ों और उनके बीच से होकर जाती हुई एक बिंदुकित रेखा के विषय में आपका क्या विचार है? क्या ये दर्पण के आधे भाग हैं? नहीं, जब हम रेखा के अनुदिश मोड़ते हैं तो आधा बायाँ भाग, आधे दाएँ भाग पर पूर्णतया आच्छादित नहीं है।

जब एक रेखा, आकृति को दो भागों में बाँटती है, जो कि मोड़ने पर एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं, वह आकृति की **सममिति की रेखा** कहलाती है।

आइए, पता लगाएँ

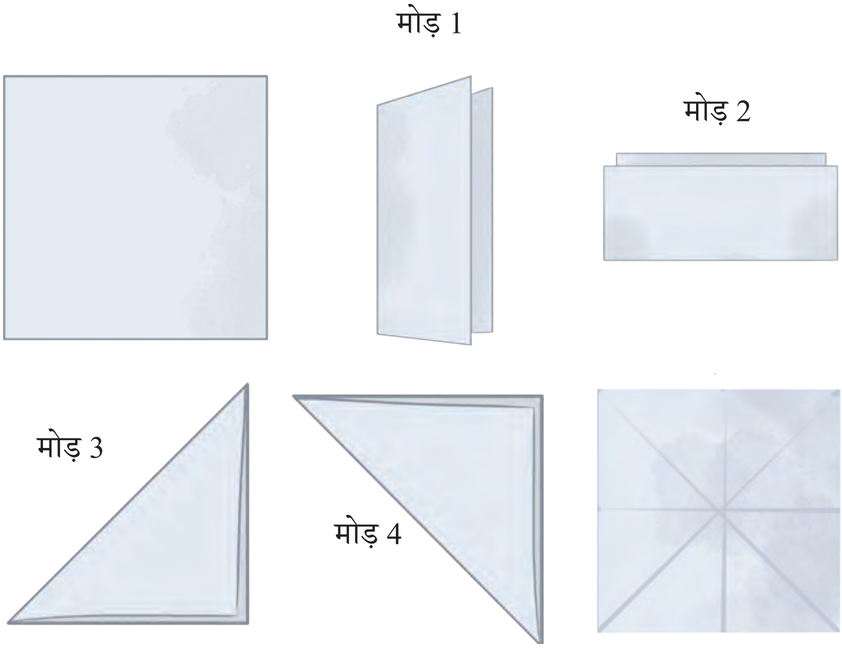
1. क्या आप इस अध्याय के प्रारंभ में दी गई आकृतियों में सममिति की रेखा देख पाए हैं? बादलों की आकृति के विषय में आपका क्या विचार है?
2. निम्न आकृतियों में यदि सममिति की रेखाएँ हैं, तो उन्हें पहचानिए।



एक से अधिक सममिति की रेखाओं की आकृतियाँ

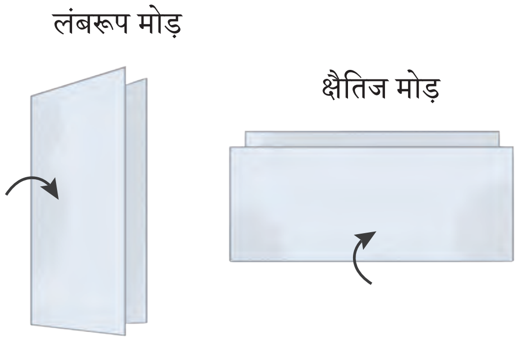
क्या एक वर्ग में सममिति की केवल एक ही रेखा होती है?

एक कागज का चौकोर टुकड़ा लीजिए। इसे मोड़कर, इसकी सभी सममिति की रेखाएँ ज्ञात कीजिए?



यहाँ कागज को विभिन्न तरीकों से मोड़ा गया है जो कई सममिति की रेखाएँ बनाती हैं।

- कागज को आधा उर्ध्वाधर मोड़िए।
- कागज को फिर आधा क्षैतिज मोड़िए (अर्थात् आपने इसे दो बार मोड़ा) अब, मोड़ों को खोलिए।



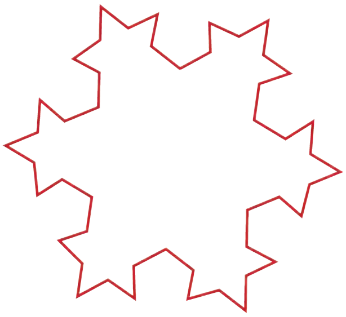
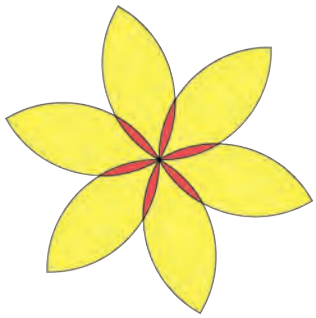
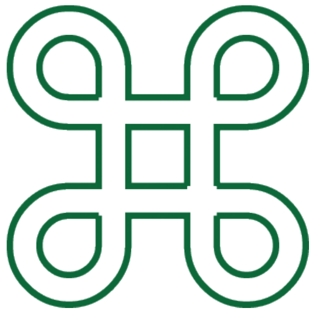
पुन: वर्ग को विकर्ण के अनुदिश आधा मोड़िए (यह तीसरा मोड़ है), जैसा चित्र में दर्शाया गया है। पुन: मोड़ को खोलिए।

अब इसे दूसरे विकर्ण के अनुदिश आधा मोड़िए (यह चौथा मोड़ है), जैसा चित्र में दर्शाया गया है। पुन: मोड़ को खोलिए।

Reprint 2025-26

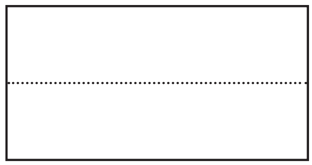
क्या वर्ग को मोड़ने का कोई अन्य तरीका है जिससे कि दोनों आधे हिस्से एक दूसरे को आच्छादित करें? वर्ग जैसी आकृति में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं?

अत: हम यह कह सकते हैं कि चित्रों में अनेक सममिति की रेखाएँ हो सकती हैं। नीचे दिए गए चित्रों में अनेक सममिति की रेखाएँ हैं। क्या आप इन सभी को ढूँढ़ सकते हैं?

हमने देखा कि एक वर्ग का विकर्ण भी सममिति की रेखा है। आइए, उदाहरण के रूप में एक आयत को लेते हैं जोकि एक वर्ग नहीं है। क्या इसका विकर्ण सममिति की रेखा है?

सर्वप्रथम, आयत को देखिए और इन प्रश्नों का उत्तर दीजिए। अब कागज का एक आयताकार टुकड़ा लेते हैं और इसे विकर्ण के अनुदिश मोड़कर देखते हैं कि दोनों हिस्से पूर्णतया आच्छादित हैं या नहीं। आप क्या देखते हैं?

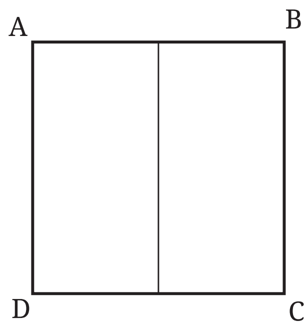


प्रतिबिंब

अभी तक हम यही कहते आए हैं कि जब हम किसी आकृति को सममिति की रेखा के अनुदिश मोड़ते हैं तो दोनों भाग पूर्णतया एक दूसरे को ढक लेते हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि आकृति की सममिति की रेखा के एक ओर का भाग रेखा द्वारा दूसरी ओर परावर्तित होता है। इसी प्रकार, आकृति का सममिति रेखा के दूसरी ओर का भाग पहली ओर परावर्तित होता है। आइए, आकृति पर कुछ बिंदुओं को अंकित करके इसे समझते हैं।

आगे दी गई आकृति एक वर्ग दर्शाती है जिसके कोनों को A, B, C और D से अंकित किया गया है। आइए, इसकी उर्ध्वाधर सममित रेखा को लें। जब हम इस वर्ग को इस रेखा के अनुदिश परावर्तित करते हैं, तब दाईं ओर के बिंदु B और C बाईं ओर परावर्तित होकर क्रमश: बिंदुओं A और D का स्थान ले लेते हैं। बिंदु A और बिंदु D का क्या होता है? बिंदु A, बिंदु B का स्थान ग्रहण कर लेता है तथा बिंदु D, बिंदु C का स्थान ग्रहण कर लेता है।

Reprint 2025-26



यदि हम इस आकृति को A और C से होकर जाने वाले विकर्ण के अनुदिश परावर्तित करें, तो क्या होगा? बिंदु A, B, C और D किन स्थानों पर जाएँगे? यदि हम इसे क्षैतिज सममित रेखा के अनुदिश परावर्तित करें, तो क्या होगा?

इस प्रकार एक आकृति जिसमें सममिति की एक रेखा या रेखाएँ होती हैं, उसे **परावर्तीय सममिति** भी कहा जाता है।

सममिति की रेखाओं वाले आकार बनाना

अभी तक हमने सममिति की आकृतियों तथा असममिति की आकृतियों को देखा है। ऐसी सममिति की आकृतियों को किस प्रकार बनाया जाता है? आइए, इसकी खोज करें।

इंक-ब्लॉट डेविल्स

आपने इसे कक्षा 5 में पहले भी ऐसा किया है। कागज का एक टुकड़ा लीजिए। उसे आधा मोड़िए। एक आधे भाग पर स्याही (या पेंट) की कुछ बूँदें छिड़किए।

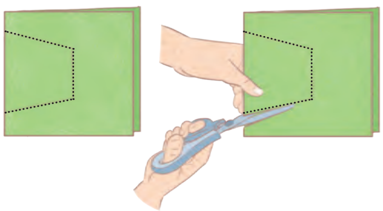
अब इन दोनों आधे भागों को एक दूसरे पर दबाइए तथा पुन: कागज को खोलिए।

- आप क्या देखते हैं?
- क्या परिणामी आकृति सममित है?
- यदि हाँ, तो सममिति की रेखा कहाँ है?
- क्या कोई अन्य सममिति की रेखा भी है, जिसके अनुदिश मोड़ने पर एक जैसे (identical) दो भाग प्राप्त होंगे?
- ऐसे और अधिक पैटर्नों को प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

कागज को मोड़ना और काटना

यह सममित आकार बनाने की एक अन्य विधि है।

इन दोनों चित्रों में कागज को मोड़ने के पश्चात् चित्र में दर्शाई गई बिंदु रेखा के अनुदिश काटते हैं। एक कच्चा चित्र बनाइए जिसमें कागज को खोलने पर दिखने वाले चित्र का पूर्वानुमान हो।

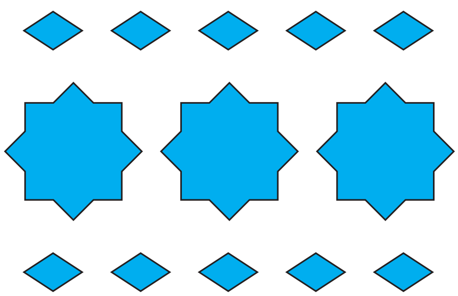


क्या आप इस आकृति में सममिति की रेखा देखते हैं? ये कहाँ है?

मोड़कर और काटकर विभिन्न सममित आकार बनाइए।

सममित आकार प्राप्त करने के लिए कागज के टुकड़ों को मोड़ने और काटने के और भी तरीके हैं।

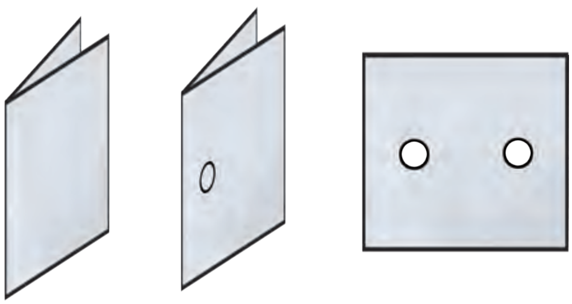
पतले रंगीन आयताकार कागज का उपयोग कीजिए। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है इसे कई बार मोड़कर और कागज को काटकर कुछ जटिल पैटर्न बनाइए। दोहराए जाने वाली आकृतियों में सममित रेखाओं की पहचान कीजिए। उत्सव के अवसरों पर ऐसे कागजों को काटकर सजावटी आकार बनाइए।



आइए, पता लगाएँ

पंचिंग खेल

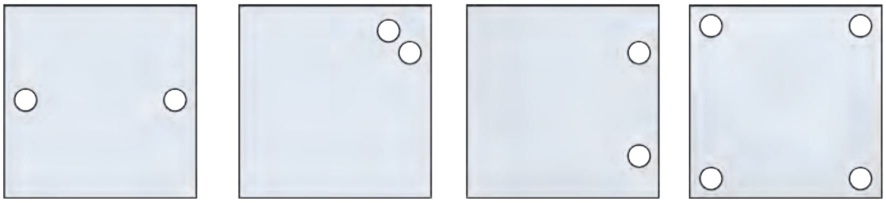
मोड़ सममिति की एक रेखा है। पंचिग मशीन की सहायता से कागज की एक मुड़ी चौकोर शीट के विभिन स्थानों पर छेद कीजिए और विभिन्न सममिति पैटर्न बनाइए।



Reprint 2025-26

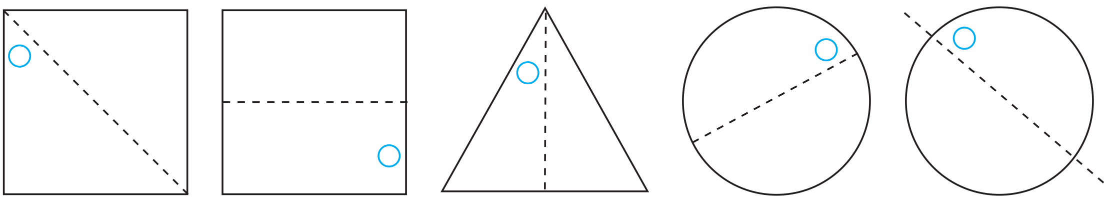
1. दी गई प्रत्येक आकृति में कागज की मुड़ी हुई चौकोर शीट में एक छेद किया गया है और फिर कागज को खोल दिया गया है। उस रेखा की पहचान कीजिए जिसके साथ कागज को मोड़ा गया था।

   चित्र (d) एक छेद करके बनाया गया है। ज्ञात कीजिए कागज को कैसे मोड़ा गया था।



a. b. c. d.

2. सममिति रेखाएँ दी गई हैं, अन्य छेदों को ज्ञात कीजिए—

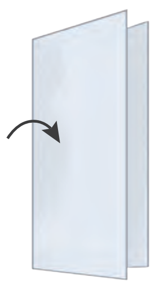


a. b. c. d. e.

3. नीचे कागज काटने से संबंधित कुछ प्रश्न दिए गए हैं।

   एक ऊर्ध्वाधर मोड़ पर विचार कीजिए। उसे हम निम्न प्रकार से दर्शाते हैं—

ऊर्ध्वाधर मोड़

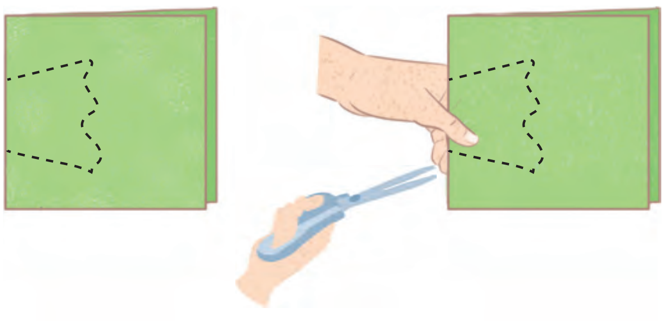


इसी प्रकार, क्षैतिज मोड़ को निम्न प्रकार से दर्शाते हैं—

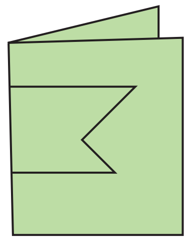
क्षैतिज मोड़

4. नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति में काटने के पश्चात् जब कागज को खोला जाए तब छेद के आकार का अनुमान लगाकर उसे सत्यापित कीजिए।

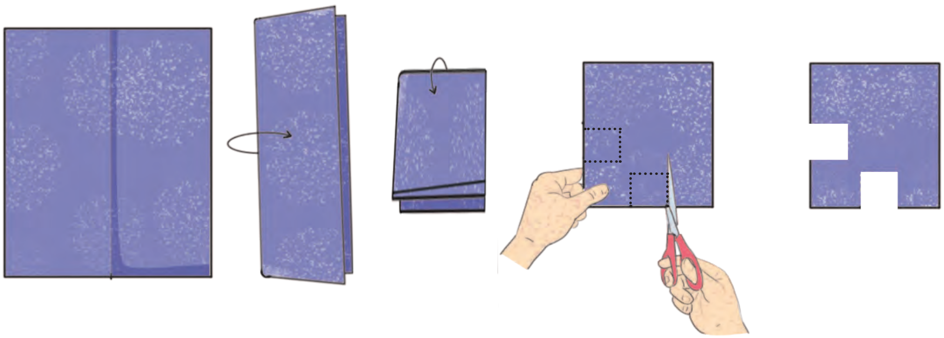
a.



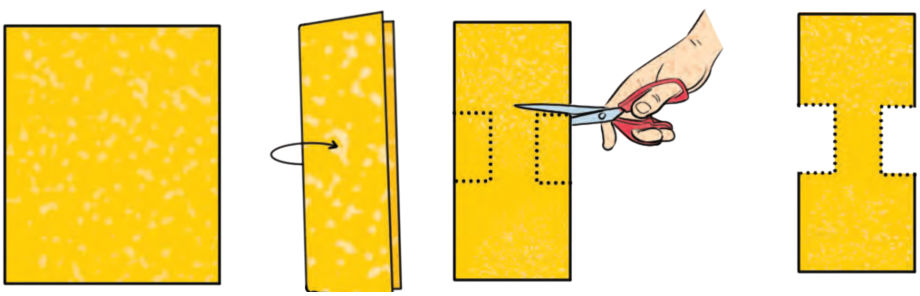
b.



c.



d.



Reprint 2025-26

5. मान लीजिए कि आपको इनमें से प्रत्येक आकार को कुछ मोड़ों और एक सीधे कट के साथ प्राप्त करना है। आप ऐसा किस प्रकार करेंगे?

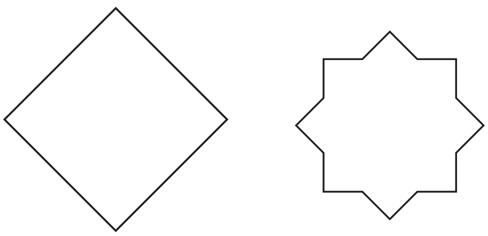
   a. केंद्र में स्थित छेद एक वर्ग है।

   b. केंद्र में स्थित छेद एक वर्ग है।

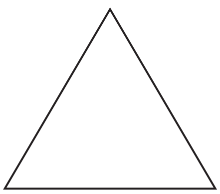
नोट— उपरोक्त दोनों प्रश्नों के लिए, इसकी जाँच कीजिए कि क्या केंद्र में चार-भुजीय आकृति एक वर्ग के दोनों गुणों की विशेषताओं को इंगित करती है।

6. इन आकृतियों में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं?

   a.

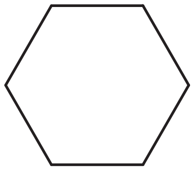


   b. समान भुजाओं और समान कोणों वाला एक त्रिभुज

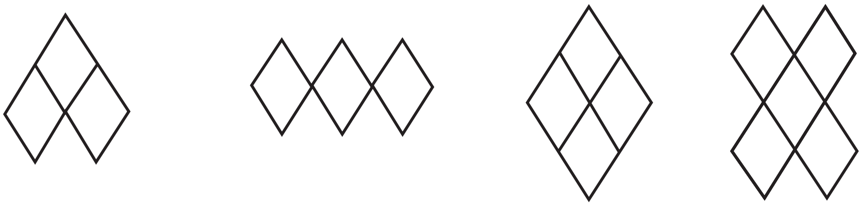


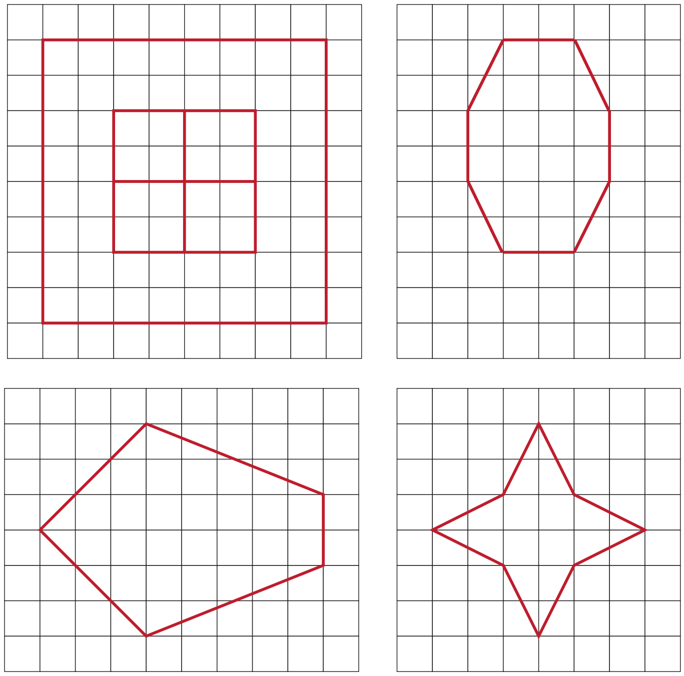
Reprint 2025-26

c. समान भुजाओं और समान कोणों वाला एक षट्भुज



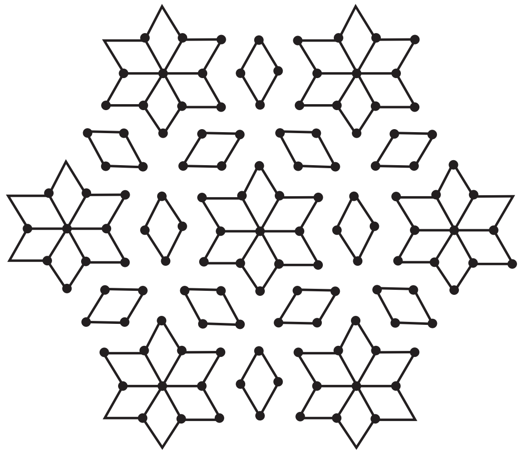
7. प्रत्येक आकृति का अक्स बनाइए तथा सममिति की रेखाएँ खींचिए, यदि कोई है तो—





Reprint 2025-26

8. नीचे दिए गए *कोलम* में सममिति की रेखाएँ ज्ञात कीजिए—

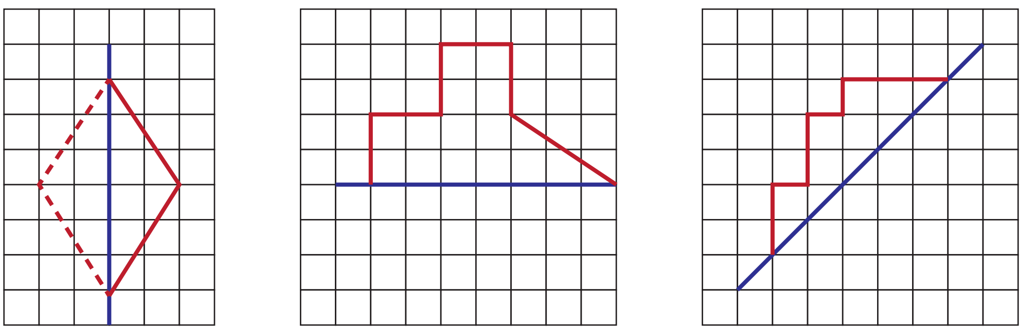


9. निम्नलिखित का चित्र बनाइए—
   a. एक त्रिभुज जिसमें सममिति की केवल एक रेखा हो।
   b. एक त्रिभुज जिसमें सममिति की केवल तीन रेखाएँ हों।
   c. एक त्रिभुज जिसमें सममिति की कोई रेखा ना हो।

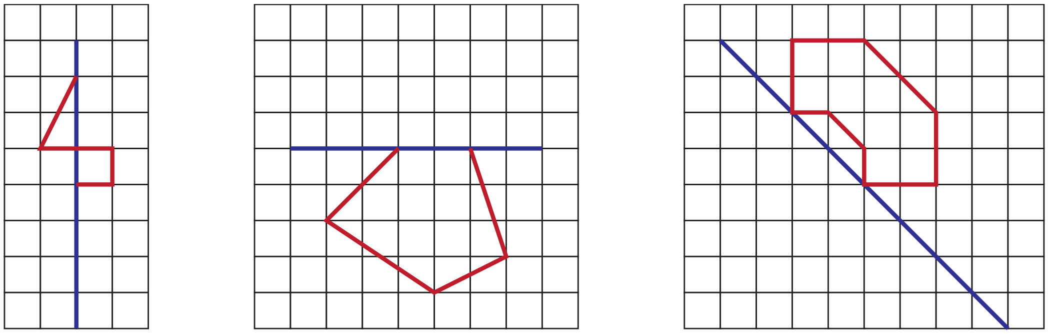
   क्या ठीक दो सममित रेखाओं का त्रिभुज बनाना संभव है?

10. निम्नलिखित का चित्र बनाइए। प्रत्येक स्थिति में, आकृति में कम से कम एक घुमावदार सीमा अवश्य हो।
    a. ठीक एक सममिति की रेखा वाला चित्र
    b. ठीक दो सममिति की रेखाओं वाला चित्र
    c. ठीक चार सममिति की रेखाओं वाला चित्र

11. निम्नलिखित आकृतियों को एक वर्गाकार कागज पर बनाइए। उन्हें इस प्रकार पूरा कीजिए कि नीले रंग की रेखा सममिति की रेखा हो। समस्या (a) को आपके लिए पूरा किया गया है।



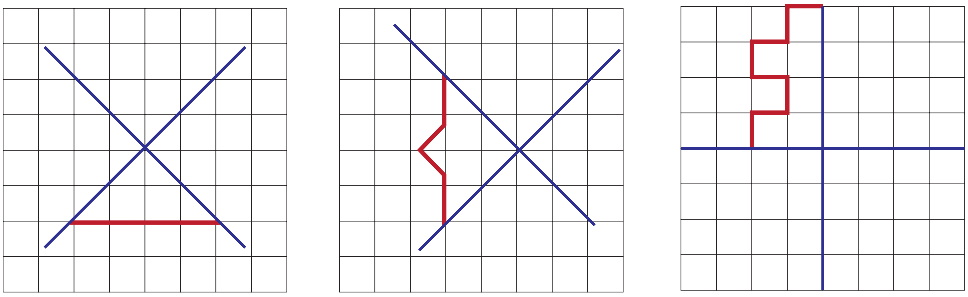
(a) (b) (c)



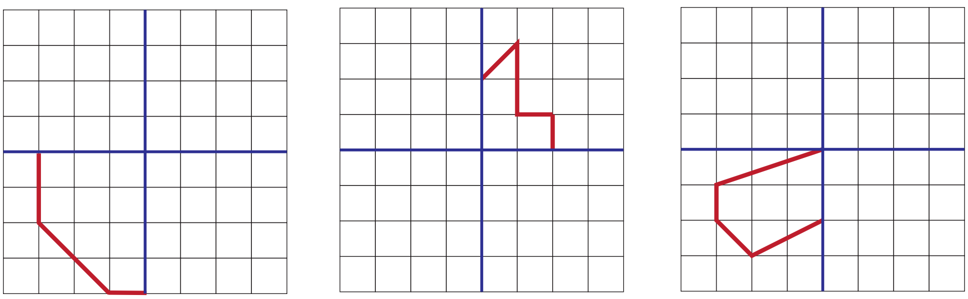
(d) (e) (f)

संकेत — (c) और (f) के लिए देखिए कि क्या पुस्तक को घुमाने से कुछ सहायता प्राप्त होती है!

12. निम्नलिखित आकृतियों को एक वर्गाकार कागज पर बनाइए। उनमें से प्रत्येक को इस प्रकार पूरा कीजिए कि परिणामी आकृति में सममिति की रेखाओं के रूप में दो नीली रेखाएँ हो।

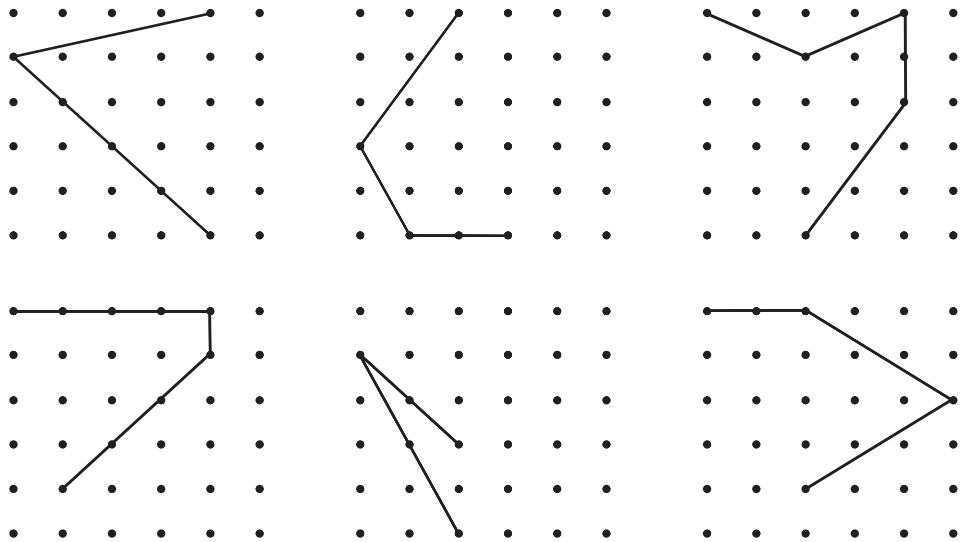


(a) (b) (c)

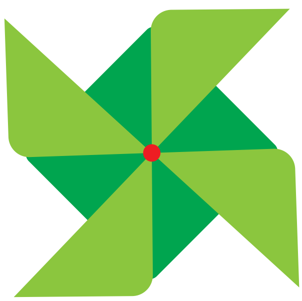


(d) (e) (f)

13. निम्नलिखित रेखा आकृतियों को डॉट ग्रिड पर बनाइए। प्रत्येक आकृति के लिए दो और रेखाएँ खींचिए ताकि ऐसी एक आकृति बन सके, जिसमें सममिति की एक रेखा हो।



9.2 घूर्णन सममिति



चित्र में दर्शाई गई कागज की पवन-चक्की (windmill) सममित जैसी दिखाई देती प्रतीत होती है, परंतु यहाँ कोई सममिति की रेखा नहीं है। यदि आप इसे मोड़ेंगे, तो दोनों आधे भाग एक दूसरे को पूर्णत: नहीं ढकेंगे। दूसरी ओर, यदि आप इसे केंद्र पर लाल बिंदु के परित 90° पर घुमाएँगे, तो यह पवन-चक्की ठीक पहले जैसी दिखाई देगी।

हम कहते हैं कि इस पवन चक्की में **घूर्णन सममिति** (rotational symmetry) है।

जब भी घूर्णन सममिति की बात की जाती है, तब वहाँ एक निश्चित बिंदु होता है, जिसके परित वस्तु को घुमाया जाता है (का घूर्णन किया जाता है)। यह निश्चित बिंदु घूर्णन का केंद्र (centre of rotation) कहलाता है।

क्या उपरोक्त पवन-चक्की ठीक पहले जैसी ही दिखाई देगी, जब उसे 90° से छोटे किसी कोण पर घुमाया जाता है?

नहीं!

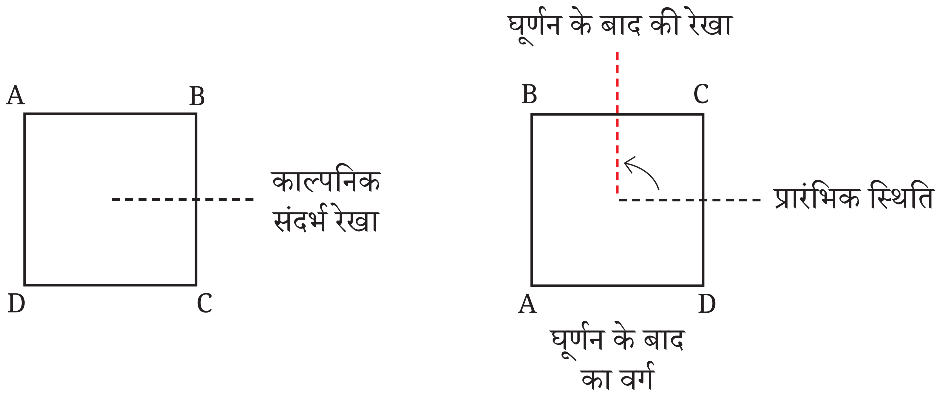
वह कोण, जिस पर किसी आकृति को ठीक पहले जैसा ही दिखने के लिए घुमाया जा सकता है, **घूर्णन सममिति का कोण** या केवल **सममिति का कोण** (संक्षेप में) कहलाता है।

पवन-चक्की के लिए सममिति के कोण 90° (चौथाई चक्कर), 180° (आधा चक्कर), 270° (तीन चौथाई चक्कर) और 360° (पूरा चक्कर) है। ध्यान दीजिए कि जब किसी भी आकृति को 360° घुमाया जाता है, तब वह अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाती है। अत: 360° सदैव सममिति का एक कोण होता है।

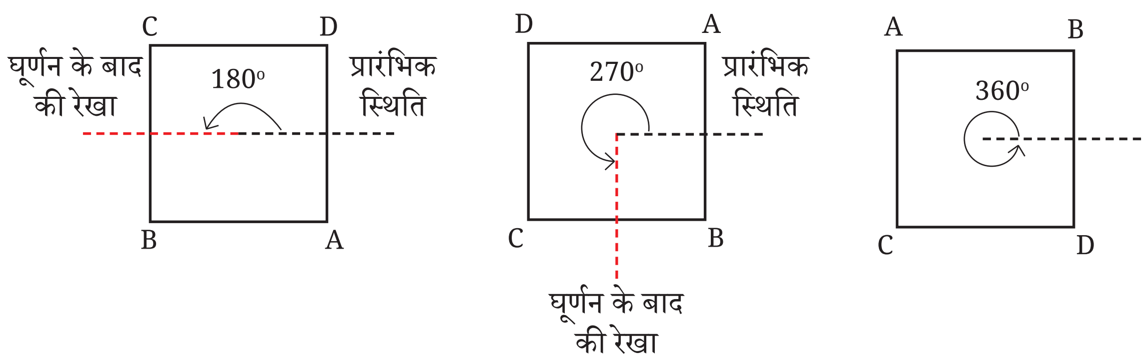
इस प्रकार, हम देखते हैं कि पवन-चक्की के सममिति के 4 कोण हैं। क्या आप किसी एक अन्य आकृति के विषय में जानते हैं, जिसके सममिति के ठीक 4 कोण होते हैं?

एक वर्ग के कितने सममिति कोण हैं? प्रारंभिक वर्ग प्राप्त करने के लिए, उसे कितने घूर्णन की आवश्यकता है?

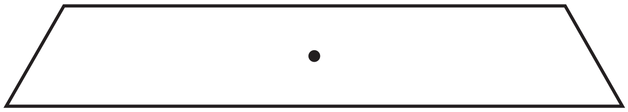
90° के घूर्णन के बाद, हमें एक अतिव्यापी (overlapping) वर्ग प्राप्त होता है। यह घूर्णन बिंदु A को बिंदु B की स्थिति पर, बिंदु B को बिंदु C की स्थिति पर, बिंदु C को बिंदु D की स्थिति पर तथा बिंदु D को फिर से बिंदु A की स्थिति पर पहुँचा देता है। क्या आप जानते हैं कि घूर्णन के केंद्र को कहाँ चिह्नित करना है



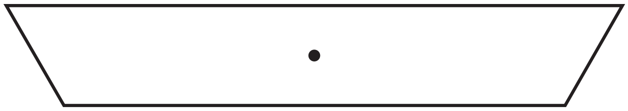
इसकी सममिति के अन्य कोण क्या हैं?



उदाहरण— नीचे दी गई पट्टी के लिए, सममिति के कोण ज्ञात कीजिए—



हल— आइए, इस पट्टी को इसके केंद्र के परित घड़ी की दिशा में (Clockwise) घुमाए।



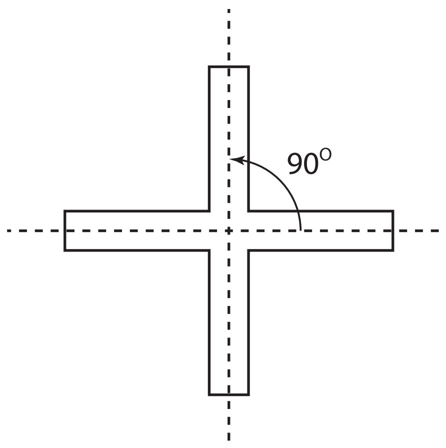
क्या हमें 180° का एक अन्य घूर्णन करने से प्रारंभिक स्थिति प्राप्त हो जाती है।

नहीं। क्यों?

प्राप्त स्थिति को एक और बार 180° का घूर्णन करने से प्रारंभिक स्थिति प्राप्त होती है।

यह आकृति केवल **एक** संपूर्ण घूर्णन के पश्चात्, अर्थात् 360° के घूर्णन के बाद, अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाती है। अत: हम कहते हैं कि इस आकृति में **घूर्णन सममिति नहीं है**।

किरण-संबंधी भुजाओं (radial arm) वाली आकृतियों में घूर्णन सममिति



दी गई आकृति को देखिए, इसमें 4 किरण-संबंधी भुजाएँ हैं। इसकी सममिति के कितने कोण हैं? वे कौन-से हैं?

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक दो आसन्न केंद्रीय बिंदुकित रेखाओं के बीच का कोण 90° है।

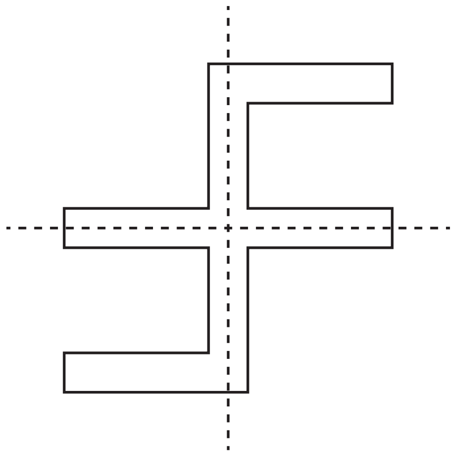
क्या आप इन किरण-संबंधी भुजाओं के बीच के कोणों को बदल सकते हैं, ताकि प्राप्त आकृति के अभी भी सममिति के 4 कोण हों? इसे खींचने का प्रयास कीजिए।

यह जाँच करने के लिए कि खींची गई आकृति के वास्तव में सममिति के 4 कोण हैं, आप दो अलग-अलग कागजों पर आकृति को खींच सकते हैं। इनमें से एक कागज में किरण-संबंधी भुजाओं को काट लीजिए। दूसरे कागज पर आकृति को स्थिर रखते हुए, घूर्णन सममिति की जाँच के लिए कट-आउट आकृति को उस पर घुमाइए।

आप इस आकृति को किस प्रकार संशोधित करेंगे कि इसके केवल सममिति के 2 कोण हों?

Reprint 2025-26

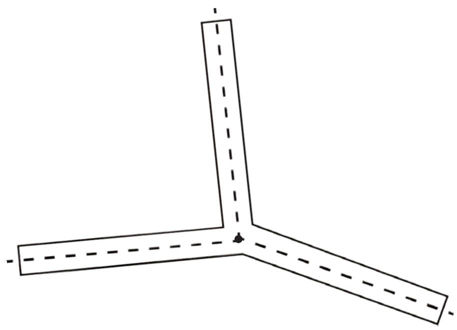
एक विधि यह है—



हम 4 और 2 सममिति के कोणों वाली आकृतियों को देख चुके हैं। क्या हम एक ऐसी आकृति प्राप्त कर सकते हैं, जिसके ठीक 3 सममिति के कोण हों? क्या आप इसके लिए किरण-संबंधी भुजाओं का उपयोग कर सकते हैं?

आइए, नीचे दी आकृति के अनुसार 3 किरण-संबंधी भुजाओं को लेकर प्रयास करें। इसके कितने सममिति के कोण हैं तथा ये कौन-से हैं?

नीचे तीन किरण-संबंधी भुजाओं वाली एक आकृति दी गई है



इस आकृति की एक प्रति बनाइए और काट लीजिए। इस आकृति पर कट-आउट को घुमाकर इसके घूर्णन कोण निर्धारित कीजिए।

हम देखते हैं कि केवल एक संपूर्ण चक्कर, अर्थात 360^o के घूर्णन से यह आकृति अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाएगी। इसलिए, इस आकृति में कोई घूर्णन सममिति नहीं है, क्योंकि इसका सममिति का कोण केवल 360^o ही है।

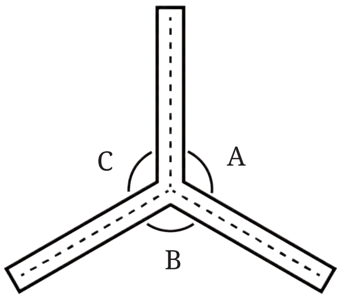
Reprint 2025-26

यद्यपि, क्या इस आकृति में कोई ऐसा परिवर्तन किया जा सकता है जिससे इसके 3 सममिति के कोण हो जाएँ?

क्या बिंदुकित रेखाओं के बीच के कोणों में परिवर्तन करके ऐसा किया जा सकता है?

यदि किसी तीन किरण संबंधी भुजाओं वाली आकृति में घूर्णन सममिति हो, तब घूर्णित संस्करण मूल के साथ अतिव्यापी होना चाहिए। यहाँ इन दोनों स्थितियों के कच्चे रफ आरेख दिए गए हैं—

यदि इन दोनों आकृतियों को अतिव्यापी होना है, तो आप इनके कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?



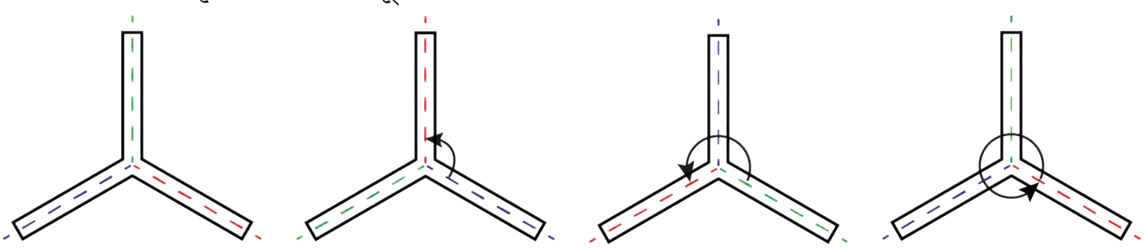
ध्यान दीजिए कि $\angle A$ को $\angle B$ के साथ अतिव्यापी होना चाहिए, $\angle B$ को $\angle C$ के साथ अतिव्यापी होना चाहिए तथा $\angle C$, $\angle A$ के साथ अतिव्यापी होना चाहिए।

इसलिए $\angle A = \angle B = \angle C$ है। यह कोण क्या होना चाहिए?

हम जानते हैं कि एक पूरे चक्कर का कोण 360° होता है। यह तीनों कोणों के बीच समान रूप से वितरित हैं। अत: इनमें से प्रत्येक कोण $\frac{360^{\circ}}{3} = 120^{\circ}$ का होना चाहिए।

इस प्रकार, किरण-संबंधी भुजाओं वाली 3 भुजाओं की आकृति घूर्णन सममिति तब दर्शाती है, जब आसन्न बिंदुकित रेखाओं के बीच का कोण 120° होता है। इस प्रेक्षण का सत्यापन करने के लिए कागज के कट-आऊटों का उपयोग कीजिए।

अब इस आकृति के कितने घूर्णन के कोण हैं तथा ये कौन-से हैं?



प्रारंभिक अवस्था | 120° घूर्णन के पश्चात् | 240° $(120^{\circ} + 120^{\circ})$ घूर्णन के पश्चात् | 360° $(120^{\circ} + 120^{\circ} + 120^{\circ})$ घूर्णन के पश्चात्

नोट— घूर्णनों को दर्शाने के लिए रंग जोड़े गए हैं।

आइए, हम और आकृतियाँ ढूँढ़े

- क्या आप किरण-संबंधी भुजाओं को लेकर ऐसी आकृति बना सकते हैं जिसमें—
  - a. ठीक 5 सममिति के कोण हों?
  - b. 6 सममिति के कोण हों? प्रत्येक आकृति का सममिति का कोण भी ज्ञात करें।

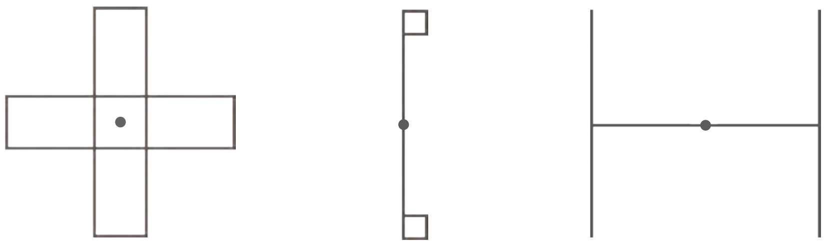
संकेत— पहली स्थिति के लिए 5 किरण-संबंधी भुजाएँ लिखिए? दो आसन्न किरण-संबंधी भुजाओं के बीच क्या कोण होना चाहिए?

- एक ऐसी किरण-संबंधी भुजाओं से बनी आकृति लीजिए जिसमें ठीक 7 सममिति के कोण हों? इसका न्यूनतम सममिति कोण कितना होगा? क्या इस स्थिति में कोण की माप एक पूर्ण संख्या होगी? यदि नहीं, तो उसे मिश्रित भिन्न में व्यक्त कीजिए।

आइए, कुछ अन्य प्रकार की आकृतियों में सममिति के कोणों को ज्ञात करें।

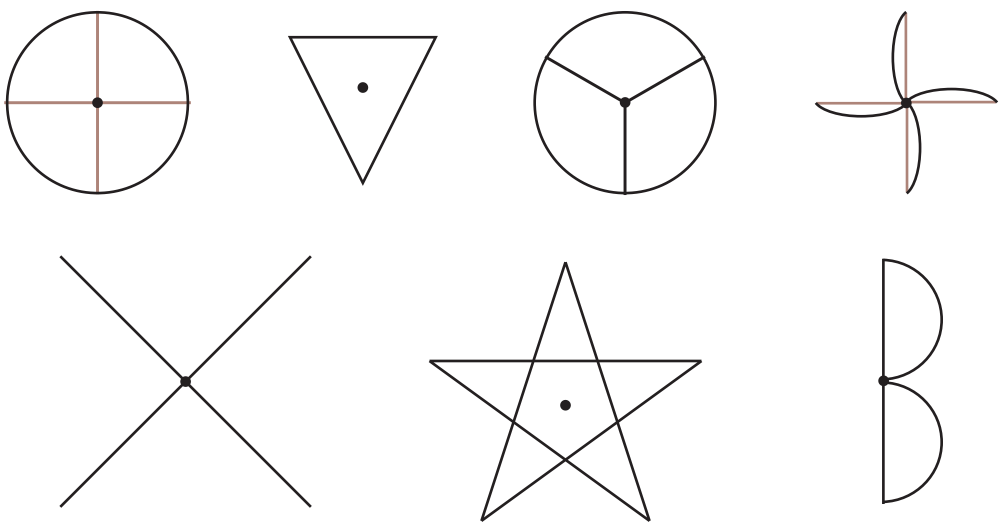
आइए, पता लगाएँ

1. दी गई आकृतियों में दिए गए चिह्न • के परित सममिति के कोण ज्ञात कीजिए।

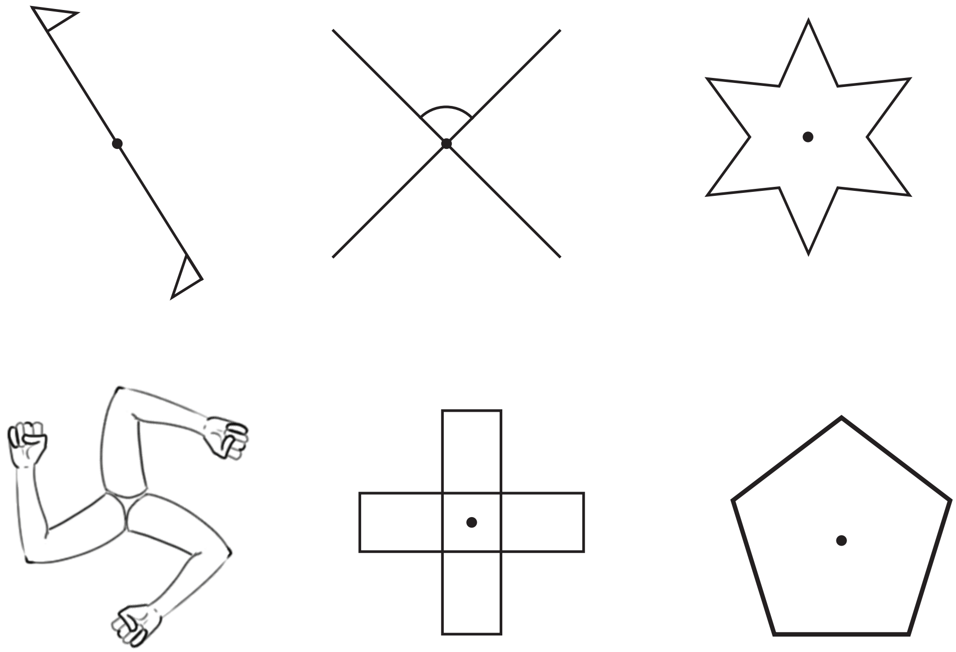


(a) (b) (c)

2. निम्नलिखित में से किस आकृति में एक से अधिक सममिति के कोण हैं?



3. प्रत्येक आकृति के लिए घूर्णन सममिति का क्रम बताइए—



आइए, उपरोक्त सभी स्थितियों के लिए सममिति के कोणों की सूची बनाइए।

- सममिति के कोण जब उनमें से ठीक 2 सममिति के कोण हों— 180°, 360°
- सममिति के कोण जब उनमें से ठीक 3 सममिति के कोण हों— 120°, 240°, 360°
- सममिति के कोण जब उनमें से ठीक 4 सममिति के कोण हों— 90°, 180°, 270°, 360°

क्या आप इन सभी स्थितियों में सममिति के कोणों के विषय में, क्या आप कोई उभयनिष्ठ (common) तथ्य देखते हैं? सबसे पहली पंक्ति की संख्याएँ 180 का गुणज हैं। दूसरी पंक्ति की संख्याएँ 120 का गुणज हैं तथा तीसरी पंक्ति की संख्याएँ 90 का गुणज हैं।

प्रत्येक स्थिति में कोण, न्यूनतम कोण के गुणज हैं। आप उत्साहपूर्वक पूछ सकते हैं कि क्या ऐसा सदैव होता है? आप क्या सोचते हैं?

सत्य या असत्य

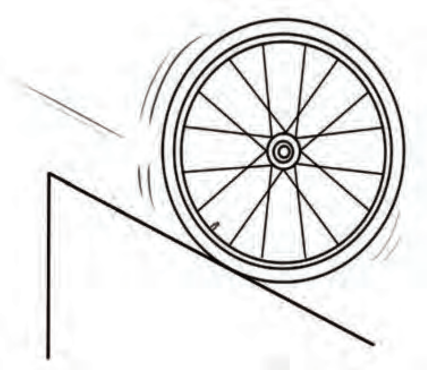
- प्रत्येक आकृति का 360° एक सममिति का कोण होगा।
- यदि एक आकृति की सममिति का न्यूनतम कोण एक प्राकृत संख्या है, तो वह 360° का एक गुणनखंड होगी।

Reprint 2025-26

क्या सभी आकृतियों के लिए सममिति का एक न्यूनतम कोण होता है? ऐसा ज्ञात हुआ है कि सबसे अधिक सममित आकार, जैसे वृत्त को छोड़कर सभी आकृतियों में यह स्थिति या न्यूनतम कोण होता है। आइए अब वृत्त की चर्चा करते हैं।

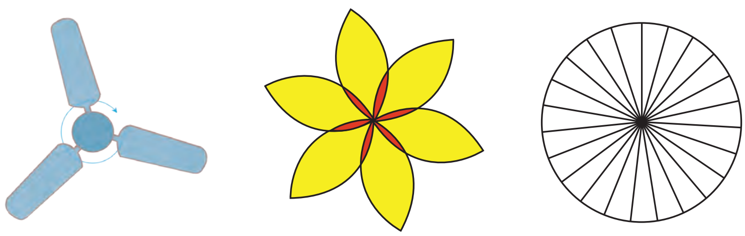
एक वृत्त की सममितियाँ

वृत्त एक मनमोहक आकृति है। तब क्या होता है, जब आप एक वृत्त को उसके केंद्र के परित घड़ी की दिशा में घुमाते हैं? वह स्वयं के साथ संपाती हो जाता है। इससे कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता है कि आप उसे किस कोण पर घुमा रहे हैं। अत: एक वृत्त के लिए प्रत्येक कोण सममिति का कोण होता है।



अब, एक वृत्त की परिसीमा पर एक बिंदु लीजिए और इसे केंद्र से मिलाइए। इसे बढ़ा कर वृत्त का एक व्यास बनाइए। क्या यह व्यास इस वृत्त की परावर्तन सममिति की एक रेखा है? हाँ। प्रत्येक व्यास वृत्त की एक सममित रेखा है।

पहियों की ही तरह हम अपने परिवेश में ऐसी अनेक वस्तुएँ प्राप्त कर सकते हैं जिनमें घूर्णन सममिति होती है। उन्हें ज्ञात कीजिए। इनमें से कुछ नीचे दर्शाई गई हैं—

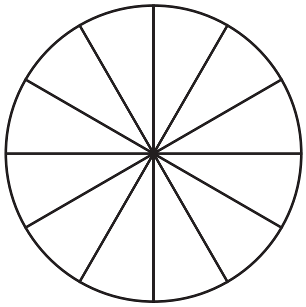


पंखा फूल चक्र

Reprint 2025-26

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दिए गए वृत्त के त्रिज्याखंडों में इस प्रकार रंग भरिए कि आकृति में (i) 3 सममिति के कोण हों। (ii) 4 सममिति के कोण हों। (iii) सममिति के संभव कोणों की संख्या क्या होगी? यदि इन त्रिज्याखंडों को अलग-अलग रंगों से अलग-अलग विधियों द्वारा भरा जाए तो,



2. वृत्त और वर्ग को छोड़कर, ऐसी अन्य दो आकृतियाँ बनाइए, जिनमें परावर्तीय सममिति और घूर्णन सममिति दोनों हों।
3. जहाँ भी संभव हो, निम्नलिखित का एक कच्चा स्कैच खींचिए—
   a. एक त्रिभुज, जिसमें न्यूनतम दो सममिति की रेखाएँ हों तथा न्यूनतम दो सममिति के कोण हों।
   b. एक त्रिभुज, जिसमें केवल एक सममिति की रेखा हो लेकिन कोई घूर्णन सममिति न हो।
   c. घूर्णन सममिति वाला ऐसा चतुर्भुज, जिसमें कोई परावर्तीय सममिति न हो।
   d. एक परावर्तीय सममिति वाला चतुर्भुज, जिसमें कोई घूर्णन सममिति न हो।

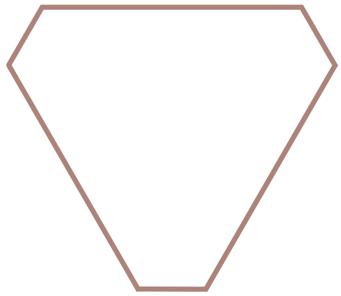
प्रयास करें

4. एक आकृति में सममिति का न्यूनतम कोण 60° है। इस आकृति के अन्य सममिति के कोण क्या हैं?
5. एक आकृति में एक सममिति का कोण 60° है। इस आकृति के दो सममिति के कोण 60° से कम हैं। सममिति का न्यूनतम कोण क्या होगा?
6. क्या हम घूर्णन सममिति के साथ एक ऐसी आकृति प्राप्त कर सकते हैं, जिसमें सममिति का न्यूनतम कोण

   (a) 45° है?

   (b) 17° है?

7. यह दिल्ली में स्थित नए संसद भवन का चित्र है—



a. क्या इस चित्र की बाहरी परिसीमा (boundary) में परावर्तन सममिति है? यदि ऐसा है, तो सममिति की रेखाएँ खींचिए। वे कितनी हैं?

b. क्या इसकी अपने केंद्र के परित घूर्णन सममिति है? यदि ऐसा है, तो घूर्णन सममिति के कोण ज्ञात कीजिए।

8. अध्याय 1, सारणी 3 में पहले आकृति अनुक्रम नियमित बहुभुज आकार अनुक्रम आकृतियों में सममिति की कितनी रेखाएँ हैं? आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम मिलता है।

9. अध्याय 1 की सारणी 3 में पहले आकृति अनुक्रम नियमित बहुभुज के आकार अनुक्रम की आकृतियों में सममिति के कितने कोण हैं? आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है?

10. अध्याय 1 की सारणी 3 में अंतिम आकृति अनुक्रम कोच स्नोफ्लेक के आकार अनुक्रम में आकृतियों में सममिति की कितनी रेखाएँ है? सममिति के कितने कोण हैं?

11. अशोक चक्र में कितनी सममिति की रेखाएँ और सममिति के कोण होते हैं?

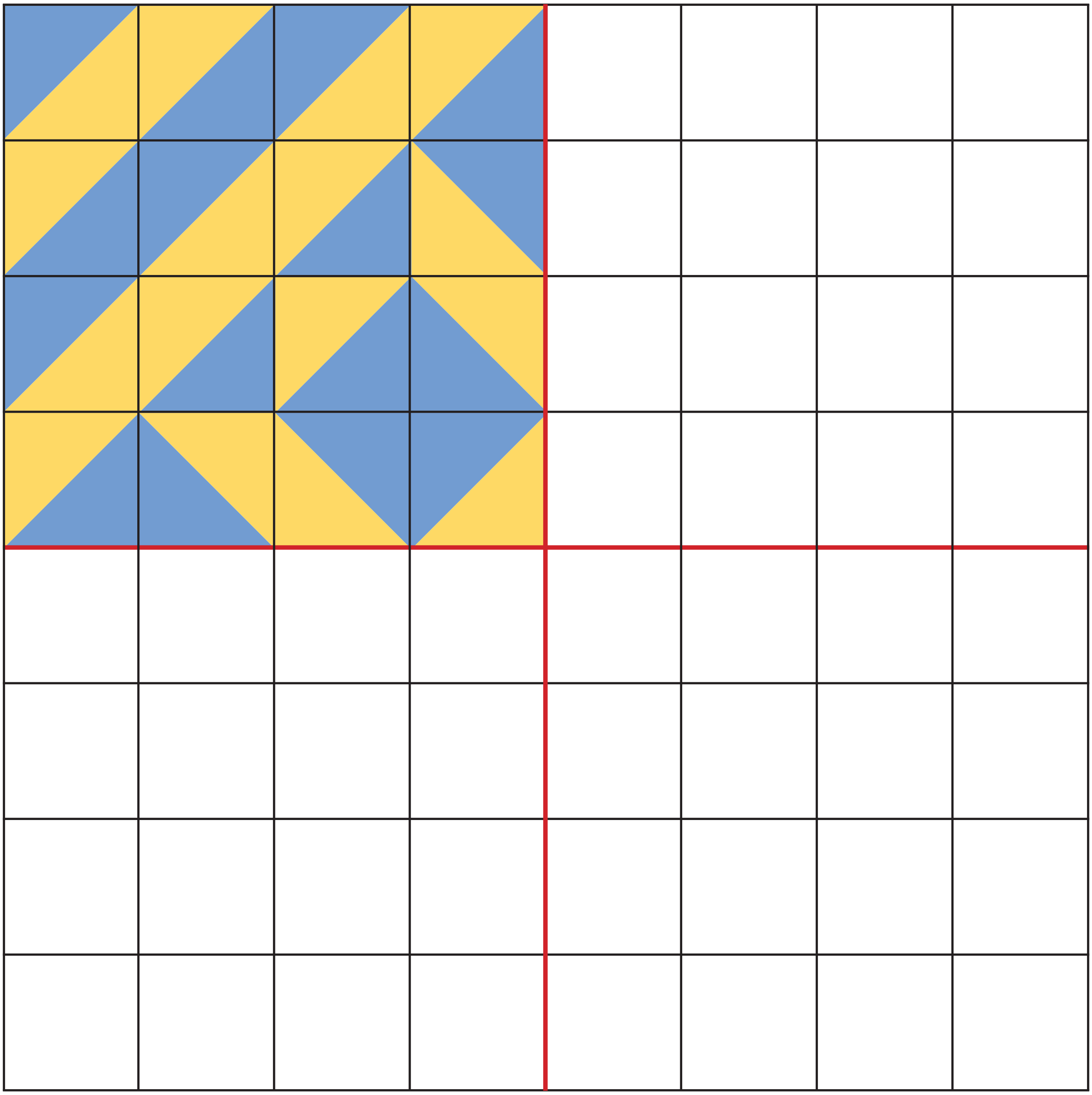
टाइल्स के साथ खेलिए

a. पुस्तक के अंत में दी गई रंगीन टाइल्स  का उपयोग करके इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे इसकी केवल दो सममिति की रेखाएँ हों।

b. 16 ऐसी ही टाइल्स का प्रयोग करके ऐसी आकृति बनाइए जिसमें ठीक
   1. एक सममिति की रेखा हो।
   2. दो सममिति की रेखाएँ हो।

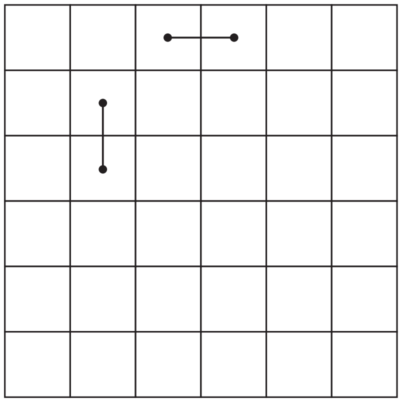
c. इन टाइल्स का प्रयोग करके रचनात्मक सममित डिजाइन बनाइए।

Reprint 2025-26

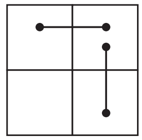


खेल

एक 6×6 का ग्रिड (grid) खींचिए। दो खिलाड़ी दो आसन्न वर्गों को भरते हुए, बारी-बारी से एक रेखा खींचते हैं। यह रेखा क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर किसी भी रूप में खींची जा सकती है। ये रेखाएँ अतिआच्छदित नहीं हो सकती हैं। यह खेल तब तक जारी रहता है, जब तक कि कोई खिलाड़ी कोई और रेखा नहीं खींच पाता है। वह खिलाड़ी जो आगे रेखा नहीं खींच पाता, खेल में हार जाता है।



इसकी अनुमति नहीं है।

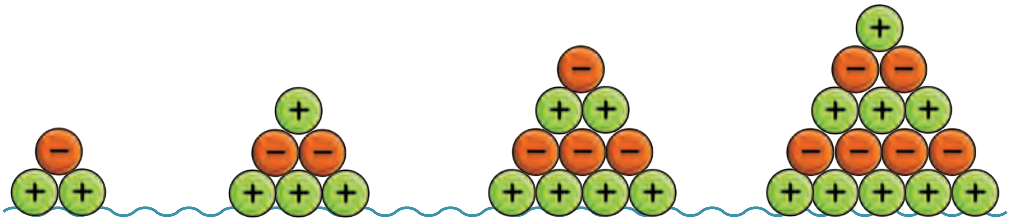


इस खेल को जीतने की क्या रणनीति होनी चाहिए?

सारांश

- जब कोई आकृति ऐसे भागों से बनी प्रतीत होती है, जिसमें एक निश्चित पैटर्न को दोहराया जाता है, तब हम कहते हैं कि उस आकृति में **सममिति** है। ऐसी आकृतियों को हम **सममित आकृतियाँ** कहते हैं।
- एक रेखा जो किसी समतल आकृति को दो भागों में इस प्रकार काटती है कि उस रेखा के अनुदिश मोड़ने पर दोनों भाग परस्पर अतिव्यापी हो जाएँ, आकृति की **सममिति की रेखा** या **सममिति की अक्ष** कहलाती है।
- एक आकृति की एक से अधिक (multiple) सममिति की रेखाएँ हो सकती हैं।
- कुछ आकृतियों को जब एक निश्चित बिंदु के परित किसी कोण पर घुमाया जाता है, तब वे मूल रूप से एक समान लगती हैं। ऐसा कोण उस आकृति की **सममिति का कोण** कहलाता है। ऐसी आकृति जिसमें घूर्णन कोण हमेशा 0^{o} से 360^{o} के बीच होता है, तो कहा जा सकता है कि इनमें **घूर्णन सममिति** है। आकृति का वह निश्चित बिंदु, जिसके परित आकृति को घुमाया जाता है, **घूर्णन का केंद्र** कहलाता है।
- एक आकृति के कई सममिति के कोण हो सकते हैं।
- कुछ आकृतियों की सममिति रेखा हो सकती है, परंतु ऐसा भी हो सकता है उनमें कोई सममिति का कोण न हों। जबकि यह भी संभव है कि कोण की सममिति हो लेकिन सममिति की रेखाएँ न हो। कुछ आकृतियों में सममिति कोण व सममिति रेखा दोनों हो सकते हैं।

Reprint 2025-26



10 शून्य के दूसरी ओर

पूर्णांक

अधिक और अधिक संख्याएँ!

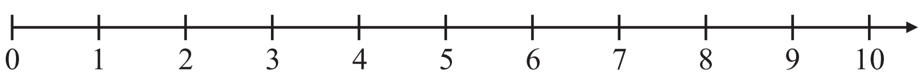
याद कीजिए कि गणित के अध्ययन में हमने सबसे पहले जो संख्याएँ सीखी वे गणन संख्याएँ 1, 2, 3, 4,... थीं।

उसके बाद हमने सीखा कि संख्याएँ और भी अधिक हैं। उदाहरण के लिए , संख्या 0, जो 'कुछ भी नहीं' को प्रदर्शित करती है और संख्या 1 से पहले आती है। भारत में और अब संपूर्ण विश्व में भी शून्य का इतिहास बहुत महत्वपूर्ण रहा है। उदाहरण के लिए, भारतीय संख्या पद्धति में 0 से 9 तक के 10 अंकों का प्रयोग करके संख्याएँ लिखते हैं, यह संख्या पद्धति बड़ी से बड़ी तथा छोटी से छोटी संख्याएँ लिखना संभव बना देती है।

इसके पश्चात् हमने और अधिक संख्याओं के विषय में भी सीखा जो संख्याओं 0, 1, 2, 3, 4,... के बीच में स्थित हैं जैसे $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ और $\frac{13}{6}$ ये *भिन्न* कहलाती हैं।

क्या इसके अतिरिक्त और भी अधिक संख्याएँ हैं? 0 एक अतिरिक्त संख्या है जिसके विषय में हम पहले नहीं जानते थे। यह 1 से छोटी संख्या है और इससे पहले भी आती है। क्या संभवतः और भी संख्याएँ हैं जो शून्य से पहले आती हैं और शून्य से छोटी हैं?

दूसरे शब्दों में, हमने संख्या रेखा देखी है—



यद्यपि, यह एक संख्या 'किरण' है, जिसे हम ज्यामिति में सीख चुके हैं। यह किरण शून्य से आरंभ होती है तथा दाईं तरफ असीमित रूप से बढ़ती जाती है। क्या 0 के बाईं ओर भी संख्याओं का अस्तित्व है, जिससे कि संख्या किरण पूर्ण होकर एक सही संख्या रेखा बना सके?

इस अध्याय में हम इसी के विषय में जानेंगे।

क्या कोई ऐसी संख्या है जो शून्य से छोटी हो? क्या आप ऐसी किसी वस्तु के 0 से कम होने का कोई तरीका सोच सकते हो ?

10.1 बेला की मजेदार इमारत

बच्चे बेला के आइसक्रीम कारखाने को देखने और उसकी स्वादिष्ट आइसक्रीम को चखने जाते हैं। बच्चों के लिए कारखाने को और भी रोचक बनाने के लिए बेला ने एक बहुमंजिला इमारत खरीदी और इसे आकर्षणों से भर दिया। उसने इसका नाम 'बेला की मजेदार इमारत' रखा।

लेकिन यह सामान्य इमारत नहीं थी!

अवलोकन कीजिए कि 'मजेदार इमारत' के कुछ तल भूतल से नीचे हैं। इन तलों पर आपको कौन-सी दुकानें देखने को मिलती हैं? वहाँ भूतल पर क्या है?

तलों में ऊपर और नीचे जाने के लिए एक लिफ्ट का उपयोग किया जाता है। इसमें दो बटन हैं— ऊपर जाने के लिए '+' तथा नीचे जाने के लिए '–' बटन। क्या आपने लिफ्ट देखी है?

स्वागत कक्ष (वेलकम कक्ष) से कला केंद्र (आर्ट सेंटर) तक जाने के लिए आपको '+' बटन को दो बार दबाना होगा।

यह बटन दबाना + + या +2 है।

दो तल नीचे जाने के लिए, आपको '–' बटन दो बार दबाना होगा। जिसे हम – – या – 2 लिखते हैं।

अतः जब आप + 1 दबाते हैं (यदि आप + बटन को एक बार दबाएंगे), तब आप 1 तल ऊपर जाएँगे और जब –1 दबाते हैं (यदि आप – बटन को एक बार दबाएंगे), तब आप 1 तल नीचे आते हैं।

लिफ्ट में बटन दबाना और संख्याएँ

+ + + को + 3 लिखते हैं।

– – – – को – 4 लिखते हैं।

चार तल ऊपर जाने के लिए आप क्या दबाते हैं? तीन तल नीचे जाने के लिए आप क्या दबाते हैं?

Reprint 2025-26

‘मजेदार इमारत’ के तलों को क्रमांकित करना

‘मजेदार इमारत’ में प्रवेश करते ही भूतल पर ‘स्वागत कक्ष’ है। भूतल से आरंभ करते हुए आप + 1 दबाकर भोजन कक्ष (फूड कोर्ट) पर और + 2 दबाकर आप कला केंद्र पर पहुँच सकते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि भोजन कक्ष तल + 1 पर तथा कला केंद्र तल + 2 पर है।

भूतल से शुरुआत करते हुए, खिलौना स्टोर (टॉयज़ सेंटर) पर पहुँचने के लिए आपको – 1 दबाना होगा। अतः खिलौना स्टोर, – 1 तल पर है। इसी प्रकार, भूतल से आरंभ करते हुए वीडियो गेम की दुकान पर पहुँचने के लिए आपको – 2 दबाना होगा। अतः वीडियो गेम की दुकान, – 2 तल पर है।

भूतल को 0 तल कहा जाता है। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

‘मजेदार इमारत’ के सभी तलों के क्रमांक लिखिए।

क्या आपने देखा कि +3 पुस्तक केंद्र (बुक्स सेंटर) का तल क्रमांक है, लेकिन यह उन तलों की संख्या भी है, जब आप +3 दबाते हैं। इसी प्रकार – 3 तल क्रमांक है, लेकिन यह उन तलों की संख्या भी है, जब आप – 3 अर्थात् – – – दबाकर नीचे जाते हैं।

एक संख्या जिसके आगे ‘+’ चिह्न लगा है, **धनात्मक संख्या** कहलाती है। एक संख्या जिसके आगे ‘–’ चिह्न लगा है, **ऋणात्मक संख्या** कहलाती है।

‘मजेदार इमारत’ में, तल 0 को संदर्भ या प्रारंभिक बिंदु मानकर ऊपर और नीचे के तलों को क्रमांकित किया गया है। भूतल से ऊपर के तलों को धनात्मक संख्याओं से क्रमांकित किया गया है। भूतल से ऊपर जाने के लिए, आपको कुछ बार ‘+’ बटन दबाना होगा।

भूतल से नीचे के तलों को ऋणात्मक संख्याओं द्वारा क्रमांकित किया गया है। भूतल से नीचे के तलों तक जाने के लिए आपको ‘–’ बटन दबाना होगा।

शून्य न तो धनात्मक संख्या है और न ही ऋणात्मक संख्या। हम 0 के आगे ‘+’ या ‘–’ चिह्न नहीं लगाते हैं।

गति दर्शाने के लिए

भोजन कक्ष से प्रारंभ कीजिए और लिफ्ट में +2 दबाइए। आप कहाँ पहुँचेंगे ?

इसे हम एक पद के रूप में दर्शा सकते हैं—

प्रारंभिक तल + गति = लक्षित तल

प्रारंभिक तल +1 (भोजन कक्ष) है और दबाए गए बटनों की संख्या + 2 है। अतः आप लक्षित तल **(+ 1) + (+ 2) = + 3** (पुस्तक भंडार) पर पहुँचते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1) + 2 तल से प्रारंभ कीजिए और लिफ्ट में –3 दबाइए। आप कहाँ पहुँचेंगे? इसे पद के रूप में दर्शाइए।

2) दिए गए पदों को पूर्ण कीजिए। (आप प्रारंभ तल + मजेदार इमारत में गति के संदर्भ को ध्यान रखते हुए इन्हें पूर्ण कीजिए।)

   a. (+ 1) + (+ 4) = ________ b. (+ 4) + (+ 1) = ________

   c. (+ 4) + (– 3) = ________ d. (– 1) + (+ 2) = ________

   e. (– 1) + (+ 1) = ________ f. (0) + (+ 2) = ________

   g. (0) + (– 2) = ________

3) विभिन्न तलों से शुरुआत करते हुए, तल (– 5) पर पहुँचने के लिए आवश्यक गतियों को ज्ञात कीजिए। उदाहरण के लिए, यदि मैं तल + 2 से प्रारंभ करता हूँ, मुझे – 5 पर पहुँचने के लिए – 7 ही दबाना होगा। अतः अभिव्यक्ति (+ 2) + (– 7) = – 5 है।

इसी प्रकार – 5 पर पहुँचने के लिए अन्य प्रारंभिक स्थितियाँ और आवश्यक गतियों को ज्ञात कीजिए और पदों को लिखिए।

बटन दबाने का संयोजन भी है

गुरमीत खिलौनों की दुकान में था और वह दो तल नीचे जाना चाहता था। लेकिन गलती से उसने '+' बटन को दो बार दबा दिया। इसे निरस्त करने के लिए उसने '–' बटन को तीन बार दबा दिया। गुरमीत खिलौने की दुकान से कितनी तल नीचे या ऊपर पहुँचेगा?

गुरमीत एक तल नीचे जाएगा। हम संयोजित बटन दबाने से गति के परिणाम को इस प्रकार पद के रूप में कर सकते हैं— (+ 2) + (– 3) = – 1

आइए, पता लगाएँ

संयोजित बटन दबाने से गति के परिणामों को ध्यान में रखते हुए दिए गए पदों का मूल्यांकन कीजिए।

Reprint 2025-26

a. $(+1) + (+4) = ----$ b. $(+4) + (+1) = ---$

c. $(+4) + (-3) + (-2) = ---$ d. $(-1) + (+2) + (-3) = ---$

शून्य पर वापसी!

बसंत भूतल पर है और वह बहुत जल्दी में है गलती से वह $+3$ दबाता है, इसे निरस्त करने के लिए वह क्या कर सकता है, कि वह भूतल पर ही रहे। वह इसे -3 दबाकर निरस्त कर सकता है। अर्थात् $(+3) + (-3) = 0$

हम -3 को $+3$ का योज्य प्रतिलोम कहते हैं। इसी प्रकार $+3$, -3 का योज्य प्रतिलोम है।

योज्य प्रतिलोम के विषय में सोचने का अन्य तरीका यह भी है। यदि बसंत लिफ्ट में $+4$ दबाता है और फिर -4 दबाता है तो वह कहाँ पहुँचेगा? यदि आप तल $+4$ पर हैं और आप इसका प्रतिलोम -4 दबाते हैं, तब आप वापस 0 पर आते हैं, जो कि भूतल है।

यदि आप तल -2 पर हैं, और आप इसका प्रतिलोम $+2$ दबाते हैं, तब आप $(-2) + (+2) = 0$ पर जाते हैं। इसका अर्थ हुआ कि आप पुनः भूतल पर पहुँच जाएँगे।

- दी गई संख्याओं के योज्य प्रतिलोम बताइए।

  $+4, -4, -3, 0, +2, -1$

- रेखा खींचकर योज्य प्रतिलोम से जोड़िए।

  $+5$ -7 -8 $+9$

  -9 $+8$ -5 $+7$

तलों का उपयोग करके संख्याओं की तुलना करना

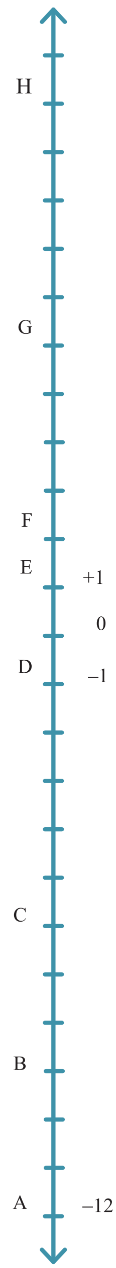
- सबसे नीचे के तल पर कौन है?

  1. जय कला केंद्र में है,अतः वह $+2$ तल पर है।
  2. आसिन खेल केंद्र में है, अतः वह _______ तल पर है।
  3. बिन्नु सिनेमा केंद्र में है, अतः वह _______ तल पर है।
  4. अमन खिलौनों की दुकान में है, अतः वह _______ तल पर है।

तल + 3, तल + 4 से नीचे है, अतः हम लिख सकते हैं + 3 <+ 4। हम इसे ऐसे भी लिख सकते हैं + 4 > + 3।

क्या हम – 3 < – 4 या – 4 < – 3 लिख सकते हैं?

चूँकि तल – 4, तल – 3 से नीचे है, इसका अर्थ हुआ – 4 < – 3 अत: इसे 3 > – 4 भी लिख सकते हैं।



आइए, पता लगाएँ

1. मजेदार इमारत का प्रयोग करते हुए दी गई संख्याओं की तुलना कीजिए और बॉक्स में < या > चिह्न भरिए।

   a. – 2 ☐ + 5 b. – 5 ☐ + 4 c. – 5 ☐ – 3

   d. + 6 ☐ – 6 e. 0 ☐ – 4 f. 0 ☐ + 4

> ध्यान दीजिए कि सभी ऋणात्मक क्रमांक वाले तल, 0 तल (भूतल) से नीचे हैं। अतः सभी ऋणात्मक संख्याएँ 0 से छोटी हैं। सभी धनात्मक क्रमांक वाले तल, 0 तल (भूतल) से ऊपर हैं। अतः सभी धनात्मक, संख्याएँ 0 से बड़ी हैं।

2. मजेदार इमारत में अधिक तलों की कल्पना कीजिए तथा संख्याओं की तुलना कीजिए। बॉक्स में < या > भरिए—

   a. – 10 ☐ – 12 b. + 17 ☐ – 10

   c. 0 ☐ – 20 d. + 9 ☐ – 9

   e. – 25 ☐ – 7 f. + 15 ☐ – 17

3. यहाँ दाईं ओर एक रेखा के रूप में दिखाई गई इमारत में यदि तल A = – 12, तल D= –1 और तल E = +1 है, तो तल B, C, F, Gऔर H के क्रमांक बताइए।

4. यहाँ दाईं ओर दिखाई गई इमारत में निम्नलिखित तलों को अंकित कीजिए।

   a. – 7 b. – 4 c. + 3 d. – 10

कौन-सा बटन दबाना है, पता लगाने के लिए घटा

पिछली कक्षाओं में हम घटाने को 'निकाल लेना' के रूप में समझ चुके हैं। उदाहरण के लिए, किसी दराज में 10 पुस्तकें हैं। मैंने उनमें से 4 पुस्तकें ले लीं। अब दराज में कितनी पुस्तकें बची हैं?

हम घटा द्वारा उत्तर प्राप्त कर सकते हैं— 10 – 4 = 6 या दस में से चार निकाल लेने के बाद छह शेष रह जाता है।

आप घटाने के अन्य तरीकों से भी परिचित हो सकते हैं, जो कि अंतर एवं समानता के वर्णन से संबंधित हैं। उदाहरण के लिए, इस स्थिति को लीजिए— 'मेरे पास 10 रुपये हैं और मेरी बहन के पास 6 रुपये है।'

अब, मैं प्रश्न पूछ सकता हूँ 'मेरी बहन को मेरे बराबर रुपयों के लिए और कितने रुपये मिलने चाहिए।'

हम इसे दो तरह से लिख सकते हैं— 6+? = 10 या 10–6 =?

यहाँ हम 'जोड़ने के लिए लुप्त संख्या ज्ञात करना' और 'घटाने' के मध्य संबंध देखते हैं।

हम घटाने के इस अर्थ का उपयोग धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के घटाने के लिए 'बराबर बनाना' या 'लुप्त संख्या ज्ञात करना' के रूप में करेंगे।

इस संदर्भ में 15 – 5, 100 – 10, 74 – 34 ज्ञात कीजिए।

अध्यापक टिप्पणी

सामान्यत: जब दो असमान मात्राएँ होती है, तब घटाव मात्राओं को बराबर करने के लिए आवश्यक परिवर्तन को इंगित करता है । घटाने की प्रक्रिया यह दर्शाती है कि लक्षित मात्रा तक पहुँचने के लिए प्रारंभिक मात्रा में कितना परिवर्तन होना चाहिए? विभिन्न तलों के संदर्भ में, प्रारंभिक स्तर से लक्षित स्तर तक पहुँचने में क्या परिवर्तन आवश्यक है? ध्यान दीजिए कि आवश्यक परिवर्तन धनात्मक (वृद्धि के लिए) एवं ऋणात्मक (कमी के लिए) हो सकते हैं।

आपका प्रारंभिक तल 'आर्ट सेंटर' और लक्षित तल 'स्पोर्ट्स सेंटर' है। आपको कौन-सा बटन दबाना चाहिए?

आपको तीन तल ऊपर जाना है, अतः आपको + 3 दबाना चाहिए। इसमें हम घटा का उपयोग करते हुए एक पद के रूप में लिख सकते हैं—

लक्षित तल – प्रारंभिक तल = आवश्यक गति

उपरोक्त उदाहरण में, प्रारंभिक तल +2 (आर्ट सेंटर) है और लक्षित तल + 5 है। + 2 से + 5 तक पहुँचने के लिए बटन + 3 दबाना है। इसलिए,

$$(+5) - (+2) = (+3)$$

स्पष्टीकरण

जोड़ और घटाव के मध्य संबंध को याद कीजिए। 3 + ? = 5 में लुप्त संख्या ज्ञात करने के लिए हम घटाव को उपयोग कर सकते हैं जैसे— 5 – 3 = 2 तो घटाव, जोड़े जानी वाली लुप्त संख्या ज्ञात करने के समान है।

हम जानते हैं कि—

प्रारंभिक तल + आवश्यक गति = लक्षित तल

यदि आवश्यक गति प्राप्त करनी हो तो,

प्रारंभिक तल + ? = लक्षित तल

अतः हम लिख सकते हैं–

लक्षित तल – प्रारंभिक तल = ? = आवश्यक गति

कुछ अन्य उदाहरण—

(a) यदि लक्षित तल –1 है और प्रारंभिक तल –2 है, तो आपको कौन-सा बटन दबाना चाहिए? आपको एक तल ऊपर जाने की आवश्यकता है, अतः आपको +1 दबाना चाहिए?

पद— **(–1) – (–2) = (+1)**

(b) यदि लक्षित तल –1 है और प्रारंभिक तल +3 है, तो आपको कौन-सा बटन दबाना चाहिए? आपको चार तल नीचे जाने की आवश्यकता है, अतः आपको –4 दबाना चाहिए।

पद— **(–1) – (+3) = (–4)**

(c) यदि लक्षित तल +2 है और प्रारंभिक तल –2 है, तो आपकी कौन-सा बटन दबाना चाहिए। आपको चार तल ऊपर जाने की आवश्यकता है, अतः आपको +4 दबाना चाहिए।

पद— **(+2) – (–2) = (+4)**

आइए, पता लगाएँ

दिए गए पदों को पूरा कीजिए। आप इन्हें प्रारंभिक तल से लक्षित तल तक पहुँचने के लिए आवश्यक गति प्राप्त करने के रूप में सोच सकते हैं।

a. (+1) – (+4) = ________ b. (0) – (+2) = __________

c. (+4) – (+1) = ________ d. (0) – (–2) = __________

e. (+4) – (–3) = ________ f. (–4) – (–3) = _________

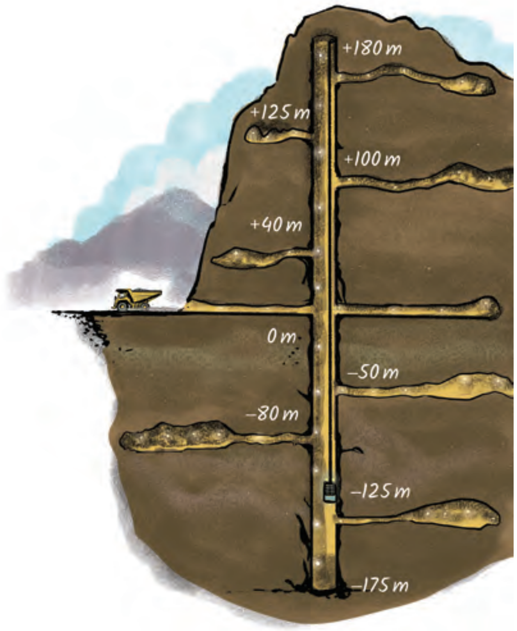
g. (–1) – (+2) = ________ h. (–2) – (–2) = _________

i. (–1) – (+1) = ________ j. (+3) – (–3) = _________

Reprint 2025-26

बड़ी संख्याओं को जोड़ना और घटाना

दिया गया चित्र एक खदान को दर्शाता है। यह वह स्थान होता है जहाँ से चट्टानों को खोदकर खनिजों को निकाला जाता है। एक ट्रक भूतल पर है, लेकिन खनिज भूतल से ऊपर तथा नीचे दोनों तरफ हैं। यहाँ एक तेज गति से चलने वाली लिफ्ट है जो लोगों और कच्ची धातु को लेकर ऊपर-नीचे जाती है।



चित्र में कुछ स्तरों को अंकित किया गया है। भूतल को 0 से अंकित किया गया है। भूतल से ऊपर के स्तरों को धनात्मक संख्याओं और भूतल से नीचे के स्तरों को ऋणात्मक संख्याओं से अंकित किया गया है। यह संख्या दर्शाती है कि यह भूतल से कितने मीटर ऊपर या नीचे है।

मजेदार इमारत की तरह, खदान में—

प्रारंभिक तल + गति = लक्षित तल

उदाहरण के लिए,

$(+40) + (+60) = +100$ $\qquad$ $(-90) + (-55) = -145$

लक्षित स्तर – प्रारंभिक स्तर = आवश्यक गति

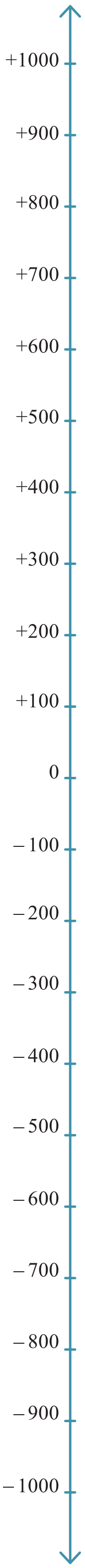
उदाहरण के लिए,

$(+40) - (-50) = +90$ $\qquad$ $(-90) - (+40) = -130$

वहाँ कितनी ऋणात्मक संख्याएँ हैं?

बेला की मजेदार इमारत में सिर्फ छः तल ऊपर तथा पाँच तल नीचे थे अर्थात् संख्या –5 से +6 भी ऊपर दिए गए खदान के उदाहरण में हमारे पास –200 से +180 तक संख्याएँ हैं। लेकिन हम बड़ी से बड़ी इमारतों और खदानों के विषय में कल्पना कर सकते हैं। जैसा कि धनात्मक संख्याएँ +1,+2,+3,... बिना अंत के ऊपर की तरफ बढ़ती हैं, इसी प्रकार ऋणात्मक संख्याएँ –1, –2, –3,...बिना अंत के नीचे की तरफ बढ़ती रहती हैं। शून्य सहित धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं को **पूर्णांक** कहा जाता है। वे शून्य के दोनों तरफ बढ़ती हैं ... –3,–2,–1, 0,+1,+2,+3..........

Reprint 2025-26



आइए, पता लगाएँ

दिए गए पदों को पूरा कीजिए—

a. $(+40) + \_\_\_\_\_\_ = +200$ b. $(+40) + \_\_\_\_\_\_ = -200$

c. $(-50) + \_\_\_\_\_\_ = +200$ d. $(-50) + \_\_\_\_\_\_ = -200$

e. $(-200) - (-40) = \_\_\_\_\_\_$ f. $(+200) - (+40) = \_\_\_\_\_\_$

g. $(-200) - (+40) = \_\_\_\_\_\_$

खदान कूपक (Shaft) में गति के विषय में सोचकर अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

किन्हीं भी संख्याओं का योग, घटाना और तुलना करना

बड़े पूर्णांकों को जोड़ने और घटाने के लिए हम बड़ी लिफ्ट की कल्पना कर सकते हैं। वास्तव में, हम ऐसी लिफ्ट की कल्पना कर सकते हैं जो शून्य (0) स्तर से आरंभ हो तथा ऊपर और नीचे की ओर हमेशा के लिए बढ़ाई जा सके। भले ही वहाँ कोई भवन या खदान न हो सिर्फ एक 'अनंत लिफ्ट' हो!

हम इस कल्पना का प्रयोग पूर्णांकों को जोड़ने या घटाने के लिए कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, हमें $+2000 - (-200)$ को हल करना है। हम एक ऐसी लिफ्ट की कल्पना कर सकते हैं जो भूतल से 2000 स्तर ऊपर हो तथा 200 तल भूतल से नीचे हो। याद कीजिए कि—

लक्षित तल – प्रारंभिक तल = आवश्यक गति

प्रारंभिक तल -200 से लक्षित तल $+2000$ की ओर चलने के लिए हमें $+2200$ ($+200$ शून्य प्राप्त करने के लिए, और उसके पश्चात् $+2000$ और अधिक ताकि हम $+2200$ प्राप्त कर सकें) दबाना होगा। इसलिए, $(+2000) - (-200) = +2200$

ध्यान दीजिए, $(+2000) + (+200)$ भी $+2200$ होता है।

इसी प्रकार की लिफ्ट बनाकर या कल्पना करके निम्नलिखित पदों को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए—

a. $-125 + (-30)$ b. $+105 - (-55)$

c. $+105 + (+55)$ d. $+80 - (-150)$

e. $+80 + (+150)$ f. $-99 - (-200)$

g. $-99 + (+200)$ h. $+1500 - (-1500)$

Reprint 2025-26

दिए गए उदाहरण में, हम देखते हैं कि $+2000-(-200)=+2000+(+200)=+2200$ अन्य शब्दों में, एक ऋणात्मक संख्या को घटाना, संगत धनात्मक संख्या को जोड़ने के समान है अर्थात् हम ऋणात्मक संख्या के घटा को, धनात्मक संख्या के योग से बदल सकते हैं।

पिछले अभ्यासों में आपने जो उपरोक्त कार्य किया है, क्या आपने ध्यान दिया कि एक ऋणात्मक संख्या को घटाना, उसी संगत धनात्मक संख्या के जोड़ने के समान है?

संदर्भ के रूप में ली गई 'अनंत लिफ्ट' पर ध्यान दीजिए। क्या यह आपको संख्या रेखा की याद दिलाती है? किस प्रकार से?

गणित चर्चा

संख्या रेखा पर वापसी

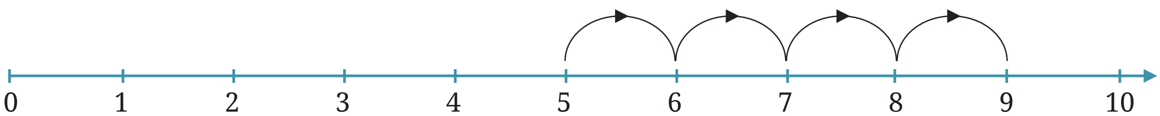
हमने इस अध्याय में पीछे जो 'अनंत लिफ्ट' देखी है, वह एक संख्या रेखा की तरह दिखाई देती है, है ना? वास्तव में यदि हम इसे 90° पर घुमा दें तो यह एक संख्या रेखा बन जाती है। यह हमें बताती है कि एक किरण रेखा को एक संख्या रेखा में कैसे पूरा करें। इसके साथ ही उस प्रश्न का उत्तर भी देती हैं, जो हमने इस अध्याय के आरंभ में पूछा था। शून्य के बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ -1, -2, -3,.... लिखते हैं।

सामान्यत: हम धनात्मक संख्याओं पर लगा '+' चिह्न हटा देते हैं और उन्हें केवल 1, 2, 3,... के रूप में लिखते हैं।

एक लिफ्ट द्वारा संख्या रेखा पर यात्रा करने के बजाए, हम इस पर चलने की कल्पना कर सकते हैं। संख्या रेखा पर दाईं ओर धनात्मक (आगे) तथा बाईं ओर ऋणात्मक (पीछे) दिशा है।

छोटी संख्याएँ, बड़ी संख्याओं के बाईं ओर लिखी जाती हैं तथा बड़ी संख्याएँ छोटी संख्याओं के दाईं ओर लिखी जाती हैं इसलिए, $2 < 5$; $-3 < -2$ और $-5 < -3$

यदि आप संख्या रेखा पर चिह्नित 5 पर खड़े हैं और वहाँ से आप 9 पर पहुँचना चाहते है, इसके लिए आपको संख्या रेखा पर कितने कदम चलना है?



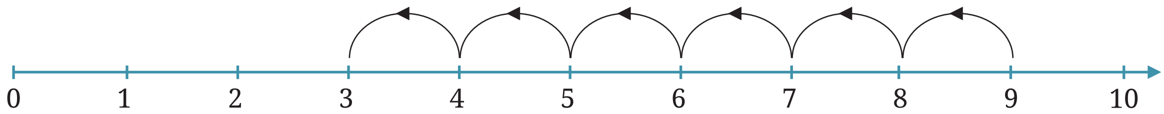
आपको 4 कदम चलना पड़ेगा। यही कारण है $5 + 4 = 9$

(याद रखिए— **प्रारंभिक संख्या + गति = लक्षित संख्या**)

इसके संगत घटाने का कथन है $9 - 5 = 4$ ।

(याद रखिए— **लक्षित संख्या – प्रारंभिक संख्या = आवश्यक गति**)

- अब, यदि आप 9 से 3 पर जाना चाहते हैं, तो आपको संख्या रेखा पर कितने कदम चलना है?



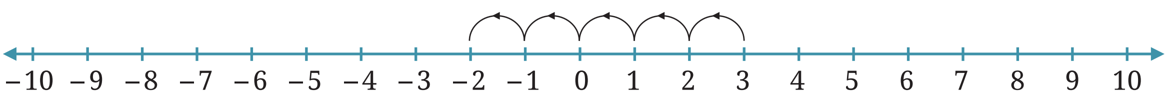
आपको 6 कदम पीछे चलना है, अर्थात् आपको –6 कदम चलना है। अत: हम लिखते हैं $9 + (-6) = 3$

(पुनः याद रखिए— **प्रारंभिक संख्या + गति = लक्षित संख्या**)

घटाने का संगत कथन है— $3 - 9 = -6$

(पुनः याद रखिए— **लक्षित संख्या – प्रारंभिक संख्या = आवश्यक गति**)

- अब आप 3 से यदि –2 पर जाना चाहते हैं तो आपको कितने कदम चलना है?



आपको –5 कदम चलना है अर्थात् 5 कदम पीछे अत: $3 + (-5) = -2$

इसके संगत घटाने का कथन है— $2 - 3 = -5$

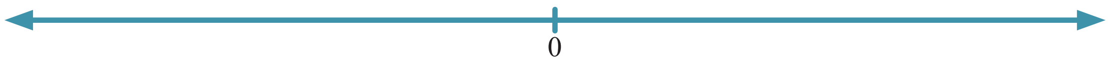
आइए, पता लगाएँ

1. उपरोक्त संख्या रेखा पर 3 धनात्मक तथा 3 ऋणात्मक संख्याओं को चिह्नित कीजिए।
2. उपरोक्त 3 ऋणात्मक चिह्नित संख्याओं को दिए गए बॉक्स में लिखिए— $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
3. क्या $2 > -3$? क्यों? $-2 < 3$? क्यों?

4. हल कीजिए a. $-5+0$ b. $7+(-7)$ c. $-10+20$
d. $10-20$ e. $7-(-7)$ f. $-8-(-10)$?

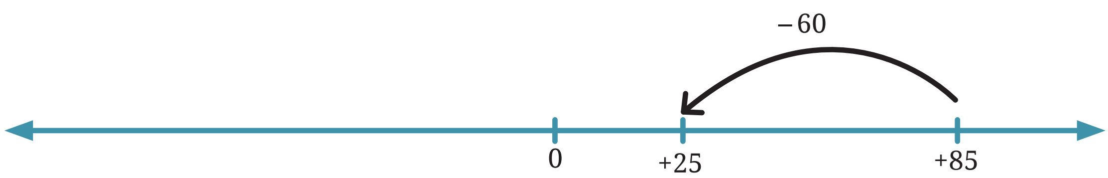
जोड़ और घटा के लिए बिना अंकित की गई संख्या रेखा का प्रयोग

आप उपरोक्त संख्या रेखा का प्रयोग केवल छोटी संख्याओं के योग, घटा एवं तुलना के लिए कर सकते हैं। आप एक काल्पनिक 'अनंत संख्या रेखा' या 'अचिह्नित संख्या रेखा' के प्रयोग से भी उपरोक्त संक्रियाएँ हल कर सकते हैं, जैसे—



यह रेखा सिर्फ शून्य की स्थिति को दर्शाती है। इसमें अन्य संख्याओं को अंकित नहीं किया गया है। पूर्णांकों के जोड़ और घटा के लिए इस अचिह्नित संख्या रेखा का उपयोग करना सुविधाजनक है।आप संख्या रेखा पर संख्याएँ अंकित करने के लिए अपनी कल्पना के अनुसार कोई पैमाना ले सकते हैं और इससे संख्याओं की स्थितियाँ अंकित कर सकते हैं।

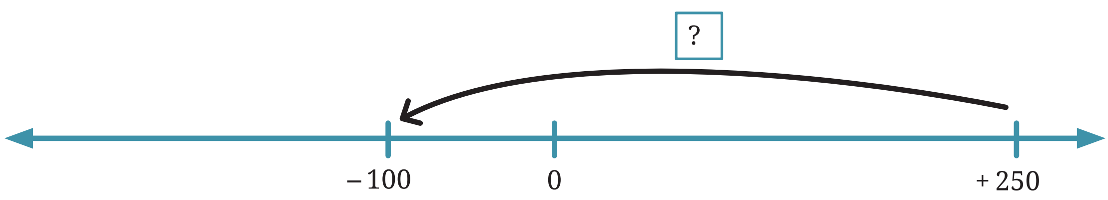
उदाहरण के लिए, यह अचिह्नित संख्या रेखा (Unmarked Number line (UNL)) योग के प्रश्न को दर्शाती है— $(+85)+(-60)=?$



तब हम कल्पना कर सकते हैं कि $85 + (-60) = 25$

निम्नलिखित अचिह्नित संख्या रेखा (UNL) एक घटाने की समस्या को दर्शाती है, इसे लुप्त परिशिष्ट संख्या से संबंधित समस्या के रूप में भी लिखा जा सकता है—

$(-100)-(+250)=?$ या $250 + ? = -100$



हम इस समस्या में देख सकते हैं कि $? = -350$

इस तरह आप धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के साथ जोड़ और घटा के प्रश्नों को कागज पर या अपने मस्तिष्क में एक अचिह्नित संख्या रेखा का उपयोग करके हल कर सकते हैं।

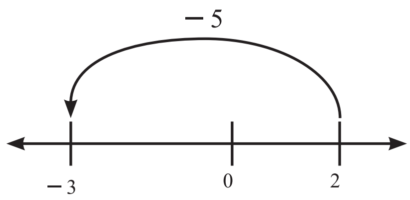
अचिह्नित संख्या रेखा का उपयोग कर निम्नलिखित पदों को पूर्ण कीजिए—

a. $-125 + (-30)$

b. $+105 - (-55)$

c. $+80 - (-150)$

d. $-99 - (-200)$



घटा को जोड़ तथा जोड़ को घटा में बदलना

याद कीजिए— **लक्षित तल – प्रारंभिक तल = आवश्यक गति**

या

लक्षित तल = प्रारंभिक तल + आवश्यक गति

यदि हम 2 से प्रारंभ करते हैं और –3 पर पहुँचना चाहते हैं, तो हमें कितनी गति की आवश्यकता है?

पहला तरीका— संख्या रेखा को देखने पर हमें पता चलता है कि हमें –5 (यानी, पीछे की दिशा में 5) बढ़ना है। इसलिए, **$-3 - 2 = -5$** है। अतः आवश्यक गति– 5 है।

दूसरा तरीका— 2 से –3 की यात्रा को दो भागों में बाँटते हैं।

a. 2 से 0, गति है $0 - 2 = -2$

b. 0 से –3, गति है $-3 - 0 = -3$

कुल गति दोनों गतियों का योग है **$-3 + (-2) = -5$**

उपर्युक्त दोनों रंगीन पदों को देखिए। दूसरे पद में कोई घटा नहीं है!

इस प्रकार, हम हमेशा घटा को जोड़ में बदल सकते हैं। **वह संख्या जो कि घटायी जा रही है, उसे उसके योज्य प्रतिलोम से बदला जा सकता है और फिर जोड़ा जा सकता है।**

इसी तरह, किसी संख्या को जोड़ा जा रहा है तो उसके योज्य प्रतिलोम से बदला जा सकता है और फिर घटाया जा सकता है। इस प्रकार हम हमेशा जोड़ को घटाव में भी बदल सकते हैं।

उदाहरण—

a. $(+7) - (+5) = (+7) + (-5)$

b. $(-3) - (+8) = (-3) + (-8)$

c. $(+8) - (-2) = (+8) + (+2)$

d. $(+6) - (-9) = (+6) + (+9)$

10.2 टोकन मॉडल

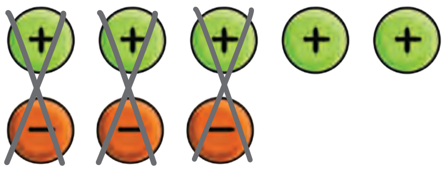
जोड़ने के लिए टोकन का उपयोग

बेला की मजेदार इमारत का लिफ्ट चालक ऊब गया है। स्वयं के मनोरंजन के लिए, वह एक बॉक्स रखता है जो कि कई धनात्मक "हरा" और ऋणात्मक "लाल" टोकन से भरा है। हर बार जब वह '+' बटन दबाता है, वह एक धनात्मक "हरा" टोकन बॉक्स से उठाकर उसे अपनी जेब में रखता है। इसी तरह प्रत्येक बार जब वह '–' बटन दबाता है, वह एक ऋणात्मक "लाल" टोकन उठाकर अपनी जेब में रखता है।

वह अपनी खाली जेब के साथ भूतल से प्रारंभ करता है। एक घंटे बाद उसने अपनी जेब की जाँच की तो उसे 5 धनात्मक और 3 ऋणात्मक टोकन प्राप्त हुए। बताइए अब वह किस तल पर है?

उसने '+' को 5 बार तथा '–' को 3 बार दबाया होगा। और $(+5)+(-3) = +2$ अतः अब वह $+2$ तल पर है।

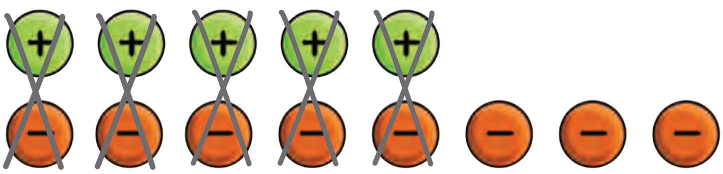
यहाँ गणना करने का अन्य तरीका भी दिया गया है जैसे—



एक धनात्मक टोकन और एक ऋणात्मक टोकन एक-दूसरे को रद्द कर देते हैं और इस जोड़े का मान शून्य हो जाता है। (उसकी जेब में इन दो टोकन का अर्थ था कि उसने क्रमशः एक बार '+' दबाया और एक बार '–' दबाया जो कि एक-दूसरे को रद्द कर देते हैं।) हम कह सकते हैं कि एक धनात्मक और एक ऋणात्मक टोकन एक 'शून्य जोड़ा' बनाते हैं। जब आप सभी शून्य जोड़ों को हटा देते हैं, तब आपके पास दो धनात्मक टोकन बचते हैं, अतः $(+5) + -(3) = +2$

हम टोकन के उपयोग से इस प्रकार के अन्य जोड़ भी कर सकते हैं।

उदाहरण— $+5$ और -8 को जोड़िए।



Reprint 2025-26

चित्र में हम देखते हैं कि पाँच शून्य जोड़े हटा सकते हैं और हमारे पास – 3 बचता है। इसलिए (+5) + (– 8)= – 3

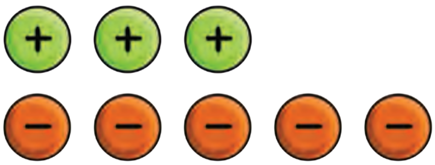
आइए, पता लगाएँ

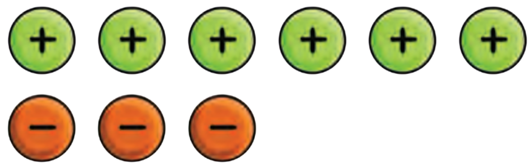
1. टोकन का उपयोग करते हुए जोड़ को पूरा कीजिए।

   a. (+ 6) + (+ 4) b. (– 3) + (– 2)

   c. (+ 5) + (– 7) d. (– 2) + (+ 6)

2. नीचे दिए गए टोकन युग्म में से शून्य युग्म को निरस्त (रद्द) कीजिए। प्रत्येक स्थिति में लिफ्ट चालक कौन-से तल पर है? प्रत्येक स्थिति में संगत धनात्मक कथन क्या होगा?

a. 

b. 

टोकन के उपयोग द्वारा घटाना

हम देख चुके हैं कि धनात्मक टोकन और ऋणात्मक टोकन के साथ पूर्णांकों का जोड़ कैसे करते हैं? हम टोकन का उपयोग करके घटा भी कर सकते हैं?

उदाहरण— आइए, घटाएँ—

(+ 5) – (+ 4)

(+ 5) – (+ 4) = + 1

यह करना सरल है। परिणाम के लिए 5 धनात्मक में से 4 धनात्मक निकाल लेते हैं।

अत: (+ 5) – (+ 4) = + 1

उदाहरण— आइए, घटाएँ—

(– 7) – (– 5)

(–7) – (–5) = –2

क्या (– 7) – (– 5) और (– 7) + (+ 5) समान हैं?

उदाहरण— आइए, घटाएँ—

(+ 5) – (+ 6)

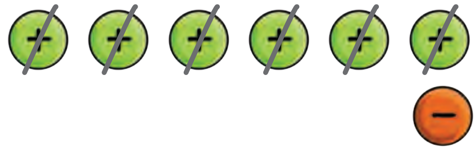
5 धनात्मक रखिए

लेकिन यहाँ 6 धनात्मक लेने के लिए पर्याप्त टोकन नहीं है।

Reprint 2025-26

इस समस्या से निपटने के लिए हम एक अतिरिक्त शून्य जोड़ा (एक धनात्मक व एक ऋणात्मक) हमें यह भी ज्ञात है, कि जो टोकन का सेट दिया हुआ है, इससे उसके मान में कोई अंतर नहीं आता है।

अब आप 6 धनात्मक ले सकते हैं। देखिए क्या शेष रहा है?



अत: (+ 5) – (+6)= – 1

आइए, पता लगाएँ

1. टोकन का उपयोग करके निम्नलिखित अंतरों का मूल्यांकन कीजिए। यह भी जाँचिए कि आपको वही परिणाम मिलता है जो अब आप अन्य तरीकों से जानते हैं। घटाव को पूरा कीजिए—

   a. (+ 10) – (+ 7) b. (– 8) – (– 4) c. (– 9) – (– 4)

   d. (+ 9) – (+ 12) e. (– 5) – (– 7) f. (– 2) – (6)

2. घटाव को पूरा कीजिए—

   a. (– 5) – (– 7) b. (+ 10) – (+ 13) c. (– 7) – (– 9)

   d. (+ 3) – (+ 8) e. (– 2) – (– 7) f. (+ 3) – (+ 15)

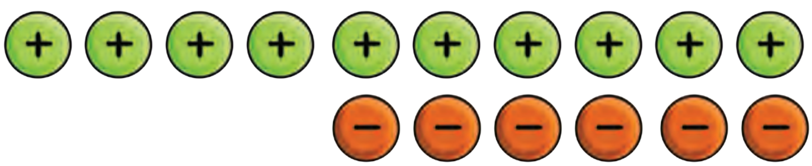
उदाहरण— (+ 4) – (– 6)

4 धनात्मक के साथ आरंभ करते हैं

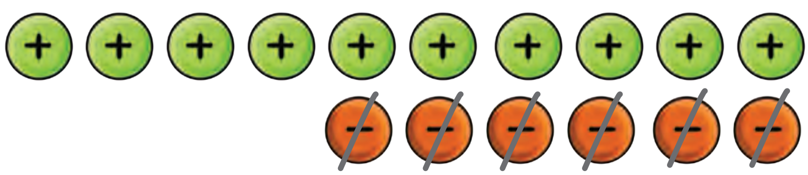
हमें इनमें से 6 ऋणात्मक लेने हैं, लेकिन यहाँ पर्याप्त ऋणात्मक नहीं हैं।

ऐसा करने में कोई समस्या नहीं है। इसमें कि हम कुछ शून्य जोड़े रखते हैं, क्योंकि इससे दिए गए टोकनों के सेट के मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

लेकिन कितने शून्य जोड़े? हमें 6 ऋणात्मक लेने हैं, अतः हम 6 शून्य जोड़ों को रखते हैं—



अब 6 ऋणात्मक ले लेते हैं—



अतः, (+ 4) – (– 6)= + 10

आइए, पता लगाएँ

1. घटाने का प्रयास कीजिए— $-3-(+5)$
   आपको कितने शून्य के जोड़े रखने होंगे? इसका परिणाम क्या होगा?
2. टोकन का उपयोग करते हुए निम्न का मूल्यांकन कीजिए।
   a. $(-3)-(+10)$ b. $(+8)-(-7)$ c. $(-5)-(+9)$
   d. $(-9)-(+10)$ e. $(+6)-(-4)$ f. $(-2)-(+7)$

10.3 अन्य स्थानों पर पूर्णांक

लेन-देन (जमा-निकासी)

माना आप अपनी पिछले महीने के ₹100 की बचत से स्थानीय बैंक में एक खाता खोलते हैं। अब बैंक में आपकी जमा राशि ₹100 हैं।

अगले दिन आप ₹60 कमा लेते हैं और बैंक में जमा करा देते हैं (यह राशि आपकी पासबुक में ‘जमा’ (credit) के रूप में दर्शाई गई है)।

- आपकी बैंक में नई शेष जमा राशि ______ है।

अगले दिन आप अपने बैंक खाते से ₹30 का बिजली बिल का भुगतान करते हैं। यह राशि आपकी बैंक पासबुक में ‘निकासी’ (debit) के रूप में दर्शाई गई है।

- अब आपकी बैंक में शेष जमा राशि ______ है।

अगले दिन आपको व्यवसाय के लिए ₹150 की एक बड़ी खरीददारी करनी पड़ी। पुनः खाते में यह राशि निकासी में दर्शाई गई है।

- अब आपकी बैंक में शेष जमा राशि क्या है? ______

क्या यह संभव है?

हाँ, कुछ बैंक अस्थायी रूप से आपकी जमा राशि को ऋणात्मक होने की अनुमति देते हैं। यदि आपकी जमा राशि ऋणात्मक होती है, तो बैंक ब्याज या शुल्क के रूप में कुछ अतिरिक्त शुल्क लेते हैं।

पिछले दिन की आपकी बड़ी खरीददारी की रणनीति से आपके व्यवसाय में अगले दिन की आय ₹200 थी।

Reprint 2025-26

- अब आपकी शेष जमा राशि क्या है?_____

आप जमा राशि को धनात्मक तथा निकासी को ऋणात्मक संख्याओं के रूप में सोच सकते हैं। आपकी कुल जमा (धनात्मक संख्या) और निकासी (ऋणात्मक संख्या) का योग आपके बैंक खाते में कुल शेष जमा राशि है। यह धनात्मक या ऋणात्मक में से कोई भी हो सकती है।

सामान्यत:, आपको बैंक खाते में धनात्मक योग राशि रखने का प्रयास करना चाहिए।

आइए, पता लगाएँ

1. माना आप ₹0 के साथ अपना बैंक खाता खोलते हैं, इसके पश्चात् आप उसमें ₹30, ₹40, और ₹50 जमा करवाते हैं और ₹40, ₹50 और ₹60 की निकासी करते हैं। अब आपके बैंक खाते में कितनी जमा राशि शेष है?
2. माना आप ₹0 के साथ अपना बैंक खाता खोलते हैं और अपने उसी खाते में से ₹1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 और 128 निकाल लेते हैं, इसके पश्चात् आप एक बार में ₹256 रूपये जमा कर देते हैं। अब आपके बैंक खाते में कितनी जमा राशि शेष है?
3. आपके बैंक खाते में प्राय: धनात्मक जमा राशि अधिक अच्छी क्यों मानी जाती है? ऐसी कौन-सी परिस्थितियाँ हो सकती हैं, जिनके तहत अस्थायी रूप से ऋणात्मक (निकासी) शेष जमा राशि सार्थक हो सकती है?

जैसा कि आप देख सकते हैं, शून्य के साथ-साथ धनात्मक और ऋणात्मक संख्याएँ बैंकिंग और लेखांकन के क्षेत्र में अत्यंत उपयोगी हैं।

भूगोलीय प्रतिच्छेद

हम भूगोलीय विशेषताओं, जैसे— पर्वत, पठार और रेगिस्तान आदि की ऊँचाई 'समुद्र तल' से आरंभ करके नापते हैं। समुद्र तल पर ऊँचाई 0 मी. होती है। समुद्र तल से ऊपर की ऊँचाई धनात्मक तथा उससे नीचे की गहराई को ऋणात्मक संख्याओं से प्रदर्शित करते हैं।

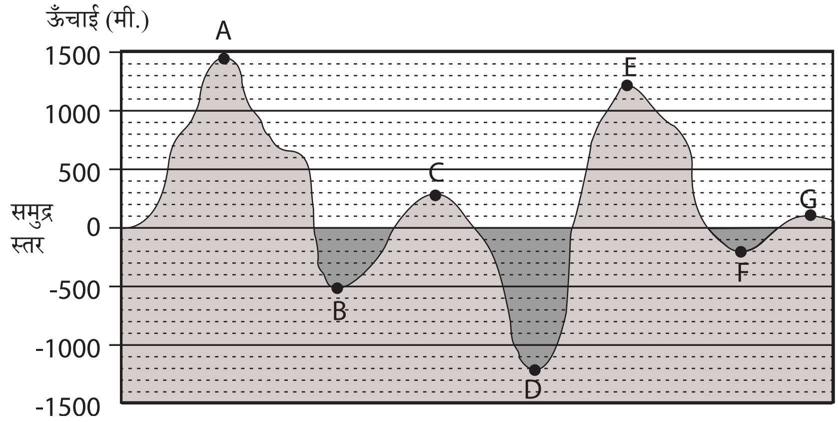
आइए, पता लगाएँ

1. भौगोलिक प्रतिच्छेद को देखते हुए उनकी संबंधित ऊँचाइयाँ लिखिए—

a. ☐ b. ☐ c. ☐ d. ☐

e. ☐ f. ☐ g. ☐

Reprint 2025-26



अध्यापक टिप्पणी

आप बच्चों से इस पृष्ठ पर चित्र दिखाकर पूछिए कि भौगोलिक प्रतिच्छेद क्या है? क्या यह पृथ्वी पर किसी स्थान पर निकाले गए एक ऊर्ध्वाधर टुकड़े की कल्पना करने जैसा है। एक तरफ से देखने पर यह ऐसा ही दिखेगा। भूगोल में ऊँचाई और गहराई मापने के लिए 'समुद्र तल' की अवधारणा पर चर्चा कीजिए।

2. इस भौगोलिक प्रतिच्छेद में सबसे उच्चतम बिंदु एवं सबसे निम्नतम बिंदु कौन-सा है?
3. क्या आप बिंदुओं A, B, ..., G को ऊँचाइयों के अवरोही (घटते) क्रम में लिख सकते हैं? क्या आप बिंदुओं को ऊँचाइयों के आरोही (बढ़ते) क्रम में लिख सकते हैं?
4. पृथ्वी पर समुद्र तल से सबसे ऊँचा स्थान कौन-सा है? इसकी ऊँचाई कितनी है?
5. भूमि या महासागर तल पर समुद्र तल के सापेक्ष सबसे निम्नतम बिंदु क्या है? इसकी ऊँचाई कितनी है? (यह ऊँचाई ऋणात्मक होनी चाहिए।)

तापमान

गर्मी के दिनों में आपने समाचारों में गर्म लहर (heatwave) के बारे में सुना होगा। जिसके फलस्वरूप आपको बहुत अधिक गर्मी लगती है, क्या आप बता सकते हैं कि उस समय तापमान क्या होता होगा? सर्दी के दिनों में तापमान ज्यादा ठंडा रहता है।

विगत वर्ष आपके क्षेत्र में गर्मियों का अधिकतम तापमान तथा सर्दियों का न्यूनतम तापमान क्या अंकित किया गया था? पता लगाइए।

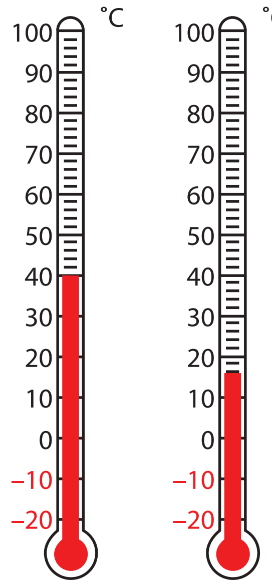
जब हम तापमान मापते हैं; तो मापन की इकाई को सेल्सियस (°C) में लेते हैं। आगे दी गई तापमापी (थर्मामीटर) 40°C और 15°C तापमान दर्शा रहे हैं।

Reprint 2025-26

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप जानते हैं कि भारत में कुछ ऐसे स्थान भी हैं जहाँ कभी-कभी तापमान 0°C से नीचे चला जाता है? भारत में ऐसे स्थानों का पता लगाइए जहाँ तापमान सामान्यत: बार 0°C से भी नीचे पहुँच जाता है। इन स्थानों में क्या समानता है? अन्य स्थानों की तुलना में यहाँ अधिक ठंड क्यों होती है?

2. लद्दाख के लेह क्षेत्र में सर्दी के समय अत्यधिक ठंड हो जाती है। नीचे दी गई सारणी को देखिए, यह लेह के नवंबर माह के, एक दिन के विभिन्न समयों के तापमान को दर्शाती है। साथ दिन और रात के सही समय के साथ संबंधित तापमान का मिलान कीजिए।



गणित चर्चा

तापमान
14°C
8°C
–2°C
–4°C

समय
02:00 a.m.
11:00 p.m.
02:00 p.m.
11:00 a.m.

अध्यापक टिप्पणी

आप, विद्यार्थियों के साथ तापमापी एवं उससे तापमान कैसे मापते हैं; इस पर चर्चा कीजिए। कक्षा-कक्ष में तापमापी लेकर आइए तथा गर्म एवं ठंडे पानी का तापमान मापकर विद्यार्थियों को दिखाइए। बच्चों को बताइए की तापमापी पर 0°C से नीचे भी संख्याएँ अंकित हैं। विद्यार्थियों से चर्चा कीजिए कि 0°C पर क्या दर्शाता है जैसे— 0°C पानी का जमाव बिंदु क्या होगा।

10.4 पूर्णांकों के साथ अन्वेषण

एक रिक्त पूर्णांक ग्रिड

4	–1	–3
–3		1
–1	–1	2

5	–3	–5
0		–5
–8	–2	7

इन दोनों ग्रिडों में संख्याओं के विषय में कुछ विशेष है। आइए, जानते हैं कि वह क्या है?.

ऊपर की पंक्ति	—	$4 + (-1) + (-3) = 0$	$5 + (-3)+(-5) =$ _____
अंतिम पंक्ति	—	$(-1) + (-1) + 2 = 0$	$(-8) + (-2) + (7) =$ _____
बायाँ स्तंभ	—	$4 + (-3) + (-1) = 0$	$5 + 0 + (-8) =$ _____
दायाँ स्तंभ	—	$(-3) + 1 + 2= 0$	$(-5) + (-5) + (7) =$ _____

प्रत्येक ग्रिड में, दो पंक्तियों (ऊपर की पंक्ति व अंतिम पंक्ति) में से प्रत्येक की संख्याएँ और दो स्तंभों (बायाँ स्तंभ व दायाँ स्तंभ) में से प्रत्येक की संख्याओं को जोड़ने पर एक ही संख्या प्राप्त होती है। इस योग को हम 'सीमा योग' कह सकते हैं। प्रथम ग्रिड का 'सीमा योग' '0' है।

आइए, पता लगाएँ

1. उपरोक्त दूसरे ग्रिड के लिए गणना कीजिए और सीमा योग ज्ञात कीजिए।
2. आवश्यक सीमा योग बनाने के लिए ग्रिड को पूर्ण कीजिए—

-10		
		-5
9		

सीमा योग 4 है।

6	8	
		-5
	-2	

सीमा योग –2 है

7		
		-5

सीमा योग –4 है।

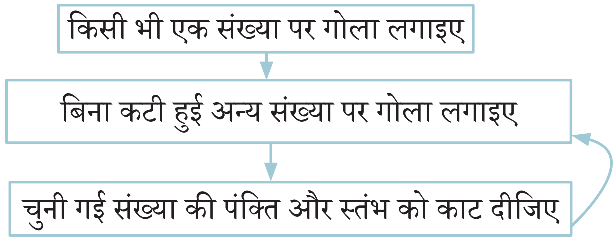
3. उपरोक्त अंतिम ग्रिड में -4 सीमा योग प्राप्त करने के लिए एक से अधिक तरीके बताइए।
4. कौन-सी अन्य ग्रिड विभिन्न विधियों से भरी जा सकती है ? इसके क्या कारण हो सकते हैं?
5. एक सीमा पूर्णांक वर्ग पहेली बनाइए और इसे पूर्ण करने के लिए सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

संख्याओं का अद्भुत ग्रिड!

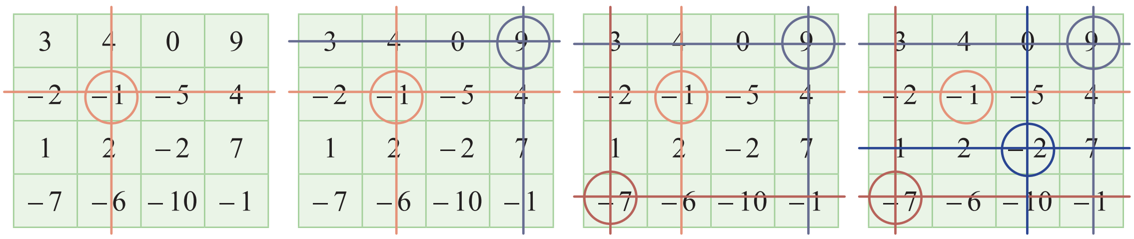
अध्याय में आगे एक ग्रिड दिया है जिसमें कुछ संख्याएँ दर्शाई हैं। दिए गए चरणों का तब तक अनुसरण कीजिए जब तक कोई संख्या शेष ना रह जाए।

Reprint 2025-26

3	4	0	9
– 2	– 1	– 5	4
1	2	– 2	7
– 7	– 6	– 10	– 1



जब कोई बिना कटी संख्या न रह जाए, तब रुकिए। गोला लगी संख्याओं को जोड़िए। नीचे दिए गए उदाहरण में, गोला लगी संख्याएँ –1, 9, –7, –2 हैं। यदि आप इन्हें जोड़ेंगे तो आपको –1 प्राप्त होगा।



आइए, पता लगाएँ

1. पुनः प्रयास कीजिए, इस बार अलग संख्याएँ चुनिए। आपको इन संख्याओं का क्या योग प्राप्त हुआ? क्या यह पहले से भिन्न है? कुछ और बार प्रयास कीजिए।
2. नीचे दी गई ग्रिड के साथ भी इसी तरह का खेल खेलिए। आप क्या उत्तर प्राप्त करते हैं?

7	10	13	16
– 2	1	4	7
– 11	– 8	– 5	– 2
– 20	– 7	– 14	– 11

– 11	– 10	– 9	– 8
– 7	– 6	– 5	– 4
– 3	– 2	– 1	0
1	2	3	4

3. इन ग्रिडों में क्या विशेष हो सकता है? क्या संख्याओं में जादू है या इन्हें व्यवस्थित करने के तरीके में जादू है या दोनों में हैं? क्या आप ऐसे और ग्रिड बना सकते हैं?

आइए, पता लगाएँ

प्रयास करें

1. दिए गए युग्मों के बीच सभी पूर्णांकों को बढ़ते क्रम में लिखिए।
   a. 0 और –7 b. – 4 और 4
   c. – 8 और –15 d. – 30 और – 23

2. ऐसी तीन संख्याएँ बताइए जिनका योग –8 है।

3. यहाँ दो पासे हैं जिनके फलकों पर संख्याएँ दर्शाई गई हैं— –1, 2, – 3, 4, – 5, 6 इन पासों को उछालने पर सबसे छोटा संभावित योग –10 = (– 5) + (– 5) है और सबसे बड़ा संभावित योग 12 = (6) + (6) है। इन दो पासों पर संख्याओं को जोड़ने से (– 10) और (+ 12) के बीच की कुछ संख्याएँ प्राप्त करना संभव नहीं है। ऐसी संख्याओं का पता लगाइए।

4. इन्हें हल कीजिए—

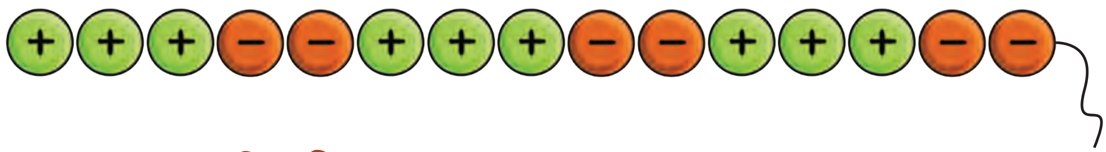
8 – 13	(– 8) – (13)	(– 13) – (– 8)	(– 13) + (– 8)
8 + (– 13)	(– 8) – (– 13)	(13) – 8	13 – (– 8)

5. निम्नलिखित के वर्ष ज्ञात कीजिए ?
   a. वर्तमान वर्ष से 150 वर्ष पूर्व कौन-सा वर्ष था? __________
   b. वर्तमान वर्ष से 2200 वर्ष पूर्व कौन-सा वर्ष था? __________
   संकेत— याद रखिए कि कोई 0 वर्ष नहीं था।
   c. 680 ईसा पूर्व से 320 वर्ष बाद कौन-सा वर्ष होगा? __________

6. निम्नलिखित अनुक्रम को पूरा कीजिए—
   a. (– 40), (– 34), (– 28), (– 22), _____, _____, _____
   b. 3, 4, 2, 5, 1, 6, 0, 7, _____, _____, _____
   c. _____, _____, 12, 6, 1, (– 3), (– 6), _____, _____, _____, _____

7. यहाँ छह पूर्णांक कार्ड हैं (+ 1), (+ 7), (+ 18), (– 5), (– 2), (– 9) आप इनमें से किसी भी कार्ड का चयन कर सकते हैं तथा जोड़ और घटा के उपयोग द्वारा एक पद बनाइए।
   यहाँ एक पद है— (+18) + (+1) – (+7) – (–2) जिसका मान (+14) है। दिए गए कार्ड्स से एक से अधिक कार्ड का चयन कीजिए और एक पद बनाइए जिसका मान (–30) के आस-पास हो।

8. दो धनात्मक पूर्णांकों का योग सदैव धनात्मक होता है लेकिन एक (धनात्मक पूर्णांक) –(धनात्मक पूर्णांक) धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। आप निम्न के विषय में क्या कह सकते हैं—
   a. (धनात्मक) – (ऋणात्मक) b. (धनात्मक) + (ऋणात्मक)
   c. (ऋणात्मक) + (ऋणात्मक) d. (ऋणात्मक) – (ऋणात्मक)
   e. (ऋणात्मक) – (धनात्मक) f. (ऋणात्मक) + (धनात्मक)
9. इस लड़ी में 100 टोकन हैं, जो एक विशेष पैटर्न में व्यवस्थित किए गए हैं, इस लड़ी का मान क्या है?



10.5 एक चुटकी इतिहास

सामान्य भिन्नों की तरह, सामान्य पूर्णांकों (शून्य और ऋणात्मक संख्याओं सहित) की कल्पना और प्रयोग एशिया में पहली बार हजारों वर्ष पूर्व किया गया था। इसके पश्चात् आधुनिक समय में यह अंतत: संपूर्ण विश्व में फैल गए।

ऋणात्मक संख्याओं के उपयोग का पहला ज्ञात उदाहरण लेखांकन के संदर्भ में है। चीन के सर्वाधिक गणितीय कार्यों में से *चैप्टर्स ऑन मैथमैटिकल* का अध्याय 9 (jinzhang suanshu), है। जो प्रथम या द्वितीय शताब्दी ईस्वी तक पूरा हो गया था। इस अध्याय में धनात्मक और ऋणात्मक संख्याएँ लाल एवं काली छड़ी द्वारा दर्शाई गई थीं, ठीक उसी तरह जैसे हमने उन्हें लाल और हरे टोकन का उपयोग करके दर्शाया था।

प्राचीन काल में भारत में भी लेखांकन की संस्कृति अत्यंत व्यापक थी। कौटिल्य ने अपने *अर्थशास्त्र* में (लगभग 300 ईसा पूर्व) जमा (क्रेडिट) और निकासी (डेबिट) की अवधारणा के बारे में विस्तार से लिखा था। इसमें यह मान्यता भी सम्मिलित थी कि खाता शेष ऋणात्मक हो सकता है। लेखांकन के संदर्भ में ऋणात्मक संख्याओं का स्पष्ट उपयोग कई प्राचीन भारतीय कार्यों में देखा जाता है, जिसमें वर्ष 300 ईस्वी के आस-पास की *बक्शाली* पांडुलिपि भी सम्मिलित है। इस पांडुलिपि में ऋणात्मक संख्या को एक विशेष प्रतीक का उपयोग करके संख्या के पश्चात् रखा जाता था (न कि संख्या से पहले जैसा कि हम वर्तमान समय में करते हैं)।

ब्रह्मगुप्त ने 628 ईस्वी में अपनी पुस्तक *ब्रहमस्फुटसिद्धांत* में पहली बार धनात्मक संख्याओं, ऋणात्मक संख्याओं और शून्य का प्रयोग एक समान रूप में जमा, घटा, गुणन और विभाजन के लिए

भी किया। ब्रह्मगुप्त ने स्पष्ट रूप से धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य के लिए कई आवश्यक नियम दिए। इन नियमों ने आधुनिक गणित हेतु मार्ग प्रशस्त किया जिसे हम वर्तमान समय में प्रयोग में ला रहे हैं।

ब्रह्मगुप्त के धनात्मक संख्याओं, ऋणात्मक संख्याओं तथा शून्य के जोड़ने एवं घटाने के कुछ मुख्य नियमों का वर्णन निम्नलिखित है—

ब्रह्मगुप्त के योग के लिए नियम (*ब्रह्मस्फुटसिद्धांत* 18.30, 628 ईस्वी):

1. दो धनात्मकों का योग धनात्मक होता है (जैसे— $2 + 3 = 5$)
2. दो ऋणात्मकों का योग ऋणात्मक होता है। दो ऋणात्मक को जोड़ने के लिए, दोनों संख्याओं को (बिना चिह्न के) जोड़ते हैं और तब प्राप्त परिणाम के सामने ऋणात्मक चिह्न लगा देते हैं। (जैसे— $(-2) + (-3) = -5$)
3. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक संख्या को जोड़ने के लिए, (बिना चिह्न के) बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाएँ और प्राप्त परिणाम पर बड़ी संख्या का चिह्न लगाइए। (जैसे— $-5 + 3 = -2$, $2 + (-3) = -1$, और $-3 + 5 = 2$)
4. एक संख्या तथा उसके प्रतिलोम का योग शून्य होता है। (जैसे— $2 + (-2) = 0$)
5. किसी संख्या और शून्य का योग, वही संख्या होती है। (जैसे— $-2 + 0 = -2$ और $0 + 0 = 0$)

घटाने के लिए ब्रह्मगुप्त के नियम (*ब्रह्मस्फुटसिद्धांत* 18.31-18.32)

1. एक बड़े धनात्मक में से एक छोटा धनात्मक घटाया जाए तो परिणाम धनात्मक रहता है। (जैसे— $3 - 2 = 1$)
2. एक छोटे धनात्मक में से एक बड़ा धनात्मक घटाया जाए तो परिणाम ऋणात्मक होता है। (जैसे— $2 - 3 = -1$)
3. एक ऋणात्मक संख्या को घटाना, इसके संगत धनात्मक संख्या को जोड़ने के समान है। (जैसे— $2 - (-3) = 2 + 3$)
4. एक संख्या को स्वयं में से घटाना शून्य प्रदान करता है। (जैसे— $2 - 2 = 0$ और $-2 - (-2) = 0$)

Reprint 2025-26

5. एक संख्या में से शून्य को घटाने पर वही संख्या प्राप्त होती है (जैसे— $(-2) - 0 = (-2)$ और $0 - 0 = 0$)। शून्य में से किसी संख्या को घटाने पर हमें इसका प्रतिलोम प्राप्त होता है। (जैसे— $0 - (-2) = 2$)

जब आप एक बार ब्रह्मगुप्त के नियमों को समझ लेते हैं तो आप किसी भी धनात्मक संख्या, ऋणात्मक संख्या और शून्य का जोड़ना और घटाना कर सकते हो।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या आप ब्रह्मगुप्त के नियमों को बेला की मजेदार इमारत या संख्या रेखा के अनुसार स्पष्ट कर सकते हो?
2. प्रत्येक नियम के लिए स्वयं के उदाहरण दीजिए।

ब्रह्मगुप्त पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने शून्य को धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं के समान महत्व दिया। इन्होंने सवर्प्रथम ऐसी सभी संख्याओं धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य पर अंकगणित की संक्रियाओं के लिए स्पष्ट नियम दिए जिसे अब *रिंग* के नाम से जाना जाता है। इससे संपूर्ण विश्व में गणित करने का तरीका बदल जाएगा।

हालाँकि शून्य एवं ऋणात्मक संख्याओं को संख्याओं के रूप मे स्वीकारने हेतु शेष विश्व को कई शताब्दियाँ लगीं। ये संख्याएँ 9वीं शताब्दी में अरब देशों में पहुँची, उनके द्वारा स्वीकार की गईं एवं गहन अध्ययन के पश्चात् 13वीं शताब्दी में यूरोपीय देशों में विस्तृत हुई।

आश्चर्य की बात यह है कि 18वीं शताब्दी में भी कई यूरोपीय देशों में गणितज्ञों द्वारा ऋणात्मक संख्याओं को स्वीकार नहीं किया गया था। 18वीं शताब्दी में एक फ्रांसीसी गणितज्ञ लाझारे कार्नोट ने ऋणात्मक सख्याओं को 'बेतुका' कहा था। परंतु कुछ समय बाद शून्य के साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी वैश्विक गणित और विज्ञान में अपरिहार्य सिद्ध हुईं। वर्तमान समय में ऋणात्मक, धनात्मक संख्याओं के साथ अत्यंत महत्वपूर्ण मानी जाती हैं, जैसा कि वर्ष 628 ईस्वी में ब्रह्मगुप्त ने बहुत स्पष्ट रूप से इन्हें अनुशंसित किया था। सभी संख्याओं पर अंकगणितीय नियमों के अमूर्त रूपों ने बीजगणित के आधुनिक विकास का मार्ग प्रशस्त किया, जिसके विषय में हम भविष्य की कक्षाओं में पढ़ेंगे।

Reprint 2025-26

सारांश

- ऐसी भी संख्याएँ हैं जो शून्य से कम हैं। उन्हें उनके सामने '–' चिह्न के साथ लिखा जाता है (उदाहरण के लिए, –2), और उन्हें **ऋणात्मक संख्याएँ** कहा जाता है। वे संख्याएँ रेखा पर शून्य के बाईं ओर स्थित हैं।
- संख्याएँ ..., – 4, – 3, – 2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ... **पूर्णांक** कहलाती हैं। संख्याएँ 1, 2, 3, 4, ... **धनात्मक पूर्णांक** कहलाती हैं और संख्याएँ ..., – 4, – 3, – 2, –1 **ऋणात्मक पूर्णांक** कहलाती हैं। शून्य (0) न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।
- प्रत्येक दी गई संख्या के साथ एक और संख्या जुड़ी होती है जिसे दी गई संख्या में जोड़ने पर शून्य प्राप्त होता है। इसे संख्या को **योज्य प्रतिलोम** कहते हैं। उदाहरण के लिए, 7 का योज्य प्रतिलोम –7 है और –543 का योज्य प्रतिलोम 543 है।
- जोड़ को **प्रारंभिक स्थिति** + **गति** = **लक्ष्य स्थिति** के रूप में समझा जा सकता है।
- जोड़ को गति के संयोजन की वृद्धि या कमी के रूप में भी समझा जा सकता है— **गति 1** + **गति 2** = **परिणामी गति।**
- घटाने को **लक्ष्य स्थिति** — **प्रारंभिक स्थिति** = **गति** के रूप में समझा जा सकता है।
- सामान्यत: हम ब्रह्मगुप्त के योग के नियमों का पालन करके दो संख्याओं को जोड़ सकते हैं—

  a. यदि दोनों संख्याएँ धनात्मक हैं, तो इन संख्याओं को जोडने पर एक धनात्मक संख्या प्राप्त होगी (जैसे— 2 + 3 = 5)।

  b. यदि दोनों संख्याएँ ऋणात्मक हैं, तो संख्याओं को जोड़िए (चिह्नों के बिना), इसके पश्चात् परिणाम प्राप्त करने के लिए ऋण चिह्न लगाइए (– 2 + (– 3) = – 5)।

  c. यदि एक संख्या धनात्मक है और दूसरी ऋणात्मक है, तो छोटी संख्या (चिह्न के बिना) को बड़ी संख्या (चिह्न के बिना) से घटाइए, और प्राप्त परिणाम में बड़ी संख्या का चिह्न लगाइए (उदाहरण के लिए, (जैसे— – 5 + 3 = (– 2)।

  d. एक संख्या और उसका योज्य प्रतिलोम शून्य होता है (जैसे— 2 + (– 2) = 0)।

  e. एक संख्या और शून्य को जोड़ने पर वही संख्या मिलती है (जैसे— – 2 + 0 = –2)।

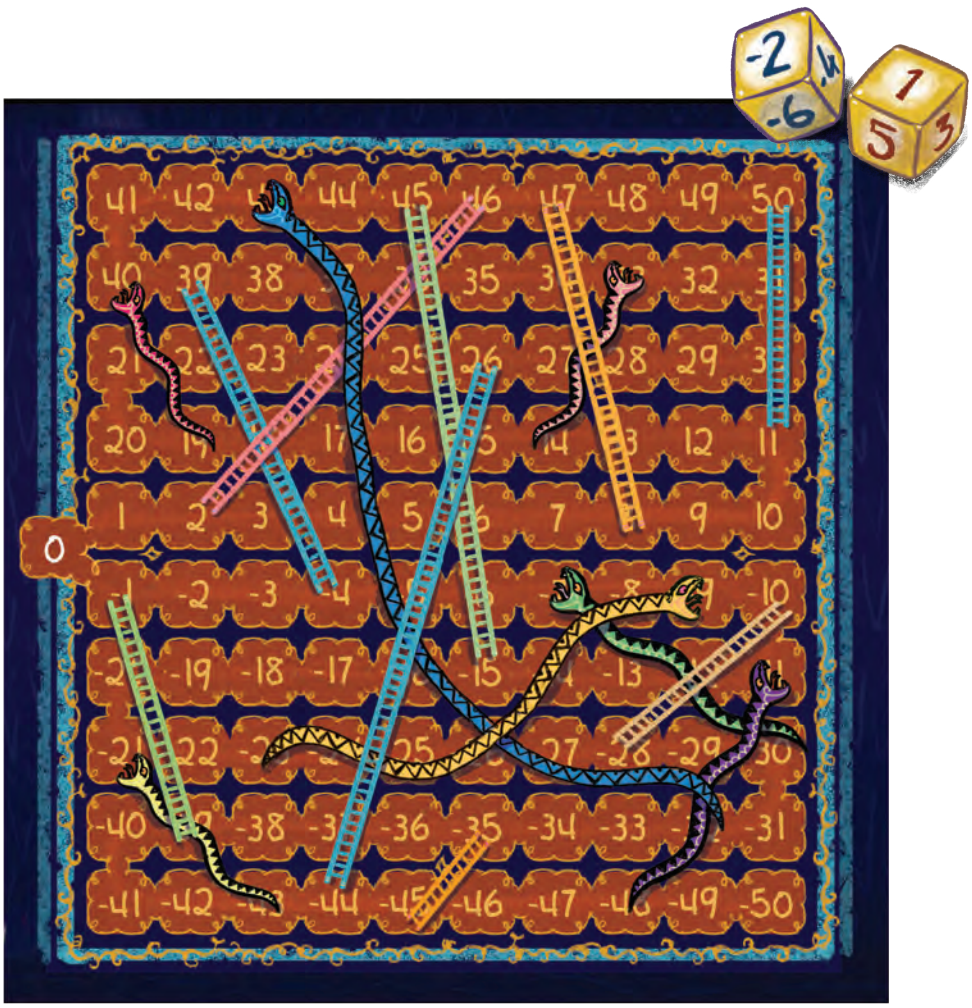
Reprint 2025-26

- हम दो पूर्णांकों के घटाव की समस्या को, योग समस्या में बदलकर, फिर योग के नियमों का पालन करके, दो पूर्णांक हल कर सकते हैं। किसी पूर्णांक का घटाव उसके योज्य प्रतिलोम के जोड़ने के समान ही होता है।
- पूर्णांकों की तुलना की जा सकती है— $\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \ldots$ छोटी संख्याएँ, संख्या रेखा पर बड़ी संख्याओं के बाईं ओर होती हैं।
- हम धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं को जमा (credit) और निकासी (debit) के रूप में भी व्याख्यायित कर सकते हैं। हम धनात्मक संख्याओं को संदर्भ बिंदु से ऊपर की दूरी के रूप में भी व्याख्या कर सकते हैं। इसी तरह ऋणात्मक संख्याओं की संदर्भ बिंदु से नीचे की दूरी के रूप में व्याख्या की जा सकती है। ध्यात्वय है कि तापमान मापन को भी धनात्मक और ऋणात्मक रूप में अंकित किया जाता है। जब हम तापमान को डिग्री सेल्सियस में मापते हैं तो, जल के हिमांक से ऊपर का तापमान धनात्मक तापमान एवं पानी के हिमांक से नीचे का तापमान ऋणात्मक कहलाता है।

पूर्णांक— साँप सीढ़ी

नियम

- यह दो खिलाड़ियों का खेल है। प्रत्येक खिलाड़ी के पास 1 मोहरा होता है। दोनों खिलाड़ी 0 से खेलना आरंभ करते हैं। खिलाड़ी जीतने के लिए – 50 या + 50 तक पहुँच सकते हैं, लेकिन खेल से पूर्व या खेलते समय निश्चित करने की आवश्यकता नहीं होती है।
- प्रत्येक खिलाड़ी एक ही समय में दो पासे फेंकता है। एक पासे पर + 1 से + 6 तक की संख्याएँ होती हैं और दूसरे पासे पर – 1 से – 6 तक की संख्याएँ होती हैं।
- दो पासों के प्रत्येक उछाल के पश्चात् खिलाड़ी उन्हें किसी भी क्रम में जोड़ या घटा सकता है और फिर परिणाम को इंगित करने वाले चरणों को आगे बढ़ा सकता है। धनात्मक परिणाम का अर्थ है + 50 की ओर बढ़ना और ऋणात्मक परिणाम का अर्थ होगा— 50 की ओर बढ़ना।



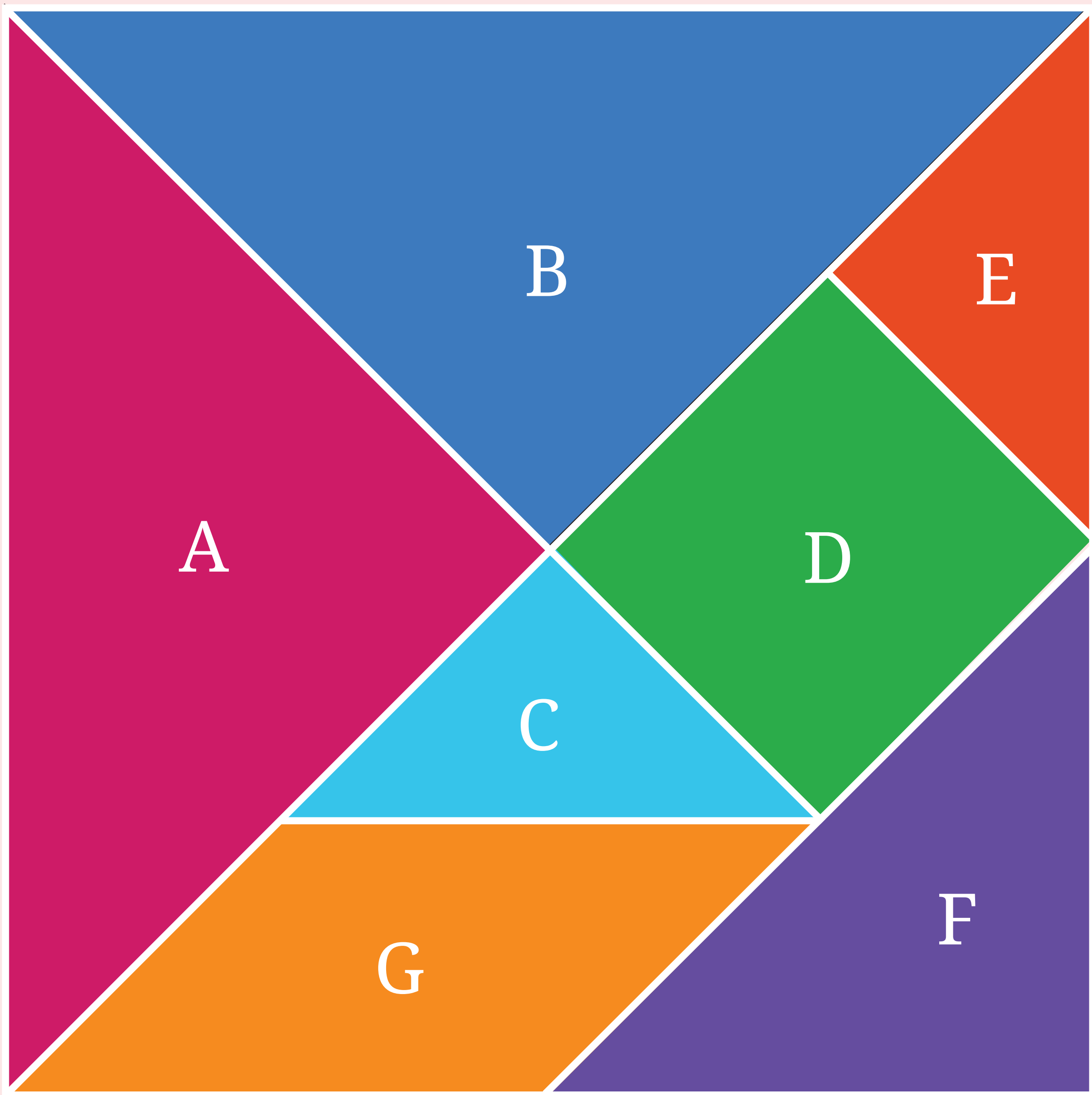
Reprint 2025-26

अधिगम सामग्री पत्रक (शीट)

Reprint 2025-26

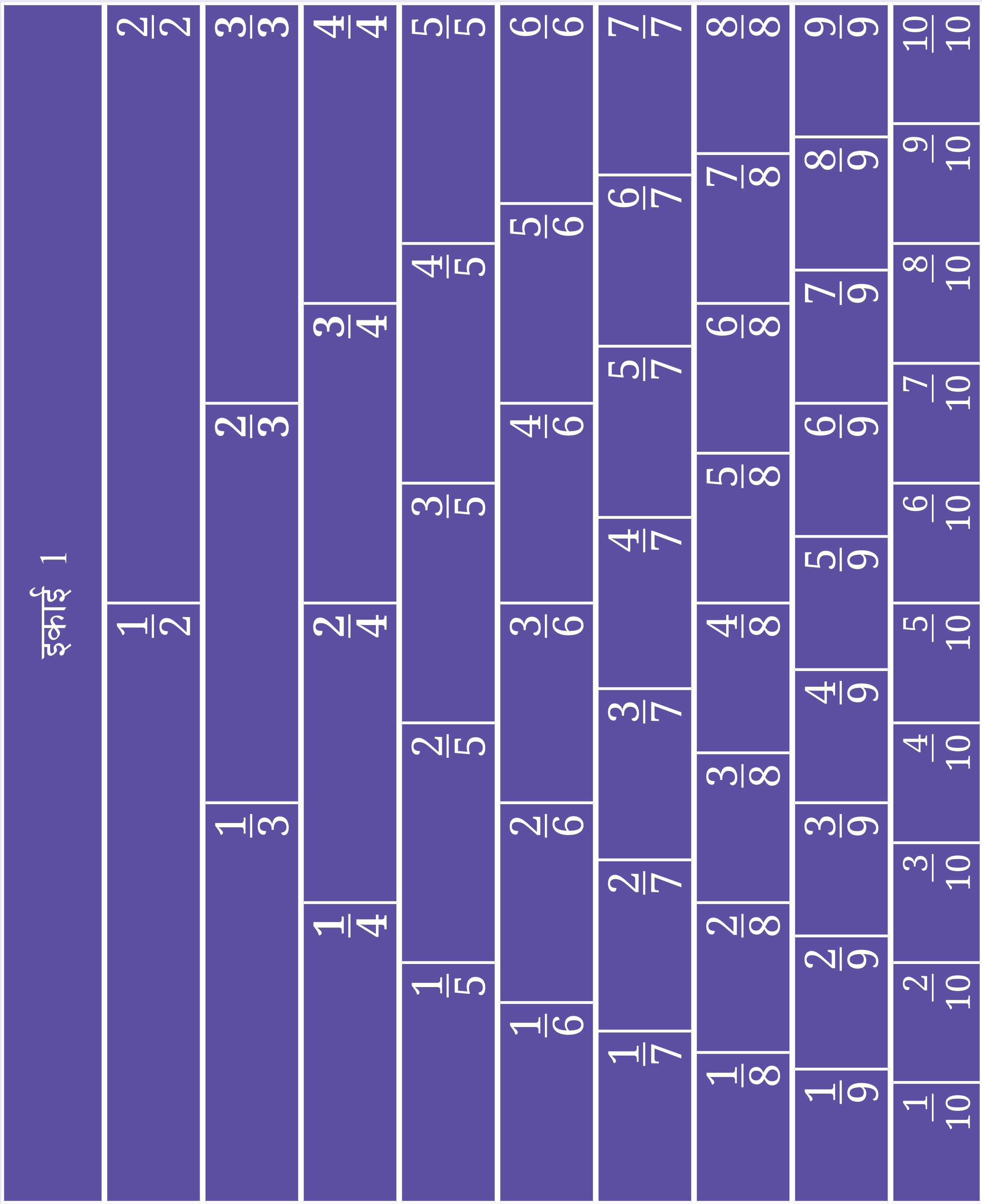
टैनग्राम

नोट— सफेद बॉर्डर के साथ प्रत्येक आकार को काटिए।

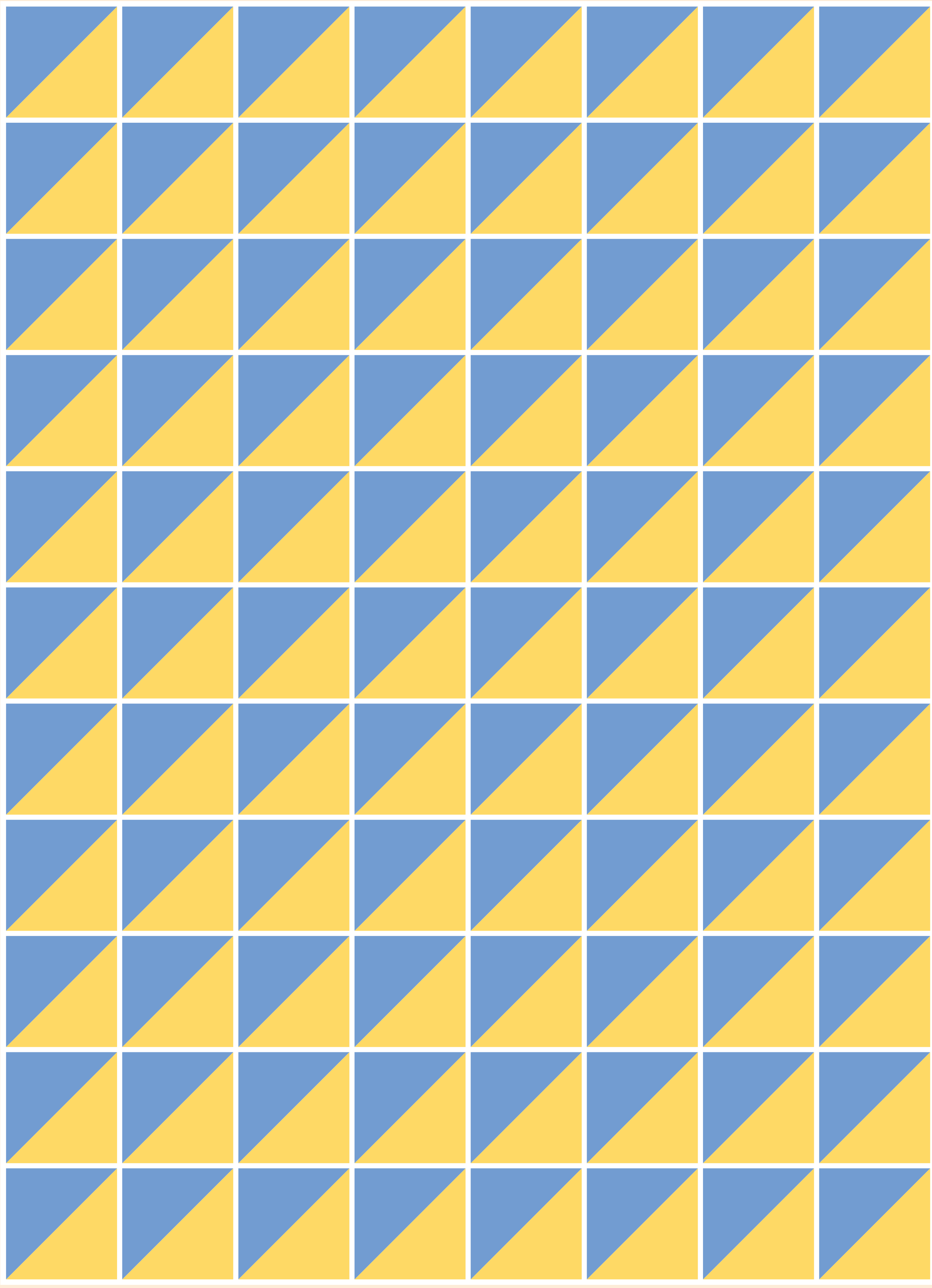


भिन्न पट्टियाँ

नोट— सफेद बॉर्डर के साथ प्रत्येक आकृति को काटिए।



नोट— सफेद बॉर्डर के साथ टाइल्स को काटिए।



Reprint 2025-26

Reprint 2025-26

टिप्पणी

टिप्पणी