বিদ্যালয় পৰ্যায়ৰ গণিতৰ লক্ষ্য/দৃষ্টি

- শিশুৱে গণিত উপভোগ কৰিবলৈ শিকে, ভয় কৰিবলৈ নহয়।
- শিশুৱে গণিত প্ৰয়োজনতহে শিকে ঃ গণিত সূত্ৰ আৰু যান্ত্ৰিক পদ্ধতিৰ ঊৰ্ধ্বত।
- শিশুৱে গণিতৰ মাধ্যমেৰে কথা পাতিবলৈ, মতামত বিনিময় কৰিবলৈ, আলোচনা কৰিবলৈ আৰু একেলগে কাম কৰিবলৈ ভাল পায়।
- তেওঁলোকে গণিতৰ অৰ্থপূৰ্ণ সমস্যা উত্থাপন আৰু সমাধান কৰি আনক অবাক কৰে।
- বস্তুৰ সম্পৰ্ক বুজিবলৈ, গাঁথনি পৰ্যবেক্ষণ কৰিবলৈ, কাৰণ দৰ্শাবলৈ আৰু উক্তিৰ সত্যাসত্যৰ যুক্তি দিবলৈ শিশুৱে বিমূৰ্ত চিন্তাও কৰে।
- শিশুৱে গণিতৰ মৌলিক গাঁথনি ধৰিব পাৰে ঃ বিদ্যালয় পৰ্যায়ৰ গণিতৰ বুনিয়াদী বিষয়— পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি আৰু ত্ৰিকোণমিতি এই সকলোবোৰে বিমূৰ্ততা, গাঁথনি আৰু সাধাৰণীকৰণৰ কাৰণে পদ্ধতিৰ সন্ধান দিয়ে।
- শিক্ষকে প্ৰত্যেক শিশুৱে গণিত শিকিব পৰাকৈ তেওঁলোকক সম্পূৰ্ণ বিশ্বাসেৰে শ্ৰেণীত আত্মনিয়োগ কৰোৱায়।

— ৰাষ্ট্ৰীয় কাৰিকুলাম আধাৰ, ২০০৫

মাধ্যমিক শিক্ষা বিভাগ, অসম চৰকাৰ

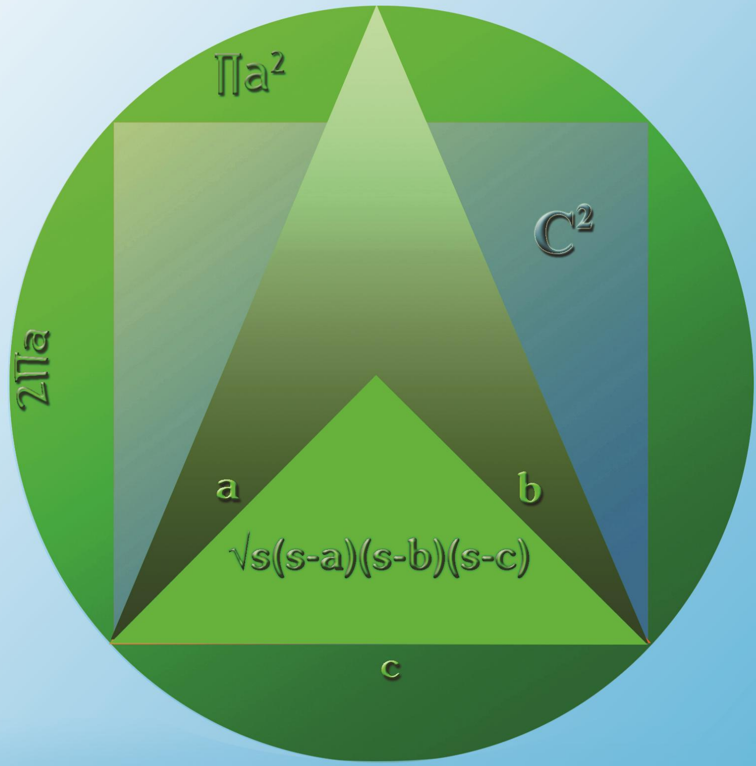
গণিত

(নৱম শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথি)

গণিত

নৱম শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথি

C2L9V1



মাধ্যমিক শিক্ষা বিভাগ, অসম চৰকাৰ

শ্ৰীনিবাস ৰামানুজন
(1887-1920)

ৰামানুজনে চেন্নাইৰ পৰা প্ৰায় 400 কিলোমিটাৰ দক্ষিণ-পশ্চিমত অৱস্থিত এৰদে নামৰ এখন সৰু গাঁৱত জন্মগ্ৰহণ কৰিছিল। তেখেত ভাৰতৰ মহান গণিতজ্ঞসকলৰ এজন। তেখেতৰ একোটা অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি গণিতজ্ঞসকলে π ৰ মান নিযুত দশমিক স্থানলৈকে শুদ্ধভাৱে গণনা কৰিবলৈ সক্ষম হৈছে।

ডিজিটেল বিষয়বস্তু উপলব্ধ কৰিবলৈ কেনেদৰে QR CODE ব্যৱহাৰ কৰিব:

আপোনাৰ মোবাইলৰ ব্ৰাউজাৰত diksha.gov.in/app type কৰক আৰু install button স্পৰ্শ কৰক।

OR

Google Play Store ত DIKSHA search কৰক আৰু App টো ডাউনলড কৰিবলৈ Install Button টো স্পৰ্শ কৰক।

মোবাইলত QR Code ব্যৱহাৰ কৰি কেনেকৈ ডিজিটেল বিষয়বস্তু উপলব্ধ কৰিব পাৰি—

1) অগ্ৰাধিকাৰ দিয়া ভাষাটোক নিৰ্বাচন কৰক।
2) আপোনাৰ ভূমিকা বাছনি কৰক-ছাত্ৰ/শিক্ষক/অন্য
3) QR Code Scan কৰিবলৈ QR ক'ডৰ আইকনটোত স্পৰ্শ কৰক।
4) প্ৰবেশ অনুমোদন কৰক আৰু এপ ব্যৱহাৰৰ অনুমতি দিয়ক।
5) পাঠ্যপুথিৰ QR Codeত Camera কেন্দ্ৰীভূত/ দৃষ্টিপাত (Focus) কৰক।
6) QR Code সম্পৰ্কিত হৈ থকা বিষয়বস্তু প্ৰদৰ্শন কৰিবলৈ ক্লিক কৰক।

Desktop অত QR Code ব্যৱহাৰ কৰি ডিজিটেল বিষয়বস্তু কেনেদৰে উপলব্ধ কৰিব পাৰি

1) QR Codeৰ তলত আপুনি ছটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাটো (ডায়েল কোড) দেখিব।
2) আপোনাৰ ব্ৰাউজাৰত Diksha.Gov.in/as/get টাইপ কৰক।
3) ৬ অংকৰ ডায়েল ক'ডটো আপোনাৰ Desktopৰ চাৰ্চবাৰডালত লিখক।
4) উপলব্ধ বিষয়বস্তুৰ তালিকা নিৰীক্ষণ কৰক আৰু নিজৰ পছন্দৰ বিষয়বস্তুত ক্লিক কৰক।

S1L1I5

প্ৰাকৃতিক দুৰ্যোগ ঃ ধুমুহাৰ সময়ত ল'বলগীয়া সাৱধানতা

ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ বাবে ঃ

- ঘৰৰ দুৱাৰ-খিৰিকী, ভেণ্টিলেটৰ আদি বন্ধ কৰি ৰাখিবা।
- ওখ-ডাঙৰ গছৰ ওচৰৰপৰা আঁতৰত থাকিবা। কিয়নো সেইবোৰ উঘালি পৰিব পাৰে।
- ট্ৰেন্সফৰ্মাৰ, ওলমি থকা বৈদ্যুতিক তাঁৰ, বৈদ্যুতিক খুঁটা, বেৰ, অস্থায়ী চিলিং, ওলোমাই থোৱা টিউব বাল্ব আদিবোৰ গাৰ ওপৰত সৰি পৰাৰ আশংকা থাকে। গতিকে সেইবোৰৰপৰা আঁতৰত থাকিবা।
- উপকূলীয় অঞ্চলৰপৰা দূৰত থাকিবা।
- বতাহে উৰুৱাই অনা কঠিন বা চোকা বস্তু যাতে তোমাৰ গাত নপৰে, সেই বাবে ঘৰৰ ভিতৰত বা নিৰাপদ স্থানত আশ্ৰয় ল'বা।
- তোমাৰ ঘৰৰ বা বিদ্যালয়ৰ চৌপাশত যদি মৰি যোৱা গছ বা ডাঙৰ গছৰ ডাল থাকে সেইবোৰ আঁতৰোৱাৰ ব্যৱস্থা কৰিবা।
- ধুমুহাৰ আগজাননী পাবলৈ নিয়মিত ৰেডিঅ' বা দূৰদৰ্শনৰ বাতৰি শুনিবলৈ বা চাবলৈ অভ্যাস কৰিবা।
- ধুমুহাৰ আগজাননী পালে আগতীয়াকৈ কেইদিনমানৰ খাদ্যবস্তু জমাই থ'বা যাতে ইয়াৰ নাটনি নহয়।
- তোমাৰ ঘৰৰ বা বিদ্যালয়ৰ বিদ্যুৎ সংযোগৰ মুখ্য ছুইচটো বন্ধ কৰি দিবা যাতে চৰ্ট-চাৰ্কিটৰপৰা ৰক্ষা পৰে।
- ধুমুহাৰ সম্ভাৱনা থাকিলে নাও বা পানী জাহাজত ভ্ৰমণ নকৰিবা।

গণিত

(নৱম শ্ৰেণীৰ বাবে পাঠ্যপুথি)

C2L9V1

অনুবাদক

ড° কৈলাশ গোস্বামী (অধ্যায় ঃ ৯, ১২ আৰু উত্তৰ/ইংগিত)
ড° প্ৰবীণ দাস (অধ্যায় ঃ ৭, ১৪, ১৫ আৰু পৰিশিষ্ট-১, ২)
দিব্যজ্যোতি মহন্ত (অধ্যায় ঃ ১, ৩, ৪, ৬ আৰু ৮)
কিৰণ চন্দ্ৰ কাকতি (অধ্যায় ঃ ১৩)
ড° চন্দ্ৰ চুতীয়া (অধ্যায় ঃ ২, ৫, ১০ আৰু ১১)

পুনৰীক্ষক ঃ **কিৰণ চন্দ্ৰ কাকতি**
সমন্বয়ক ঃ **ড° নিত্যজ্যোতি কলিতা**

প্ৰস্তুতকৰণ ঃ **ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদ**
(National Council of Educational Research and Training)
অভিযোজনা ঃ **অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ**
প্ৰকাশন ঃ **অসম ৰাজ্যিক পাঠ্যপুথি প্ৰণয়ন আৰু প্ৰকাশন নিগম লিমিটেড**

GANIT : *A textbook on Mathematics, for Class IX in Assamese, prepared by National Council of Educational Research and Training (NCERT), New Delhi, translated/approved by Board of Secondary Education, Assam and published by the Assam State Textbook Production and Publication Corporation Ltd. (ASTPPC), Guwahati after having copyright permission from the NCERT, New Delhi.* **FREE TEXTBOOK**

© ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদ, ২০০৬

অধিগৃহীত © অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ

সৰ্বস্বত্ব সংৰক্ষিত

❖ প্ৰকাশকৰ অনুমতি অবিহনে এই প্ৰকাশনৰ যি কোনো অংশৰ ছপা কৰা কাৰ্য অথবা ইলেকট্ৰ'নিক মাধ্যম, যান্ত্ৰিক মাধ্যম, ফটো প্ৰতিলিপি, ৰেকৰ্ডিং নাইবা আন কোনো উপায়েৰে, পুনঃপদ্ধতিৰ সহায়ত ইয়াৰ সংগ্ৰহকৰণ অথবা সংবৰ্ধন কৰাটো নিষিদ্ধ।

প্ৰথম প্ৰকাশ ঃ নৱেম্বৰ, ২০১২
দ্বিতীয় প্ৰকাশ ঃ ২০১৩
তৃতীয় প্ৰকাশ ঃ ২০১৪
চতুৰ্থ প্ৰকাশ ঃ ২০১৫
পঞ্চম প্ৰকাশ ঃ ২০১৬
ষষ্ঠ প্ৰকাশ ঃ ২০১৭
সপ্তম প্ৰকাশ ঃ ২০১৮
অষ্টম প্ৰকাশ ঃ ২০১৯
নৱম প্ৰকাশ ঃ ২০২০

ঃ 70 GSM কাগজত মুদ্ৰিত পাঠ্যপুথি।

প্ৰকাশক ঃ অসম চৰকাৰৰ দ্বাৰা বিনামূলীয়াকৈ বিতৰণৰ বাবে অসম ৰাজ্যিক পাঠ্যপুথি প্ৰণয়ন আৰু প্ৰকাশন নিগম লিমিটেডৰ দ্বাৰা প্ৰকাশিত পাঠ্যপুথি।

Illustration : **NCERT**

Printed at : **ৰবী প্ৰিন্টিং এণ্ড বাইণ্ডিং হাউচ**
গুৱাহাটী

আগকথা

ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদ, চমুকৈ এন. চি. ই. আৰ. টি. (NCERT)য়ে ৰাষ্ট্ৰীয় কাৰিকুলাম আধাৰ, চমুকৈ এন. চি. এফ., ২০০৫ৰ আধাৰত পাঠ্যপুথি প্ৰস্তুত কৰি উলিওৱাৰ পিছত দেশৰ প্ৰায়বোৰ ৰাজ্যৰ দৰে অসমতো ইয়াৰ প্ৰৱৰ্তনৰ ক্ষেত্ৰত চিন্তা-চৰ্চা চলিছিল। এনেধৰণৰ চিন্তা-চৰ্চাৰ অন্তত, অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদে কেইটিমান বিষয়ৰ পাঠ্যপুথি, এন. চি. ই. আৰ. টি. পাঠ্যক্ৰমৰ পৰা গ্ৰহণ কৰাৰ সিদ্ধান্ত লয়। সেই মৰ্মে ২০১৩ চনত নৱম শ্ৰেণী আৰু ২০১৪ চনৰ পৰা দশম শ্ৰেণীৰ বাবে ইংৰাজী, বিজ্ঞান আৰু গণিত বিষয়ৰ পাঠ্যপুথি কেইখন পোনে পোনে পৰিষদৰ পাঠ্যক্ৰমত প্ৰৱৰ্তন কৰাৰ পোষকতা কৰে।

পৰিষদে সদ্যহতে নৱম আৰু দশম শ্ৰেণীৰ গণিত, বিজ্ঞান, ইংৰাজী, সংস্কৃত আৰু হিন্দী বিষয়ৰ পাঠ্যপুথি এন. চি. ই. আৰ. টি. পাঠ্যক্ৰমৰ পৰা গ্ৰহণ কৰিছে। ইয়াৰ ভিতৰত গণিত আৰু বিজ্ঞানৰ পাঠ্যপুথিকেইখন আঞ্চলিক ভাষালৈ অনুবাদ কৰা হৈছে। অনুবাদ কৰোতে থলুৱা উদাহৰণ আৰু শব্দ ব্যৱহাৰৰ প্ৰতি দৃষ্টি ৰখা হৈছে। ইয়াৰ উপৰিও পৰিষদৰ ফালৰ পৰা নিজাববীয়াকৈ ইং ২০২০ শিক্ষাবৰ্ষৰ পৰা কাৰ্যকৰী হোৱাকৈ গণিতৰ পুঠি দুখনত পুনৰালোচনা নামেৰে একোটিকৈ নতুন পাঠ অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হৈছে। এই পাঠটিত শিক্ষাৰ্থীসকলে আগৰ শ্ৰেণীবোৰত শিকি অহা কিছুমান কথা সন্নিৱিষ্ট কৰা হৈছে যাতে তেওঁলোকে নৱম/দশম শ্ৰেণীৰ পাঠবোৰ সহজে আয়ত্ত কৰিব পাৰে।

শেষত, পুথিকেইখন ব্যৱহাৰ কৰোতে কিবা আসোঁৱাহ দৃষ্টিগোচৰ হ'লে সদাশয় শিক্ষক সমাজে আঙুলিয়াই দিলে আমি নথৈ কৃতাৰ্থ হ'ম। আমি আশা ৰাখিছোঁ শিক্ষক সমাজৰ অগ্ৰণী ভূমিকাৰে আমি এক ৰাষ্ট্ৰীয় মানৰ শিক্ষা প্ৰদান কৰি আমাৰ ৰাজ্যখনক শিক্ষাৰ দিশত আগুৱাই নিব পাৰিম।

সচিব

অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ

গুৱাহাটী, অসম

Textbook Development Committee, NCERT

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, *Professor*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor*, DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Associate Professor*, DESM, NCERT
Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon
Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi
G.P. Dikshit, *Professor*, Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow
K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Lecturer*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar
Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad
Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT
Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore
Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT
Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore
S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi
Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT
Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor*, DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Associate Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

ACKNOWLEDGEMENT

NCERT gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop conducted by NCERT : A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head*, DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

কৃতজ্ঞতা

ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদে এই পাঠ্যপুথিখন অনুবাদৰ বাবে তথা মাধ্যমিক স্তৰত পাঠ্যপুথি হিচাপে ব্যৱহাৰৰ বাবে অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদক অনুমতি প্ৰদান কৰিছে। অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদে ইয়াৰ বাবে ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদলৈ কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন কৰিছে।

সচিব
অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ

বিষয়সূচী

	আগকথা		*iii*
	পুণৰালোচনা		**1**
1.	সংখ্যা প্ৰণালী		**22**
	1.1	অৱতাৰণা	22
	1.2	অপৰিমেয় সংখ্যা	26
	1.3	বাস্তৱ সংখ্যা আৰু সেইবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি	30
	1.4	সংখ্যাৰেখাত বাস্তৱ সংখ্যাৰ উপস্থাপন	37
	1.5	বাস্তৱ সংখ্যাৰ প্ৰক্ৰিয়া	40
	1.6	বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত সূচকৰ বিধি	47
	1.7	সাৰাংশ	50
2.	বহুপদ		**51**
	2.1	অৱতাৰণা	51
	2.2	এক চলকযুক্ত বহুপদ	51
	2.3	বহুপদৰ শূন্য	56
	2.4	ভাগশেষ উপপাদ্য	59
	2.5	বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ	64
	2.6	বীজীয় অভেদ	68
	2.7	সাৰাংশ	74
3.	স্থানাংক জ্যামিতি		**76**
	3.1	অৱতাৰণা	76
	3.2	কাৰ্টীয় বা কাৰ্টেছীয় পদ্ধতি	79
	3.3	স্থানাংক উল্লেখ থকা বিন্দু এটা সমতলত সংস্থাপন	87
	3.4	সাৰাংশ	91
4.	দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণ		**92**
	4.1	অৱতাৰণা	92
	4.2	ৰৈখিক সমীকৰণ	92
	4.3	এটা ৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধান	95
	4.4	দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰ লেখ	97
	4.5	x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ	103
	4.6	সাৰাংশ	105
5.	ইউক্লিডৰ জ্যামিতিৰ পৰিচয়		**106**
	5.1	অৱতাৰণা	106
	5.2	ইউক্লিডৰ সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য	108
	5.3	ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ সমতুল্য ভাষ্য	115
	5.4	সাৰাংশ	116
6.	ৰেখা আৰু কোণ		**118**
	6.1	অৱতাৰণা	118
	6.2	মৌলিক পদসমূহ আৰু ইবোৰৰ সংজ্ঞা	119
	6.3	কটাকটি কৰা ৰেখা আৰু কটাকটি নকৰা ৰেখা	121

	6.4	কোণৰ যোৰ	121
	6.5	সমান্তৰাল ৰেখা আৰু তিৰ্যক ৰেখা	127
	6.6	এডাল ৰেখাৰ সমান্তৰাল ৰেখা	130
	6.7	ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি ধৰ্ম	134
	7.8	সাৰাংশ	137
7.	**ত্ৰিভুজ**		**138**
	7.1	অৱতাৰণা	138
	7.2	ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা	138
	7.3	ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা বিচাৰৰ চৰ্তসমূহ	141
	7.4	ত্ৰিভুজৰ কেইটামান ধৰ্ম	149
	7.5	ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা বিচাৰৰ আৰু কিছুমান চৰ্ত	153
	7.6	এটা ত্ৰিভুজৰ প্ৰসংগত অসমতাসমূহ	157
	7.7	সাৰাংশ	163
8.	**চতুৰ্ভুজ**		**164**
	8.1	অৱতাৰণা	164
	8.2	চতুৰ্ভুজৰ কোণ-সমষ্টি ধৰ্ম	166
	8.3	চতুৰ্ভুজৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ	166
	8.4	সামান্তৰিকৰ ধৰ্ম	168
	8.5	এটা চতুৰ্ভুজ সামান্তৰিক হোৱাৰ আন এটা চৰ্ত	173
	8.6	মধ্য বিন্দু উপপাদ্য	176
	8.7	সাৰাংশ	180
9.	**সামান্তৰিক আৰু ত্ৰিভুজৰ কালি**		**181**
	9.1	অৱতাৰণা	181
	9.2	একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজৰ চিত্ৰ	183
	9.3	একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰলাৰ মাজত থকা সামান্তৰিক	185
	9.4	একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা ত্ৰিভুজ	189
	9.5	সাৰাংশ	197
10.	**বৃত্ত**		**198**
	10.1	অৱতাৰণা	198
	10.2	বৃত্ত আৰু ইয়াৰ সম্পৰ্কীয় পদ ঃ এক পুনৰালোচনা	199
	10.3	এডাল জ্যাই এটা বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণ	201
	10.4	কেন্দ্ৰৰ পৰা জ্যালৈ টনা লম্ব	203
	10.5	তিনিটা বিন্দুৰ মাজেৰে বৃত্ত	204
	10.6	সমান জ্যা আৰু কেন্দ্ৰৰপৰা সিহঁতৰ দূৰত্ব	206
	10.7	এটা বৃত্তৰ চাপে উৎপন্ন কৰা কোণ	210
	10.8	চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ	213
	10.9	সাৰাংশ	218
11.	**অংকন**		**219**
	11.1	অৱতাৰণা	219
	11.2	প্ৰাথমিক অংকন	220

	11.3	ত্ৰিভুজৰ কিছুমান অংকন	223
	11.4	সাৰাংশ	227
12.	**হিৰ'ণৰ সূত্ৰ**		**228**
	12.1	অৱতাৰণা	228
	12.2	হিৰ'ণৰ সূত্ৰৰ সহায়ত এটা ত্ৰিভুজৰ কালি	230
	12.3	চতুৰ্ভুজৰ কালি নিৰ্ণয়ত হিৰ'ণৰ সূত্ৰৰ প্ৰয়োগ	235
	12.4	সাৰাংশ	240
13.	**পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন**		**241**
	13.1	অৱতাৰণা	241
	13.2	আয়তীয় ঘনক আৰু ঘনকৰ পৃষ্ঠকালি	241
	13.3	লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙাৰ পৃষ্ঠকালি	247
	13.4	লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ পৃষ্ঠকালি	251
	13.5	এটা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি	255
	13.6	আয়তীয় ঘনকৰ আয়তন	260
	13.7	চুঙাৰ আয়তন	263
	13.8	লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ আয়তন	265
	13.9	গোলকৰ আয়তন	268
	13.10	সাৰাংশ	272
14.	**পৰিসংখ্যা**		**273**
	14.1	অৱতাৰণা	273
	14.2	তথ্য সংগ্ৰহ	274
	14.3	তথ্যৰ উপস্থাপন	275
	14.4	তথ্যৰ লৈখিক উপস্থাপন	282
	14.5	কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ	297
	14.6	সাৰাংশ	307
15.	**সম্ভাৱিতা**		**308**
	15.1	অৱতাৰণা	308
	15.2	সম্ভাৱিতা— এক পৰীক্ষামূলক অধ্যয়ন বা অভিগমন	309
	15.3	সাৰাংশ	323
16.	**পৰিশিষ্ট-1 ঃ গণিতত প্ৰমাণ**		**324**
	A1.1	অৱতাৰণা	324
	A1.2	গাণিতিকভাৱে গ্ৰহণীয় উক্তি	325
	A1.3	নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি	329
	A1.4	উপপাদ্য, অনুমান আৰু স্বীকাৰ্য	332
	A1.5	গাণিতিক প্ৰমাণ	338
	A1.6	সাৰাংশ	345
17.	**পৰিশিষ্ট-2 ঃ গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ পৰিচয়**		**346**
	A2.1	অৱতাৰণা	346
	A2.2	কথা প্ৰশ্নৰ পৰ্যালোচনা	347
	A2.3	কেইটামান গণিতীয় আৰ্হি	352
	A2.4	আৰ্হি প্ৰকৰণ, ইয়াৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতাসমূহ	360
	A2.5	সাৰাংশ	364
	উত্তৰমালা/ইংগিত		**366**

পুণৰালোচনা (Revision)

প্ৰথম খণ্ড

সংখ্যা প্ৰণালী (Number System)

গণিতজ্ঞ ৰামাণুজন (শ্ৰীনিবাস ৰামাণুজন আয়েঙ্গাৰ, 1887–1920)য়ে সঘনে কৈছিল, সংখ্যাবোৰ মোৰ বন্ধু। আমিও সংখ্যাবোৰৰ বন্ধু; কিয়নো আমাৰ পাঠশালাৰ পাঠ আৰম্ভৰ পৰা আমাৰ চিনাকি বন্ধু সংখ্যাবোৰ।

স্বাভাৱিক সংখ্যা (Natural Number) :

গণনাৰে আৰম্ভ হোৱা সংখ্যা মালাৰ নাম গণনা সংখ্যা (গণনাৰ পৰা হোৱা বাবে), স্বাভাৱিক বা প্ৰাকৃতিক সংখ্যা।

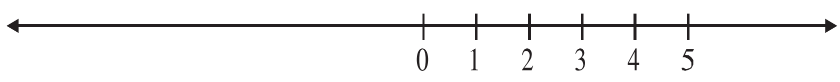
সেইবোৰ হ'ল 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...100,......., আৰম্ভণি 1 ৰে কিন্তু শেষ নাই। ইয়াক এইদৰেও লিখিব পাৰি — {1, 2, 3, 4, 5, ...}

পূৰ্ণ সংখ্যা (Whole Number) :

স্বাভাৱিক সংখ্যাই 0 ক সামৰি লৈ নতুন নাম ল'লে পূৰ্ণ সংখ্যা।

বান্ধোনত পূৰ্ণ সংখ্যাবোৰ হৈছে {0, 1, 2, 3,.....}

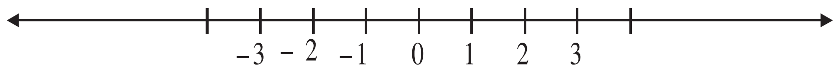
এডাল সংখ্যাৰেখাৰ সহায়ত আমি পূৰ্ণ সংখ্যাবোৰৰ অৱস্থান তলত দিয়া ধৰণে নিৰ্ধাৰণ কৰিব পাৰোঁ।



সৰলৰেখাৰ এঠাইত এটা দাগ দি তাক 0 ৰে চিহ্নিত কৰিলোঁ আৰু সমদূৰত্বত দাগ কাটি 1, 2, 3, 4, ... বোৰ বহুৱাই দিয়াত এটা চিত্ৰ হ'ল।

অখণ্ড সংখ্যা (Integer) :

স্বাভাৱিক সংখ্যা 1, 2, 3,....... ৰ বিপৰীতে –1, –2, –3,....... আৰু 0 (শূন্য)ক সামৰি পোৱা সংখ্যাবোৰেই হ'ল অখণ্ড সংখ্যা। সংখ্যাৰেখাত ইহঁতৰ অৱস্থান তলত দিয়া ধৰণৰ—



সংখ্যাৰেখাত থকা আৰ্হিৰে ইহঁতক বান্ধোনত তলত দিয়া ধৰণে দেখুওৱা হ'ল।

{.............–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

পৰিমেয় সংখ্যা (Rational Number) :

যিবোৰ সংখ্যাক $\frac{p}{q}$, (p, q অখণ্ড সংখ্যা, কিন্তু $q \neq 0$) আকাৰত লিখিব পাৰি সিহঁতবোৰক পৰিমেয় সংখ্যা বোলা হয় (নামটোৰ বুৎপত্তি— যাৰ পৰিমাণ পাব পাৰি সেয়ে পৰিমেয়)। ইহঁতৰ বাবেও সংখ্যা ৰেখাত নিৰ্দিষ্ট স্থান আছে। যেনে 0 আৰু 1 ৰ মাজত $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ইত্যাদি।

পৰিমেয় সংখ্যাৰ ধাৰণাৰ বিপৰীতে অপৰিমেয় সংখ্যা থাকিব পাৰেনে?

আছে এনে সংখ্যা যাক $\frac{p}{q}$, ($q \neq 0$) আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি, অথচ সংখ্যাৰেখাত তাৰ বাবে নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (স্থান) আছে সিহঁতক অপৰিমেয় সংখ্যা বোলে।

যিহেতু, পৰিমেয়, অপৰিমেয় দুয়োবিধ সংখ্যাক 'বাস্তৱ'ত এডাল সৰলৰেখাত একক ৰূপত চিহ্নিত কৰিব পাৰি, গতিকে দুয়োবিধকে সামৰি 'বাস্তৱ সংখ্যা' নামেৰে প্ৰসিদ্ধ কৰা হ'ল।

গতিকে বাস্তৱ সংখ্যা মানে, {পৰিমেয় সংখ্যা আৰু অ-পৰিমেয় সংখ্যা একত্ৰ।}।

গণিতীয় মৌলিক প্ৰক্ৰিয়া (Fundamental Mathematical Operations) :

বাস্তৱ সংখ্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য মৌলিক প্ৰক্ৰিয়া চাৰিটা হ'ল +, –, ×, ÷। এই মৌলিক প্ৰক্ৰিয়াবোৰৰ সাপেক্ষে বাস্তৱ সংখ্যাবোৰে কিছুমান ধৰ্ম মানি চলে। তেনে কিছু ধৰ্ম তলত উল্লেখ কৰা হ'ল।

1. $a + 0 = a,$ $0 + a = a$

$a - 0 = a$ $0 - a = -a$

$\frac{0}{a} = 0$, কিন্তু $\frac{a}{0}$ নিৰৰ্থক।

আৰু, $a.1 = 1.a = a$

2. $a + b = b + a,$ কিন্তু $a - b \neq b - a$

$a \,.\, b = b.\, a$ কিন্তু $a \div b \neq b \div a$

3. $a + (b + c) = (a + b) + c$

$a.\ (b.\ c) = (a.\ b).c$

2 নং আৰু 3নংৰ ধৰ্মবোৰ বিয়োগ আৰু হৰণ প্ৰক্ৰিয়াত বিফল।

4. $a.\ (b + c) = a.b + a.c$

$(a + b).c = a.c + b.c$

এটা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা aৰ ক্ষেত্ৰত পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াক সূচক বিধিৰেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

যেনে— $a.\ a = a^2$ (বৰ্গ) $a.\ a.\ a. = a^3$ (ঘন)

তেনেকৈ $\underbrace{a,\ a,\ a,\ \ldots\ldots\ldots\ldots}_{n\text{-সংখ্যক}}\ a = a^n$

a^n মানে হ'ল aৰ n ঘাত, n হ'ল a^n অৰ সূচক আৰু a হ'ল ভূমি।

সূচক বিধিবোৰ হ'ল —

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

3. $a^0 = 1$ (নং 1 আৰু 2ত $m = n$ লিখি পাব পাৰি)

4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

5. $\left(a^m\right)^n = a^{mn} = \left(a^n\right)^m$

6. $(ab)^m = a^m.b^m,$ $(a.b.c.)^m = a^m.b^m.c^m$

7. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^m = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}}$

9. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

টোকা ঃ

1. স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰৰ আদি হ'ল 1 (এক)। তাত যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰে 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4 এইদৰে অফুৰন্ত স্বাভাৱিক সংখ্যা পাওঁ।
   সেয়ে সংখ্যা 1 অক স্বাভাৱিক সংখাৰ জনক বোলা হয়।
2. অখণ্ড সংখ্যাৰ 2, 4, 6, ... আদি সংখ্যাবোৰৰ আৰ্হি $2.m$ (2ৰ গুণিতক)। গতিকে ইহঁতক নাম দিয়া হ'ল যুগ্ম, য'ত m হ'ল এটা অখণ্ড সংখ্যা।
3. অখণ্ড সংখ্যাৰ যুগ্ম সংখ্যাবোৰ বাদ দিলে বাকী থকাবোৰ অযুগ্ম সংখ্যা। সিহঁতৰ সাধাৰণ প্ৰকাশৰাশি $2m + 1$।
   [এতিয়া যুগ্ম-অযুগ্মৰ সংজ্ঞা হৰণ প্ৰক্ৰিয়াত দিব পাৰি, অখণ্ড সংখ্যাটো 2 ৰে বিভাজ্য হ'লে সি যুগ্ম, অন্যথা অযুগ্ম।]
4. এটা অখণ্ড সংখ্যাক দুটা বা ততোধিক সংখ্যাৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। ইহঁতক মূল সংখ্যাৰ উৎপাদক (Factor) বোলে।
   যি অখণ্ড সংখ্যাৰ কেৱল দুটা উৎপাদক থাকে আৰু দুয়োটা পৃথক (উৎপাদক কেইটা হ'ল 1 আৰু সংখ্যাটো নিজেই), তেন্তে মূল সংখ্যাটোক মৌলিক সংখ্যা বোলা হয়।
   যেনে — 2 = 1 . 2; 5 = 5 . 1; 11 = 11 . 1 ইত্যাদি।
   উদাহৰণৰ পৰা মৌলিক সংখ্যাৰ সংজ্ঞাটো নকৈ সজাব লাগিব। যি সংখ্যাৰ উৎপাদক 1 আৰু সংখ্যাটো নিজে, তেন্তে সংখ্যাটোক মৌলিক সংখ্যা বোলা হয়।
   1 = 1 . 1। 1 অৰ উৎপাদক 1 আৰু সি নিজেই, তৎসত্ত্বেও 1 মৌলিক সংখ্যা নহয় কাৰণ ইয়াৰ উৎপাদক দুটা পৃথক নহয়।
5. 2 হ'ল একমাত্ৰ যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা। বাকীবোৰ অযুগ্ম।
6. দুটা সংখ্যাক সহমৌলিক (coprime) বোলা হয় যদি সিহঁতৰ সাধাৰণ উৎপাদক কেৱল 1।

দশমিক ভগ্নাংশৰ পৰা ভগ্নাংশ $\frac{p}{q}$ লৈ আৰু তাৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া ঃ

(Conversion from decimal fraction to $\frac{p}{q}$ form and its converse process)

উদাহৰণ-1 ঃ 3.52ক $\left(\frac{p}{q}\right)$ আকৃতিত লিখা।

সমাধান ঃ $3.52 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = \frac{300+50+2}{100} = \frac{352}{100}$

উদাহৰণ-2 : 3.523 ক $\left(\frac{p}{q}\right)$ আকৃতি ভগ্নাংশলৈ নিয়া।

সমাধান ঃ $3.523 = \frac{3523}{1000}$

পৌনঃপুনিকত থকা দশমিক ভগ্নাংশ $\frac{p}{q}$ আৰ্হিলৈ পৰিবৰ্তন ঃ

(Conversion of repeating decimal fraction to $\frac{p}{q}$ form)

উদাহৰণ-3 : $0.\dot{8}\dot{1}$ ক $\frac{p}{q}$ আকৃতিৰ ভগ্নাংশলৈ নিয়া।

সমাধান ঃ $0.\dot{8}\dot{1} = 0.81818181........$

ধৰো, $x = 0.818181......$ ⟶ (i)

$100x = 81.818181..$ ⟶ (ii)

$99x = 81.0000$ [(ii) ৰ পৰা (i) বিয়োগ কৰি।]

$$x = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$$

উদাহৰণ-4 : $0.8\dot{1}$ ক $\frac{p}{q}$ আকৃতিৰ ভগ্নাংশলৈ নিয়া।

সমাধান ঃ

ধৰো, $x = 0.8\;1\;1\;1\;1\;1\;1.......$

$10x = 8.1\;1\;1\;1\;1\;1.....$

আৰু $100x = 8\;1.1\;1\;1\;1\;1\;1....$

$\therefore\quad 90x = 81 - 8$

$$x = \frac{81-8}{90} = \frac{73}{90}$$

উদাহৰণ-5 : $3.8\dot{1}$ ক $\frac{p}{q}$ আকৃতিৰ ভগ্নাংশলৈ নিয়া।

সমাধান ঃ $x = 3.8\dot{1}$

$$= 3 + 0.8\dot{1} = 3 + \frac{73}{90} = \frac{270+73}{90} = \frac{343}{90}$$

শতকৰা আৰু সুত ঃ (Percentage and Interest)

শতকৰা শব্দটোৱে কয় প্ৰতি এশত কিমান। তাৰ বাবে প্ৰতীক হ'ল %।

আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ পৰা আৰম্ভ কৰি উচ্চস্তৰীয় বিজ্ঞান, পৰিসংখ্যা, অৰ্থনীতিত ইয়াৰ বহুল প্ৰয়োগ হয়। ডাঙৰ ডাঙৰ সংখ্যাৰ তথ্যবোৰক 'এশ'ৰ আধাৰত বুজিবলৈ সহজ হয়। ইয়াৰ বিপৰীতে প্ৰতি এশত হোৱা ফলাফলৰ পৰা, অতি বিয়াগোম সংখ্যাৰ ফলৰ বিষয়ে ক'ব বা অনুমান কৰিব পাৰো। সেয়েহে এই বিষয়ে কিছু পুনৰালোচনা —

উদাহৰণ-6 ঃ 5000 টকাত আয় হয় 2450 টকা। ইয়াৰ শতাংশত প্ৰকাশ কি হ'ব?

সমাধান ঃ 5000 টকাত আয় হয় 2450 টকা।

$\therefore$ 100 টকাত আয় হয় $= \frac{2450\times100}{5000}$ টকা = 49 টকা। **উত্তৰ ঃ** 49%

উদাহৰণ-7 ঃ 49% এক ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ $49\% = \frac{49}{100}$

উদাহৰণ-8 ঃ $\frac{4}{5}$ ক শতকৰাত প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ $\frac{4}{5}\times100\% = 80\%$

উদাহৰণ-9 ঃ 0.08 অক শতকৰাত প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ $0.08 = \frac{8}{100}$

$\therefore$ তাৰ শতকৰা $= \frac{8}{100}\times100\% = 8\%$

অথবা $0.08 \times 100\% = 8\%$

উদাহৰণ-10 ঃ কোনো সংখ্যাৰ 5% কমাই দিয়াত 133 হ'ল। সংখ্যাটো কি?

সমাধান ঃ ধৰো সংখ্যাটো x

$$x \text{ অৰ } 5\% = x \times \frac{5}{100} = \frac{5x}{100}$$

এতিয়া, $x - \frac{5x}{100} = \frac{100x - 5x}{100} = \frac{95x}{100}$

প্ৰশ্নমতে, $\frac{95}{100}x = 133 \Rightarrow x = \frac{133 \times 100^{20}}{95_{19}} = 140$

গতিকে সংখ্যাটো হ'ল 140।

উদাহৰণ-11 ঃ 2019 চনৰ সপ্তদশ লোকসভা নিৰ্বাচনত এটা সমষ্টিৰ মুঠ ভোটদাতাৰ 80% ভোটদান হৈছিল। এজন প্ৰাৰ্থীয়ে 65% পাই নিৰ্বাচনত জিকিল। তেওঁ পোৱা মুঠ ভোট 572000। সমষ্টিত মুঠ ভোটাৰৰ সংখ্যা কিমান আছিল?

সমাধান ঃ (যিটো উলিয়াব লাগে) ধৰো ভোটদাতাৰ সংখ্যা x জন।

ভোট দিছিল = x অৰ 80% = $x \times \frac{80}{100} = \frac{4x}{5}$ জনে।

বিজয়ীজনে এই ভোটৰ 65% পাইছিল।

∴ বিজয়ীজনে পোৱা ভোটৰ সংখ্যা $\frac{4x}{5}$ অৰ 65%

$$= \frac{4x}{5} \times 65 \times \frac{1}{100} = \frac{52x}{100}$$

প্ৰশ্নমতে, $\frac{52x}{100} = 572000$

$$x = \frac{572000 \times 100}{52} = 11,00,000 \text{ জন।}$$

∴ মুঠ ভোটাৰৰ সংখ্যা = 11,00,000 জন।

টোকা ঃ দ্ৰব্য কিনা-বেচা ব্যৱসায়ত শতকৰাৰ প্ৰয়োজন অনিবাৰ্য্য। লাভ লোকচান বুজিবৰ বাবে স্কেল হ'ল শতকৰা।

উদাহৰণ-12 ঃ এটা বস্তুৰ বিক্ৰীমূল্য 1800 টকা। বিক্ৰী কৰি লাভ পালে 300 টকা। লাভৰ শতকৰা হাৰ কি?

সমাধান ঃ [লাভ লোকচানৰ গণনা হয় কিনাদামৰ ওপৰত। প্ৰশ্নত কিনাদামৰ উল্লেখ নাই। উলিয়াই লওঁ।]

বেচাদাম	=	1800.00	টকা
লাভ	=	300.00	টকা
(গতিকে) কিনাদাম	=	1500.00	টকা

1500 টকাত লাভ 300 টকা।

$$100 \text{ টকাত লাভ } \frac{300\times100}{1500} = 20 \text{ টকা}$$

∴ লাভৰ হাৰ = 20%

উদাহৰণ-13 ঃ দুটা ব্ৰেণ্ডৰ দুখন ফেন, 630 টকাকৈ বিক্ৰি কৰাত দোকানীয়ে এখনত 5% লাভ পালে আৰু আনখনত 10% লাভ লোকচান হ'ল। তেওঁৰ মুঠ কিমান লাভ বা ক্ষতি হ'ব পাৰে?

সমাধান ঃ [লাভ লোকচানৰ হিচাপ কিনাদামৰ ওপৰত। দুয়োখনৰে কিনাদাম উলিয়াব লাগিব।]

	বেচা মূল্য (টকা)	কিনাদাম (টকা)
প্ৰথম ফেনখনৰ ক্ষেত্ৰত	105	100
	630	$\frac{100\times630}{105} = 600$ টকা।
দ্বিতীয় ফেনখনৰ ক্ষেত্ৰত	90	100
	630	$\frac{100\times630}{90} = 700$ টকা।

মুঠ কিনাদাম = (600 + 700) টকা = 1300 টকা

মুঠ বেচাদাম = 2 × 630 টকা = 1260 টকা

লোকচান = 40 টকা।

বেংকৰ লেনদেনত শতকৰা হিচাপ ঃ (Percentage in Bank transactions)

উদাহৰণ-14 ঃ নাজমিনা আৰু তাজমিনাই "নাজতাজ বিউটি পাৰ্লাৰ" খুলিবলৈ মুদ্ৰাবেংকৰ পৰা বছৰি 4% সুতত 9000 টকা ধাৰে ল'লে। তেওঁলোকে মাহে মাহে সুত আদায় দিয়াৰ সিদ্ধান্ত ল'লে। প্ৰতিমাহে সুত কিমান টকাকৈ দিব?

সমাধান ঃ 100 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = 4 টকা।

$$\therefore 9000 \text{ টকাৰ 1 বছৰৰ সুত } = 4 \times \frac{9000}{100} = 360 \text{ টকা।}$$

$$\text{মাহে দিবলগীয়া সুত } = \frac{1}{12}\times 360 \text{ টকা } = 30 \text{ টকা।}$$

উদাহৰণ-15 ঃ 3600 টকা 5 বছৰ বেংকত থ'লে 5220 টকা হয়। সুতৰ হাৰ কি? এই সুতত 7 বছৰত 47270 টকা হ'বলৈ কিমান টকা সেই বেংকত জমা হ'ব লাগিব?

সমাধান ঃ [ইয়াত দুটা অংক জপটিয়াই দিছে। এটাৰ পৰা সুত উলিয়াব লাগে, আনটোৰ পৰা মূলধন।]

মূল 3600 টকাৰ সুতমূল 5220 টকা।

∴ সুতৰ পৰিমাণ = (5220 – 3600) টকা = 1620 টকা।

অৰ্থাৎ 3600 টকাৰ 5 বছৰৰ সুত = 1620 টকা।

∴ 100 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = $\frac{1620 \times 100}{3600 \times 5} = 9$ টকা।

সুতৰ হাৰ = 9%

দ্বিতীয় অংশ

সুতমূল = 47270 টকা, বছৰ = 7, সুতৰ হাৰ = 9%, মূল = ?

100 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত 9 টকা।

∴ 100 টকাৰ 7 বছৰৰ সুত = 9 × 7 = 63 টকা

সুতমূল = (100 + 63) = 163 টকা।

7 বছৰত সুতমূল 163 টকা হ'বলৈ মূলধন আছিল = 100 টকা।

∴ 7 বছৰত সুতমূল 1 টকা হ'বলৈ মূলধন আছিল = $\frac{100}{163}$

∴ 7 বছৰত 47270 টকা হ'বলৈ মূলধন আছিল $= \frac{100 \times 47270}{163}$ = 29000 টকা।

টোকা ঃ সুতমূলৰ (সবৃদ্ধিমূল) পূৰ্বনিৰ্ধাৰিত সূত্ৰটো ঃ

P = মূল, I = সুত, r = সুতৰ হাৰ %, t = সময়

A = সুতমূল

$$I = \frac{P.r.t}{100}, \qquad A = P\left(1 + \frac{rt}{100}\right)$$

অনুশীলনী- R-1

1. বৰ্গমূলৰ দ্বাৰা $\sqrt{2}$ৰ আনুমানিক মান দুই দশমিক স্থানলৈ উলিওৱা।
2. দুটা অপৰিমেয় সংখ্যা লিখা যাৰ যোগফল পৰিমেয় আৰু পূৰণফল পৰিমেয়।
3. সংখ্যাৰেখাৰ সহায়ত –5 আৰু 5 অৰ মধ্যৱৰ্তী অখণ্ড সংখ্যাবোৰ লিখা।
4. সূচক বিধি $a^m \div a^n = a^{m-n}$ অত $m = n$ লৈ প্ৰমাণ কৰা যে $a^0 = 1$।

5. সূচক বিধি $a^m \div a^n = a^{m-n}$ অত $m = 0$ লৈ প্ৰমাণ কৰা যে $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ।

6. তলৰ যোৰৰ প্ৰত্যেকৰে মৌলিক উৎপাদক উলিয়াই গ.সা.উ., আৰু ল.সা.গু. থিৰ কৰা।

(i) 321, 396, (ii) 455, 42 (iii) 408, 170

7. $\frac{2}{11}$ আৰু $\frac{1}{6}$ ৰ মাজৰ যিকোনো দুটা পৰিমেয় সংখ্যা লিখা।

8. সৰল কৰা ঃ $\sqrt{10}\times\sqrt{5}$

$\sqrt{2} = 1.41$ হ'লে প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ আসন্ন মান কি হ'ব?

9. $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰা ঃ

(i) $0.\dot{8}\dot{1}$ (ii) $0.1\dot{8}$ (iii) $2.4\dot{7}$ (iv) $2.44\dot{3}\dot{1}$

10. সৰল কৰা ঃ

(i) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ (ii) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(8+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$ (iv) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

(v) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ (vi) $\frac{7+\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}}$

(vii) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ (viii) $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$

11. প্ৰমাণ কৰা যে ঃ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}=0$

12. $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{2}=1.414$ ধৰি, তলৰ ৰাশিৰ আসন্ন মান উলিওৱা ঃ

(i) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

13. হৰণ কাৰ্য নকৰাকৈ তলৰ পৰিমেয় সংখ্যাবোৰক দশমিকত প্ৰকাশ কৰা।

[যেনে ঃ $\frac{2}{25} = \frac{2 \times 4}{25 \times 4} = \frac{4}{100} = 0.04$]

(i) $\frac{7}{25}$ (ii) $\frac{3}{40}$ (iii) $\frac{3}{100}$ (iv) $\frac{23}{5^2 \times 2^3}$ (v) $\frac{14}{175}$

14. তলৰ শতকৰাবোৰক ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰা ঃ

(i) 53% (ii) 50% (iii) $\frac{1}{2}$% (iv) 100%

(v) 0.01%

15. তলৰ ভগ্নাংশবোৰ শতকৰা ৰূপত লিখা ঃ

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{3}{20}$

(iv) $\frac{42}{125}$ (v) 0.25 (vi) 1.25

16. কোনো এটা বস্তু 10% লাভত বিক্ৰি কৰা হ'ল। তাৰ কিনাদাম আৰু বেচাদামৰ অনুপাত কি?

17. 30 কণীৰ কিনাদাম, 20 টা কণীৰ বেচাদামৰ সমান। লাভৰ শতকৰা হাৰ কি?

18. এটা বস্তুৰ কিনাদাম 2100 টকা; 10% লাভত বিক্ৰি হ'লে বস্তুটোৰ বেচাদাম কি?

19. টকাত 4টাকৈ নেমু কিনি 20% লাভত বিক্ৰি কৰিলে। এটা নেমুৰ বিক্ৰি মূল্য কিমান হ'ব?

20. এটা বস্তু 500 টকাত বিক্ৰি কৰিলে 5% লোকচান হয়। এইটো কিমান দামত বেচিলে 5% লাভ হ'লহেঁতেন?

21. গ্ৰাহকক আকৰ্ষণ কৰিবলৈ এজন ব্যৱসায়ীয়ে এটা চাৰ্টৰ দামত ক্ৰমে 10%, 10% আৰু 5% ৰেহাই দিয়ে। তিনিওটাৰ সমতুল ৰেহাই কি হ'ব?

●●●

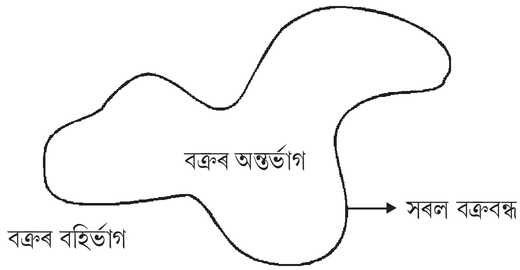
দ্বিতীয় খণ্ড

পৰিমিতি (Mensuration)

আলোচনাৰ ধাৰাবাহিকতাৰ বাবে আগৰ শ্ৰেণীত পাই অহা পৰিমিতি বিষয়ক প্ৰয়োজনীয় ধাৰণাবোৰৰ পুনৰুল্লেখ কৰা হ'ল —

পৰিসীমা আৰু কালি (Perimeter and Area) ঃ

মনত পেলোৱা যে সামতলিক সৰল বন্ধ বক্ৰ এটাই সমতল এখনত তিনি ভাগত ভাগ কৰে— বক্ৰটোৰ অন্তৰ্ভাগ, বক্ৰটো আৰু বক্ৰটোৰ বহিৰ্ভাগ।



চিত্ৰৰ পৰাই বুজা যায় যে সৰল বন্ধ বক্ৰটোৱে কাগজৰ পৃষ্ঠাখনৰ কিছু অংশ বা ঠাই আগুৰি আছে। এই ঠাইখিনিক (বক্ৰটোৰ অন্তৰ্ভাগ) বক্ৰটোৱে আগুৰা ক্ষেত্ৰ (Region) বুলি কোৱা হয়। আনহাতে, বন্ধ বক্ৰটোক আবদ্ধ ক্ষেত্ৰটোৰ চাৰিসীমা (Boundary) বোলা হয়।

দৈৰ্ঘ্যৰ কোনো একক ব্যৱহাৰ কৰি বন্ধ বক্ৰটো যদি জুখি উলিয়াব পৰা যায় তেন্তে সেই জোখকে আবদ্ধ ক্ষেত্ৰটোৰ পৰিসীমা (Perimeter) বোলা হয়। আকৌ, ক্ষেত্ৰৰ কোনো এককৰ সহায়ত আবদ্ধ ক্ষেত্ৰটোৱে কিমান ঠাই আগুৰি আছে সেইটো জুখিব পাৰিলে সেই জোখকে আবদ্ধ ক্ষেত্ৰটোৰ ক্ষেত্ৰফল বা কালি বোলা হয়।

পৰিসীমা আৰু কালিৰ এই ধাৰণাৰে কিছুমান জ্যামিতিক ক্ষেত্ৰৰ পৰিসীমা আৰু কালি তোমালোকে উলিয়াবলৈ শিকিছা।

সাধাৰণভাৱে,

এটা সুষম বহুভুজৰ পৰিসীমা = বাহুৰ দীঘ × বহুভূজটোৰ বাহুৰ সংখ্যা।

সুষম বহুভুজৰ বাহুৰ সংখ্যা 4 হ'লে আৰু অন্তঃকোণবোৰ 90^0 বহুভুজটো এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ হয়।

গতিকে, বৰ্গক্ষেত্ৰৰ পৰিসীমা $= 4 \times l$, য'ত l বৰ্গক্ষেত্ৰটোৰ এটা বাহুৰ দীঘ।

আনহাতে বৰ্গক্ষেত্ৰৰ কালি = l^2,

এটা সুষম বহুভুজৰ বাহুৰ সংখ্যা 4 হ'লে আমি এটা চতুৰ্ভুজ পাওঁ। চতুৰ্ভুজৰ বিপৰীত বাহুবোৰ সমান আৰু প্ৰতিটো অন্তঃকোণ সমকোণ হ'লে ইয়াক আয়ত বোলা হয়।

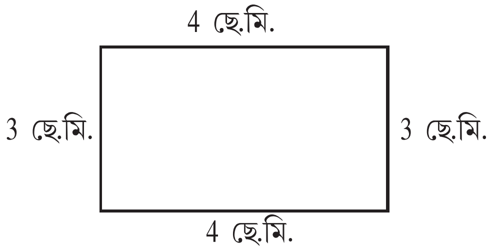
আয়তৰ পৰিসীমা = $2 \times (l + b)$

আৰু আয়তৰ কালি = $l \times b$

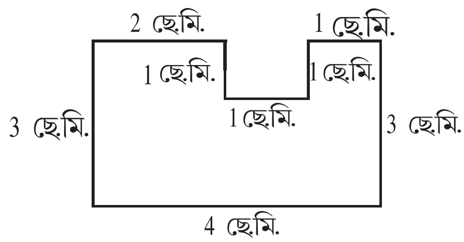
য'ত l আৰু b যথাক্ৰমে আয়তটোৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ।

বৰ্গক্ষেত্ৰ বা আয়তৰ পৰিসীমা আৰু কালিৰ মাজত যিকোনো ধৰণৰ নিৰ্দিষ্ট সম্পৰ্ক আছেনে ?

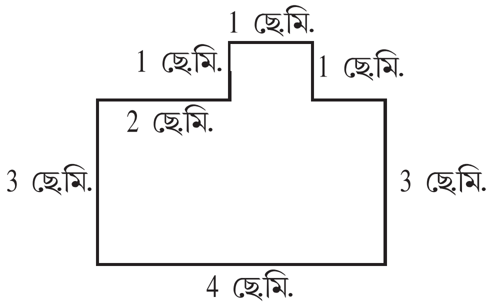
তলৰ চিত্ৰ কেইটালৈ মন কৰা —



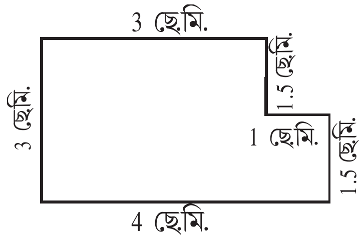
(i)



(ii)



(iii)

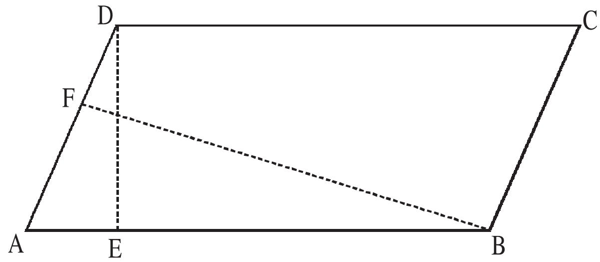


(iv)

প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰৰ পৰিসীমা আৰু কালি হিচাপ কৰি উলিওৱা। দেখিবা যে একে পৰিসীমা থকা ক্ষেত্ৰৰ কালি বেলেগ বেলেগ হ'ব পাৰে [(i) পৰিসীমা = (iv) পৰিসীমা আৰু (ii) পৰিসীমা = (iii) পৰিসীমা]।

সামান্তৰিকৰ কালি = ভূমি × উচ্চতা

সামান্তৰিকৰ যিকোনো বাহুক ভূমি হিচাপে ল'ব পাৰি। সামান্তৰিকৰ এটা বাহুক ভূমি বুলি ধৰিলে, সেই বাহু আৰু তাৰ বিপৰীত সমান্তৰাল বাহুৰ লম্ব দূৰত্বক সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা হিচাপে লোৱা হয়।

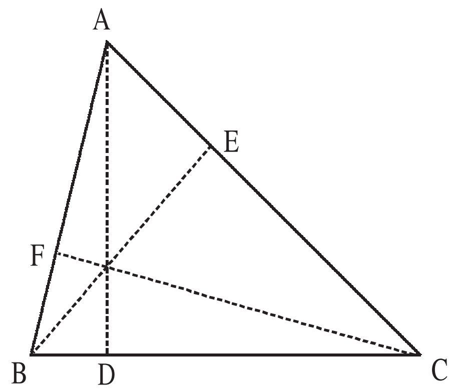


চিত্ৰত দিয়া সামান্তৰিকটোৰ ভূমি AB ধৰিলে উচ্চতা হ'ব DE আৰু ভূমি BC ধৰিলে উচ্চতা হ'ব FB।

গতিকে, ABCD সামান্তৰকিটোৰ কালি = AB × DE বা BC × FB।

ত্ৰিভুজৰ কালি = $\frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা।

ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহুৰ যিকোনো এটাক ভূমি ধৰিব পৰা যায়। ত্ৰিভুজৰ যিকোনো এটা বাহুক ভূমি হিচাপে ল'লে সেই বাহুলৈ বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুৰ পৰা টনা লম্বক ত্ৰিভুজটোৰ উচ্চতা বোলা হয়।



ΔABC ভূমি BC সাপেক্ষে উচ্চতা AD, AC ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা BE আৰু AB ভূমি সাপেক্ষে CF উচ্চতা।

গতিকে ΔABC ৰ কালি = $\frac{1}{2}$BC × AD বা $\frac{1}{2}$AC × BE বা $\frac{1}{2}$AB × CF

বৃত্তৰ পৰিসীমা আৰু কালি ঃ (Perimeter and Area of Circle)

মনত পেলোৱা যে বৃত্ত হ'ল এটা সৰল সামতলিক বন্ধ বক্র যাৰ প্রত্যেক বিন্দুৱেই সমতলখনৰ এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ (কেন্দ্র)পৰা নির্দিষ্ট দূৰত্ব (ব্যাসার্দ্ধ)ত থাকে। বক্রটোৰ দৈর্ঘ্যক পৰিধি আৰু কেন্দ্ৰৰে যোৱা আৰু বৃত্তটোৰ বক্রৰ মাজত আৱদ্ধ ৰেখাখণ্ডক বৃত্তটোৰ ব্যাস বোলা হয়।

যিকোনো বৃত্তৰ পৰিধি আৰু ব্যাসৰ অনুপাতটো এটা স্থিৰ সংখ্যা। ইয়াক π ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ মান $\frac{22}{7}$ (আনুমানিক) লোৱা হয়। এটা বৃত্তৰ পৰিধি C আৰু ব্যাস d ধৰিলে —

$\frac{c}{d} = \pi$ অর্থাৎ $c = \pi \times d$

অর্থাৎ বৃত্তৰ পৰিধি বা পৰিসীমা $= \pi \times$ ব্যাস

$= 2\pi \times$ ব্যাসার্দ্ধ $= 2\pi r$

আনহাতে বৃত্তৰ কালি $= \pi r^2$, 'r' হ'ল বৃত্তটোৰ ব্যাসার্দ্ধ ($d = 2r$)

$= \pi \times$ (ব্যাসার্দ্ধ)^2

উদাহৰণ-1 : 300 ছে.মি. × 30 ছে.মি. জোখৰ আয়তাকাৰ তক্তা এখনৰ পৰিসীমা আৰু কালি উলিওৱা।

সমাধান ঃ দীঘ = 300 ছে.মি.

প্রস্থ = 30 ছে.মি.

তক্তাখনৰ পৰিসীমা = 2 × (দীঘ + প্রস্থ)

= 2 × (300 + 30) ছে.মি.

= 660 ছে.মি.

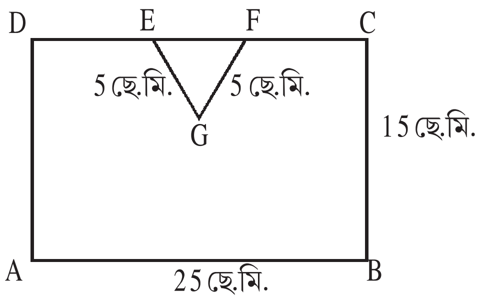
তক্তাখনৰ কালি = দীঘ × প্রস্থ

= 300 × 30 বর্গ ছে. মি.

= 9000 বর্গ ছে.মি.।

উদাহৰণ-2 : 25 ছে.মি. × 15 ছে.মি. জোখৰ আয়তাকাৰ কাগজ এখনৰ পৰা যিকোনো দাঁতিৰ ফালে 5 ছে.মি. জোখৰ বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ কাটি পেলোৱা হ'ল। অৱশিষ্ট কাগজখিলাৰ পৰিসীমা নির্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ



অৱশিষ্ট কাগজখিলাৰ পৰিসীমা = AB + BC + CF + FG + GE + ED + DA
= DA + AB + BC + (CF + ED) + FG + GE
= DA + AB + BC + (DC – EF) + FG + GE
= 15 + 25 + 15 + (25 – 5) + 5 + 5 ছে.মি.
= 85 ছে.মি.।

উদাহৰণ-3 : 30 ছে.মি. × 30 ছে.মি. জোখৰ বৰ্গাকাৰ আকৃতিত থকা তাঁৰ এডালৰ পৰা আয়ত আকৃতি এটা তৈয়াৰ কৰা হ'ল যাৰ দীঘ 40 ছে.মি.। আয়তটোৰ প্ৰস্থ কিমান?

সমাধান ঃ বৰ্গ আৰু আয়তটোৰ পৰিসীমা একেই আছে।

যদি আয়তটোৰ প্ৰস্থ b হয় তেন্তে

আয়তটোৰ পৰিসীমা হ'ব = 2 × (দীঘ + প্ৰস্থ)
= 2 × (40 + b)
= 80 + $2b$

বৰ্গৰ পৰিসীমা = 4 × বাহুৰ দীঘ
= 4 × 30 ছে.মি.
= 120 ছে.মি.

∴ $2b + 80 = 120$ [∵ বৰ্গ আৰু আয়তটোৰ পৰিসীমা সমান]

বা $2b = 120 - 80 = 40$

বা $b = 20$

∴ আয়তটোৰ প্ৰস্থ = 20 ছে.মি.।

উদাহৰণ-4 : এটা সামান্তৰিকৰ ভূমি 5 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 3 ছে.মি. হ'লে কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ সামান্তৰিকৰ কালি = ভূমি × উচ্চতা

= 5 × 3 বৰ্গ ছে.মি.

= 15 বৰ্গ ছে.মি.

উদাহৰণ-5 : সামান্তৰিক আকৃতিত থকা তক্তা এখনৰ এটা দাঁতিৰ দীঘ 180 ছে.মি. আৰু অনুৰূপ উচ্চতা 25 ছে.মি.। তক্তাখনৰ আন এটা উচ্চতা 90 ছে.মি. হ'লে অনুৰূপ দাঁতিৰ দীঘ উলিওৱা।

সমাধান ঃ সামান্তৰিকৰ কালি = ভূমি × উচ্চতা

= 180 × 25 বৰ্গ ছে.মি.

= 4500 বৰ্গ ছে.মি.

তক্তাখনৰ আনটো উচ্চতাৰ অনুৰূপ দাঁতিৰ দীঘ l হ'লে ইয়াৰ কালি $l \times 90$ হ'ব।

গতিকে, $l \times 90 = 4500$

বা $l = \frac{4500}{90} = 50$

আনটো দাঁতিৰ দীঘ = 50 ছে.মি.।

উদাহৰণ-6 : এটা ত্ৰিভুজৰ ভূমি আৰু অনুৰূপ উচ্চতাৰ জোখ ক্ৰমে 4 ছে.মি. আৰু 3 ছে.মি.। ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিওৱা।

সমাধান ঃ ত্ৰিভুজৰ কালি = $\frac{1}{2}$ভূমি × উচ্চতা

= $\frac{1}{2} \times 4 \times 3$ বৰ্গ ছে.মি.

= 6 বৰ্গ ছে.মি.

উদাহৰণ-7 : ΔABCৰ AB আৰু BCৰ জোখ ক্ৰমে 5 ছে.মি. আৰু 8 ছে.মি.। ABৰ অনুৰূপ উচ্চতা 6 ছে.মি. হ'লে BCৰ অনুৰূপ উচ্চতা কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ΔABC ত্ৰিভুজৰ কালি = $\frac{1}{2}$ভূমি × উচ্চতা

= $\frac{1}{2} \times 5 \times 6$ বৰ্গ ছে.মি.

= 15 বৰ্গ ছে.মি.

যদি BCৰ অনুৰূপ উচ্চতা h হয়, তেন্তে ΔABC ৰ কালি $= \frac{1}{2} \times h \times 8$

গতিকে, $\frac{1}{2} h \times 8 = 15$

$\therefore h = \frac{15}{4}$ ছে.মি.

উদাহৰণ-8 : 7 ছে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত বৃত্তৰ পৰিসীমা উলিওৱা।

সমাধান ঃ বৃত্তৰ পৰিসীমা $= 2\pi \times$ ব্যাসাৰ্দ্ধ

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$ ছে.মি.

$= 44$ ছে.মি.

উদাহৰণ-9 : 84 ছে.মি. পৰিধিবিশিষ্ট বৃত্তৰ কালি উলিওৱা।

সমাধান ঃ বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ r হ'লে

$2\pi r =$ পৰিসীমা (পৰিধি) $= 84$

$\therefore r = \frac{84}{2\pi} = \frac{42}{\frac{22}{7}} = \frac{21\times 7}{11} = \frac{147}{11}$ (ছেণ্টিমিটাৰ)

বৃত্তৰটোৰ কালি $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{147}{11}\right)^2$ বৰ্গ ছে.মি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{147\times 147}{11\times 11}$ বৰ্গ ছে.মি.

$= \frac{2\times 21\times 147}{11}$ বৰ্গ ছে.মি.

$= \frac{6{,}174}{11}$ বৰ্গ ছে.মি.

উদাহৰণ-10 : একে কেন্দ্ৰ বিশিষ্ট দুটা বৃত্তাকাৰ পথৰ মাজৰ ঠাইখিনিৰ কালি উলিওৱা। যদি বৃত্ত দুটাৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ ক্ৰমে 210 মিটাৰ আৰু 490 মিটাৰ হয়।

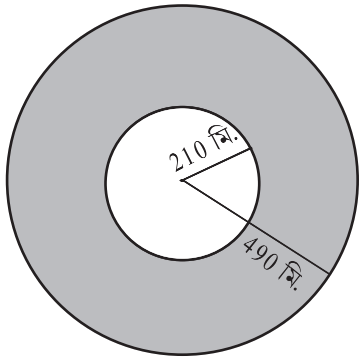
সমাধান ঃ বাহিৰৰ বৃত্তটোৰ কালি

$= \pi\ (490)^2$ বৰ্গমিটাৰ।

$= \frac{22}{7} \times 490 \times 490$ বৰ্গমিটাৰ।

$= 22 \times 70 \times 490$ বৰ্গমিটাৰ

$= 7{,}54{,}600$ বৰ্গমিটাৰ



ভিতৰৰ বৃত্তটোৰ কালি

$= \pi\ (210)^2$ বৰ্গমিটাৰ

$= \frac{22}{7} \times 210 \times 210$ বৰ্গমিটাৰ

$= 22 \times 30 \times 210$ বৰ্গ. মি. $= 1{,}38{,}600$ বৰ্গমিটাৰ

গতিকে বৃত্তাকাৰ পথদুটাৰ মাজৰ অংশটোৰ কালি

$= (7{,}54{,}600 - 1{,}38{,}600)$ বৰ্গমিটাৰ

$= 6{,}16{,}000$ বৰ্গমিটাৰ।

অনুশীলনী- R-2

1 ৰ পৰা 10 লৈ প্ৰশ্নকেইটাৰ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা ঃ

1. এখন বৰ্গাকাৰ খেতিপথাৰৰ কালি 10000 বৰ্গমিটাৰ হ'লে পথাৰখনৰ পৰিসীমা —

   (a) 40 মিটাৰ (b) 100 মিটাৰ (c) 200 মিটাৰ (d) 400 মিটাৰ।

2. আয়তাকাৰ চোতাল এখনৰ দীঘ 30 মিটাৰ আৰু কালি 600 বৰ্গ মি. হ'লে চোতালখনৰ পৰিসীমা—

   (a) 110 মিটাৰ (b) 115 মিটাৰ (c) 100 মিটাৰ (d) 125 মিটাৰ।

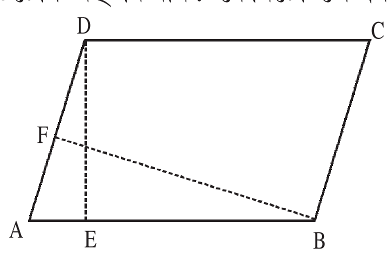
3. 9 ছে.মি. বাহুবিশিষ্ট বৰ্গৰ সমান কালিৰ এটা আয়তৰ প্ৰস্থ 3 ছে.মি. হ'লে আয়তটোৰ পৰিসীমা—

   (a) 56 ছে.মি. (b) 60 ছে.মি. (c) 63 ছে.মি. (d) 65 ছে.মি.।

4. এখন টেবুলৰ ওপৰত থকা ত্ৰিভুজাকৃতিৰ এখন আয়নাৰ দাঁতি আৰু অনুৰূপ উচ্চতাৰ জোখ ক্ৰমে 120 ছে.মি. আৰু 80 ছে.মি হ'লে ত্ৰিভুজটোৰ কালিৰ জোখ হ'ব —

   (a) 4600 বৰ্গ ছে.মি. (b) 4800 বৰ্গ ছে.মি. (c) 4850 বৰ্গ ছে.মি. (d) 4900 বৰ্গ ছে.মি.

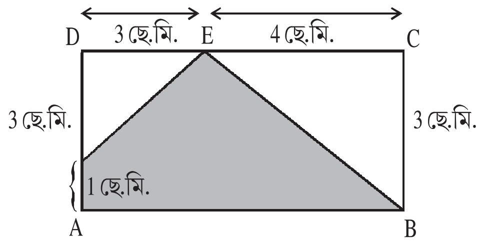
5. এটা ত্ৰিভুজৰ কালি আৰু কোনো এটা বাহুৰ জোখ ক্ৰমে 48 বৰ্গ ছে.মি. আৰু 8 ছে.মি. হ'লে বাহুটোৰ অনুৰূপ উচ্চতাৰ জোখ —
(a) 11 ছে.মি. (b) 12 ছে.মি. (c) 13 ছে.মি. (d) 14 ছে.মি.
6. এটা ত্ৰিভুজৰ কালি আৰু কোনো ভূমিৰ অনুৰূপ উচ্চতাৰ জোখ যথাক্ৰমে 1256 বৰ্গ মি.মি. আৰু 31.4 মি.মি. হ'লে সেই ভূমিৰ জোখ —
(a) 80 মি.মি. (b) 45 মি.মি. (c) 50 মি.মি. (d) 35 মি. মি.
7. 10 ছে.মি. ব্যাসযুক্ত বৃত্তৰ পৰিধিৰ জোখ —
(a) 30.4 ছে.মি. (b) 30.14 ছে.মি. (c) 31.4 ছে.মি. (d) 30.01 ছে.মি.
(ইয়াত, $\pi = 3.14$ ধৰিবা)
8. বৃত্তাকাৰ চোতাল এখনৰ পৰিধিৰ জোখ 176 মিটাৰ হ'লে চোতালখনৰ কালি —
(a) 2461 বৰ্গ মি.(b) 2744 বৰ্গ মি. (c) 2664 বৰ্গ মি. (d) 2464 বৰ্গ মি.
9. এখন বৃত্তাকাৰ পিৰিছৰ কালি 38.5 বৰ্গ ছে.মি. হ'লে পিৰিছখনৰ ব্যাস—
(a) 5 ছে.মি. (b) 6 ছে.মি. (c) 7 ছে.মি. (d) 8 ছে.মি.
10. এখন কাঁহীৰ কালি 616 বৰ্গ ছে.মি. হ'লে কাঁহীখনৰ পৰিসীমা—
(a) 80 ছে.মি. (b) 89 ছে.মি. (c) 88 ছে.মি. (d) 90 ছে.মি.
11. এটা আয়তৰ পৰিসীমা 120 ছে.মি. আৰু দীঘ 40 ছে.মি. হ'লে আয়তটোৰ কালি উলিওৱা।
12. কোঠা এটাৰ এখন বেৰৰ জোখ 4.5 মিটাৰ $\times$ 3.6 মিটাৰ আৰু 2 মি. $\times$ 1 মি. জোখৰ দুৱাৰৰ বাবে বেৰখনৰ কিছু ঠাই এৰি থোৱা আছে। ৰং লগাবৰ বাবে বেৰখনৰ কালিৰ জোখ উলিওৱা।
13. এডাল তাঁৰেৰে 10 ছে.মি. বাহুবিশিষ্ট বৰ্গ এটি বনোৱা হ'ল। যদি তাঁৰ ডালেৰে এটা আয়ত বনোৱা হয় যাৰ দীঘ 12 ছে.মি. তেন্তে আয়তটোৰ প্ৰস্থ কিমান? কোনটো ক্ষেত্ৰৰ কালি অধিক? বৰ্গৰ নে আয়তৰ?



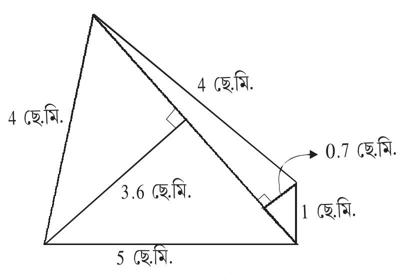
14. কাষৰ চিত্ৰত ABCD এটা সামান্তৰিক। AB আৰু BCৰ জোখ ক্ৰমে 6 ছে.মি. আৰু 4 ছে.মি.। AD ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা BF ৰ জোখ 4.9 ছে.মি. হ'লে AB ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা DEৰ জোখ উলিওৱা।
15. ΔABC ৰ কালি 30 বৰ্গ ছে.মি. আৰু BC ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা AD ৰ জোখ 10

ছে.মি. হ'লে BC ৰ জোখ উলিওৱা।

16. ΔPQR ৰ QR আৰু PR ৰ জোখ ক্ৰমে 4 ছে.মি. আৰু 8 ছে.মি.। QR ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা PL ৰ জোখ 5 ছে.মি. হ'লে, PR ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা QM ৰ জোখ উলিওৱা।
17. ΔABC ৰ BC ভূমি সাপেক্ষে উচ্চতা ADৰ জোখ 4 ছে.মি.। P, BC ৰ এটা বিন্দু যাতে BP = 3 ছে.মি. আৰু ΔABP ৰ কালি = ΔAPC ৰ কালি। PC ৰ জোখ উলিওৱা।
18. এখন অৰ্দ্ধবৃত্তাকাৰ বাগিচাৰ ব্যাসাৰ্দ্ধৰ জোখ 10 মিটাৰ হ'লে বাগিচাখনৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (π = 3.14 ল'বা)
19. 4 ছে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তাকাৰ কাঠৰ টুকুৰাৰ পৰা 3 ছে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ বৃত্ত এটা কাটি পেলোৱা হ'ল। টুকুৰাটোৰ অৱশিষ্ট অংশৰ কালি উলিওৱা।
20. 44 ছে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ তাঁৰ এডালৰ পৰা এটা বৃত্তাকাৰ আকৃতি পোৱা গ'ল। বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ কিমান?
21. ঘড়ী এটাৰ মিনিটৰ কাঁটা ডালৰ দৈৰ্ঘ্য 20 মিলিমিটাৰ। আধাঘণ্টাত মিনিটৰ কাঁটাডালৰ আগটোৱে কিমান দূৰ অতিক্ৰম কৰিব?
22. 100 মিটাৰ বাহুবিশিষ্ট বৰ্গাকাৰ উদ্যান এখনৰ ভিতৰফালে চৌহদৰ কাষে কাষে 5 মিটাৰ বহল এটা ৰাস্তা ৰখা আছে। ৰাস্তাটোৰ কালি উলিওৱা।
23. 180 মিটাৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু 120 মিটাৰ প্ৰস্থৰ আয়তাকাৰ পথাৰ এখনৰ সীমাৰ বাহিৰেৰে 6 মিটাৰ প্ৰস্থৰ এটা ৰাস্তা আছে। ৰাস্তাটোৰ কালি উলিওৱা।
24. তলৰ চিত্ৰত ছাঁ দিয়া অংশৰ কালি উলিওৱা।



25. তলৰ চতুৰ্ভুজটোৰ কালি উলিওৱা।



● ● ●

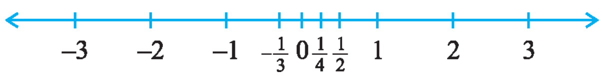
Z4F4V9

প্ৰথম অধ্যায়

সংখ্যা প্ৰণালী (Number System)

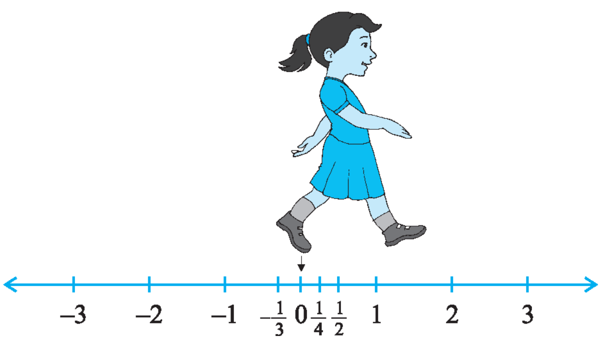
1.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে সংখ্যাৰেখাৰ বিষয়ে আৰু এই সংখ্যাৰেখাত বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সংখ্যা কি দৰে উপস্থাপন কৰিব পাৰি সেই সম্পৰ্কে শিকিছা। (চিত্ৰ **1.1** চোৱা)



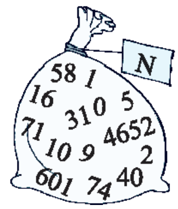
চিত্ৰ 1.1 ঃ **সংখ্যাৰেখা**

এই সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰেদি শূন্যৰপৰা ৰেখাডালৰ ধনাত্মক দিশে খোজ কাঢ়ি গৈ আছা বুলি ভাবাচোন। এনে অৱস্থাত তোমাৰ দৃষ্টিৰে ঢুকি পোৱালৈকে মাথো সংখ্যা, সংখ্যা আৰু সংখ্যাকেই দেখা পাবা।

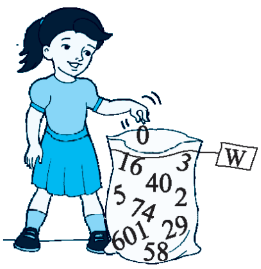


চিত্ৰ 1.2

এতিয়া ধৰি লোৱা, সংখ্যাৰেখাডালেৰে খোজকাঢ়ি গৈ থাকোতে কিছুমান সংখ্যা বুটলি গৈ আছা। এইবোৰ ভৰাবলৈ মোনা এটা সাজু কৰা।

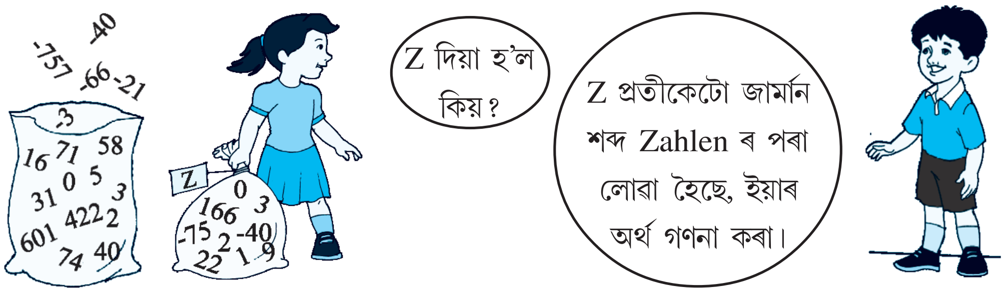


প্ৰথমে তুমি নিশ্চয় 1, 2, 3, ... আদি স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰহে বুটলিবা। তুমি জানা যে এই তালিকাখনৰ কেতিয়াও অন্ত নপৰে। (এই কথাটো কিয় সত্য?) গতিকে তোমাৰ মোনাত এতিয়া অসীম সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যা আছে। মনত পেলোৱা যে এই সংখ্যাবোৰক N প্ৰতীকটোৰে সূচিত কৰা হয়।

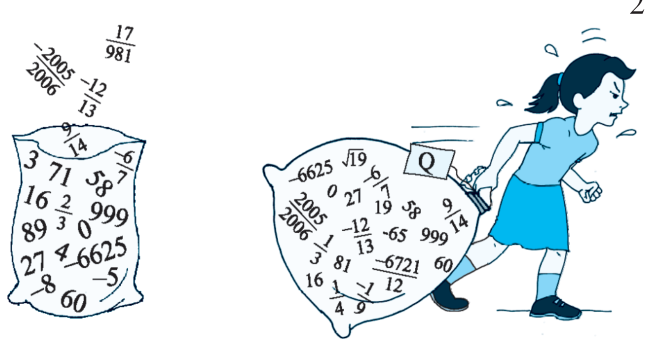


এতিয়া তুমি অহা বাটেৰে উভতিবলৈ আৰম্ভ কৰা আৰু আহি যেতিয়া শূন্যটো পাবাহি তেতিয়া শূন্যটোকো মোনাত ভৰাই লোৱা। তোমাৰ মোনাত এইদৰে গোটখোৱা আটাইবোৰ সংখ্যাই পূৰ্ণসংখ্যা (Whole numbers) যিবোৰক W প্ৰতীকেৰে সূচিত কৰা হয়।

উভতনি যাত্ৰাত তোমাৰ সন্মুখত শূন্যৰ বাওঁফালে দীঘলীয়াকৈ শাৰী পাতি আছে অসংখ্য ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এই গোটেইবোৰ ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা মোনাত ভৰাই লোৱা। মোনাটোত এতিয়া গোটখোৱা এই সংখ্যাবোৰ কি? মনত পেলোৱা যে এনেদৰে গোটখোৱা এই সংখ্যাবোৰেই 'অখণ্ড সংখ্যা' (Integer) আৰু এইবোৰক Z প্ৰতীকেৰে সূচিত কৰা হয়।



সংখ্যাৰেখাডালত এতিয়া বাৰু কিবা সংখ্যা ৰৈ গ'ল নেকি? নিশ্চয় ৰৈছে। $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ বা $\frac{-2005}{2006}$ ৰ



নিচিনা বহু সংখ্যা ৰৈ গৈছে। যদি এই ধৰণৰ সকলো সংখ্যাকে মোনাটোত ভৰাই লোৱা হয় তেনেহ'লে মোনাটোত গোট খোৱা এই আটাইবোৰ সংখ্যাই হ'ল 'পৰিমেয় সংখ্যা' (Rational numbers)। পৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ সংগ্ৰহক Qৰে সূচিত কৰা হয়। 'Rational' শব্দটো 'Ratio'ৰ পৰা আহিছে আৰু Quotient ৰ পৰা Q লোৱা হৈছে।

তোমালোকে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা মনত পেলাব পাৰা—

এটা সংখ্যা 'r' ক পৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$। ($q \neq 0$ বুলি কিয় জোৰ দিয়া হৈছে?)

লক্ষ্য কৰা যে এতিয়া মোনাৰ ভিতৰত থকা সকলোবোৰ সংখ্যাক $\frac{p}{q}$ আকাৰত (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$) প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। উদাহৰণ স্বৰূপে, -25, ক $\frac{-25}{1}$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি (ইয়াত p = -25, q = 1) । গতিকে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটোত স্বাভাৱিক সংখ্যা,পূৰ্ণ সংখ্যা আৰু অখণ্ড সংখ্যাবিলাকো সোমাই আছে।

তোমালোকে ইয়াকো জানা যে পৰিমেয় সংখ্যাবিলাক প্ৰকাশ কৰাৰ এই $\frac{p}{q}$ আৰ্হিটো (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$) অদ্বিতীয় নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ ইত্যাদি। এইবিলাক সমতুল্য পৰিমেয় সংখ্যা (বা ভগ্নাংশ)। সেয়ে হ'লেও, আমি যেতিয়া কওঁ যে $\frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা, অথবা $\frac{p}{q}$ ক যেতিয়া সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰা হয়, তেতিয়া আমি ধৰি লওঁ যে $q \neq 0$ আৰু p আৰু q ৰ মাজত 1 ৰ বাহিৰে অন্য সাধাৰণ উৎপাদক নাই (অৰ্থাৎ p আৰু q সহ মৌলিক)। সেই কাৰণে $\frac{1}{2}$ ৰ অসীম সংখ্যক সমতুল্য ভগ্নাংশৰ মাজৰপৰা এই আটাইবোৰকে প্ৰতিনিধিত্ব কৰাকৈ সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰি দেখুওৱাৰ ক্ষেত্ৰত $\frac{1}{2}$ কেইহে লোৱা হয়।

এতিয়া, তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত শিকি অহা বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সংখ্যা সম্পৰ্কত কিছুমান উদাহৰণ সমাধান কৰোঁ আহাঁ।

উদাহৰণ 1 ঃ যুক্তি দৰ্শাই তলৰ উক্তিবিলাক সঁচা নে মিছা লিখা—
(i) প্ৰতিটো পূৰ্ণ সংখ্যাই এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।
(ii) প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যাই এটা পৰিমেয় সংখ্যা।
(iii) প্ৰতিটো পৰিমেয় সংখ্যাই এটা অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান ঃ (i) উক্তিটো মিছা। কাৰণ শূন্যটো পূৰ্ণসংখ্যা হয়, কিন্তু স্বাভাৱিক সংখ্যা নহয়।

(ii) উক্তিটো সত্য। কাৰণ প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যা m ক $\frac{m}{1}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি আৰু সেয়েই পৰিমেয়।

(iii) উক্তিটো মিছা, কাৰণ $\frac{3}{5}$ সংখ্যাটো অখণ্ড সংখ্যা নহয়।

উদাহৰণ 2 ঃ 1 আৰু 2 মাজত থকা পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।
এই অংকটো অতি কমেও দুটা বিভিন্ন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰিব পাৰি।

প্ৰথম সমাধান ঃ মনত পেলোৱা যে r আৰু s ৰ মাজত এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ বাবে r আৰু s ক যোগ কৰি এই যোগফলক 2 ৰে হৰণ কৰিব পাৰা। অৰ্থাৎ r আৰু s ৰ মাজত $\frac{r+s}{2}$ থাকে।

গতিকে $\frac{3}{2}$ সংখ্যাটো 1 আৰু 2 ৰ মাজত থাকে। এই ধৰণেৰে আগবাঢ়ি তোমালোকে 1 আৰু 2 ৰ মাজত থকা আৰু চাৰিটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিয়াব পাৰিবা। এই চাৰিটা পৰিমেয় সংখ্যা হ'ল $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ আৰু $\frac{7}{4}$।

দ্বিতীয় সমাধান ঃ এই পদ্ধতিত পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ আটাইকেইটাকে এবাৰতে উলিয়াব পাৰি। আমাক যিহেতু পাঁচটা সংখ্যা লাগে, গতিকে 1 আৰু 2 ক 5 + 1 হৰযুক্ত পৰিমেয় সংখ্যা হিচাপে প্ৰকাশ কৰিম। অৰ্থাৎ $1=\frac{6}{6}$ আৰু $2=\frac{12}{6}$ হ'ব। এতিয়া তুমি ভালকৈ চালে বুজিবা যে $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ আৰু $\frac{11}{6}$ এই আটাইকেইটা 1 আৰু 2 ৰ মাজত থকা পৰিমেয় সংখ্যা। গতিকে উলিয়াবলগীয়া পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা হ'ল $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ আৰু $\frac{11}{6}$।

মন্তব্য ঃ মন কৰা যে উদাহৰণ-2 ত তোমাক 1 আৰু 2 ৰ মাজত থকা পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিয়াবলৈ কৈছে। কিন্তু তুমি নিশ্চয় অনুমান কৰিব পাৰিছা যে 1 আৰু 2 ৰ মাজত প্ৰকৃততে

অসীম সংখ্যক পৰিমেয় সংখ্যা আছে। সাধাৰণতে **যিকোনো দুটা প্ৰদত্ত পৰিমেয় সংখ্যাৰ মাজত অসীম সংখ্যক পৰিমেয় সংখ্যা থাকে।**

আমি আকৌ সংখ্যাৰেখালৈ মন কৰো। তুমি সংখ্যাৰেখাৰপৰা আটাইবোৰ সংখ্যা বুটলি ল'ব পাৰিলানে? নিশ্চয় পৰা নাই। আচল কথাটো হ'ল যে সংখ্যাৰেখাডালত এতিয়াও অসীম সংখ্যক সংখ্যা ৰৈ গৈছে। ইতিমধ্যে তুমি বুটলি লোৱা সংখ্যাবিলাকৰ মাজত এটা বা দুটাই নহয়, অসীম সংখ্যক ব্যৱধানেই ৰৈ গৈছে। আশ্চৰ্যজনক কথাটো হ'ল যে এনে ধৰণৰ যিকোনো দুটা ব্যৱধানৰ মাজতো অসীম সংখ্যক সংখ্যা আছে।

গতিকে এতিয়া তলৰ প্ৰশ্নকেইটা আমাৰ সন্মুখত ৰৈ গৈছে—

1. সংখ্যাৰেখাত যিবোৰ সংখ্যা ৰৈ গৈছে সেইবোৰক কি বুলি কোৱা হয়?
2. এইবোৰক কেনেকৈ চিনাক্ত কৰিব পাৰিম? অৰ্থাৎ এই সংখ্যাবোৰক পৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰপৰা কেনেকৈ পৃথক কৰিম?

পৰৱৰ্তী অনুচ্ছেদত এই প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ আগবঢ়োৱা হ'ব।

অনুশীলন 1.1

1. শূন্যটো পৰিমেয় সংখ্যা হয়নে? ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$) প্ৰকাশ কৰিব পাৰিনে?

2. 3 আৰু 4 ৰ মাজত থকা ছটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।

3. $\frac{3}{5}$ আৰু $\frac{4}{5}$ ৰ মাজত থকা পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।

4. তলৰ উক্তিসমূহ সঁচানে মিছা লিখা। উত্তৰসমূহৰ সমৰ্থনত যুক্তি উল্লেখ কৰিবা।

(i) প্ৰতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যাই এটা পূৰ্ণ সংখ্যা।

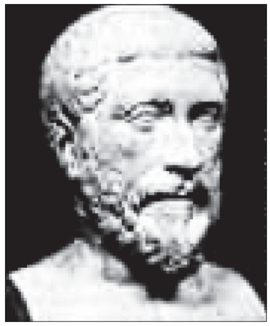
(ii) প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যাই এটা পূৰ্ণ সংখ্যা।

(iii) প্ৰতিটো পৰিমেয় সংখ্যাই এটা পূৰ্ণ সংখ্যা।

1.2 অপৰিমেয় সংখ্যা (Irrational Numbers) ঃ

আগৰ অনুচ্ছেদত দেখিলো যে সংখ্যাৰেখাডালত কিছুমান এনে সংখ্যা থাকিব পাৰে যিবোৰ পৰিমেয় সংখ্যা নহয়। এই অনুচ্ছেদত সেই সংখ্যাবোৰৰ অনুসন্ধান কৰিম। এতিয়ালৈকে যিবোৰ সংখ্যা তুমি পালা সেই বিলাক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ, য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$। গতিকে তুমি প্ৰশ্ন কৰিব পাৰা যে এই আৰ্হিত নথকা সংখ্যা আছে নে? বাস্তৱিকতে তেনে ধৰণৰ সংখ্যা আছে।

বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আৰু দাৰ্শনিক পাইথাগোৰাচৰ অনুগামী গ্ৰীচদেশৰ পাইথাগোৰীয়সকলে খৃষ্টপূৰ্ব 400 মানত পোন প্ৰথম সেই ধৰণৰ সংখ্যা আৱিস্কাৰ কৰিছিল যি বিলাক পৰিমেয় সংখ্যা নহয়। এই সংখ্যাবোৰক অপৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয়, কাৰণ এইবিলাকক দুটা অখণ্ড সংখ্যাৰ অনুপাত হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। পাইথাগোৰাচৰ অনুগামী ক্ৰ'ট'নৰ হিপ্পাকাচে (Hippacus of Croton) অপৰিমেয় সংখ্যাৰ আৱিস্কাৰ কৰা সম্পৰ্কত অনেক প্ৰবাদ জড়িত হৈ আছে। এই প্ৰবাদ সমূহৰ মতে, $\sqrt{2}$ যে অপৰিমেয় সেই কথা আৱিস্কাৰ কৰাৰ বাবে অথবা $\sqrt{2}$ সম্পৰ্কীয় গুপুত কথা বিলাক গুপ্ত পাইথাগোৰীয় চক্ৰটোৰ বাহিৰৰ মানুহক জনোৱাৰ বাবে হিপ্পাকাচৰ জীৱনৰ কৰুণ পৰিসমাপ্তি ঘটিছিল।



পাইথাগোৰাচ
(খৃষ্টপূৰ্ব 569-479)
চিত্ৰ 1.3

এতিয়া আমি আনুষ্ঠানিকভাৱে এই সংখ্যাবিলাকৰ সংজ্ঞা দিম।

'এটা সংখ্যা 's' ক অপৰিমেয় বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত, (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$) প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি।'

তুমি ইতিমধ্যে জানাই যে পৰিমেয় সংখ্যা অসীম সংখ্যক আছে। দেখা যায় যে অপৰিমেয় সংখ্যাও অসীম সংখ্যক আছে। অপৰিমেয় সংখ্যাৰ কিছুমান উদাহৰণ হ'ল—

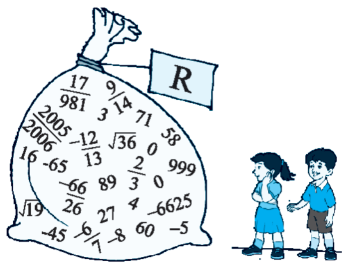
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, π, 0.10110111011110....... আদি।

মন্তব্য ঃ মনত পেলোৱা যে, যেতিয়া আমি '$\sqrt{\ }$' প্ৰতীকটো ব্যৱহাৰ কৰো তেতিয়া আমি ধৰি লওঁ যে ই সংখ্যাটোৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল। গতিকে $\sqrt{4} = 2$, যদিও 2 আৰু -2 দুয়োটাই 4 ৰ বৰ্গমূল। ওপৰত উল্লেখ কৰা অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ কিছুমান তোমাৰ পৰিচিত। উদাহৰণস্বৰূপে তুমি ওপৰত দিয়া ধৰণৰ বহুতো বৰ্গমূল ইতিমধ্যে পাইছা আৰু π ৰ বিষয়েও শিকিছা।

পাইথাগোৰীয়সকলে প্ৰমাণ কৰিছিল যে $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়। পৰৱৰ্তী সময়ত, প্ৰায় 425 খৃষ্টপূৰ্বত, চিৰিনৰ থিয়'ড'ৰাচে (Theodorus of Cyrene) দেখুৱাইছিল যে $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, আৰু $\sqrt{17}$ এই সংখ্যাবিলাকো অপৰিমেয়। $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, আদিৰ অপৰিমেয়তাৰ প্ৰমাণবিলাক দশম শ্ৰেণীত আলোচনা কৰা হ'ব। বিভিন্ন সংস্কৃতিৰ লগত বহু হাজাৰ বছৰ ধৰি পৰিচিত π যে অপৰিমেয় সংখ্যা তাৰ প্ৰমাণ সোতৰ শতিকাৰ শেষৰ

ফালে লেম্বাৰ্ট (Lambert) আৰু লিজেণ্ডাৰে (Legendre) দাঙি ধৰিছিল। 0.10110111011110... আৰু π যে অপৰিমেয় সেই বিষয়ে পিছৰ অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰা হ'ব।

এতিয়া আমি, আগৰ অনুচ্ছেদৰ শেষত উল্লেখ কৰা প্ৰশ্ন সমূহলৈ উভতি যাওঁ। পৰিমেয় সংখ্যা থকা মোনাটোলৈ মনত পেলোৱা। যদিহে অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকো মোনাটোত সুমুৱাই দিয়া হয়, তেতিয়া হ'লে সংখ্যাৰেখাডালত কিবা সংখ্যা ৰৈ যাবনে? দেখিম যে নাই। ইয়াৰপৰা ওলাই পৰিল যে পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাক লগ হৈ হোৱা সংগ্ৰহটোৱেই হ'ল আমি কোৱা বাস্তৱ সংখ্যা (Real numbers) ৰ সংগ্ৰহ যাক R প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। গতিকে এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় পৰিমেয় অথবা অপৰিমেয় হ'ব। সেই বাবেই আমি ক'ব পাৰো যে 'প্ৰতিটো পৰিমেয় বাস্তৱ সংখ্যাকেই সংখ্যাৰেখাডালত থকা এটা অদ্বিতীয় বিন্দুৱে প্ৰতিনিধিত্ব কৰে।' আকৌ 'সংখ্যাৰেখাডালৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা আছে।' এই কাৰণেই আমি সংখ্যাৰেখাডালক 'বাস্তৱ সংখ্যাৰেখা' বুলি কওঁ।



আৰ ডেডেকিণ্ড
(1831-1916)
চিত্ৰ 1.4

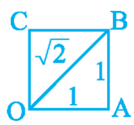
1870 চনত কেণ্টৰ আৰু ডেডেকিণ্ড নামৰ দুজন জাৰ্মান গণিতজ্ঞই দেখুৱাইছিল যে 'প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুৰূপে সংখ্যাৰেখা-ডালত এটা বিন্দু আছে, আৰু সেইদৰে সংখ্যাৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ অনুৰূপে এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা আছে।'

জি কেণ্টৰ
(1845-1918)
চিত্ৰ 1.5

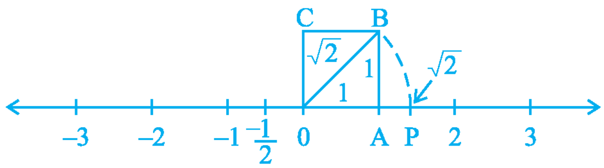
এতিয়া কেইটামান অপৰিমেয় সংখ্যৰ অৱস্থান সংখ্যাৰেখাত কেনেকৈ নিৰূপণ কৰিব পাৰি চাওঁ।

উদাহৰণ-3 ঃ সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{2}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ গ্ৰীকসকলে কেনেকৈনো $\sqrt{2}$ আৱিস্কাৰ কৰিব পাৰিছিল সেয়া সহজে কৰি চাব পৰা যায়। এটা একক বৰ্গক্ষেত্ৰ OABC লোৱা যাৰ প্ৰতিটো বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য এক একক (চিত্ৰ 1.6 চোৱা)। ইয়াৰপৰা পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিলে পাবা যে OB = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ । এতিয়া সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{2}$ ক কেনেকৈ দেখুৱাবা?



চিত্ৰ 1.6

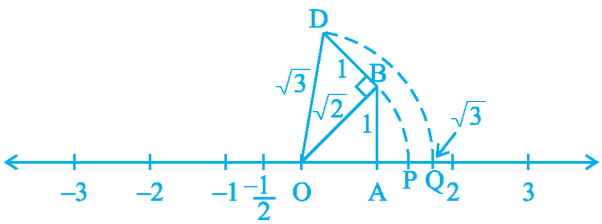


চিত্ৰ 1.7

পদ্ধতিটো অতি সহজ। 1.6 চিত্ৰটো সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰত এনেকৈ অংকন কৰা যাতে O শীৰ্ষবিন্দুটো সংখ্যাৰেখাৰ শূন্যৰ ওপৰতে থাকে (চিত্ৰ 1.7 চোৱা)। ইতিমধ্যে পালো যে OB = $\sqrt{2}$ । এতিয়া কম্পাচৰ সহায়ত O বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি আৰু OB ক ব্যাসাৰ্ধ হিচাপে লৈ এটা বৃত্তৰ চাপ অংকন কৰা। এই চাপে সংখ্যাৰেখাক P বিন্দুত ছেদ কৰিছে। এই P বিন্দুটোৰেই সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{2}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্দ্দেশ কৰে।

উদাহৰণ 4 ঃ সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{3}$ ৰ অৱস্থান নিৰূপণ কৰা।

সমাধান ঃ চিত্ৰ **1.7** লৈ উভতি যোৱা।



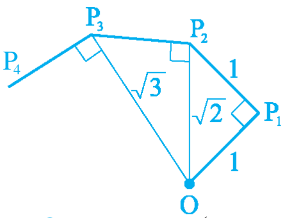
চিত্ৰ 1.8

এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ BD ৰেখাখণ্ড OB ৰ ওপৰত লম্ব হিচাপে অংকন কৰা। (চিত্ৰ **1.8** ত দেখুওৱাৰ দৰে)। এতিয়া পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিলে পাওঁ যে OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}^{2}\right)+1^{2}} = \sqrt{3}$ কম্পাচৰ সহায়ত O বিন্দুক কেন্দ্ৰ আৰু OD ক ব্যাসাৰ্ধ হিচাপে লৈ এটা বৃত্তৰ চাপ অংকন কৰিলে এই চাপে সংখ্যাৰেখাক Q বিন্দুত ছেদ কৰিব। এই Q বিন্দুৰেই $\sqrt{3}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্দেশ কৰে।

এইদৰেই , কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে, $\sqrt{n-1}$ ৰ অৱস্থান জনাৰ পিছত $\sqrt{n}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবা।

অনুশীলনী 1.2

1. তলৰ উক্তি বিলাক সত্য নে অসত্য উল্লেখ কৰা। তোমাৰ উত্তৰৰ যথাৰ্থতা প্ৰতিপন্ন কৰা।
   (i) প্ৰতিটো অপৰিমেয় সংখ্যাই এটা বাস্তৱ সংখ্যা।
   (ii) সংখ্যাৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দুৱেই $\sqrt{m}$ আৰ্হিৰ, য'ত m এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।
   (iii) প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাই এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।
2. সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গমূল অপৰিমেয় নে? যদি নহয়, তেনেহ'লে এটা সংখ্যাৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ বৰ্গমূল এটা পৰিমেয় সংখ্যা।
3. সংখ্যাৰেখাত কিদৰে $\sqrt{5}$ ক সূচিত কৰিব পাৰি দেখুওৱা।
4. **শ্ৰেণীকক্ষত কৰিবলগীয়া কাৰ্য** ('বৰ্গমূল কুণ্ডলী' গঠন) ঃ এখিলা বহল কাগজ লোৱা আৰু তলত দিয়া ধৰণেৰে এটা 'বৰ্গমূল কুণ্ডলী' গঠন কৰা। O বিন্দুক আদি বিন্দু হিচাপে লৈ এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ OP_1 ৰেখাখণ্ড অংকন কৰা। P_1P_2 ৰেখাখণ্ডক এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ জোখত লৈ OP_1ৰ ওপৰত লম্বভাৱে আঁকা (চিত্ৰ 1.9 চোৱা)। এতিয়া P_2P_3 ৰেখাখণ্ডক এক একক দৈৰ্ঘ্য ধৰি OP_2 ৰ ওপৰত লম্বভাৱে অংকন কৰা। P_3P_4 ক একক দৈৰ্ঘ্যৰ লৈ OP_3ৰ ওপৰত লম্বভাৱে লোৱা। এই ধৰণেৰে একেৰাহে অংকন কৰি গৈ থাকিলে OP_{n-1}ৰ ওপৰত লম্বহৈ থকাকৈ এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ $P_{n-1}P_n$ ৰেখাখণ্ড আঁকিব পৰা যাব। এই পদ্ধতিৰে $P_2, P_3, P_4, ...P_n, ...$ ইত্যাদি যিবিলাক বিন্দু পাবা সেই প্ৰতিটোকে Oৰ লগত ৰেখাখণ্ডৰে সংযুক্ত কৰি $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...$ৰ সুন্দৰ কুণ্ডলী সাজিব পাৰিবা।



চিত্ৰ 1.9 ঃ **বৰ্গমূল কুণ্ডলী গঠন**

1.3 বাস্তৱ সংখ্যা আৰু সেইবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি (Real Numbers and their Decimal Expansions) ঃ

এই অনুচ্ছেদত আমি পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাৰ বিষয়ে অন্য এটা দৃষ্টিকোণৰপৰা আলোচনা কৰিম। ইয়াত বাস্তৱ সংখ্যাবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি লক্ষ্য কৰিম আৰু তাৰ সহায়ত পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ মাজৰ প্ৰভেদ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি নেকি চোৱা হ'ব। ইয়াৰ লগতে দশমিক বিস্তৃতিৰ সহায়ত সংখ্যাৰেখাত বাস্তৱ সংখ্যাবিলাকৰ উপস্থাপন কিদৰে দৃশ্যমান কৰিব পাৰি সেই বিষয়েও ব্যাখ্যা কৰা হ'ব। যিহেতু পৰিমেয় সংখ্যাবিলাক আমাৰ বেছি পৰিচিত, গতিকে এই বিলাকেৰেই আলোচনা আৰম্ভ কৰা হওঁক। তিনিটা উদাহৰণ লওঁ ঃ $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$ ভাগশেষবিলাকলৈ বিশেষ দৃষ্টি দিয়া আৰু সেইবিলাকৰ কিবা আৰ্হি বিচাৰি পোৱা নেকি মন কৰা।

উদাহৰণ 5 ঃ $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$, আৰু $\frac{1}{7}$ৰ দশমিক বিস্তৃতি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

$$\begin{array}{r|l} & 3.333... \\ \hline 3 & 10 \\ & \underline{\ 9} \\ & 10 \\ & \underline{\ 9} \\ & 10 \\ & \underline{\ 9} \\ & 10 \\ & \underline{\ 9} \\ & \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & \underline{64} \\ & \ 60 \\ & \underline{\ 56} \\ & \ \ 40 \\ & \underline{\ \ 40} \\ & \ \ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.142857... \\ \hline 7 & 1.0 \\ & \underline{\ 7} \\ & \ 30 \\ & \underline{\ 28} \\ & \ \ 20 \\ & \underline{\ \ 14} \\ & \ \ \ 60 \\ & \underline{\ \ \ 56} \\ & \ \ \ \ 40 \\ & \underline{\ \ \ \ 35} \\ & \ \ \ \ \ 50 \\ & \underline{\ \ \ \ \ 49} \\ & \ \ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

ভাগশেষ ঃ 1, 1, 1, 1, 1... ভাজক ঃ 3

ভাগশেষ ঃ 6, 4, 0.... ভাজক ঃ 8

ভাগশেষ ঃ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, ...

তোমালোকে কি দেখিলা? তোমালোকে অতি কমেও তিনিটা অৱস্থা দেখা পাব লাগে ঃ

(i) এটা নিৰ্দ্দিষ্ট পৰ্য্যয়ৰ পিছত ভাগশেষ 0 হয় অথবা সিহঁতৰ পুনৰাবৃত্তি হয়।

(ii) ভাগশেষৰ পুনৰাবৰ্ত্তন তন্ত্ৰী (Repeating String) ডালত থকা প্ৰবৃষ্টিৰ সংখ্যা ভাজকতকৈ সৰু ($\frac{1}{3}$ ৰ ক্ষেত্ৰত এটা সংখ্যাৰ পুনৰাবৃত্তি হয় আৰু ইয়াত ভাজক 3, $\frac{1}{7}$ ৰ ক্ষেত্ৰত ভাগশেষৰ পুনৰাবৰ্ত্তন তন্ত্ৰী ডালত 3, 2, 6, 4, 5, 1 এই ছটা প্ৰবৃষ্টি আছে আৰু ভাজক 7)

(iii) যদি ভাগশেষবিলাকৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটে, তেনেহ'লে ভাগফলত পুনৰাবৰ্ত্তিত অংকৰ গোট দেখা যায় ($\frac{1}{3}$ ৰ ক্ষেত্ৰত ভাগফলত 3 ৰ পুনৰাবৃত্তি হয় আৰু $\frac{1}{7}$ ৰ ক্ষেত্ৰত ভাগফলত পুনৰাবৰ্ত্তিত অংকৰ গোট 142857 পোৱা যায়)।

যদিও ওপৰত দিয়া কেইটামান উদাহৰণৰ ক্ষেত্ৰতহে এই আৰ্হি দেখা গৈছে, কিন্তু $\frac{p}{q} (q \neq 0)$

আকাৰত থকা সকলো পৰিমেয় সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰতেই এই কথা সত্য। P ক q ৰে হৰণ কৰিলে দুটা প্ৰধান ঘটনা সংঘটিত হয়— হয়তো ভাগশেষ শূন্য হয় নাইবা ভাগশেষ কেতিয়াও শূন্য নহয় আৰু এই ক্ষেত্ৰত ভাগশেষৰ পুনৰাবৰ্ত্তন তন্ত্ৰী এডাল পোৱা যায়। এতিয়া এই অৱস্থা দুটাৰ প্ৰতিটোকে পৃথক ভাৱে চোৱা যাওঁক।

অৱস্থা (i) ঃ ভাগশেষ শূন্য হয়

$\frac{7}{8}$ ৰ ক্ষেত্ৰত পালো যে কেইটামান ঢাপৰ পিছত ভাগশেষ শূন্য হয় আৰু দশমিক বিস্তৃতিত $\frac{7}{8} = 0.875$। অন্য কেইটামান উদাহৰণ হ'ল $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$। এই সকলোকেইটা উদাহৰণত কেইটামান নিৰ্দ্দিষ্ট ঢাপৰ পিছত দশমিক বিস্তৃতিৰ অন্ত পৰে। এই ধৰণৰ সংখ্যা বিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতিক পৰিসমাপ্ত (terminating) বুলি কোৱা হয়।

অৱস্থা (ii) ঃ ভাগশেষ কেতিয়াও শূন্য নহয়

$\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{1}{7}$ ৰ উদাহৰণ দুটাত লক্ষ্য কৰিছোঁ যে কেইটামান নিৰ্দ্দিষ্ট ঢাপৰ পিছত ভাগশেষবিলাকৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটে আৰু সেইবাবেই দশমিক বিস্তৃতি অনন্ত কাললৈ চলি থাকে। অন্য ধৰণেৰে ক'বলৈ হ'লে ভাগফলত অংকৰ পুনৰাবৰ্ত্তিত গোট দেখা যায়। এই ধৰণৰ বিস্তৃতিক অবিৰত (অপৰিসমাপ্ত) পৌনঃপুনিক বা নিৰৱধি পুনৰাবৃত্ত (non-terminating recurring) বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots\ldots\ldots \qquad \text{আৰু} \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857142857\ldots\ldots$$

সচৰাচৰ $\frac{1}{3}$ ৰ ভাগফলত 3 ৰ পুনৰাবৃত্তিক $0.\overline{3}$ ৰে দেখুওৱা হয়। সেইদৰে $\frac{1}{7}$ ৰ ভাগফলত 142857 এই অংকৰ গোটটোৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটে কাৰণে $\frac{1}{7}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতিক $0.\overline{142857}$ ৰূপত লিখা হয়। ইয়াত অংককেইটাৰ ওপৰৰ মাত্ৰাডালে (Bar) সেই অংককেইটাৰ পুনৰাবৃত্তি হোৱা বুজাইছে। তদুপৰি, 3.57272....... ক $3.5\overline{72}$ ৰূপত লিখা হয়। গতিকে এইবিলাক অবিৰত (অপৰিসমাপ্ত) পৌনঃপুনিক দশমিক বিস্তৃতিৰ উদাহৰণ। এনেদৰে আমি দেখিলো যে পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিৰ দুটাই বিকল্প থাকেঃ পৰিসমাপ্তি ঘটে অথবা অবিৰত পৌনঃপুনিক হয়।

অন্যহাতেদি, ধৰিলোৱা সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰেদি খোজ কাঢ়ি গৈ থাকোতে 3.142678 ধৰণৰ এটা সংখ্যা পালা যাৰ দশমিক বিস্তৃতিৰ পৰিসমাপ্তি ঘটিছে, অথবা 1.272727... অৰ্থাৎ $1.\overline{27}$ ধৰণৰ

এটা সংখ্যা পালা যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত পৌনঃপুনিক। এই সংখ্যাবিলাক পৰিমেয় বুলি ক'ব পাৰিবানে? উত্তৰ হ'ব 'হয় ক'ব পাৰি'।

আমি এই কথাটো প্ৰমাণ নকৰো, কিন্তু কেইটামান উদাহৰণৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰিম। পৰিসমাপ্তি ঘটা অৱস্থা বিলাক সহজ।

উদাহৰণ 6 ঃ দেখুওৱা যে 3.142678 এটা পৰিমেয় সংখ্যা। অন্য ধৰণেৰে ক'ব পাৰি, 3.142678 ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ আৰু সেয়ে ই এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

এতিয়া আমি অবিৰত পুনৰাবৰ্ত্তিত দশমিক বিস্তৃতিৰ পৰিঘটনাটো বিবেচনা কৰিম।

উদাহৰণ 7 ঃ দেখুওৱা যে $0.3333... = 0.\bar{3}$ ক $\frac{p}{q}$ আকাৰত, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সমাধান ঃ যিহেতু $0.\bar{3}$ কি আমি নেজানো, গতিকে ইয়াক x বুলি ধৰো। গতিকে x = 0.3333...

এতিয়া এইখিনিতেই বুদ্ধিটো খটুৱাব লাগে। মন কৰা যে

$10x = 10 \times (0.3333...) = 3.3333...$

আকৌ $3.333... = 3 + x$ (কাৰণ, $x = 0.3333...$) গতিকে $10x = 3 + x$

xৰ বাবে সমাধান কৰি পাওঁ $9x = 3$ অৰ্থাৎ $x = \frac{1}{3}$

উদাহৰণ 8 ঃ দেখুওৱা যে $1.272727.... = 1.\overline{27}$ ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত , য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, x = 1.272727... । ইয়াত দুটা অংকৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটিছে, গতিকে 100 ৰে পূৰণ কৰিলে পাওঁ, $100x = 127.2727..........$

সেয়ে $100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

গতিকে $100x - x = 126$ অৰ্থাৎ $99x = 126$

অৰ্থাৎ $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

তোমালোকে ওলোটাকৈ কৰি চালে পাবা যে $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

উদাহৰণ 9 ঃ দেখুওৱা যে 0.2353535....... = $0.2\overline{35}$ ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত , য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, x = $0.2\overline{35}$ । মনকৰিবা যে ইয়াত 2 ৰ পুনৰাবৃত্তি হোৱা নাই, কিন্তু 35 গোটটোৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটিছে, গতিকে x ক 100 ৰে পূৰণ কৰিলে পাম যে

$100x$ = 23.53535...........

সেয়ে, $100x$ = 23.3 + 0.23535........ = 23.3 + x

গতিকে $99x$ = 23.3

অৰ্থাৎ $99x = \frac{233}{10}$, ইয়াৰ পৰা পাওঁ যে $x = \frac{233}{990}$

তোমালোকে ওলোটাকৈ কৰি চালে দেখিবা যে $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

গতিকে, প্ৰতিটো অবিৰত পৌনঃপুনিক দশমিক বিস্তৃতি থকা সংখ্যাক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$ প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। আমাৰ এই ফলাফল সমূহৰ সংক্ষিপ্তসাৰ তলত দিয়া হ'ল—

'এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত অথবা অবিৰত পুনৰাবৰ্তিত। তদুপৰি, যদি এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত অথবা অবিৰত পুনৰাবৰ্ত্তিত, তেনেহ'লে সেই সংখ্যাটো পৰিমেয়।'

গতিকে, এতিয়া আমি পৰিমেয় সংখ্যা এটাৰ দশমিক বিস্তৃতি কি হ'ব পাৰে জানিলো। অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি কি হ'ব? ওপৰৰ ধৰ্ম্মৰ পৰা আমি এটা সিদ্ধান্তলৈ আহিব পাৰো যে অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাৱৰ্তিত। ওপৰত পৰিমেয় সংখ্যাৰ ধৰ্ম্ম উল্লেখ কৰাৰ দৰে, অপৰিমেয় সংখ্যাৰ ধৰ্ম হ'ল—

'এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাৱৰ্তিত। তদুপৰি, যদি এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাৱৰ্তিত তেনেহ'লে সেই সংখ্যাটো অপৰিমেয়।'

আগৰ অনুচ্ছেদৰ পৰা মনত পেলোৱা যে, S = 0.10110111011110........। মন কৰা যে ই অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত। গতিকে ওপৰৰ ধৰ্মৰ পৰা ক'ব পাৰি যে ই এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। তদুপৰি মন কৰা যে S ৰ লগত সাদৃশ্য থকা অসীম সংখ্যক অপৰিমেয় সংখ্যা তোমালোকে উলিয়াব পাৰিবা।

$\sqrt{2}$, আৰু π এই সুখ্যাত অপৰিমেয় সংখ্যা দুটাৰ অৱস্থা কেনে? নিৰ্দ্দিষ্ট পৰ্যায়লৈকে ইহঁতৰ

দশমিক বিস্তৃতি তলত দিয়া হ'ল—

$\sqrt{2}$ = 1.4142135623730950488016887242096......................

π = 3.14159265358979323846264338327950........................

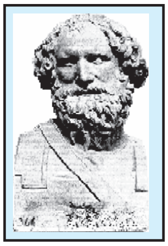
(লক্ষ্য কৰিবা যে, আমি প্ৰায়েই, π ৰ এটা মোটামুটিমান(আসন্ন মান) $\frac{22}{7}$ বুলি লওঁ। কিন্তু $\pi \neq \frac{22}{7}$)

পৰৱৰ্তী সময়ত গণিতজ্ঞসকলে অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিত অধিক সংখ্যক অংক উলিয়াবলৈ নানা পদ্ধতি উদ্ভাৱন কৰিছে। উদাহৰণ স্বৰূপে,তোমালোকে হৰণ পদ্ধতিৰে $\sqrt{2}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতিত থকা অংকবিলাক উলিয়াবলৈ নিশ্চয় শিকিছা। এইটো বৰ আকৰ্ষণীয় কথাযে বৌদ্ধিক যুগৰ (800BC-500BC) এক গাণিতিক নিবন্ধ শুল্বসূত্ৰত (জ্যাৰ বিধি) $\sqrt{2}$ ৰ আসন্ন মানৰ উল্লেখ আছে। ইয়াক তলত দিয়া হ'ল।

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

মন কৰা যে এই মান ওপৰত দিয়া মানৰ প্ৰথম পাঁচটা দশমিক স্থানলৈকে একে। π ৰ দশমিক বিস্তৃতিত থকা অংকবিলাক উলিয়াবলৈ কৰা প্ৰচেষ্টাৰ কাহিনী বৰ আমোদজনক।

গ্ৰীক মণিষী আৰ্কিমিডিছেই π ৰ দশমিক বিস্তৃতিত থকা অংকসমূহ পোন প্ৰথমে গণনা কৰিছিল। তেওঁ দেখুৱাইছিল যে $3.140845 < \pi < 3.142857$ । বিশিষ্ট ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ আৰু জ্যোতিৰ্বিদ আৰ্যভট্টই (476AD-550AD) π ৰ চতুৰ্থ দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধ মান উলিয়াইছিল (এই মান 3.1416]। এতিয়া তীব্ৰ বেগী কম্পিউটাৰ আৰু উন্নত এলগ'ৰিথিম (Algorithm) ৰ সহায়ত π ৰ মান 1.24 ট্ৰিলিয়ন(Trillion) দশমিক স্থানলৈ গণনা কৰি উলিয়াব পৰা হৈছে।



আৰ্কিমিডিছ (খৃষ্টপূৰ্ব 287-212)

চিত্ৰ 1.10

এতিয়া কি দৰে অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাক উলিয়াব পাৰি চোৱা যাওক।

উদাহৰণ 10 ঃ $\frac{1}{7}$ আৰু $\frac{2}{7}$ ৰ মাজত থকা এটা অপৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি পাই আহিছো যে $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ । ইয়াৰ পৰা সহজে পাওঁ যে $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$

গতিকে $\frac{1}{7}$ আৰু $\frac{2}{7}$ ৰ মাজত থকা অপৰিমেয় সংখ্যা এটা পাবলৈ ইহঁতৰ মাজত থকা এটা অবিৰত অপুনৰাৱৰ্তিত সংখ্যা উলিয়ালেই হ'ল। অৱশ্যে তোমালোকে অসীম সংখ্যক এনেধৰণৰ সংখ্যা উলিয়াব পাৰিবা।

এনে সংখ্যাৰ এটা উদাহৰণ হ'ল 0.150150015000150000...........

অনুশলনী 1.3

1. তলত দিয়া সংখ্যাবিলাকক দশমিক বিস্তৃতিত প্ৰকাশ কৰা আৰু প্ৰতিটোৰে দশমিক বিস্তৃতি কি ধৰণৰ উল্লেখ কৰা—

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$ (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. তোমালোকে জানা যে $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ । দীঘলীয়া হৰণ নকৰাকৈ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতি কি হ'ব ধাৰণা কৰিব পাৰিবানে? যদি পাৰিবা, কেনেকৈ?

   (ইংগিত ঃ $\frac{1}{7}$ ৰ মান উলিয়াওঁতে পোৱা ভাগশেষবোৰ লক্ষ্য কৰা)

3. তলত দিয়াবিলাক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰা, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$ (iv) $0.\overline{54}$

   (v) $0.5\overline{9}$ (vi) $0.3\overline{45}$ (vii) $32.1\overline{235}$ (viii) $0.3\overline{7}$

4. 0.99999.........ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰা। তোমাৰ উত্তৰ দেখি আচৰিত হৈছা নেকি? তোমাৰ শিক্ষক আৰু সহপাঠীসকলৰ লগত এই উত্তৰ কিয় অৰ্থবহ আলোচনা কৰা।

5. $\frac{1}{17}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতিৰ পুনৰাবৰ্ত্তিত গোটটোত আটাইতকৈ বেছি কিমানটা অংক থাকিব? হৰণ পদ্ধতি অৱলম্বন কৰি উত্তৰৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

6. যদি p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা যাৰ 1ৰ বাহিৰে অন্য সাধাৰণ উৎপাদক নাই তেনেহ'লে $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ আৰ্হিত থকা বিভিন্ন পৰিমেয় সংখ্যা লোৱা যিবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত আৰু পৰ্যবেক্ষণ কৰা। qয়ে কি ধৰ্ম সিদ্ধ কৰিব অনুমান কৰিব পাৰিবানে?

7. তিনিটা সংখ্যা লিখা যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত আৰু অপুনৰাৱৰ্তিত (অপৰিসমাপ্ত আৰু অপৌনঃপুনিক)।

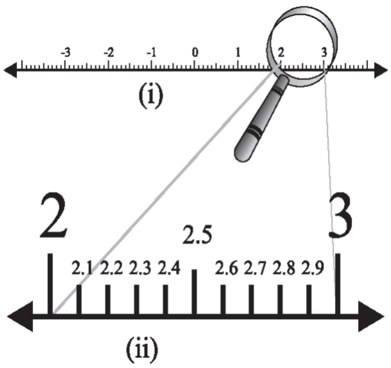
8. $\frac{5}{7}$ আৰু $\frac{9}{11}$ ৰ মাজত থকা তিনিটা ভিন্ন অপৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।

9. তলৰ সংখ্যাকেইটাক পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় হিচাপে শ্ৰেণী বিভক্ত কৰা ঃ

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001........

1.4 সংখ্যাৰেখাত বাস্তৱ সংখ্যাৰ উপস্থাপন (Representing Real Numbers on the Number Line) ঃ

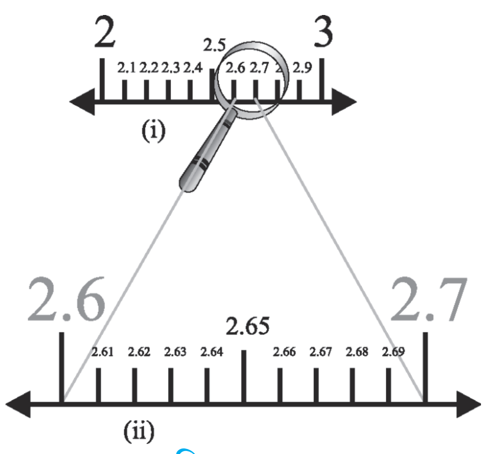


চিত্ৰ 1.11

আগৰ অনুচ্ছেদত তোমালোকে দেখিছা যে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাৰেই দশমিক বিস্তৃতি আছে। এইটোৱে সংখ্যাটো সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰাত সহায় কৰে। কেনেকৈনো পাৰি তাকে চোৱা যাওঁক।

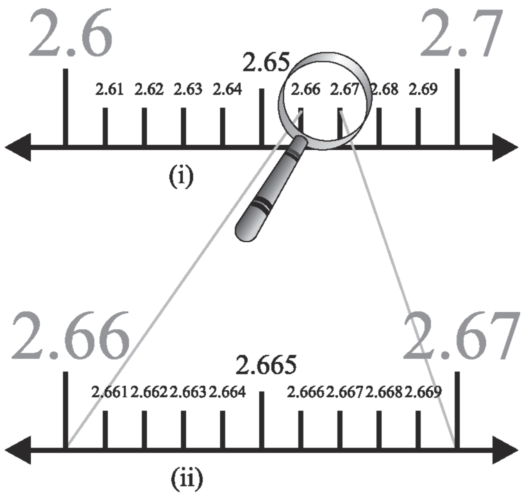
ধৰাহ'ল, সংখ্যাৰেখাত 2.665 ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। আমি জানো যে ই 2 আৰু 3ৰ মাজত থাকে।

গতিকে আমি সংখ্যাৰেখাৰ 2 আৰু 3 ৰ মাজৰ অংশটো সূক্ষ্ম ভাৱে নিৰীক্ষণ কৰিম। ধৰা হ'ল এই অংশটো 10 টা সমান ভাগত বিভক্ত কৰা হ'ল আৰু 1.11(i) চিত্ৰত দিয়াৰ দৰে ভাগ কৰা প্ৰতিটো বিন্দুত দাগ দিয়া হ'ল। এতিয়া 2 ৰ সোঁহাতৰ প্ৰথম দাগটোৱে 2.1 বুজাব, দ্বিতীয়টোৱে 2.2 বুজাব ইত্যাদি। 1.11(i) চিত্ৰত দিয়া 2 আৰু 3 ৰ মাজৰ বিন্দুবোৰ চাওঁতে তোমালোকৰ অসুবিধা হ'ব পাৰে।সেয়ে এখন বিবৰ্ধক কাঁচ (Magnifying glass) ৰ সহায়ত এই অংশটো চাব পাৰা। তেতিয়া তোমালোকে চিত্ৰ 1.11(ii) ত দিয়াৰ দৰে বিন্দুবোৰ দেখা পাবা।



চিত্ৰ 1.12

এতিয়া 2.665 সংখ্যাটো 2.6 আৰু 2.7 ৰ মাজত থাকিব। গতিকে আমাৰ দৃষ্টি এতিয়া 2.6 আৰু 2.7 ৰ মাজৰ অংশটোত নিবন্ধ কৰিম। [চিত্ৰ 1.12(i) চোৱা]। এই অংশটো আকৌ দহটা ভাগত বিভক্ত কৰা হৈছে বুলি কল্পনা কৰা। ইয়াৰে প্ৰথম দাগটোৱে 2.61 নিৰ্দ্দেশ কৰিব, দ্বিতীয়টোৱে 2.62, ইত্যাদি। স্পষ্টকৈ চাবৰ বাবে এই অংশটো চিত্ৰ 1.12(ii) ত পৰিবৰ্ধন কৰি দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 1.13

আকৌ, 2.665 বিন্দুটো 2.66 আৰু 2.67 ৰ মাজত থাকে। সেয়ে আমাৰ দৃষ্টি এতিয়া সংখ্যাৰেখাৰ এই অংশটোত নিবন্ধ কৰিম [চিত্ৰ 1.13(i) চোৱা]। এই অংশটো আকৌ দহভাগ কৰা হৈছে বুলি কল্পনা কৰা। এই অংশটো ভালকৈ দেখা পাবলৈ চিত্ৰ 1.13(ii) ত দিয়াৰ দৰে পৰিবৰ্ধন কৰা হ'ল। ইয়াৰ প্ৰথম দাগটোৱে 2.661 বুজায়, দ্বিতীয়টোৱে বুজায় 2.662, ইত্যাদি। গতিকে এই উপঅংশটোৰ পঞ্চম দাগটোৱেই 2.665 বুজাব।

সংখ্যাৰেখাত বিবৰ্ধক কাঁচৰ সহায়ত সংখ্যাৰ অৱস্থান নিৰীক্ষণৰ এই পদ্ধতিটোক 'ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধন পদ্ধতি (Process of successive magnification) বোলা হয়।

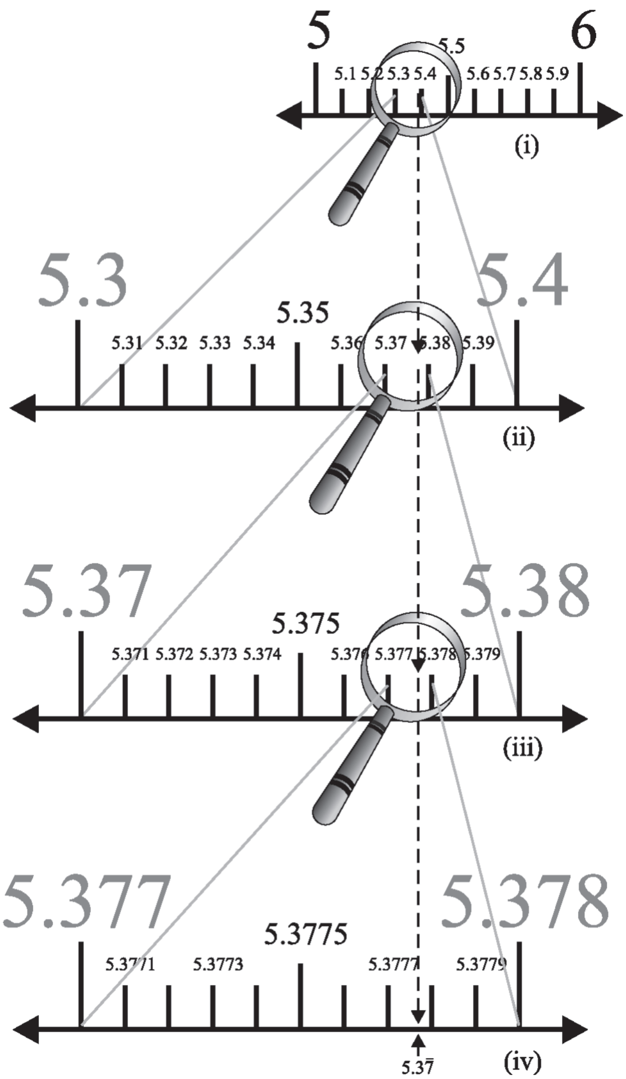
গতিকে দেখিলো যে উপযুক্ত ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধনৰ সহায়ত পৰিসমাপ্ত দশমিক বিস্তৃতি থকা বাস্তৱ সংখ্যা এটাক সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰিব পাৰি।

এতিয়া আমি অবিৰত পুনৰাবৰ্ত্তিত দশমিক বিস্তৃতি থকা বাস্তৱ সংখ্যা এটাৰ স্থান সংখ্যাৰেখাত প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰি নেকি যত্ন কৰি চাম। যথানুৰূপ অন্তৰালত বিবৰ্ধক দাপোনৰ সহায়ত লক্ষ্য কৰি আৰু ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধন পদ্ধতিৰদ্ধাৰা সংখ্যাৰেখাত সংখ্যাটোৰ স্থান নিৰীক্ষণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 11 ঃ $5.3\overline{7}$ সংখ্যাটো পাঁচ দশমিক স্থানলৈকে অৰ্থাৎ 5.37777 লৈকে ধৰি সংখ্যাৰেখাত স্থাপন কৰি দেখুওৱা।

সমাধান ঃ আকৌ এবাৰ ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধনৰ সহায়ত আগবাঢ়িম আৰু সংখ্যাৰেখাত $5.3\overline{7}$ সংখ্যাটো থকা অংশৰ দৈৰ্ঘ ক্ৰমান্বয়ে কমাই গৈ থাকিম।

প্ৰথম লক্ষ্য কৰিছোঁ যে $5.3\overline{7}$ সংখ্যাটো 5 আৰু 6 ৰ মাজত থাকে। দ্বিতীয় খোজত 5.3 আৰু 5.4 ৰ মাজত $5.3\overline{7}$ ৰ স্থান নিৰূপণ কৰিম। এই অৱস্থান সূক্ষ্মভাৱে চাবৰ বাবে এই অংশটো দহটা ভাগত বিভক্ত কৰা হ'ল আৰু বিবৰ্ধক কাঁচৰ সহায়ত 5.37 আৰু 5.38 ৰ মাজত $5.3\overline{7}$



চিত্ৰ 1.14

ৰ স্থান লক্ষ্য কৰা হ'ল। $5.3\overline{7}$ ক বেছি সঠিককৈ চাবৰ বাবে 5.37 আৰু 5.38 ৰ মাজৰ অংশক পুনৰ দহটা সমান ভাগত ভগোৱা হ'ল আৰু বিবৰ্ধক কাঁচৰ সহায়ত 5.377 আৰু 5.378 ৰ মাজত $5.3\overline{7}$ ৰ স্থান লক্ষ্য কৰা হ'ল। $5.3\overline{7}$ ক ইয়াতকৈয়ো বেছি নিখুঁতকৈ চাবৰ বাবে 5.377 আৰু 5.378 ৰ মাজৰ অংশ আকৌ 10 টা সমান ভাগত ভগোৱা হ'ল আৰু চিত্ৰ 1.14(iv) ত দিয়াৰ দৰে $5.3\overline{7}$ সংখ্যাটো লক্ষ্য কৰা হ'ল। মন কৰা যে $5.3\overline{7}$ সংখ্যাটো 5.3777 তকৈ 5.3778 ৰ বেছি ওচৰত অৱস্থিত [চিত্ৰ 1.14(iv) চোৱা]।

মন্তব্য ঃ এখন বিবৰ্ধক কাঁচেৰে নিৰীক্ষণ কৰি আৰু একে সময়তে সংখ্যাৰেখাত $5.3\overline{7}$ থকা অংশটোৰ দৈৰ্ঘ কমি গৈ থকা বুলি কল্পনা কৰি এই পদ্ধতিৰে বিৰামহীন ভাৱে আগুৱাই গৈ থাকিব পাৰি। সংখ্যাটোৰ অৱস্থানৰ শুদ্ধতা কি মাত্ৰালৈ চাব বিচাৰো তাৰ ওপৰত সংখ্যাৰেখাডালৰ নিৰ্দিষ্ট অংশৰ দীঘ নিৰ্ভৰ কৰে।

এতিয়া নিশ্চয় বুজিছা যে এই একে পদ্ধতি অৱলম্বন কৰিয়েই অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত দশমিক বিস্তৃতি থকা বাস্তৱ সংখ্যা এটাৰ অৱস্থান সংখ্যাৰেখাত দেখুৱাব পাৰি।

ওপৰৰ আলোচনা আৰু প্ৰদৰ্শনৰ ভিত্তিত আকৌ ক'ব পাৰি যে 'প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাকেই সংখ্যাৰেখাত এটা অদ্বিতীয় বিন্দুৰে উপস্থাপন কৰিব পাৰি। তদুপৰি, সংখ্যাৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দুৱেই এটা আৰু এটাই বাস্তৱ সংখ্যা প্ৰতিনিধিত্ব কৰে।'

অনুশীলনী 1.4

1. ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধনৰ সহায়ত 3.765 সংখ্যাটো সংখ্যাৰেখাত প্ৰদৰ্শন কৰা।
2. $4.2\overline{6}$ সংখ্যাটো চতুৰ্থ দশমিক স্থানলৈ সংখ্যাৰেখাত প্ৰদৰ্শন কৰা।

1.5 বাস্তৱ সংখ্যাৰ ওপৰত বিভিন্ন প্ৰক্ৰিয়া (Operations on Real Numbers) ঃ

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত শিকি আহিছা যে পৰিমেয় সংখ্যাই যোগ আৰু পূৰণ সাপেক্ষে ক্ৰমবিনিময়, সহযোগ আৰু বিতৰণ বিধি মানি চলে। তদুপৰি, যদি দুটা পৰিমেয় সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, পূৰণ বা হৰণ (0 ৰে হৰণ নিষিদ্ধি) কৰা হয় তেনেহ'লে আকৌ এটা পৰিমেয় সংখ্যাই পোৱা যায় (অৰ্থাৎ, যোগ, বিয়োগ, পূৰণ, হৰণ সাপেক্ষে পৰিমেয় সংখ্যাবিলাক 'আবদ্ধ')। দেখা যায় যে অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকেও যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত ক্ৰমবিনিময়, সহযোগ আৰু বিতৰণ বিধি মানি চলে। কিন্তু অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ যোগফল, বিয়োগফল, ভাগফল আৰু পূৰণফল সদায় অপৰিমেয় নহ'বও পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে, $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right)$, $\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{3}\right)$ আৰু $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ পৰিমেয় সংখ্যা।

এতিয়া এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ লগত এটা পৰিমেয় সংখ্যা যোগ আৰু পূৰণ কৰিলে কি হয় চোৱা যাওঁক। উদাহৰণ স্বৰূপে $\sqrt{3}$ অপৰিমেয়। তেনেহ'লে $2+\sqrt{3}$ আৰু $2\sqrt{3}$ কি হ'ব? যিহেতু $\sqrt{3}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত আৰু অপুনৰাবৰ্তিত, সেয়ে $2+\sqrt{3}$ আৰু $2\sqrt{3}$ ৰ বেলিকাও কথাটো সত্য। সেইবাবে $2+\sqrt{3}$ আৰু $2\sqrt{3}$ দুয়োটাই অপৰিমেয় সংখ্যা।

উদাহৰণ 12 ঃ $7\sqrt{5}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ সংখ্যাকেইটা অপৰিমেয় হয় নে নহয় চোৱা।

সমাধান ঃ $\sqrt{5} = 2.236.........$, $\sqrt{2} = 1.4142.........$, $\pi = 3.1415........$

গতিকে, $7\sqrt{5} = 15.652........$, $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304.......$,

$\sqrt{2}+21 = 22.4142......$, $\pi-2 = 1.1415..........$

এই আটাইবোৰেই অবিৰত আৰু অপুনৰাবৰ্তিত দশমিকত আছে। সেয়ে এই আটাইবোৰেই অপৰিমেয় সংখ্যা।

এতিয়া, অপৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগ, বিয়োগ, পূৰণ, হৰণ কৰিলে, অথবা এনে সংখ্যাৰ বৰ্গমূল আৰু আনকি n তম মূল ল'লে (n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা) সাধাৰণতে কি হয় চোৱা যাওঁক। কেইটামান উদাহৰণ লক্ষ্য কৰা যাওঁক।

উদাহৰণ 13 ঃ $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ আৰু $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ যোগ কৰা।

সমাধান ঃ $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}) + (\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

$= (2\sqrt{2}+\sqrt{2}) + (5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

উদাহৰণ 14 ঃ $6\sqrt{5}$ ক $2\sqrt{5}$ ৰে পূৰণ কৰা।

সমাধান ঃ $6\sqrt{5}\times2\sqrt{5} = 6\times2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times5 = 60$

উদাহৰণ 15 ঃ $8\sqrt{15}$ ক $2\sqrt{3}$ ৰে হৰণ কৰা।

সমাধান ঃ $8\sqrt{15}\div2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

$= 4\sqrt{5}$

এই উদাহৰণ বিলাকৰপৰা তোমালোকে তলৰ বাক্যকেইটা পাবা বুলি আশা কৰিব পাৰি, যিকেইটা সত্য ঃ

(i) এটা পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগফল বা বিয়োগফল অপৰিমেয়।

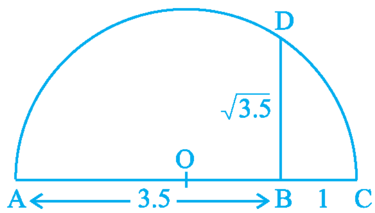
(ii) এটা অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যাৰে এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ পূৰণফল বা ভাগফল অপৰিমেয়।

(iii) যদি দুটা অপৰিমেয় সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, পূৰণ বা হৰণ কৰা হয় তেনেহ'লে সেই ফলাফল পৰিমেয় বা অপৰিমেয় হ'ব।

আমি এতিয়া বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গমূল উলিওৱা প্ৰক্ৰিয়ালৈ লক্ষ্য কৰিম। মনত পেলোৱা যে, a এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা তেনেহ'লে $\sqrt{a} = b$ ৰ অৰ্থ হ'ল $b^2 = a$ আৰু b>0 । এই একেটা সংজ্ঞাকেই ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যালৈ প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি।

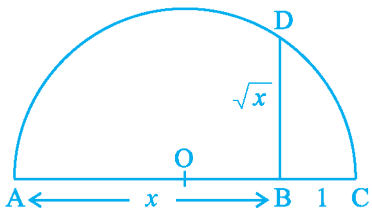
ধৰা হ'ল a > 0 এটা বাস্তৱ সংখ্যা। তেনেহ'লে $\sqrt{a} = b$ ৰ অৰ্থ হ'ল $b^2 = a$ আৰু b > 0 ।

কোনো এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে $\sqrt{n}$ ক সংখ্যাৰেখাত কেনেকৈ উপস্থাপন কৰিব পাৰি সেই বিষয়ে 1.2 অনুচ্ছেদত আমি পাইছোঁ। এতিয়া এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা x ৰ ক্ষেত্ৰত $\sqrt{x}$ ক জ্যামিতিৰ সহায়ত কেনেকৈ উলিয়াব পাৰি দেখুৱাম। উদাহৰণ স্বৰূপে x = 3.5 ৰ ক্ষেত্ৰত এইটো উলিয়াম, অৰ্থাৎ জ্যামিতিৰ সহায়ত $\sqrt{3.5}$ আমি উলিয়াম।



চিত্ৰ 1.15

এটা স্থিৰ বিন্দু A ৰ পৰা এডাল ৰেখাত 3.5 একক দূৰত্বত এটা দাগ দি ইয়াত B লোৱা হ'ল যাতে AB = 3.5 একক (চিত্ৰ 1.15 চোৱা)। B ৰ পৰা 1 একক দূৰত্বত এটা দাগ দিয়া হ'ল আৰু এই বিন্দুটো C বুলি লোৱা হ'ল। AC ৰ মধ্য বিন্দুটো উলিয়াই সেইটোক O বুলি লোৱা হ'ল। O বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি আৰু OC ক ব্যাসাৰ্ধ হিচাপে লৈ এটা অৰ্ধবৃত্ত অংকন কৰা হ'ল। AC ৰ ওপৰত B ৰে যোৱাকৈ আৰু অৰ্ধবৃত্তটোক D বিন্দুত ছেদ কৰাকৈ এডাল লম্ব টনা হ'ল।



চিত্ৰ 1.16

এতিয়া BD $= \sqrt{3.5}$ ।

অধিক সাধাৰণকৈ, যিকোনো ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা x ৰ বাবে, $\sqrt{x}$ উলিয়াবলৈ এটা বিন্দু B লোৱা হ'ল যাতে AB = x একক আৰু C লোৱা হ'ল যাতে BC = 1 একক (চিত্ৰ 1.16 ত দিয়াৰ দৰে)। এতিয়া x = 3.5 লৈ কৰাৰ দৰে, আমি পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰৰ সহায়ত এই ফল প্ৰমাণ কৰিব পাৰো।

চিত্ৰ 1.16 ত লক্ষ্য কৰা যে ΔOBD এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ। তদুপৰি, বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ হ'ল $\frac{x+1}{2}$ একক।

গতিকে $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ একক

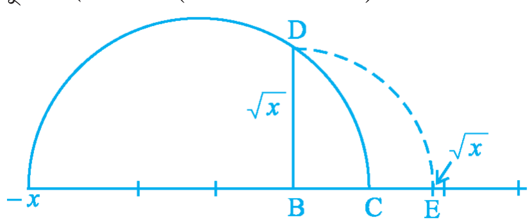
এতিয়া $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

সেয়ে, পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰৰপৰা আমি পাওঁ

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

ইয়াৰপৰা দেখা যায় যে BD = $\sqrt{x}$

এই অংকন প্ৰণালী সকলো বাস্তৱ সংখ্যা x>0 ৰ বাবে $\sqrt{x}$ ৰ অৱস্থিতি প্ৰদৰ্শন কৰাৰ এক চাক্ষুষ আৰু জ্যামিতীয় পদ্ধতি। যদি সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{x}$ ৰ অৱস্থান জানিব খোজা, তেনেহ'লে B ক শূন্য, C ক 1, ইত্যাদি, ধৰি B ক কেন্দ্ৰ ধৰি আৰু BD ক ব্যাসাৰ্ধ লৈ বৃত্তৰ এটা চাপ আঁকিলে ই সংখ্যাৰেখাত E বিন্দুত ছেদ কৰিব (চিত্ৰ 1.17 দ্ৰষ্টব্য)। এতিয়া E বিন্দুৱে $\sqrt{x}$ বুজাব।



চিত্ৰ 1.17

বৰ্গমূলৰ ধাৰণাটো এতিয়া আমি ঘনমূল, চতুৰ্থমূল আৰু সাধাৰণভাৱে n তম মূল (n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) পৰ্যন্ত প্ৰসাৰিত কৰিব বিচাৰিছোঁ। বৰ্গমূল, ঘনমূল সম্পৰ্কে আগৰ শ্ৰেণীত পোৱা কথাবিলাক মনত পেলোৱা।

$\sqrt[3]{8}$ মানে কি? নিশ্চয় ই এটা ধনাত্মক সংখ্যা হ'ব লাগিব যাৰ ঘনফল 8 আৰু তোমালোকে অনুমান কৰিব পাৰিছা যে $\sqrt[3]{8} = 2$। এতিয়া $\sqrt[5]{243}$ কি হ'ব চেষ্টা কৰা যাওঁক। তোমালোকে এনে কোনো এটা সংখ্যা b জানানে যাতে $b^5 = 243$ হয়? উত্তৰটো হ'ল 3। গতিকে $\sqrt[5]{243} = 3$।

এই উদাহৰণবিলাকৰপৰা $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে $\sqrt[n]{a}$ ৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিবানে? ধৰাহ'ল $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেনেহ'লে $\sqrt[n]{a} = b$ হ'ব যদিহে $b^n = a$ আৰু $b > 0$। মন কৰিবা যে $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$ আদিত ব্যৱহাৰ কৰা '$\sqrt{\ }$' এই চিনটোক 'মূল চিহ্ন' (Radical Sign) বোলা হয়।

এতিয়া আমি বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত প্ৰয়োজনীয় বৰ্গমূল সম্পৰ্কীয় অভেদ কিছুমান উল্লেখ কৰিম। আগৰ শ্ৰেণীত পোৱা এনে কিছুমান অভেদ ইতিমধ্যে তোমালোকৰ বাবে পৰিচিত। অৱশিষ্ট অভেদ কেইটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগৰ ওপৰত পূৰণৰ বিতৰণ বিধি আৰু $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ অভেদৰপৰা পোৱা যায় (ইয়াত x আৰু y বাস্তৱ সংখ্যা)।

ধৰা a আৰু b ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা। তেনেহ'লে

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (iv) $(a + \sqrt{b})\,(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

এই অভেদবিলাকৰ কেইটামান বিশেষ উদাহৰণ লক্ষ্য কৰা যাওঁক।

উদাহৰণ 16 ঃ তলৰ ৰাশিবিলাক সৰল কৰা।

(i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5})$ (ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$ (iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})$

সমাধান ঃ (i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 11 - 7 = 4$

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ উদাহৰণত সৰল কৰা বোলোতে প্ৰতিটো ৰাশিক এটা পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিবলগাটোহে বুজাইছে।

তলৰ উদাহৰণকেইটা বিবেচনা কৰিয়েই এই অনুচ্ছেদৰ সামৰণি মৰা হ'ব। $\frac{1}{\sqrt{2}}$ লৈ লক্ষ্য কৰা। সংখ্যাৰেখাত ইয়াৰ স্থান ক'ত হ'ব ক'ব পাৰিবানে? তোমালোকে জানা যে ই অপৰিমেয়। হৰটো পৰিমেয় সংখ্যা হোৱাহেঁতেন সম্ভৱতঃ কামটো সহজ হ'লহেঁতেন। আমি হৰৰ পৰিমেয়কৰণ হয় নেকি চাওঁ, অৰ্থাৎ হৰটো পৰিমেয় সংখ্যা কৰিব পাৰি নেকি চোৱা যাওঁক। এইটো কৰিবলৈ বৰ্গমূল জড়িত থকা অভেদৰ প্ৰয়োজন হ'ব। কেনেকৈ কৰা হয় চাওঁ আহা।

উদাহৰণ 17 ঃ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান ঃ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ক এটা সমতুল্য ৰাশিলৈ নিব লাগে যাৰ হৰটো এটা পৰিমেয় সংখ্যা। আমি জানো যে $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ পৰিমেয়। আমি ইয়াকো জানো যে $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ক $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ৰে পূৰণ কৰিলে এটা সমতুল্য ৰাশি পোৱা যায়, কাৰণ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$। সেয়ে এই দুটা তথ্যকে একেলগ কৰিলে পাওঁ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

এই আৰ্হিত $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ৰ স্থান সংখ্যাৰেখাত উলিয়াবলৈ সহজ। এই সংখ্যাটো 0 আৰু $\sqrt{2}$ ৰ মধ্যস্থানত থাকিব।

উদাহৰণ 18 ঃ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত আগতে পোৱা অভেদ (iv) ব্যৱহাৰ কৰিম। $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ক $2-\sqrt{3}$ ৰে পূৰণ আৰু হৰণ কৰিলে পাম যে

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

উদাহৰণ 19 ঃ $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত আগতে দিয়া অভেদ (iii) ব্যৱহাৰ কৰিম।

গতিকে, $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}$

$$= \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

উদাহৰণ 20 ঃ $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান ঃ $\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

গতিকে যেতিয়া এটা ৰাশিৰ হৰটোত বৰ্গমূল থকা পদ (বা মূল চিহ্নযুক্ত সংখ্যা) এটা থাকে তেতিয়া এই ৰাশিটোৰ হৰক পৰিমেয় সংখ্যালৈ ৰূপান্তৰ কৰি এটা সমতুল্য ৰাশি গঠন কৰা পদ্ধতিটোক 'হৰ পৰিমেয় কৰণ' (Rationalising the denominator) পদ্ধতি বুলি কোৱা হয়।

অনুশলনী 1.5

1. তলৰ সংখ্যাবোৰ পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় হিচাপে শ্ৰেণীভুক্ত কৰা।

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. তলৰ প্ৰতিটো ৰাশি সৰল কৰা।

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$ (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ (v) $\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)^2$ (vi) $\left(\sqrt{7}-6\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)$

(vii) $\left(2+\sqrt{6}\right)\left(4+\sqrt{6}\right)$

3. মনত পেলোৱা যে π ৰ সংজ্ঞা দিওঁতে ইয়াক এটা বৃত্তৰ পৰিধি (ধৰা c) আৰু সেই বৃত্তৰ ব্যাসৰ (ধৰা d) অনুপাত বুলি কোৱা হৈছিল। অৰ্থাৎ $\pi = \frac{c}{d}$ । দেখা গৈছে যে এই কথাই π যে অপৰিমেয় সেই তথ্যৰ বিৰোধিতা কৰিছে। এই বিৰোধিতা কিদৰে মীমাংসা কৰিবা?

4. $\sqrt{9.3}$ ক সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰা।

5. তলৰ ৰাশিৰ হৰ বিলাক পৰিমেয় কৰা।

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

(v) $\frac{13}{\sqrt{5}}$ (vi) $\frac{6+\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}$ (vii) $\frac{5+\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}$ (viii) $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

(ix) $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$

6. (i) যদি $x = 1 + \sqrt{2}$ তেন্তে দেখুওৱা যে— $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = 8$

(ii) সৰল কৰা ঃ $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

(iii) $1.2\bar{7}$ আৰু $0.1\bar{3}$ পৰিমেয় সংখ্যা দুটা যোগ কৰা।

1.6 বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত সূচকৰ বিধি (Laws of Exponents for Real Numbers) ঃ

তলৰ ৰাশিবিলাক কেনেকৈ সৰল কৰে মনত আছেনে?

(i) $17^2.17^5 =$ (ii) $\left(5^2\right)^7 =$ (iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3.9^3 =$

উত্তৰ বিলাক পালানে? সেইবিলাক হ'ল—

(i) $17^2.17^5 = 17^7$ (ii) $\left(5^2\right)^7 = 5^{14}$ (iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3.9^3 = 63^3$

এই উত্তৰবিলাক উলিয়াওঁতে তোমালোকে তলত দিয়া সূচকৰ বিধিবিলাক, যিবিলাক আগৰ শ্ৰেণীত পাইছিলা, ব্যৱহাৰ কৰিব লগা হৈছে। (ইয়াত a, n আৰু m স্বাভাৱিক সংখ্যা। মনত ৰাখিবা যে a ক ভূমি আৰু m আৰু n সূচক বুলি কোৱা হয়)

(i) $a^m.a^n = a^{m+n}$ (ii) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, m>n (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ ৰ মান কি? ইয়াৰ মান 1। গতিকে আমি শিকিলো যে $(a)^0 = 1$। সেয়ে (iii) ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ যে $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$। এতিয়া আমি এই বিধিবিলাক ঋণাত্মক সূচকলৈ সম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰিম।

সেয়ে, উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

(i) $17^2.17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $\left(5^2\right)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3}.(9)^{-3} = (63)^{-3}$

ধৰা আমি তলৰকেইটা সৰল কৰিব বিচাৰোঁ ঃ

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}}$

এইকেইটা কেনেকৈ কৰিম? দেখা যায় যে আগতে শিকা সূচকৰ বিধিকেইটা ভূমি ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা আৰু সূচক পৰিমেয় সংখ্যা হ'লেও প্ৰসাৰিত কৰিব পৰা যায়। (পিচত পঢ়িবলৈ পাবা যে এই বিধিকেইটা বাস্তৱ সংখ্যাযুক্ত সূচক পৰ্যন্ত প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি।) এই বিধিবিলাক উল্লেখ কৰাৰ আগতে আৰু বিধিবিলাক বোধগম্য হ'বৰ বাবে আমি প্ৰথমে অন্য কিছু কথা জনাৰ প্ৰয়োজন। উদাহৰণস্বৰূপে $4^{\frac{3}{2}}$ কি? গতিকে আমাৰ কিছুমান কাম কৰিবলগীয়া আছে।

1.4 অনুচ্ছেদত বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a > 0$ ৰ বাবে $\sqrt[n]{a}$ৰ সংজ্ঞা দিয়া হৈছিল যে ঃ

ধৰা $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেতিয়া $\sqrt[n]{a} = b$ যদি $b^n = a$ আৰু $b > 0$

সূচকৰ ভাষাত আমি কওঁ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$। সেয়ে, নিৰ্দিষ্টভাৱে, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$।

গতিকে $4^{\frac{3}{2}}$ ক দুই প্ৰকাৰে চাব পাৰি।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

সেয়েহে আমি তলৰ সংজ্ঞাটো দিব পাৰো ঃ

ধৰো $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা। ধৰো m আৰু n এনে দুটা অখণ্ড সংখ্যা যে সিঁহতৰ 1ৰ বাহিৰে অন্য সাধাৰণ উৎপাদক নাই, আৰু $n > 0$। তেন্তে

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

এতিয়া আমি বিস্তাৰিত ৰূপত তলত দিয়া সূচকৰ বিধিকেইটা পাওঁ ঃ

ধৰো $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু p আৰু q পৰিমেয় সংখ্যা। তেনেহ'লে আমি পাওঁ

(i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

এতিয়া এই বিধিকেইটা ব্যৱহাৰ কৰি আগতে দিয়া প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ তোমালোকে কৰিব পাৰিবা।

উদাহৰণ 21 ঃ সৰল কৰা ঃ

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}}$

সমাধান ঃ (i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}} = (13\times17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

অনুশীলনী 1.6

1. মান উলিওৱা ঃ

(i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. মান উলিওৱা ঃ

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. সৰল কৰা ঃ

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

1.7 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা পঢ়িলা ঃ

1. এটা সংখ্যা r ক পৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত লিখিব পাৰি য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$।
2. এটা সংখ্যা s ক অপৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয় যেতিয়া ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত লিখিব পৰা নেযায় য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা $q \neq 0$।
3. এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি হয় পৰিসমাপ্ত হ'ব নহ'লে অবিৰত পুনৰাৱৰ্তিত হ'ব। তদুপৰি যদি এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত অথবা অবিৰত পুনৰাৱৰ্তিত, সেই সংখ্যাটো পৰিমেয়।
4. এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাৱৰ্তিত। তদুপৰি, এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাৱৰ্তিত হ'লে সংখ্যাটো অপৰিমেয়।
5. সকলো পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যা একেলগ হৈ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটো গঠন কৰে।
6. সংখ্যাৰেখাত প্ৰতিটো বিন্দুৰ অনুৰূপ এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা আছে। তদুপৰি, প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুৰূপে সংখ্যাৰেখাত এটা অদ্বিতীয় বিন্দু আছে।
7. যদি r পৰিমেয় আৰু s অপৰিমেয় তেনেহ'লে $r + s$ আৰু $r - s$ অপৰিমেয় হ'ব। তদুপৰি rs আৰু $\frac{r}{s}$ অপৰিমেয় য'ত $r \neq 0$।
8. ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু b ৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ অভেদবোৰ সত্য হয়।

   (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

   (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$ (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
9. a আৰু b অখণ্ড সংখ্যা হ'লে $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ৰ হৰ পৰিমেয়কৰণৰ বাবে ইয়াক $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ৰে পূৰণ কৰা হয়।
10. ধৰো $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু p আৰু q পৰিমেয় সংখ্যা। তেনেহ'লে

    (i) $a^p a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$

    (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

W6U7Z6

দ্বিতীয় অধ্যায়

বহুপদ (Polynomials)

2.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে ইতিমধ্যে বীজগণিতীয় ৰাশি, সিহঁতৰ যোগ, বিয়োগ, পূৰণ আৰু হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিলা। ইয়াৰোপৰি, কিছুমান বীজগণিতীয় ৰাশিৰ উৎপাদক কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰে তাৰ বিষয়েও অধ্যয়ন কৰিলাহঁক। তোমালোকে তলৰ অভেদকেইটা মনত পেলাব পাৰা ঃ

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

আৰু, $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

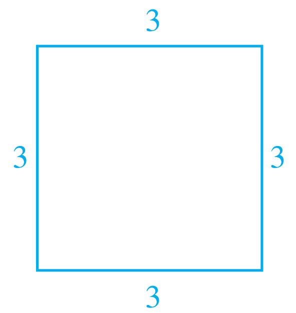
লগতে উৎপাদক বিশ্লেষণত ইহঁতৰ প্ৰয়োগৰ কথাও মনত পেলোৱা। এই অধ্যায়ত আমি 'বহুপদ' বোলা বিশেষ ধৰণৰ বীজগণিতীয় ৰাশি আৰু ইয়াৰ লগত সংগতি থকা পৰিভাষাসমূহৰ অধ্যয়নক লৈ আৰম্ভ কৰিম। আমি ভাগশেষ উপপাদ্য আৰু উৎপাদক উপপাদ্য আৰু বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণত ইয়াৰ ব্যৱহাৰৰ বিষয়েও অধ্যয়ন কৰিম। ইয়াৰ উপৰিও আৰু কিছুমান বীজগণিতীয় অভেদ আৰু উৎপাদক বিশ্লেষণ আৰু কিছুমান প্ৰদত্ত বীজগণিতীয় ৰাশিৰ মান নিৰ্ণয়ত এইবোৰৰ প্ৰয়োগ সমন্ধেও অধ্যয়ন কৰিম।

2.2 এক চলক যুক্ত বহুপদ ঃ (Polynomials in One Variable)

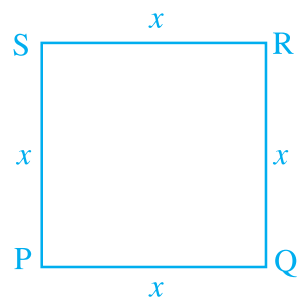
যিকোনো বাস্তৱ মান ল'ব পৰা এটা চিহ্নৰে সূচিত কৰা পদকে 'চলক' বোলে। কথাযাৰ মনত পেলাই আমি আলোচনা আৰম্ভ কৰোঁ আহা। আমি চলক এটা x, y, z আদি বৰ্ণৰে সূচিত কৰোঁ। মন কৰা যে $2x$, $3x$, $-x$, $-\frac{1}{2}x$ আদি বীজগণিতীয় ৰাশি। এই সকলো ৰাশি (এটা ধ্ৰুৱক) ×

x আকাৰৰ। ধৰা, আমি এনে এটা ৰাশি (এটা ধ্ৰুৱক) × (এটা চলক) (a constant) × (a variable) লিখিব খোজো য'ত ধ্ৰুৱক কি আমি নাজানো। এনেক্ষেত্ৰত আমি a, b, c আদিৰে লিখোঁ। গতিকে ৰাশিটো হ'ব ax (ধৰোঁ)।

যি কি নহওঁক, এটা চলক আৰু এটা ধ্ৰুৱক সূচিত কৰা আখৰৰ মাজত পাৰ্থক্য আছে। এক বিশেষ সমস্যা তথা অৱস্থাত ধ্ৰুৱকৰ মানবোৰ একেই থাকে অৰ্থাৎ এক নিৰ্দিষ্ট সমস্যাত ধ্ৰুৱকৰ মানবোৰৰ পৰিৱৰ্তন নহয় কিন্তু চলকৰ মান পৰিৱৰ্তনশীল হ'ব পাৰে।



চিত্ৰ 2.1



চিত্ৰ 2.2

এতিয়া, এটা বৰ্গ (চিত্ৰ 2.1) বিবেচনা কৰা যাৰ বাহু 3 একক। ইয়াৰ পৰিসীমা কি? তোমালোকে জানা যে, বৰ্গৰ পৰিসীমা হ'ল ইয়াৰ চাৰিটা বাহুৰ দীঘৰ সমষ্টি। ইয়াৰ প্ৰতিটো বাহুৰ দীঘ 3 একক। সেয়ে বৰ্গটোৰ পৰিসীমা হ'ব 4 × 3 অৰ্থাৎ 12 একক। যদি বৰ্গটোৰ প্ৰতিটো বাহুৰ দীঘ 10 একক হয় তেন্তে পৰিসীমা কিমান? পৰিসীমা হ'ব 4 × 10 অৰ্থাৎ 40 একক। যদি বাহুৰ দীঘ x একক হয় তেন্তে পৰিসীমা হ'ব $4x$ একক। গতিকে বাহুৰ দীঘ সলনি হ'লে পৰিসীমাও সলনি হয়। PQRS বৰ্গটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবানে? ই হ'ল $x \times x = x^2$ বৰ্গ একক। x^2 এটা বীজগণিতীয় ৰাশি।

তোমালোক $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ আদি বীজগণিতীয় ৰাশিৰ লগতো পৰিচিত। মন কৰা যে বৰ্তমানলৈকে আমি বিবেচনা কৰা সকলো বীজগণিতীয় ৰাশিত মাথোঁ পূৰ্ণ সংখ্যাহে চলকৰ সূচক আকাৰত পাওঁ। এনেধৰণৰ ৰাশিক এক চলকযুক্ত বহুপদ বোলে। ওপৰৰ উদাহৰণ বিলাকত চলক হ'ল x। উদাহৰণ স্বৰূপে, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ এটা x চলকযুক্ত বহুপদ। এনেদৰে, $3y^2 + 5y$ এটা y চলকযুক্ত বহুপদ, আৰু $t^2 + 4$, t চলকযুক্ত বহুপদ। $x^2 + 2x$ বহুপদটোত x^2 আৰু $2x$ ৰাশি দুটাক বহুপদটোৰ পদ বোলে। একেদৰে, $3y^2 + 5y + 7$ বহুপদটোৰ তিনিটা পদ ক্ৰমে $3y^2$, 5y আৰু 7। $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ বহুপদটোৰ পদবোৰ লিখিব পাৰিবানে? ইয়াৰ 4টা পদ ক্ৰমে $-x^3$, $4x^2$, $7x$ আৰু -2।

বহুপদৰ প্ৰতিটো পদৰে একোটা সহগ (Coefficient) থাকে। $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ত x^3ৰ সহগ -1, x^2 ৰ সহগ 4, xৰ সহগ 7 আৰু -2 হ'ল x^0 ৰ সহগ (মনত ৰাখিবা $x^0 = 1$)। $x^2 - x + 7$ ত x সহগ কি? ই হ'ল '-1'। '2'ও এটা বহুপদ। প্ৰকৃততে 2, -5, 7 আদি ধ্ৰুৱক বহুপদৰ উদাহৰণ। ধ্ৰুৱক বহুপদ '0' ক শূন্য বহুপদ (**zero polynomial**) বোলে। উচ্চ শ্ৰেণীত দেখিবা যে এই বহুপদটোৱে বহুপদৰ সংগ্ৰহৰ মাজত এক বিশেষ ভূমিকা লয়।

এতিয়া, $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ আৰু $\sqrt[3]{y} + y^2$ ৰ দৰে আকাৰৰ বীজগণিতীয় ৰাশিকেইটা বিবেচনা

কৰা। তোমালোকে জানানে যে $x+\frac{1}{x}=x+x^{-1}$ বুলি লিখিব পাৰি? ইয়াত দ্বিতীয় পদ অৰ্থাৎ x^{-1} ৰ সূচক '–1', যিটো পূৰ্ণসংখ্যা নহয়। সেয়ে, এই বীজগণিতীয় ৰাশিটো এটা বহুপদ নহয়।

আকৌ $\sqrt{x}+3$ ক $x^{\frac{1}{2}}+3$ ৰূপত লিখিব পাৰি। ইয়াত x ৰ সূচক $\frac{1}{2}$, যি পূৰ্ণসংখ্যা নহয়। গতিকে, $\sqrt{x}+3$ এটা বহুপদ নে? নহয়, ই বহুপদ নহয়। $\sqrt[3]{y}+y^2$ ৰ সম্পৰ্কত মতামত কি? এইটোও এটা বহুপদ নহয়, (কিয়?)।

এটা বহুপদৰ যদি, চলক x, তেন্তে বহুপদটোক আমি $p(x)$, $q(x)$, বা $r(x)$ আদিৰে সূচিত কৰিব পাৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে—

$p(x) = 2x^2+5x-3$

$q(x) = x^3-1$

$r(y) = y^3+y+1$

$s(u) = 2-u-u^2+6u^3$

এটা বহুপদত যিকোনো (সীমিত) সংখ্যক পদ থাকিব পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে $x^{150}+x^{149}+x^{148}+...+x^2+x+1$, এটা 151 টা পদযুক্ত বহুপদ। $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y, আৰু u^4 বহুপদ কেইটা বিবেচনা কৰা। তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছানে যে প্ৰতিটো বহুপদত মাথোঁ এটাহে পদ আছে? যি বহুপদত মাথোঁ এটা পদ থাকে তাক মন'মিয়েল (monomials) অৰ্থাৎ একপদ বোলে। {mono মানে এক (one)}।

এতিয়া তলৰ প্ৰতিটো বহুপদকে লক্ষ্য কৰা

$p(x) = x + 1$, $q(x) = x^2-x$, $r(y) = y^{30} + 1$, $t(u) = u^{43} - u^2$ এই বহুপদকেইটাৰ প্ৰত্যেকতে কেইটাকৈ পদ আছে? ইয়াৰ প্ৰতিটো বহুপদতে দুটাকৈ পদ আছে। যি বহুপদত মাথোঁ দুটা পদ থাকে তাক দ্বিপদ (binomial) বোলা হয়। {bi মানে দুই (two)}।

একেদৰে, তিনিটা পদবিশিষ্ট বহুপদক ত্ৰিপদ (trinomials) বোলে। {tri মানে তিনি (three)}। কেইটামান ত্ৰিপদৰ উদাহৰণ হ'ল—

$p(x) = x + x^2 + \pi$, $q(x) = \sqrt{2}+x-x^2$

$r(u) = u+u^2-2$ $t(y) = y^4+y+5$

এতিয়া $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ বহুপদটো লক্ষ্য কৰা। ইয়াত কোনটো পদত x ৰ সূচক সৰ্বোচ্চ? নিশ্চিতভাৱে ই $3x^7$। এই পদত x ৰ সূচক 7। একেদৰে, $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ বহুপদত y ৰ সৰ্বোচ্চ সূচকযুক্ত পদটো হ'ল $5y^6$ আৰু এই পদত y ৰ সূচক হ'ল 6। এটা বহুপদৰ

চলকৰ সৰ্বোচ্চ ঘাতক বহুপদটোৰ মাত্ৰা (degree) বোলা হয়। সেয়ে, $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ বহুপদৰ মাত্ৰা 7 আৰু $5y^6 - 4x^2 - 6$ বহুপদৰ মাত্ৰা 6। এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক বহুপদৰ মাত্ৰা হ'ল '0' (শূন্য)।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ প্ৰতিটো বহুপদৰ মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰা—

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

সমাধান ঃ (i) চলকৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ল 5, সেয়ে, বহুপদটোৰ মাত্ৰা 5।

(ii) চলকৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ল 8, সেয়ে, বহুপদটোৰ মাত্ৰা 8।

(iii) ইয়াত একমাত্ৰ পদটো হ'ল 2, আৰু $2x^0$ ৰূপত লিখিব পাৰি। সেয়ে, x ৰ সূচক '0'। গতিকে বহুপদটোৰ মাত্ৰা '0'।

এতিয়া $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t+\sqrt{2}$ আৰু $s(u) = 3 - u$ বহুপদকেইটালৈ লক্ষ্য কৰা। ইহঁত আটাইকেইটাৰে কিবা সাধাৰণ বৈশিষ্ট্য লক্ষ্য কৰিছানে? বহুপদকেইটাৰ প্ৰত্যেকটোৰ মাত্ৰা 'এক'। এক মাত্ৰাযুক্ত বহুপদক ৰৈখিক (Linear) বহুপদ বোলে। এক চলক বিশিষ্ট আৰু কেইটামান ৰৈখিক বহুপদ হ'ল—

$$2x - 1,\ \sqrt{2}y+1,\ 2 - u$$

এতিয়া x ৰ এটা ৰৈখিক বহুপদ লিখিবলৈ চেষ্টা কৰা য'ত পদ সংখ্যা 3। তোমালোকে এনে কোনো বহুপদ নোপোৱা কাৰণ x ৰ ৰৈখিক বহুপদত অতি বেছি দুটা পদ থাকিব পাৰে। সেয়ে, x ৰ যিকোনো এটা ৰৈখিক বহুপদৰ আকাৰ হ'ল $ax + b$ য'ত a, b ধ্ৰুৱক, $a \neq 0$ (কিয়?)। একেদৰে $ay + b$, y ৰ এটা ৰৈখিক বহুপদ।

এতিয়া তলৰ বহুপদকেইটালৈ মন কৰা—

$$2x^2+5,\ 5x^2+3x+\pi,\ x^2 \text{ আৰু } x^2+\frac{2}{5}x$$

তোমালোক সকলো একমত নে যে আটাইকেইটা বহুপদৰ মাত্ৰা দুই? এটা দুই মাত্ৰাবিশিষ্ট বহুপদক দ্বিঘাত বহুপদ বোলা হয়। দ্বিঘাত বহুপদৰ কেইটামান উদাহৰণ হ'ল— $5 - y^2$, $4y + 5y^2$, আৰু $6 - y - y^2$। এটা চলক যুক্ত এনে এটা দ্বিঘাত বহুপদ লিখিব পাৰিবানে য'ত চাৰিটা বিভিন্ন পদ থাকে? তোমালোকে দেখিবা যে এটা চলকযুক্ত দ্বিঘাত বহুপদত অতি বেছি 3টা ভিন্নপদ থাকিব পাৰে। এটা চলকযুক্ত আৰু কিছুমান দ্বিঘাত বহুপদৰ তালিকা প্ৰস্তুত কৰিলে দেখা পাবা যে, x যুক্ত যিকোনো দ্বিঘাত বহুপদৰ আকাৰ $ax^2 + bx + c$, য'ত $a \neq 0$ আৰু a, b, c ধ্ৰুৱক। একেদৰে y যুক্ত দ্বিঘাত বহুপদ এটাৰ আকাৰ হ'ব $ay^2 + by + c$, যদিহে $a \neq 0$ আৰু a, b, c ধ্ৰুৱক।

এটা বহুপদৰ মাত্ৰা 3 হ'লে তাক ত্ৰিঘাত বহুপদ বোলে। ত্ৰিঘাত বহুপদৰ কিছুমান উদাহৰণ হ'ল—

$4x^3$, $2x^3+1$, $5x^3+x^2$, $6x^3-x$, $6-x^3$, $2x^3+4x^2+6x+7$। এক চলকযুক্ত এটা ত্ৰিঘাত বহুপদত কিমান ভিন্ন পদ থাকিব পাৰে বুলি ভাবা? ইয়াত অতি বেছি 4টা পদ থাকিব পাৰে। এই বহুপদক ax^3+bx^2+cx+d (য'ত $a \neq 0$ আৰু a, b, c, d ধ্ৰুৱক) আকাৰত লিখিব পাৰি।

এতিয়া যিহেতু তোমালোকে মাত্ৰা 1, মাত্ৰা 2 বা মাত্ৰা 3 বিশিষ্ট বহুপদৰ আকাৰ কেনে তাক দেখা পালা, তোমালোকে যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ বাবে n মাত্ৰা বিশিষ্ট এক চলকযুক্ত এটা বহুপদ লিখিব পাৰিবানে? x চলকযুক্ত n মাত্ৰা বিশিষ্ট বহুপদ ৰাশিৰ আকাৰ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$ য'ত $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ধ্ৰুৱক আৰু $a_n \neq 0$। বিশেষতঃ যদি $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=a_n=0$ (সকলো ধ্ৰুৱক শূন্য), তেন্তে আমি শূন্য বহুপদটো পাম যাক '0' বুলি লিখা হয়। শূন্য বহুপদৰ মাত্ৰা কি? শূন্য বহুপদৰ মাত্ৰা সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

এতিয়ালৈকে আমি মাত্ৰ এটা চলকযুক্ত বহুপদৰ বিষয়েহে আলোচনা কৰিছোঁ। এটাতকৈ বেছি চলকযুক্ত বহুপদো আমি পাব পাৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে, x^2+y^2+xyz (য'ত x, y আৰু z চলক) এটা তিনিটা চলকযুক্ত বহুপদ। একেদৰে, $p^2+q^{10}+r$ (য'ত p, q আৰু r চলক), u^3+v^2 (য'ত u আৰু v চলক), ক্ৰমে তিনিটা আৰু দুটা চলকযুক্ত বহুপদ। পিছত, তোমালোকে এনে বহুপদৰ সম্পৰ্কে বিশদভাৱে পঢ়িবলৈ পাবা।

অনুশীলনী 2.1

1. তলৰ কোনকেইটা ৰাশি এটা চলকযুক্ত বহুপদ আৰু কোনকেইটা নহয়? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দিয়া।

(i) $4x^2-3x+7$ (ii) $y^2+\sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t}+t\sqrt{2}$

(iv) $y+\frac{2}{y}$ (v) $x^{10}+y^3+z^{50}$

2. তলৰ প্ৰতিটোৰে x^2 ৰ সহগ লিখা ঃ

(i) $2+x^2+x$ (ii) $2-x^2+x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2+x$ (iv) $\sqrt{2}x-1$

(v) $(2x-3)(x^2-3x+1)$

3. 35 মাত্ৰাযুক্ত এটা দ্বিপদ আৰু 100 মাত্ৰাযুক্ত এটা একপদৰ একোটাকৈ উদাহৰণ দিয়া।

4. তলৰ বহুপদবোৰৰ মাত্ৰা লিখা ঃ

(i) $5x^3+4x^2+7x$ (ii) $4-y^2$ (iii) $5t-\sqrt{7}$ (iv) 3

5. তলৰ ৰৈখিক, দ্বিঘাত আৰু ত্ৰিঘাত বহুপদবোৰ শ্ৰেণী বিভাজন কৰা ঃ

(i) x^2+x (ii) $x-x^3$ (iii) $y+y^2+4$ (iv) $1+x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 বহুপদৰ শূন্য (Zeroes of a Polynomial) ঃ

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ বহুপদটো বিবেচনা কৰা। যদি $p(x)$ ৰ সকলো ঠাইতে আমি x ক 1 ৰে প্ৰতিস্থাপন কৰো তেন্তে, পাওঁ

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times 1 - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

অৰ্থাৎ আমি ক'ব পাৰোঁ যে, $x = 1$ ত $p(x)$ ৰ মান 4 ।

এনেদৰে, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3 \times 0 - 2 = -2$

তোমালোকে $p(-1)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবানে?

উদাহৰণ 2 ঃ তলৰ বহুপদ কেইটাৰ প্ৰতিটোৰে মান চলকৰ নিৰ্দেশিত মানৰ বাবে নিৰ্ণয় কৰা

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, যেতিয়া $x = 1$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, যেতিয়া $y = 2$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ যেতিয়া $t = a$

সমাধান ঃ (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ ৰ বাবে $p(x)$ ৰ মান হ'ল $p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7 = 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ ৰ বাবে $q(y)$ ৰ মান হ'ল $q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11}$

$= 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ ৰ বাবে $p(t)$ ৰ মান হ'ল $p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$

এতিয়া, $p(x) = x - 1$ বহুপদটো লক্ষ্য কৰা। $p(1)$ ৰ মান কি? মন কৰা যে,

$p(1) = 1 - 1 = 0$

যিহেতু $p(1) = 0$, এইক্ষেত্ৰত 1 ক $p(x)$ বহুপদটোৰ এটা শূন্য বোলে। একেদৰে তোমালোকে চাব পাৰা যে, $q(x) = x - 2$ ৰ শূন্য হ'ল 2। সাধাৰণতে, আমি কওঁ যে, এটা বহুপদ $p(x)$ ৰ এটা শূন্য এটা সংখ্যা c হ'ব যেতিয়া $p(c) = 0$ ।

তোমালোকে নিশ্চয় মন কৰিছা যে $x - 1$ বহুপদৰ শূন্য বহুপদটোক 0 ৰ লগত সমান কৰি পোৱা যায় অৰ্থাৎ, $x - 1 = 0$, যিয়ে $x = 1$ দিয়ে। আমি $p(x) = 0$ ক বহুপদী সমীকৰণ বুলি কওঁ আৰু 1ক বহুপদী সমীকৰণ $p(x) = 0$ ৰ মূল বোলো। গতিকে, আমি কওঁ যে, 1, $x - 1$ বহুপদৰ শূন্য বা $x - 1 = 0$ বহুপদী সমীকৰণটোৰ এটা মূল।

এতিয়া, ধ্ৰুৱক বহুপদ 5 লোৱা হওঁক। ইয়াৰ শূন্য কি ক'ব পাৰিবানে? ইয়াৰ কোনো শূন্য নাই

কাৰণ x ৰ যিকোনো মানৰ বাবে $5x^0$ ৰ মান 5য়েই হৈ থাকিব। বাস্তৱিকতে এটা অশূন্য ধ্রুৱক বহুপদৰ কোনো শূন্য নাই। শূন্য বহুপদৰ শূন্য বুলিলে কি বুজা যাব? পৰম্পৰা অনুসৰি প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাই শূন্য বহুপদৰ এটা শূন্য।

উদাহৰণ 3 ঃ $x + 2$ বহুপদৰ শূন্য -2 আৰু 2 হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা $p(x) = x + 2$। তেতিয়া,

$p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

গতিকে, -2, $x + 2$ বহুপদৰ এটা শূন্য কিন্তু 2 নহয়।

উদাহৰণ 4 ঃ $p(x) = 2x + 1$ বহুপদৰ এটা শূন্য নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $p(x)$ৰ শূণ্য নিৰ্ণয় কৰা মানে $p(x) = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

এতিয়া, $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

অৰ্থাৎ $-\dfrac{1}{2}$, $2x + 1$ বহুপদৰ এটা শূন্য।

এতিয়া যদি, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ এটা ৰৈখিক বহুপদ হয় তেন্তে $p(x)$ৰ এটা শূন্য কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰিম? উদাহৰণ 4ৰ পৰা তোমালোকে কিছু আভাস পাইছা নিশ্চয়। এটা বহুপদ $p(x)$ৰ শূন্য নিৰ্ণয় বুলিলে $p(x) = 0$ বহুপদী সমীকৰণৰ সমাধান কৰা।

এতিয়া, $p(x) = 0$ ৰ পৰা পাওঁ $ax + b = 0$, $a \neq 0$

গতিকে, $ax = -b$

অৰ্থাৎ, $x = -\dfrac{b}{a}$

সেয়ে $x = -\dfrac{b}{a}$, $p(x)$ৰ একমাত্ৰ শূন্য। অৰ্থাৎ, এটা ৰৈখিক বহুপদৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে শূন্য থাকে। এতিয়া আমি ক'ব পাৰোঁ যে $x - 1$ৰ শূন্য 1 আৰু $x + 2$ৰ শূন্য -2

উদাহৰণ 5 ঃ $x^2 - 2x$ বহুপদৰ শূন্য 2 আৰু 0, হয়নে সত্যাপন কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা $p(x) = x^2 - 2x$

তেন্তে, $p(2) = 2^2 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$

আৰু $p(0) = (0)^2 - 2(0) = 0 - 0 = 0$

গতিকে 2 আৰু 0 দুয়োটাই $x^2 - 2x$ বহুপদৰ শূন্য।

এতিয়া আমাৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহৰ এক সূচী কৰো আঁহা

(i) এটা বহুপদৰ শূন্য '0' নহ'বও পাৰে।

(ii) '0' এটা বহুপদৰ শূন্য হ'ব পাৰে।

(iii) প্ৰতিটো ৰৈখিক বহুপদৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে শূন্য থাকে।

(iv) এটা বহুপদৰ শূন্য এটাতকৈ বেছি থাকিব পাৰে।

অনুশীলনী 2.2

1. $5x - 4x^2 + 3$ বহুপদৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া—

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. তলৰ বহুপদবোৰৰ প্ৰত্যেকৰ বাবে $p(0)$, $p(1)$ আৰু $p(2)$ নিৰ্ণয় কৰা

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. কাষত উল্লেখিত মানবোৰ বহুপদটোৰ শূন্য হয়নে নহয় সত্যাপন কৰি চোৱা।

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2, x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

4. তলৰ প্ৰতিটো বহুপদৰ শূন্য নিৰ্ণয় কৰা

(i) $p(x) = x + 5$

(ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$

(vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0, c, d$ বাস্তৱ সংখ্যা।

2.4 ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) ঃ

আমি দুটা সংখ্যা 15 আৰু 6 লওঁ। তোমালোকে জানা যে, যেতিয়া 15ক 6ৰে হৰণ কৰা হয় তেতিয়া ভাগফল 2 আৰু ভাগশেষ 3 পোৱা যায়। তোমালোকে মন কৰিছাঁনে কেনেকৈ এই কথাটো প্ৰকাশ কৰা হয়? আমি 15ক লিখো, $15 = (6 \times 2) + 3$ হিচাপে।

আমি লক্ষ্য কৰিছো যে, ভাগশেষ 3, ভাজক 6তকৈ সৰু। একেদৰে, যদি 12অক 6ৰে হৰণ কৰো তেন্তে পাওঁ— $12 = (6 \times 2) + 0$

এই ক্ষেত্ৰত ভাগশেষ কি? ইয়াত ভাগশেষ 0 আৰু আমি কওঁ যে 6, 12ৰ এটা উৎপাদক বা 12, 6 ৰ এটা গুণিতক।

এতিয়া প্ৰশ্ন হ'ল— এটা বহুপদক অন্য এটা বহুপদেৰে হৰণ কৰিব পাৰিনে? এই কথা আলোচনা কৰিবলৈ প্ৰথমে ভাজকটো এটা একপদ লওঁ। এতিয়া $2x^3 + x^2 + x$ বহুপদক একপদ xৰে হৰণ কৰিলে পাওঁ—

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} = 2x^2 + x + 1$$

বাস্তৱিকতে তোমালোকে হয়তো লক্ষ্য কৰিছা যে, x, $2x^3 + x^2 + x$ বহুপদটোৰ প্ৰতিটো পদৰ এটা সাধাৰণ পদ। গতিকে আমি লিখিব পাৰো যে,

$$2x^3 + x^2 + x = x(2x^2 + x + 1)$$

আমি ক'ম যে x আৰু $2x^2 + x + 1$ দুয়োটাই $2x^3 + x^2 + x$ অৰ উৎপাদক আৰু $2x^3 + x^2 + x$, x আৰু $2x^2 + x + 1$ প্ৰত্যেকৰে এটা গুণিতক।

আন দুটা বহুপদ $3x^2 + x + 1$ আৰু xৰ কথা বিবেচনা কৰা।

ইয়াত, $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

আমি দেখা পাওঁ যে, 1ক x ৰে হৰণ কৰি কোনো বহুপদ নাপাওঁ। সেইবাবে ইমানতে সমাপ্ত কৰোঁ আৰু লক্ষ্য কৰোঁ যে 1টো এইক্ষেত্ৰত ভাগশেষ। গতিকে আমি পাওঁ—

$$3x^2 + x + 1 = \{x \times (3x + 1)\} + 1$$

এই ক্ষেত্ৰত $3x + 1$ হ'ল ভাগফল আৰু 1 হ'ল ভাগশেষ। তোমালোকে ভাবা নেকি যে x, $3x^2 + x + 1$ৰ এটা উৎপাদক? যিহেতু ভাগশেষ শূন্য নহয়, এইটো উৎপাদক নহয়।

এতিয়া আমি এনে এটা উদাহৰণ লওঁ যাতে কেনেকৈ এটা বহুপদ অন্য এটা অশূন্য বহুপদেৰে হৰণ কৰিব পাৰি তাক চাব পাৰোঁ—

উদাহৰণ 6 ঃ $p(x)$ক $g(x)$ৰে হৰণ কৰা য'ত $p(x) = x + 3x^2 - 1$ আৰু $g(x) = 1 + x$

সমাধান ঃ আমি তলত দেখুওৱা ধৰণে পৰ্যায়ক্ৰমে হৰণ প্ৰক্ৰিয়াটো সমাপন কৰিম—

১ম পৰ্যায় ঃ আমি ভাজ্য $x + 3x^2 - 1$ আৰু ভাজক $1 + x$ ক মানক ৰূপত অৰ্থাৎ, পদসমূহৰ সূচকৰ ক্ৰমহ্ৰাসমান ৰূপত সজাম। এনে কৰিলে পাওঁ—

ভাজ্য $3x^2 + x - 1$ আৰু ভাজক $x + 1$

২য় পৰ্যায় ঃ ভাজ্যৰ প্ৰথম পদটোক ভাজকৰ প্ৰথম পদেৰে হৰণ কৰোঁহক অৰ্থাৎ $3x^2$ ক x ৰে হৰণ কৰোঁ আৰু তেতিয়া পাওঁ $3x$। এইদৰে আমি ভাগফলৰ প্ৰথম পদটো পাওঁ।

$$\frac{3x^2}{x} = 3x = \text{ভাগফলৰ প্ৰথম পদ}$$

৩য় পৰ্যায় ঃ আমি ভাজকক ভাগফলৰ প্ৰথম পদেৰে পূৰণ কৰি তাক ভাজ্যৰ পৰা বিয়োগ কৰোঁ। অৰ্থাৎ $x + 1$ ক $3x$ৰে পূৰণ কৰি পোৱা $3x^2 + 3x$ ক ভাজ্য $3x^2 + x - 1$ৰ পৰা বিয়োগ কৰি পাওঁ—

$-2x - 1$

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ \hline & \quad -2x - 1 \end{array}$$

৪ৰ্থ পৰ্যায় ঃ আমি ভাগশেষ $-2x - 1$ক নতুন ভাজ্য ৰূপে লৈ ভাজকক একে ৰাখি ২য় পৰ্যায়ৰ কাৰ্যৰ পুনৰাবৃত্তি কৰি ভাগফলৰ দ্বিতীয় পদটো পাওঁ। অৰ্থাৎ, আমি নতুন ভাজ্যৰ প্ৰথম পদ $-2x$ক ভাজকৰ প্ৰথম পদ xৰে হৰণ কৰি ভাগফলৰ পৰৱৰ্তী পদটো পাওঁ (-2).

$$\frac{-2x}{x} = -2$$
= ভাগফলৰ দ্বিতীয় পদ

নতুন ভাগফল $= 3x - 2$

৫ম পৰ্যায় ঃ আমি ভাজকক ভাগফলৰ দ্বিতীয় পদেৰে পূৰণ কৰি পোৱা পূৰণফল ভাজ্যৰ পৰা বিয়োগ কৰোঁ অৰ্থাৎ $x + 1$ক -2 ৰে পূৰণ কৰি পাওঁ $-2x - 2$ আৰু ইয়াক $-2x - 1$ৰ পৰা বিয়োগ কৰি পাওঁ ভাগশেষ 1

$$(x+1)(-2) = -2x - 2 \qquad \begin{array}{|l} -2x - 1 \\ -2x - 2 \\ + \quad + \\ \hline \quad\; +1 \end{array}$$

ভাগশেষ 0 নাইবা নতুন ভাজ্যৰ মাত্ৰা ভাজকৰ মাত্ৰাতকৈ কম নোহোৱালৈকে এই প্ৰক্ৰিয়া চলি থাকিব। তেনে এটা অৱস্থা পালে নতুন ভাজ্যটো ভাগশেষ আৰু ভাগফলৰ পসমূহৰ সমষ্টিয়েই হ'ব সম্পূৰ্ণ ভাগফল।

৬ষ্ঠ পৰ্যায় এই ক্ষেত্ৰত সম্পূৰ্ণ ভাগফল হ'ব $3x - 2$ আৰু ভাগশেষ হ'ব 1।

আটাইকেইটা পৰ্যায় একেলগে বিবেচনা কৰি পাওঁ—

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 2 \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad - \\ \hline & \quad -2x - 1 \\ & \quad -2x - 2 \\ & \quad + \quad\; + \\ \hline & \qquad\quad 1 \end{array}$$

মন কৰিবা যে, $3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$

অৰ্থাৎ **ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ** (**Dividend = (Divisor × Quotient) + Remainder**)

সাধাৰণভাৱে ক'বলৈ গ'লে, যদি $p(x)$ আৰু $g(x)$ দুটা বহুপদ হয় যাতে, $p(x)$ৰ মাত্ৰা ≥ $g(x)$ৰ মাত্ৰা আৰু $g(x) \neq 0$, তেন্তে আমি দুটা বহুপদ $q(x)$ আৰু $r(x)$ পাওঁ যাতে, $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$, য'ত $r(x) = 0$ বা $r(x)$ৰ মাত্ৰা < $g(x)$ৰ মাত্ৰা। এই ক্ষেত্ৰত আমি কওঁ যে, $p(x)$ক $g(x)$ৰে হৰণ কৰিলে ভাগফল $q(x)$ আৰু ভাগশেষ $r(x)$ পোৱা যায়।

ওপৰৰ উদাহৰণত ভাজক এটা ৰৈখিক বহুপদ আছিল। এনে এটা অৱস্থাত ভাগশেষ আৰু ভাজ্যৰ কোনো বিশেষ মানৰ মাজত কিবা সম্বন্ধ আছে নেকি চাওঁহক।

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ ত যদি xক -1ৰে প্ৰতিস্থাপন কৰা হয় তেন্তে আমি পাওঁ—

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$

গতিকে, $p(x) = 3x^2 + x - 1$ক $x + 1$ৰে হৰণ কৰি পোৱা ভাগশেষ, $x + 1$ বহুপদৰ শূন্যমানত $p(x)$ৰ মানৰ সমান যিটো হৈছে – 1। আমি আৰু কেইটামান উদাহৰণ আলোচনা কৰোহঁক—

উদাহৰণ 7 ঃ $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ বহুপদক $x - 1$ৰে হৰণ কৰা।

সমাধান ঃ দীঘলীয়া হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে পাওঁ—

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\ \hline
 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
x - 1 & 3x^4 - 3x^3 \\
 & - \quad + \\ \hline
 & \quad -x^3 - 3x - 1 \\
 & \quad -x^3 + x^2 \\
 & \quad + \quad - \\ \hline
 & \qquad -x^2 - 3x - 1 \\
 & \qquad -x^2 + x \\
 & \qquad + \quad - \\ \hline
 & \qquad\quad -4x - 1 \\
 & \qquad\quad -4x + 4 \\
 & \qquad\quad + \quad - \\ \hline
 & \qquad\qquad -5
\end{array}$$

ইয়াত ভাগশেষ – 5। এতিয়া $x - 1$ৰ শূন্য হ'ল 1। সেইবাবে $x = 1$, $p(x)$ত বহুৱাই পাওঁ,

$$\begin{aligned} p(1) &= 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\ &= 3 - 4 - 3 - 1 \\ &= -5, \text{ যিটো আমাৰ ভাগশেষ।} \end{aligned}$$

উদাহৰণ 8 ঃ $p(x) = x^3 + 1$ ক $x + 1$ ৰে হৰণ কৰি পোৱা ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দীঘলীয়া হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে—

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 1 \\ \hline & x^3 + 1 \\ x+1 & x^3 + x^2 \\ & -\quad - \\ \hline & \quad -x^2 + 1 \\ & \quad -x^2 - x \\ & \quad +\quad + \\ \hline & \qquad\quad x + 1 \\ & \qquad\quad x + 1 \\ & \qquad\quad -\ - \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

গতিকে ইয়াত ভাগশেষ 0। আকৌ $p(x) = x^3 + 1$ আৰু $x + 1 = 0$ ৰ মূল $x = -1$, গতিকে

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0, \text{ যিটো প্ৰকৃত হৰণ প্ৰক্ৰিয়াত আমাৰ ভাগশেষ।} \end{aligned}$$

এটা বহুপদক এটা ৰৈখিক বহুপদেৰে হৰণ কৰি ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা এই প্ৰক্ৰিয়াটো সহজ নহয়নে? আমি এই কথাযাৰ তলৰ উপপাদ্যৰ ৰূপত সাধাৰণীকৰণ কৰিম। লগতে উপপাদ্যটোৰ প্ৰমাণসহ তাৰ সত্যতাও প্ৰতিপন্ন কৰিমহঁক।

ভাগশেষ উপপাদ্য ঃ (Remainder Theorem) ধৰোঁ, $p(x)$ এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা এক বা ততোধিক, আৰু a যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা। যদি $p(x)$ক $x - a$ৰে হৰণ কৰা হয় তেন্তে ভাগশেষ হ'ব $p(a)$।

প্ৰমাণ ঃ ধৰোঁ, $p(x)$ যিকোনো এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা 1 তকৈ ডাঙৰ বা ইয়াৰ সমান। ধৰোঁ, $p(x)$ক $x - a$ৰে হৰণ কৰিলে ভাগফল পাওঁ $q(x)$ আৰু ভাগশেষ $r(x)$।

অৰ্থাৎ $\quad p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$

যিহেতু $x - a$ ৰ মাত্ৰা 1 আৰু $r(x)$ৰ মাত্ৰা $x - a$ ৰ মাত্ৰাতকৈ সৰু। সেয়ে $r(x)$ৰ মাত্ৰা = 0। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল $r(x)$ এটা ধ্ৰুৱক। ধৰোঁ $r(x) = r$

সেইবাবে, x ৰ সকলো মানৰ বাবে $r(x) = r$

গতিকে, $p(x) = (x - a)\ q(x) + r$

বিশেষতঃ $x = a$ হ'লে এই সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ—

$p(a) = (a - a)\ q(a) + r = r$

যি উপপাদ্যটো প্ৰমাণিত কৰে।

উদাহৰণ 9 ঃ $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ক $x - 1$ৰে হৰণ কৰিলে পোৱা ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত, $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$, আৰু $x - 1$ ৰ শূন্য 1।

গতিকে, $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1 = 2$

গতিকে, ভাগশেষ উপপাদ্যৰ মতে $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ক $x - 1$ ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ হ'ব 2।

উদাহৰণ 10 ঃ $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ বহুপদটো $2t + 1$ৰ এটা গুণিতক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান ঃ তোমালোকে জানা যে, $q(t)$ বহুপদটো, $2t + 1$ৰ এটা গুণিতক হ'ব যদিহে $2t + 1$ৰে $q(t)$ ক হৰণ কৰিলে ভাগশেষ শূন্য হয়। এতিয়া $2t + 1 = 0$ ধৰিলে আমি পাওঁ $t = -\frac{1}{2}$ ।

আকৌ $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$

অৰ্থাৎ $q(t)$ক $2t + 1$ ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ পাওঁ 0

সেইবাবে, $2t + 1$, $q(t)$ৰ এটা উৎপাদক অৰ্থাৎ $q(t)$বহুপদটো $2t + 1$ৰ এটা গুণিতক।

অনুশীলনী 2.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ক তলৰ বহুপদেৰে হৰণ কৰিলে পোৱা ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x

(iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ক $x - a$ ৰে হৰণ কৰিলে পোৱা ভাগশেষ উলিওৱা।

3. $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ ৰ এটা উৎপাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

4. ভাগফল আৰু ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $x^3 - 4x^2 + 2x + 5$ ক $x - 2$ ৰে ভাগ কৰিলে।

(ii) $4x^3 - 2x^2 - 3$ ক $2x^2 - 1$ ৰে ভাগ কৰিলে।

(iii) $3x^3 - 5x^2 + 10x - 3$ ক $3x + 1$ ৰে ভাগ কৰিলে।

(iv) $x^{11} - 5$ ক $x + 1$ ৰে ভাগ কৰিলে।

5. (i) $3x^2 - 2x - 40$ ক $3x + 10$ ৰে হৰণ কৰা।

(ii) $4 + 7x + 7x^2 + 2x^3$ ক $2x + 1$ ৰে হৰণ কৰা।

6. (i) $-14x^2 - 13x + 12$ বহুপদটো $2x + 3$ সম্পূৰ্ণকৈ বিভাজ্য হয়নে?

(ii) $x - 7$ ৰাশিটো $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ বহুপদটোৰ এটা উৎপাদক হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

7. $ax^3 + 3x^2 + 5x - 4$ আৰু $x^3 - 4x - a$ বহুপদ দুটাক $x - 2$ৰে ভাগ কৰাত সমান ভাগশেষ পোৱা গ'ল। a ৰ মান উলিওৱা।

2.5 বহুপদৰ উৎপাক বিশ্লেষণ (Factorisation of Polynomials) ঃ

এতিয়া ওপৰৰ উদাহৰণ 10 ৰ অৱস্থাটো সূক্ষ্মভাৱে পৰ্যবেক্ষণ কৰোঁহক। ইয়াৰ পৰা পাইছোঁ যে যিহেতু ভাগশেষ $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, সেয়ে $(2t + 1)$, $q(t)$ৰ এটা উৎপাদক অৰ্থাৎ $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$, য'ত $g(t)$ এটা বহুপদ। এইটো তলৰ উপপাদ্যটোৰ এটা বিশেষ অৱস্থা।

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) ঃ যদি $p(x)$ এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা $n \geq 1$ আৰু a যিকোনো এটা বাস্তৱ সংখ্যা তেন্তে,

(i) $(x - a)$, $p(x)$ ৰ এটা উৎপাদক, যদিহে $p(a) = 0$, আৰু

(ii) $p(a) = 0$, যদিহে $(x - a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক।

প্ৰমাণ ঃ ভাগশেষ উপপাদ্যৰপৰা পাওঁ—

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$$

(i) যদি $p(a) = 0$ তেন্তে $p(x) = (x - a)q(x)$, যিয়ে প্ৰতিপন্ন কৰে যে $(x - a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক।

(ii) যদি $(x - a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক তেন্তে, $p(x) = (x - a)g(x)$, য'ত $g(x)$ এটা বহুপদ। এইক্ষেত্ৰত $p(a) = (a - a)g(a) = 0$

উদাহৰণ 11 ঃ $x + 2$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ আৰু $2x + 4$ৰ উৎপাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান ঃ $x + 2$ৰ শূন্য -2। ধৰো $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ আৰু $s(x) = 2x + 4$। তেন্তে

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

গতিকে, উৎপাদক উপপাদ্য মতে $x + 2$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ৰ এটা উৎপাদক।

আকৌ, $s(-2) = 2(-2) + 4 = -4 + 4 = 0$

এতেকে, $x + 2$, $2x + 4$ৰ এটা উৎপাদক। বাস্তৱিকতে, উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ নকৰি তোমালোকে এই কথাটো চাব পাৰা; কিয়নো $2x + 4 = 2(x + 2)$।

উদাহৰণ 12 ঃ যদি $x - 1$, $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ৰ এটা উৎপাদক, তেন্তে kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু, $x - 1$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ৰ উৎপাদক সেয়ে, $p(1) = 0$।

এতিয়া, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

গতিকে, $4 + 3 - 4 + k = 0$ অৰ্থাৎ, $k = -3$

এতিয়া আমি 2 আৰু 3 মাত্ৰাবিশিষ্ট কিছুমান বহুপদৰ উৎপাদক নিৰ্ণয়ৰ বাবে উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিম। তোমালোকে ইতিমধ্যে $x^2 + lx + m$ৰ নিচিনা দ্বিঘাত বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণৰ লগত পৰিচিত। তোমালোকে মধ্যম পদ lx ক $ax + bx$ ৰূপত, য'ত $ab = m$, প্ৰকাশ কৰি এই বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিছিলা। তেতিয়া, $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ পোৱাহঁক। এতিয়া আমি $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ আৰু a, b, c ধ্ৰুৱক আকাৰৰ দ্বিঘাত বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিম।

$ax^2 + bx + c$ বহুপদৰ মধ্যম পদক দুটা পদত ভাগ কৰি তলত দিয়া ধৰণেৰে উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিব পাৰি—

ধৰোঁ, উৎপাদক কেইটা $(px + q)$ আৰু $(rx + s)$।

তেতিয়া $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = prx^2 + (ps + qr)x + qs$

এতিয়া, x^2ৰ সহগ তুলনা কৰি পাওঁ, $a = pr$

xৰ সহগ তুলনা কৰি পাওঁ, $b = ps + qr$ আৰু ধ্ৰুৱকপদ তুলনা কৰি পাওঁ, $c = qs$

এই ক্ষেত্ৰত দেখা যায় যে b হ'ল দুটা সংখ্যা ps আৰু qr ৰ সমষ্টি যাৰ পূৰণফল,

$(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$

গতিকে, $ax^2 + bx + c$ ক উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰোঁতে bক এনে দুটা সংখ্যাৰ যোগফলৰ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব লাগে যাতে সিহঁতৰ পূৰণফল ac হয়। এই ধাৰণাটো উদাহৰণ-13ত স্পষ্ট হ'ব—

উদাহৰণ 13 ঃ $6x^2 + 17x + 5$ৰ মধ্যমপদ বিভাজন আৰু উৎপাদক উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান ঃ (1) প্ৰথম সমাধান (মধ্যমপদ বিভাজন কৰি) আমি দুটা সংখ্যা p আৰু q বিচাৰিব পাৰো যাতে $p + q = 17$ আৰু $pq = 6 \times 5 = 30$, আৰু তেতিয়া আমি উৎপাক দুটা পাম। সেয়ে আমি 30ৰ যুৰীয়া উৎপাদকবোৰ চাওঁ আহাঁ। ইহঁতৰ কিছুমান হৈছে 1 আৰু 30, 2 আৰু 15, 3 আৰু 10, 5 আৰু 6। এই যোৰবিলাকৰ ভিতৰত 2 আৰু 15ই আমাক দিয়ে—

$p + q = 2 + 15 = 17$

গতিকে, $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$

$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$

$= (3x + 1)(2x + 5)$

(2) দ্বিতীয় সমাধান (উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\ p(x)$, (ধৰোঁ)

যদি a আৰু b, $p(x)$ৰ শূন্য হয় তেন্তে

$6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)\ (x - b)$। গতিকে $ab = \frac{5}{6}$

এতিয়া a আৰু bৰ কিছুমান সম্ভাৱ্য মান বিবেচনা কৰি পাওঁ— $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$

এতিয়া, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ কিন্তু $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

গতিকে $\left(x + \frac{1}{3}\right)$; $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক। একেদৰে তোমালোকে চেষ্টা কৰি পাবা যে $\left(x + \frac{5}{2}\right)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক।

সেয়ে, $6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$

$= (3x + 1)\ (2x + 5)$

ওপৰৰ উদাহৰণৰ বাবে মধ্যমপদৰ বিভাজন প্ৰক্ৰিয়াৰে উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰাটো অধিক উপযুক্ত যেন বোধ হয়। সি যি কি নহওক, আন এটা উদাহৰণ লোৱা যাওক।

উদাহৰণ 14 ঃ উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $y^2 - 5y + 6$ৰ উৎপাদক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰো, $p(y) = y^2 - 5y + 6$। এতিয়া $p(y) = (y - a)\ (y - b)$ হ'লে, তোমালোকে জানা যে ধ্ৰুৱক পদটো হ'ব ab। গতিকে $ab = 6$। গতিকে $p(y)$ৰ উৎপাদক চোৱা মানে 6ৰ উৎপাদক চাব লাগে। 6ৰ উৎপাদকবোৰ হ'ল 1, 2 আৰু 3

এতিয়া, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

গতিকে, $(y - 2)$, $p(y)$ৰ এটা উৎপাদক

আকৌ, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

গতিকে, $(y - 3)$, $y^2 - 5y + 6$ৰ এটা উৎপাদক

এতেকে, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

মন কৰিবা যে, $y^2 - 5y + 6$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ মধ্যমপদ $-5y$ৰ বিভাজন কৰিও কৰিব পৰা যায়।

এতিয়া আমি ত্ৰিঘাত বহুপদৰ উৎপাক বিশ্লেষণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। ইয়াত মধ্যমপদ বিভাজন নিয়ম প্ৰযোজ্য নহয়। আমি প্ৰথমে অতিকমেও এটা উৎপাদক নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব যিটো তলৰ উদাহৰণত দেখিবলৈ পাবা।

উদাহৰণ 15 ঃ $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান ঃ ধৰোঁ, $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

আমি এতিয়া, -120ৰ সকলো উৎপাদক বিবেচনা কৰিব লাগে। তাৰে কিছুমান, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60$।

পৰীক্ষাৰদ্বাৰা পাওঁ $p(1) = 0$। গতিকে $(x - 1)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক। এতিয়া আমি দেখিছোঁ যে,

$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 \quad = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (কিয়?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x - 1)$ক সাধাৰণ উৎপাদক লৈ]

আমি $p(x)$ক $(x - 1)$ৰে হৰণ কৰিও এইটো ফলেই পাম।

এতিয়া, $x^2 - 22x + 120$ৰ মধ্যমপদ বিভাজন কৰি উৎপাদক নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি বা উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিও পাব পাৰি। মধ্যমপদ বিভাজন কৰি পাওঁ—

$x^2 - 22x + 120 \quad = x^2 - 12x - 10x + 120$

$= x(x - 12) - 10(x - 12)$

$= (x - 12)(x - 10)$

গতিকে, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

অনুশীলনী 2.4

1. তলৰ কোনটো বহুপদৰ এটা উৎপাদক $(x + 1)$ তাক নিৰ্ণয় কৰা।
   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2+ \sqrt{2})x + \sqrt{2}$
2. উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে $g(x)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা ঃ
   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$
   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$
   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$
3. যদি $(x - 1)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক হয়, তেন্তে তলৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ
   (i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$
   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা ঃ

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$ (iii) $6x^2 + 5x - 6$
(iv) $3x^2 - x - 4$ (v) $2x^2 + x - 45$ (vi) $y^2 + 18y + 65$
(vii) $p^2 + 14p + 13$ (viii) $-18 + 11x - x^2$ (ix) $8a^2 - 22ab + 15b^2$

5. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা ঃ

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$
(v) $x^3 + x^2 - x - 1$ (vi) $x^3 + x^2 + x + 1$
(vii) $x^3 + 2x^2 - x - 12$ (viii) $x^3 + 3x^2 - 7x - 6$
(ix) $3x^3 + 5x^2 - 16x - 2$

6. যদি $x^2 + px + q$ আৰু $x^2 + mx + n$ বহুপদ দুটাৰ $x + a$ এটা সাধাৰণ উৎপাদক তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে- $a = \dfrac{n-q}{p-m}$

2.6 বীজীয় অভেদ (Algebraic Identities) ঃ

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত পাই আহিছা যে, এটা বীজীয় অভেদ হ'ল এটা বীজীয় সমীকৰণ যি ইয়াত থকা চলকৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য। তোমালোকে তলৰ বীজীয় অভেদকেইটা পঢ়ি আহিছা—

অভেদ I $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

অভেদ II $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

অভেদ III $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

অভেদ IV $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

তোমালোকে ইতিমধ্যে এই অভেদসমূহৰ কেইটামান ব্যৱহাৰ কৰি কিছুমান বীজীয় ৰাশিৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ নিশ্চয় কৰিছাহঁক। গণনা কৰাৰ বেলিকা ইহঁতৰ প্ৰয়োগৰ দিশটোত তোমালোকে লক্ষ্য কৰিব পাৰা।

উদাহৰণ 16 ঃ উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ পূৰণফলসমূহ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

সমাধান ঃ (i) ইয়াত আমি অভেদ I ঃ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ।

$y = 3$ বহুৱাই পাওঁ—

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

(ii) অভেদ IV অৰ্থাৎ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

উদাহৰণ 17 ঃ পোনে পোনে পূৰণ নকৰাকৈ 105×106ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$, (অভেদ IV ব্যৱহাৰ কৰি)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

কিছুমান প্ৰদত্ত ৰাশিৰ পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰাত ওপৰত উল্লেখিত অভেদৰ কেইটামান প্ৰয়োগ তোমালোকে দেখিলা। এই অভেদসমূহ বীজীয় ৰাশিৰ উৎপাদক বিশ্লেষণতো প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। তলত দিয়া উদাহৰণত এই কথা উপলব্ধি কৰিব পাৰিবা।

উদাহৰণ 18 ঃ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

সমাধান ঃ (i) ইয়াত তোমালোকে দেখিছা যে

$49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$। প্ৰদত্ত ৰাশিটো $x^2 + 2xy + y^2$ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ, $x = 7a$ আৰু $y = 5b$

অভেদ I ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$

(ii) আমি পাওঁ, $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

অভেদ IIIৰ লগত ইয়াক তুলনা কৰি পাওঁ—

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

বৰ্তমানলৈকে আমাৰ সকলো অভেদতে দ্বিপদ ৰাশিৰ পূৰণফলহে পাইছোঁ। এতিয়া আমি অভেদ Iক $x + y + z$ ত্ৰিপদ ৰাশিলৈ প্ৰসাৰিত কৰি চাওঁ। অভেদ-I ব্যৱহাৰ কৰি আমি এতিয়া $(x + y + z)^2$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰিম।

ধৰো $x + y = t$. তেতিয়া,

$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (অভেদ I ব্যৱহাৰ কৰি)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t ৰ মান বহুৱাই)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (অভেদ I ব্যৱহাৰ কৰি)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (পদবোৰ পুনৰ সজাই)

সেয়ে আমি তলৰ অভেদটো পাওঁ—

অভেদ V ঃ $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

মন্তব্য ঃ আমি সোঁহাতৰ ৰাশিটোক বাওঁহাতৰ ৰাশিটোৰ **বিস্তাৰিত ৰূপ** বুলি কওঁ। মন কৰা যে, $(x + y + z)^2$ ৰাশিটোৰ বিস্তাৰিত ৰূপত তিনিটা বৰ্গ পদ আৰু তিনিটা গুণফল পদ আছে।

উদাহৰণ 19 ঃ $(3a + 4b + 5c)^2$ ক বিস্তাৰিত ৰূপত লিখা।

সমাধান ঃ প্ৰত্তদ ৰাশিটো $(x + y + z)^2$ ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ—

$x = 3a,\ y = 4b$ আৰু $z = 5c$

এতিয়া অভেদ-V ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$(3a + 4b + 5c)^2$

$= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$

$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$

উদাহৰণ 20 ঃ $(4a - 2b - 3c)^2$ৰ বিস্তাৰ কৰা।

সমাধান ঃ অভেদ-V ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$(4a - 2b - 3c)^2$

$= [4a + (-2b) + (-3c)]^2$

$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$

$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$

উদাহৰণ 21 ঃ $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ—

$4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ (অভেদ-V ব্যৱহাৰ কৰি)

$= (2x - y + z)^2$

$= (2x - y + z)(2x - y + z)$

এতিয়ালৈকে, আমি দ্বিঘাত পদযুক্ত অভেদৰ বিষয়েহে অধ্যয়ন কৰিছোহঁক। এতিয়া, অভেদ-I ক সম্প্ৰসাৰণ কৰি $(x + y)^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰিম। আমি পাওঁ—

$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$

$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$

$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

গতিকে আমি তলৰ অভেদটো পাওঁ—

অভেদ VI ঃ $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\ (x + y)$

আকৌ অভেদ-VI ত y ক $-y$ ৰে অপসাৰিত কৰিলে পাওঁ

অভেদ VII ঃ $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

উদাহৰণ 22 ঃ তলৰ ঘনসমূহক বিস্তাৰিত আকাৰত লিখা।

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

সমাধান ঃ (i) প্ৰদত্ত ৰাশিক $(x + y)^3$ ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ—

$x = 3a$ আৰু $y = 4b$

গতিকে অভেদ-VI প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$

$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$

(ii) প্ৰদত্ত ৰাশিক $(x - y)^3$ ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ—

$x = 5p,\quad y = 3q$

গতিকে, অভেদ-VII প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$

$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$

উদাহৰণ 23 ঃ উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ প্ৰতিটো ৰাশিৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

সমাধান ঃ (i) আমি পাওঁ—

$(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$ (অভেদ-VI ব্যৱহাৰ কৰি)

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) প্ৰদত্ত ৰাশি,

$(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$ (অভেদ-VII ব্যৱহাৰ কৰি)

$= 1000000000 - 1 - 2997000 = 997002999$

উদাহৰণ 24 ঃ $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত ৰাশিৰ পৰা পাওঁ—

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$ (অভেদ-VI ব্যৱহাৰ কৰি)

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$

এতিয়া, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ৰাশিটো বিবেচনা কৰা হওঁক—
বিস্তাৰ কৰিলে এই পূৰণফলটো হ'ব—

$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - z^2x$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (সৰল কৰি)

গতিকে আমি তলৰ অভেদটো পাওঁ—

অভেদ VIII ঃ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

উদাহৰণ 25 ঃ $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ—

$$8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$$
$$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$$
$$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$
$$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

অনুশীলনী 2.5

1. তলৰ পূৰণফলকেইটা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰা।

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$ (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. প্ৰত্যক্ষভাৱে পূৰণ নকৰি তলৰ পূৰণফলসমূহ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) 103×107 (ii) 95×96

(iii) 104×96

3. উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা ঃ

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰাশিবোৰ বিস্তাৰ কৰা ঃ

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$ (iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2$

5. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা ঃ

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. তলৰ ঘনকেইটা বিস্তাৰিত কৰি লিখা ঃ

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$ (iv) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

7. উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰাশিৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$

(iii) $(998)^3$

8. তলৰ প্ৰতিটোৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা ঃ

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. সত্যাপন কৰা ঃ

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা ঃ

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

(ইংগিত ঃ প্ৰশ্ন 9 চোৱা)

11. $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

12. সত্যাপন কৰা যে

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

13. (i) যদি $x + y + z = 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(ii) যদি $a+b+c = 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc = 0$.

(iii) যদি $2a - b + c = 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $4a^2 - b^2 + c^2 + 4ac = 0$

(iv) যদি $a + b + c = 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + \frac{(a+b)^2}{ab} = 3$

(v) যদি $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $a = b = c$

14. ঘনফল প্ৰকৃতাৰ্থত নিৰ্ণয় নকৰাকৈ তলৰ প্ৰতিটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. তলত কালি দিয়া আয়তবিলাকৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থৰ বাবে সম্ভাব্য ৰাশিবোৰ উলিওৱা।

কালি ঃ $25a^2 - 35a + 12$	কালি ঃ $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. তলত আয়তন দিয়া ঘনকৰ মাত্ৰা তিনিটাৰ বাবে সম্ভাব্য ৰাশিকেইটা কি কি হ'ব?

আয়তন ঃ $3x^2 - 12x$	আয়তন ঃ $12ky^2 + 8ky - 20k$
(i)	(ii)

2.7 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা অধ্যয়ন কৰিলা—

1. একচলকযুক্ত বহুপদ $p(x)$ হ'ল x ৰ এটা বীজীয় ৰাশি যাৰ আকাৰ—
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, য'ত, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ হ'ল ধ্ৰুৱক আৰু $a_n \neq 0$। এই ক্ষেত্ৰত $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ক্ৰমে $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ৰ সহগ আৰু n বহুপদটোৰ মাত্ৰা। $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_0$, য'ত $a_n \neq 0$, প্ৰত্যেককে $p(x)$ বহুপদটোৰ পদ বোলা হয়।

2. এটা পদযুক্ত বহুপদক একপদ বোলে।

3. দুটা পদযুক্ত বহুপদক দ্বিপদ বোলে।

4. তিনিটা পদবিশিষ্ট বহুপদক ত্ৰিপদ বোলে।

5. একমাত্ৰাৰ বহুপদক ৰৈখিক বহুপদ বোলে।

6. দুই মাত্ৰাৰ বহুপদক দ্বিঘাত বহুপদ বোলে।

7. তিনি মাত্ৰাৰ বহুপদক ত্ৰিঘাত বহুপদ বোলে।

8. এটা বাস্তৱ সংখ্যা 'a' ক এটা বহুপদ $p(x)$ৰ শূন্য বোলে যদি $p(a) = 0$। এই ক্ষেত্ৰত a ক $p(x) = 0$ সমীকৰণৰ মূল বোলে।

9. প্ৰত্যেক এক চলকযুক্ত ৰৈখিক বহুপদৰ এটা অদ্বিতীয় শূন্য থাকে, এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক বহুপদৰ কোনো শূন্য নাই আৰু প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যাই শূন্য বহুপদৰ শূন্য।

10. **ভাগশেষ উপপাদ্য ঃ** যদি $p(x)$ এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা এক বা ততোধিক আৰু $p(x)$ক ৰৈখিক বহুপদ $(x - a)$ ৰে হৰণ কৰা হয়, তেন্তে ভাগশেষ হ'ব $p(a)$।

11. **উৎপাদক উপপাদ্য ঃ** $(x - a)$ ৰাশিটো $p(x)$ বহুপদৰ এটা উৎপাদক হ'ব যদি $p(a) = 0$। আকৌ যদি $(x - a)$, $p(x)$ৰ উৎপাদক হয় তেন্তে $p(a) = 0$।

12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

U1P6P9

তৃতীয় অধ্যায়

স্থানাংক জ্যামিতি (Coordinate Geometry)

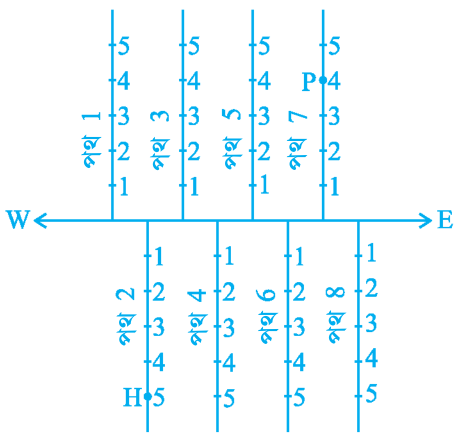
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?' So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROL, *The Hunting of the Snark*

3.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

তোমালোকে সংখ্যাৰেখাত বিন্দু এটাৰ অৱস্থান কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি সেই বিষয়ে ইতিমধ্যে শিকি আহিছা। তদুপৰি তোমালোকে ৰেখাডালত বিন্দু এটাৰ স্থান কেনেকৈ বৰ্ণনা কৰিব পাৰি সেয়াও জানা। এনে বহু ধৰণৰ পৰিৱেশ আছে যি বিলাকত এটা বিন্দু উলিয়াবলৈ তাৰ অৱস্থান এডালতকৈ বেছি ৰেখাৰ সাপেক্ষে বুজাবলগীয়া হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে তলৰ অৱস্থাটোলৈ মন কৰা।

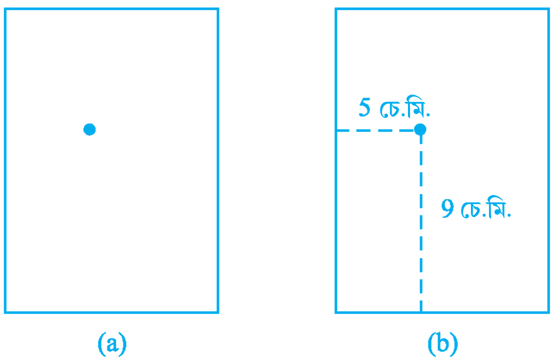
I. চিত্ৰ 3.1 ত মূল পথটো পূব-পশ্চিম দিশত আছে আৰু উপপথবোৰ পশ্চিমৰ পৰা পূবলৈ নম্বৰ অনুসৰি আছে। তদুপৰি প্ৰতিটো উপপথত থকা ঘৰবোৰৰ নম্বৰ দিয়া আছে। ইয়াত এজন বন্ধুৰ ঘৰ উলিয়াবলৈ এটাই মাত্ৰ প্ৰসংগ বিন্দু জানিলেই যথেষ্ট হ'বনে? উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি আমি মাত্ৰ জানো যে তেওঁ 2নং উপপথত থাকে, আমি তেওঁৰ ঘৰ সহজে উলিয়াব পাৰিমনে? ঘৰটোৰ দুটা তথ্য, যেনে— ঘৰটো কোনটো উপপথত আৰু ঘৰৰ নম্বৰ কিমান, এই দুটা নজনাকৈ ইমান সহজে ঘৰটো উলিয়াব পৰা



চিত্ৰ 3.1

নাযাব। যদি আমি 2 নং উপপথৰ 5 নং ঘৰটোলৈ যাব বিচাৰো, তেনেহ'লে প্ৰথমে আমি 2 নং উপপথটো উলিয়াই লৈ সেই পথত থকা 5 নং ঘৰটো উলিয়াব লাগিব। চিত্ৰ 3.1 অত H বিন্দুৱে ঘৰটোৰ অৱস্থান দেখুৱাইছে। সেইদৰে P বিন্দুটোৱে 7 নং উপপথৰ 4 নং ঘৰটো দেখুৱাইছে।

II. ধৰা তুমি এখিলা কাগজৰ এঠাইত এটা ফুট (বিন্দু) দি চিহ্নিত কৰিছা [চিত্ৰ 3.2 (a)]। যদি তোমাক কাগজখিলাত বিন্দুটোৰ অৱস্থান কি সোধা হয় তেন্তে তুমি এইটো কেনেকৈ ক'বা? সম্ভৱতঃ তুমি যিদৰে যত্ন কৰিবা সেয়া হ'ল ঃ 'বিন্দুটো কাগজখিলাৰ ওপৰৰ অৰ্ধত আছে' বা 'বিন্দুটো কাগজখিলাৰ বাওঁ দাঁতিৰ সমীপত আছে' বা বিন্দুটো কাগজখিলাৰ বাঁওফালে ওপৰৰ পিনে থকা চুকটোৰ অতি ওচৰত আছে'। এই উক্তিবিলাকৰ কোনোবাটোৱে বিন্দুটোৰ অৱস্থান সঠিককৈ দিব পাৰিছেনে? দিব পৰা নাই। কিন্তু তুমি যদি কোৱা যে 'বিন্দুটো বাওঁ দাঁতিৰ পৰা প্ৰায় 5 চে.মি. আঁতৰত আছে' তেন্তে ইয়াৰপৰা কিছু আভাস পালেও কিন্তু বিন্দুটোৰ অৱস্থান সম্পূৰ্ণকৈ জনা নেযায়। অলপমান ভাবি চালেই ক'ব পাৰিবা যে বিন্দুটো তলৰ ৰেখাডালৰ পৰাও 9 চে.মি. ওপৰত আছে। এতিয়া আমি বিন্দুটো ক'ত আছে সঠিককৈ ক'ব পাৰিম। এইক্ষেত্ৰত, বিন্দুটোৰ অৱস্থান নিৰ্ধাৰণৰ বাবে দুডাল নিৰ্দিষ্ট ৰেখাৰপৰা ইয়াৰ দূৰত্ব উল্লেখ কৰিব লাগিব। এই ৰেখা দুডালৰ এডাল হ'ল কাগজখিলাৰ বাওঁ দাঁতিটো আৰু আনডাল কাগজখিলাৰ নিম্ন ৰেখাডাল [চিত্ৰ 3.2 (b)] এই কথাখিনি অন্য ধৰণেৰে ক'বলৈ হ'লে বিন্দুটোৰ অৱস্থান জানিবলৈ আমাক দুটা স্বতন্ত্ৰ তথ্যৰ প্ৰয়োজন হয়।



চিত্ৰ 3.1

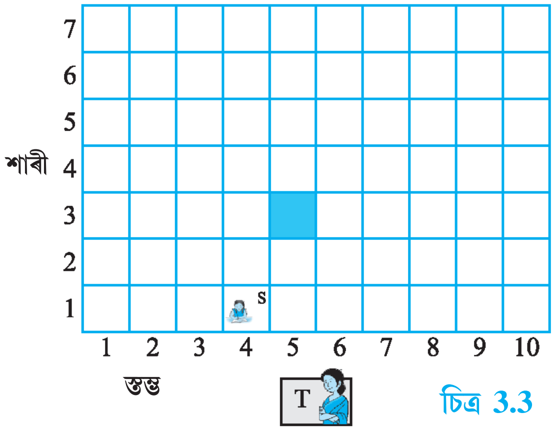
'আসনৰ নক্সা' (Seating plan) নামেৰে জনাজাত কাৰ্যটো শ্ৰেণীকোঠাত কৰি চোৱা।

প্ৰথম কাৰ্য (Activity-1) 'আসনৰ নক্সা' ঃ তোমালোকৰ শ্ৰেণীকোঠাৰ সকলো ডেস্ক একেলগে থৈ বহা স্থানৰ এটা নক্সা আঁকিব লাগে। প্ৰতিখন ডেস্কক এটা বৰ্গৰে সূচিত কৰা। এতিয়া নিৰ্দিষ্ট ডেস্ক এখনত যিজন শিক্ষাৰ্থী বহে তেওঁৰ নামটো সেই ডেস্কক প্ৰতিনিধিত্ব কৰা বৰ্গটোত লিখা। শ্ৰেণী কোঠাত প্ৰতিজন শিক্ষাৰ্থীৰ স্থান দুটা স্বতন্ত্ৰ তথ্যৰ সহায়ত যথোচিত ৰূপে বৰ্ণনা কৰিব পাৰি ঃ

(i) শিক্ষাৰ্থীজন কোনটো স্তম্ভত বহে,

(ii) তেওঁ কোনটো শাৰীত বহে।

যদি তুমি পঞ্চম স্তম্ভ আৰু তৃতীয় শাৰীত থকা ডেস্কত বহি আছা (চিত্ৰ 3.3 ৰ ৰং দিয়া বৰ্গটো) তেন্তে তোমাৰ স্থানটো (5,3) ৰে বুজাব পাৰি। ইয়াৰে প্ৰথম সংখ্যাটোৱে স্তম্ভৰ সংখ্যা আৰু দ্বিতীয়টোৱে শাৰীৰ সংখ্যা বুজাইছে। এই স্থানটো (3,5) ৰ সৈতে একে নে? এই পদ্ধতিৰে শ্ৰেণীটোৰ অন্য শিক্ষাৰ্থীবিলাকৰ নাম আৰু স্থানসমূহ লিখা। উদাহৰণ হিচাপে, যদি সীতা চতুৰ্থ স্তম্ভ আৰু প্ৰথম শাৰীত বহি আছে তেনেহ'লে S(4,1) বুলি লিখা। শিক্ষকজনৰ স্থান তোমাৰ 'আসনৰ নক্সা'ৰ অংশ নহয়। আমি শিক্ষকগৰাকীক মাত্ৰ পৰ্যবেক্ষক হিচাপেহে ধৰিছোঁ।



চিত্ৰ 3.3

ওপৰৰ আলোচনাত লক্ষ্য কৰিছা যে এখন সমতলত থকা যিকোনো এটা বাস্তৱ অৱস্থান দুডাল পৰস্পৰ লম্বৰেখাৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। ওপৰৰ 'বিন্দু' বা 'ফুট'টোৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ ৰেখাডালৰপৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব আৰু বাওঁ দাঁতিৰপৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব আমাক লাগিব। 'আসনৰ নক্সা'ৰ ক্ষেত্ৰত স্তম্ভৰ সংখ্যা আৰু শাৰীৰ সংখ্যা আমাৰ বাবে প্ৰয়োজনীয়। এই সৰল ধাৰণাটোৰ সুদূৰপ্ৰসাৰী প্ৰভাৱ আছে আৰু এই ধাৰণাই 'স্থানাংক জ্যামিতি' নামৰ গণিতৰ এটা গুৰুত্বপূৰ্ণ শাখাৰ সৃষ্টি কৰিলে। এই অধ্যায়ত স্থানাংক জ্যামিতিৰ কিছুমান প্ৰাথমিক ধাৰণা পৰিচিত কৰোৱাই আমাৰ লক্ষ্য। এই শাখাৰ বিষয়ে ওপৰ শ্ৰেণীত বেছিকৈ পঢ়িবলৈ পাবা। এই শাখাটোৰ পোনতে বিকাশ ঘটাইছিল ৰেণে ডেকাৰ্টে নামৰ ফৰাচী দাৰ্শনিক আৰু গণিতজ্ঞ এজনে।

সোতৰ শতিকাৰ মহান ফৰাচী গণিতজ্ঞ ৰেনে ডেকাৰ্টে বিছনাত বাগৰি থাকি ভাবিবলৈ ভাল পাইছিল। এদিন তেওঁ বিছনাত বাগৰ দি জিৰণি লৈ থাকোতে এখন সমতলত এটা বিন্দুৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰাৰ সমস্যাটোৰ সমাধান উলিয়াব পাৰিছিল। তেওঁৰ পদ্ধতিটো আছিল অক্ষাংশ আৰু দ্ৰাঘিমাংশৰ পুৰণি ধাৰণাটোৰ বিকশিত ৰূপ। ডেকাৰ্টেৰ সন্মানত সমতলত বিন্দুৰ স্থান নিৰ্ণয়ৰ পদ্ধতিটো কাৰ্টীয় বা কাৰ্টেছীয় পদ্ধতি (Cartesian System) বুলিও জনা যায়।

ৰেনে ডেকাৰ্টে (1596-1650)
চিত্ৰ 3.4

অনুশীলনী 3.1

1. তোমাৰ পঢ়া মেজৰ ওপৰত থকা চাকিটোৰ অৱস্থান আন এজনক কেনেকৈ বৰ্ণনা কৰিবা?

2. **(পথৰ নক্সা)** ঃ এখন মহানগৰৰ দুটা প্ৰধান পথ আছে যি দুটা মহানগৰখনৰ কেন্দ্ৰস্থলত এটাৰ ওপৰেৰে আনটো পাৰ হৈ গৈছে। ৰাস্তা দুটাৰ এটা উত্তৰ-দক্ষিণ দিশত আৰু আনটো পূব-পশ্চিম দিশত আছে। মহানগৰখনৰ আন পথবোৰ এই ৰাস্তা দুটাৰ সমান্তৰালকৈ আছে আৰু এটাৰপৰা আনটোৰ দূৰত্ব 200 মিটাৰ। প্ৰতিটো দিশত 5 টাকৈ পথ আছে। এতিয়া 1 চে.মি.=200 মিটাৰ বুলি ধৰি তোমাৰ বহীত মহানগৰখনৰ এটা মডেল (চানেকি) অংকন কৰা। প্ৰধান পথ আৰু আন পথবোৰ একোডাল সৰলৰেখাৰে দেখুৱাবা।

তোমাৰ মডেলটোত চাৰিআলি বহুতো থাকিব। এটা নিৰ্দিষ্ট চাৰিআলি— এটা উত্তৰ-দক্ষিণ দিশে আৰু আনটো পূব-পশ্চিম দিশে যোৱা দুটা পথে সৃষ্টি কৰিছে। প্ৰতিটো চাৰিআলি তলত দিয়া ধৰণেৰে বুজোৱা হ'ব ঃ যদি উত্তৰ-দক্ষিণমুৱাকৈ থকা 2 নং পথটো আৰু পূব-পশ্চিমমুৱাকৈ থকা 5 নং পথটো কোনো ঠাইত পৰস্পৰক ছেদ কৰে তেনেহ'লে এই চাৰিআলিটোক (2,5) ৰে বুজোৱা হ'ব। এই প্ৰথা অনুসৰণ কৰি তলত দিয়াকেইটা উলিওৱা ঃ

(i) কিমানটা চাৰিআলি (4,3) বুলি বুজোৱা হ'ব?

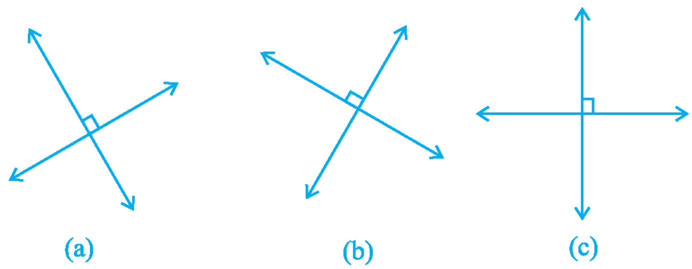
(ii) কিমানটা চাৰিআলি (3,4) বুলি বুজোৱা হ'ব?

3.2 কাৰ্টীয় বা কাৰ্টেছীয় পদ্ধতি (Certesian System) ঃ

সংখ্যা প্ৰণালী সম্পৰ্কীয় অধ্যায়ত তোমালোকে সংখ্যাৰেখাৰ বিষয়ে পঢ়িছা। সংখ্যাৰেখাত এটা স্থিৰ বিন্দুৰপৰা সমান এককত ভাগ কৰা দূৰত্বক এটা দিশত ধনাত্মক আৰু আনটো দিশত ঋণাত্মক হিচাপে চিহ্নিত কৰা হয়। যিটো বিন্দুৰপৰা দূৰত্ববিলাক চিহ্নিত কৰা হয় সেই বিন্দুটোক মূলবিন্দু (Origin) বুলি কোৱা হয়। এডাল সৰলৰেখাত সমান দূৰত্বত থকা বিন্দুবিলাকেৰে সংখ্যা নিৰ্দেশ কৰিবলৈ সংখ্যাৰেখা ব্যৱহাৰ কৰা হয়। 'O' বিন্দুটো মূলবিন্দু হ'লে যদি এক একক দূৰত্বই 1 সংখ্যাটো বুজায়, তেন্তে তিনি একক দূৰত্বই 3 সংখ্যাটো বুজাব। মূলবিন্দুৰপৰা ধনাত্মক দিশে r একক দূৰত্বত থকা বিন্দুটোৱে r সংখ্যাটো বুজায়। মূলবিন্দুৰপৰা ঋণাত্মক দিশে r একক দূৰত্বত থকা বিন্দুটোৱে '$-r$' সংখ্যাটো নিৰ্দেশ কৰে। সংখ্যাৰেখাত থকা বিভিন্ন সংখ্যাৰ অৱস্থান চিত্ৰ 3.5 ৰ সহায়ত দেখুওৱা হৈছে।

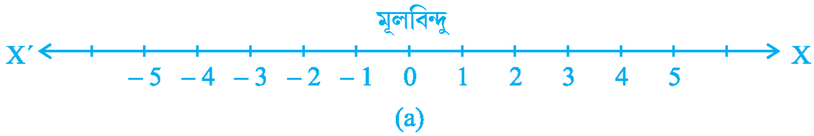
চিত্ৰ 3.5

সমতলত পৰস্পৰ লম্বভাৱে এনেধৰণৰ দুডাল ৰেখা সংস্থাপন কৰি সেই দুডালৰ সাপেক্ষে সমতলৰ বিন্দুবোৰৰ অৱস্থান বুজোৱাৰ ধাৰণাটো ডেকাৰ্টে আৱিস্কাৰ কৰিছিল। চিত্ৰ 3.6 ত দিয়াৰ দৰে এই লম্বৰেখা দুডাল যিকোনো দিশে ল'ব পাৰি। কিন্তু এই অধ্যায়ত সমতলত এটা বিন্দুৰ অৱস্থান নিৰ্ণয়ৰ বাবে যেতিয়া এই ৰেখাদুডাল লোৱা হ'ব তেতিয়া চিত্ৰ 3.6(c)ত দিয়াৰ দৰে অনুভূমিকভাৱে আৰু আনডাল উলম্বভাৱে লোৱা হ'ব।

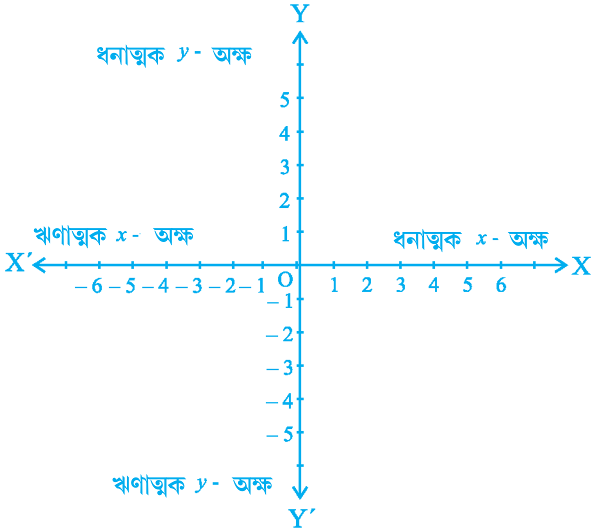


চিত্ৰ 3.6

এই ৰেখা দুডাল প্ৰকৃততে তলত দিয়াৰ দৰে পোৱা যায় — দুডাল সংখ্যাৰেখা লোৱা আৰু ইহঁতক $X'X$ আৰু $Y'Y$ বুলি নাম দিয়া। চিত্ৰ 3.7(a)ত দেখুওৱাৰ দৰে $X'X$ক অনুভূমিকভাৱে লোৱা আৰু সংখ্যাৰেখাত লিখাৰ দৰে ইয়াত সংখ্যাবোৰ লিখা। একেদৰেই $Y'Y$ ও লোৱা হয়, মাত্ৰ ইয়াত $Y'Y$ ক অনুভূমিকভাৱে নাৰাখি উলম্বভাৱে ৰখা হয় [চিত্ৰ 3.7(b)]।

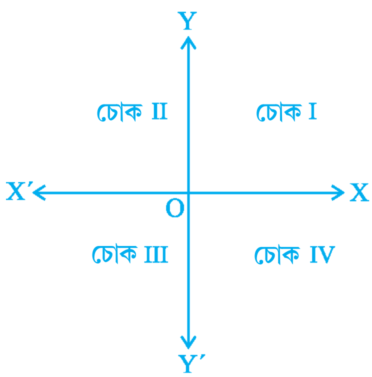


চিত্ৰ 3.7



চিত্ৰ 3.8

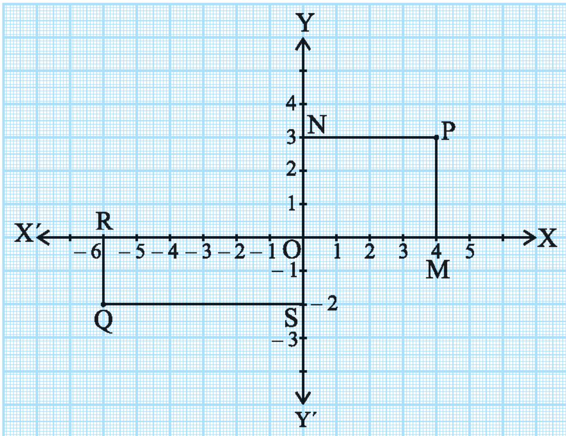
এতিয়া ৰেখা দুডাল এনেদৰে একেলগ কৰা যাতে এডাল আনডালৰ শূন্য বা মূলবিন্দুৰে পাৰ হৈ যায় (চিত্ৰ 3.8)। অনুভূমিকভাৱে থকা $X'X$ ক x-অক্ষ আৰু উলম্বভাৱে থকা $Y'Y$ক y-অক্ষ বুলি কোৱা হয়। $X'X$ আৰু $Y'Y$ যি বিন্দুত মিলিত হয় সেই বিন্দুটোক মূলবিন্দু (Origin) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক O ৰে বুজোৱা হয়। যিহেতু ধনাত্মক সংখ্যাবোৰ OX আৰু OY ৰ দিশত থাকে গতিকে OX আৰু OY ক ক্ৰমে x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশ বোলা হয়। সেইদৰে OX' আৰু OY' ক ক্ৰমে x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ ঋণাত্মক দিশ বোলা হয়।



চিত্ৰ 3.9

তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছা যে অক্ষ কেইডালে সমতলখনক চাৰিটা ভাগত বিভক্ত কৰিছে। এই ভাগবিলাকৰ প্ৰতিটোকে পাদ বা চোক বোলে। (ইংৰাজীত Quadrant বোলে যাৰ অৰ্থ চাৰি ভাগৰ এভাগ)। OX ৰ পৰা ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত চোকবোৰক I, II, III, IV সংখ্যাৰে সূচিত কৰা হয় (চিত্ৰ 3.9 চোৱা)। গতিকে অক্ষকেইডাল আৰু চোককেইটাৰে সমতলখনক কাৰ্টীয় সমতল, বা স্থানাংক সমতল বা xy-সমতল বুলি কওঁ। অক্ষ দুডালক স্থানাংক অক্ষ বোলা হয়।

এতিয়া আমি গণিত বিষয়টোত এই প্ৰণালী কিয় এটি বুনিয়াদী ধাৰণা আৰু প্ৰয়োজনীয় সেইটো মন কৰিম। লেখ কাগজত অক্ষ কেইডাল আঁকি দেখুওৱা তলৰ চিনটোলৈ চোৱা। অক্ষ কেইডালৰপৰা P আৰু Q ৰ দূৰত্ব কিমান হ'ব চোৱা যাওঁক। ইয়াৰ বাবে, x-অক্ষৰ ওপৰত PM আৰু y-অক্ষৰ ওপৰত PN লম্ব টনা হ'ল। একেদৰে, চিত্ৰ 3.10 ত দিয়াৰ দৰে QR আৰু QS লম্ব টনা হ'ল।



চিত্ৰ 3.10

তোমালোকে পাবা যে

(i) y-অক্ষৰপৰা P বিন্দুৰ x-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশে লোৱা লম্ব দূৰত্ব হ'ল

PN = OM = 4 একক

(ii) x-অক্ষৰপৰা P বিন্দুৰ y-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশে লোৱা লম্ব দূৰত্ব হ'ল

PM = ON = 3 একক

(iii) y-অক্ষৰপৰা Q বিন্দুৰ x-অক্ষৰ ঋণাত্মক দিশে লোৱা লম্ব দূৰত্ব হ'ল

OR = SQ = 6 একক

(iv) x-অক্ষৰপৰা Q বিন্দুৰ y-অক্ষৰ ঋণাত্মক দিশে লোৱা লম্ব দূৰত্ব হ'ল

OS = RQ = 2 একক

এতিয়া এই দূৰত্বসমূহৰ সহায়ত বিভ্ৰান্তি নোহোৱাকৈ বিন্দুকেইটা কেনেকৈ বৰ্ণনা কৰিবা? তলত উল্লেখ কৰা প্ৰথা অনুসৰি আমি এটা বিন্দুৰ স্থানাংক এইদৰে লিখো—

(i) এটা বিন্দুৰ x-স্থানাংক হ'ল x-অক্ষৰ দিশে জোখা y-অক্ষৰপৰা বিন্দুটোৰ লম্ব দূৰত্ব (x-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশত হ'লে ধনাত্মক আৰু x-অক্ষৰ ঋণাত্মক দিশত হ'লে ঋণাত্মক)। P বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰত এইটো হ'ল +4 আৰু Q ৰ ক্ষেত্ৰত হ'ল –6। x-স্থানাংকক ভুজ (abscissa) বুলিও কোৱা হয়।

(ii) এটা বিন্দুৰ y-স্থানাংক হ'ল y-অক্ষৰ দিশে জোখা x-অক্ষৰপৰা বিন্দুটোৰ লম্ব দূৰত্ব (y-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশত হ'লে ধনাত্মক আৰু y-অক্ষৰ ঋণাত্মক দিশত হ'লে ঋণাত্মক)। P-বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰত এইটো হ'ল +3 আৰু Q ৰ ক্ষেত্ৰত হ'ল –2। y-স্থানংকক কোটি (ordinate) বুলিও কোৱা হয়।

(iii) স্থানাংক তলত এটা বিন্দুৰ স্থানাংক লিখোতে x-স্থানাংক প্ৰথমে আৰু তাৰ পিচত y-

স্থানাংক লিখা হয়। স্থানাংক দুটা বন্ধনীৰ ভিতৰত লিখা হয়। সেইবাবে P ৰ স্থানাংক (4,3) আৰু Q ৰ স্থানাংক (–6,–2)।

মন কৰিবা যে এটা বিন্দুৰ স্থানাংকই বিন্দুটোক স্থানাংক তলত অদ্বিতীয় ৰূপে সূচিত কৰে। গতিকে (4,3) আৰু (3,4) একে নহয়।

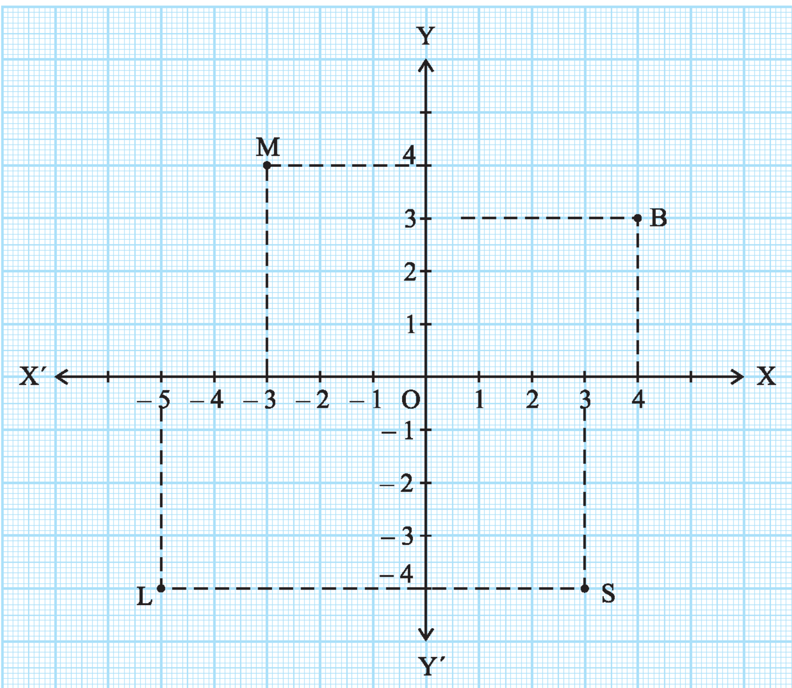
উদাহৰণ 1 ঃ চিত্ৰ 3.11 চোৱা আৰু তলৰ উক্তিবোৰ সম্পূৰ্ণ কৰা ঃ

(i) B বিন্দুটোৰ ভুজ আৰু কোটি ক্ৰমে ______ আৰু ______ ।

(ii) M বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক আৰু y-স্থানাংক ক্ৰমে ______ আৰু ______। সেয়ে M-বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ল (______,______)।

(iii) L বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক আৰু y-স্থানাংক ক্ৰমে ______ আৰু ______। সেয়ে L-বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ল (______,______)।

(iv) S বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক আৰু y-স্থানাংক ক্ৰমে ______ আৰু ______। সেয়ে S-ৰ স্থানাংক হ'ল (______,______)।



চিত্ৰ 3.11

সমাধান ঃ (i) যিহেতু y-অক্ষৰপৰা B বিন্দুটোৰ দূৰত্ব 4 একক, গতিকে B বিন্দুৰ x-স্থানাংক বা ভুজ 4 । x-অক্ষৰপৰা B বিন্দুটোৰ দূৰত্ব 3 একক, সেইবাবে B বিন্দুৰ y-স্থানাংক অৰ্থাৎ কোটি

3। গতিকে B বিন্দুটোৰ স্থানাংক (4,3)।

(ii) ওপৰৰ (i) ত পোৱাৰ দৰেই M বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক আৰু y-স্থানাংক ক্ৰমে –3 আৰু 4। গতিকে M বিন্দুৰ স্থানাংক (–3,4)।

(iii) L বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক আৰু y-স্থানাংক ক্ৰমে –5 আৰু –4। গতিকে L বিন্দুৰ স্থানাংক (–5,–4)।

(iv) S বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক আৰু y-স্থানাংক ক্ৰমে 3 আৰু –4। গতিকে S বিন্দুৰ স্থানাংক (3,–4)।

উদাহৰণ 2 ঃ চিত্ৰ 3.12 ৰ অক্ষকেইডালত চিহ্নত কৰা বিন্দুকেইটাৰ স্থানাংক লিখা।

সমাধান ঃ তোমালোকে দেখা পাইছা যে

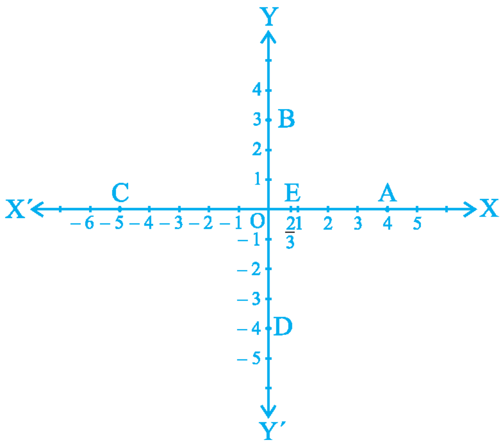
(i) A বিন্দুটো y-অক্ষৰপৰা 4 একক দূৰত্বত আছে আৰু x-অক্ষৰপৰা শূন্য দূৰত্বত আছে।
গতিকে A বিন্দুৰ x-স্থানাংক 4 আৰু y-স্থানাংক 0। গতিকে A বিন্দুৰ স্থানাংক (4,0)।

(ii) B বিন্দুৰ স্থানাংক (0,3)। কিয়?

(iii) C বিন্দুৰ স্থানাংক (–5,0)। কিয়?

(iv) D বিন্দুৰ স্থানাংক (0,–4)। কিয়?

(v) E বিন্দুৰ স্থানাংক $(\frac{2}{3},0)$। কিয়?



চিত্ৰ 3.12

যিহেতু x-অক্ষৰ ওপৰত থকা সকলো বিন্দুৰেই x-অক্ষৰ পৰা দূৰত্ব নাই (অৰ্থাৎ শূন্য দূৰত্বত থাকে), গতিকে x-অক্ষৰ ওপৰত থকা সকলো বিন্দুৰেই y-স্থানাংক সদায় শূন্য। সেয়ে, x-অক্ষৰ ওপৰত থকা কোনো বিন্দুৰ স্থানাংক $(x,0)$ ধৰণৰ হয় য'ত x হ'ল y-অক্ষৰপৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব। একেদৰে, y-অক্ষৰ ওপৰত থকা কোনো বিন্দুৰ স্থানাংক $(0,y)$ আৰ্হিৰ হয় য'ত y হ'ল x-অক্ষৰ পৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব। কিয়?

মূলবিন্দু 'O' ৰ স্থানাংক কি? দুয়োডাল অক্ষৰ পৰাই ইয়াৰ দূৰত্ব শূন্য, গতিকে ইয়াৰ ভুজ আৰু কোটি দুয়োটাই শূন্য। সেই কাৰণে মূলবিন্দুৰ স্থানাংক (0,0)।

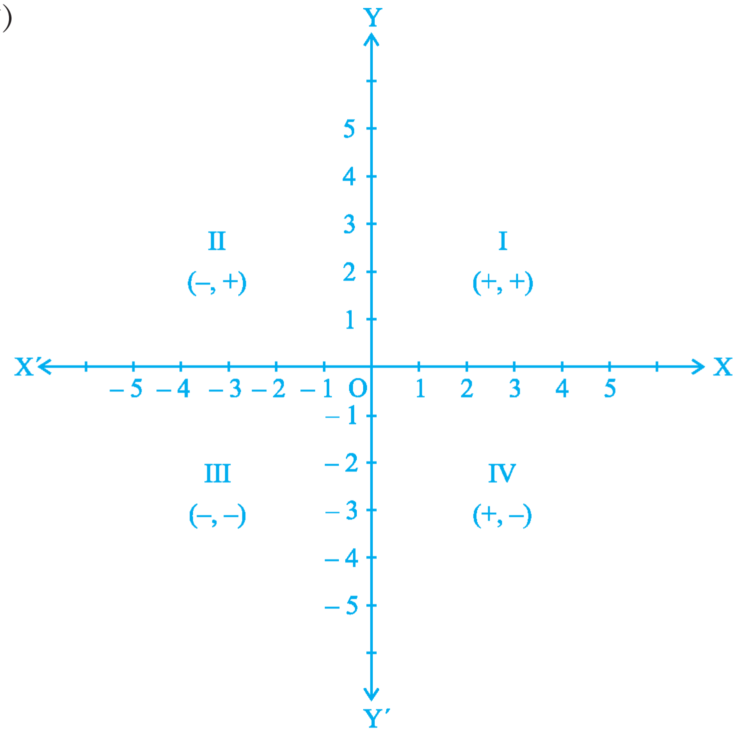
ওপৰৰ উদাহৰণবিলাকৰপৰা তোমালোকে এটা বিন্দুৰ স্থানাংক দুটাৰ চিন আৰু বিন্দুটো থকা চোকটোৰ মাজত থকা তলত উল্লেখ কৰা সম্পৰ্কবিলাক নিশ্চয় মন কৰিছা।

(i) যদি এটা বিন্দু প্ৰথম চোকত থাকে তেনেহ'লে বিন্দুটোৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ব (+,+)। কাৰণ প্ৰথম চোকটো ধনাত্মক x-অক্ষ আৰু ধনাত্মক y-অক্ষই আৱৰি আছে।

(ii) যদি এটা বিন্দু দ্বিতীয় চোকত থাকে তেনেহ'লে বিন্দুটোৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ব (–, +)। কাৰণ দ্বিতীয় চোকটো ঋণাত্মক x-অক্ষ আৰু ধনাত্মক y-অক্ষই আৱৰি আছে।

(iii) যদি এটা বিন্দু তৃতীয় চোকত থাকে তেনেহ’লে বিন্দুটোৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ’ব (–,–)। কাৰণ তৃতীয় চোকটো ঋণাত্মক x-অক্ষ আৰু ঋণাত্মক y-অক্ষই আৱৰি আছে।

(iv) যদি এটা বিন্দু চতুৰ্থ চোকত থাকে তেনেহ’লে বিন্দুটোৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ’ব (+,–)। কাৰণ চতুৰ্থ চোকটো ধনাত্মক x-অক্ষ আৰু ঋণাত্মক y-অক্ষই আৱৰি আছে। (চিত্ৰ 3.13 চোৱা)



চিত্ৰ 3.13

মন্তব্য ঃ এখন সমতলৰ বিন্দু এটাৰ বিৱৰণ দিবৰ কাৰণে ওপৰত আলোচনা কৰা পদ্ধতিটো এটা মাথোন প্ৰচলিত প্ৰথা যিটো গোটেই বিশ্ব ব্যাপি গ্ৰহণ কৰা হৈছে। পদ্ধতিটো অন্য ধৰণেৰেও, যেনে— প্ৰথমে কোটি আৰু দ্বিতীয়টো ভুজ লৈ হ’ব পাৰে। সেয়ে হ’লেও বিষয়টো বিভ্ৰান্তিকৰ নহ’বৰ কাৰণে গোটেই পৃথিৱীয়ে ওপৰত বৰ্ণনা কৰা পদ্ধতিটোহে গ্ৰহণ কৰিছে।

অনুশীলনী 3.2

1. তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া—

(i) কাৰ্টীয় সমতলত থকা বিন্দু এটাৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰিবলৈ অনুভূমিক আৰু উলম্বভাৱে অংকন কৰা ৰেখা দুডালৰ নাম কি?

(ii) এই ৰেখা দুডালে সমতলখনত সৃষ্টি কৰা প্ৰতিটো অংশৰ নাম কি?

(iii) এই ৰেখা দুডালে পৰস্পৰক যিটো বিন্দুত ছেদ কৰে সেই বিন্দুটোৰ নাম লিখা।

2. চিত্ৰ 3.14 চোৱা আৰু তলত দিয়াকেইটা লিখা—

(i) B বিন্দুৰ স্থানাংক

(ii) C বিন্দুৰ স্থানাংক

(iii) (–3,–5) স্থানাংকৰে চিনাক্ত কৰিব পৰা বিন্দুটো

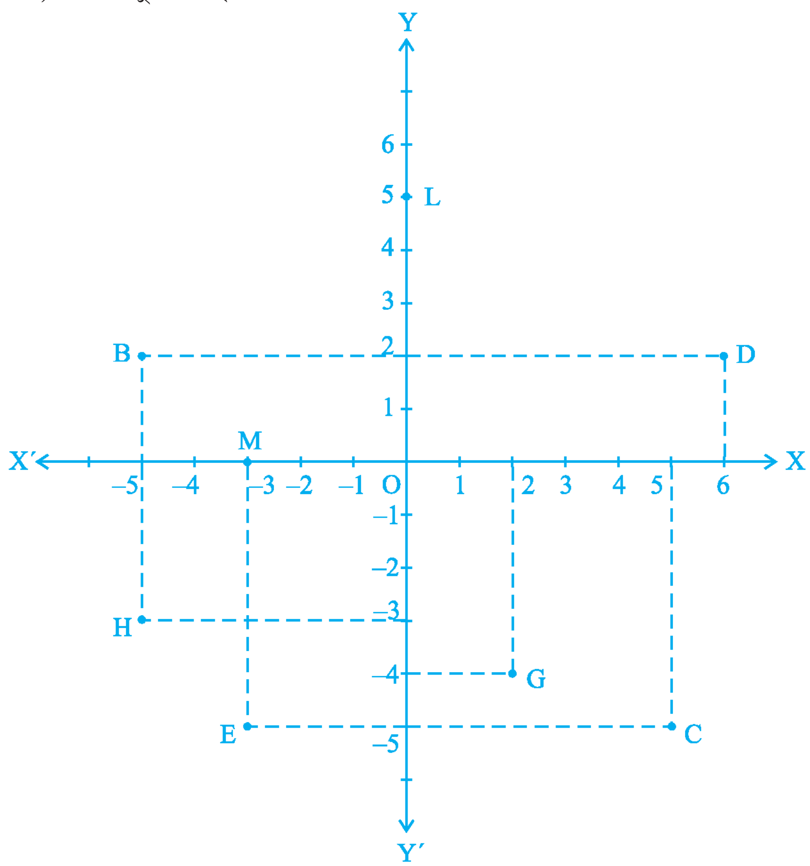
(iv) (2,–4) স্থানাংকৰে চিনাক্ত কৰিব পৰা বিন্দুটো

(v) D বিন্দুটোৰ ভুজ

(vi) H বিন্দুটোৰ কোটি

(vii) L বিন্দুটোৰ স্থানাংক

(viii) M বিন্দুটোৰ স্থানাংক

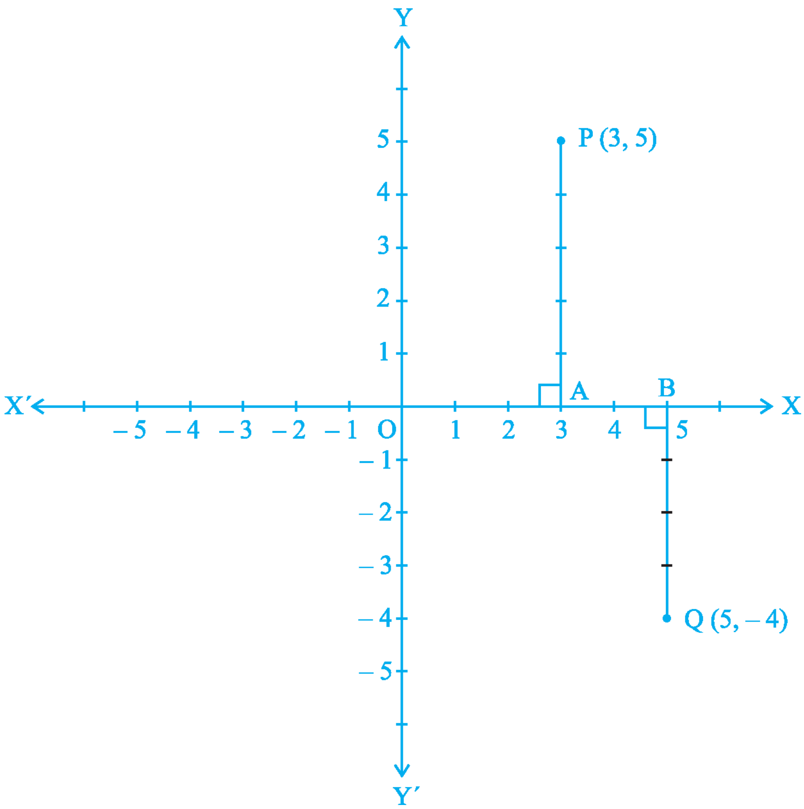


চিত্ৰ 3.14

3.3 স্থানাংক উল্লেখ থকা বিন্দু এটা সমতলত সংস্থাপন (Plotting a Point in the Plane if its Coordinates are Given) ঃ

আমি এতিয়ালৈকে তোমালোকৰ বাবে কিছুমান বিন্দুৰ স্থান অংকন কৰি সেইবিলাকৰ স্থানাংক কি হ'ব তোমালোকক উলিয়াবলৈ দিছো। এতিয়া আমি যিবিলাক বিন্দুৰ স্থানাংক জানো, সেইবিলাক সমতলত কেনেকৈ স্থাপন কৰিব লাগে তাকে তোমালোকক দেখুৱাম। এই পদ্ধতিটোকে আমি 'বিন্দুৰ সংস্থাপন' বুলি কওঁ।

ধৰা, এটা বিন্দুৰ স্থানাংক(3,5)। এই বিন্দুটো আমি স্থানাংক সমতলত সংস্থাপন কৰিব বিচাৰিছোঁ। আমি অক্ষ দুডাল আঁকিলো আৰু দুয়োডাল অক্ষৰ বাবে এক চেণ্টিমিটাৰক এক একক হিচাপে লৈ আমাৰ একক নিৰ্ধাৰণ কৰিলো। বিন্দুটোৰ স্থানাংক (3,5) এ বুজায় যে ধনাত্মক x-অক্ষৰ দিশত y-অক্ষৰপৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব 3 একক আৰু ধনাত্মক y-অক্ষৰ দিশত x-অক্ষৰপৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব 5 একক। মূলবিন্দু O ৰ পৰা আৰম্ভ কৰি ধনাত্মক x-অক্ষত 3 একক হিচাপ কৰি সেই স্থানক A বুলি চিহ্নিত কৰিছোঁ। এতিয়া, A ৰপৰা আৰম্ভ কৰি y-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশে গৈ 5 একক হিচাপ

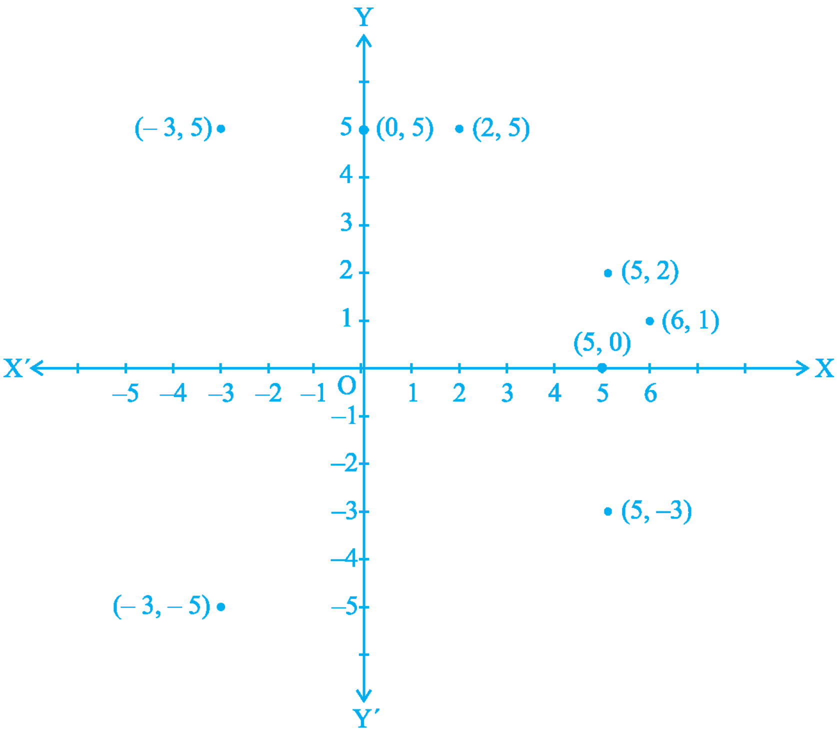


চিত্ৰ 3.15

কৰি সেই স্থানক P বিন্দুৰে চিহ্নিত কৰিছোঁ (চিত্ৰ 3.15 চোৱা)। তোমালোকে দেখিছা যে P বিন্দুৰ দূৰত্ব y-অক্ষৰপৰা 3 একক আৰু x-অক্ষৰপৰা 5 একক। গতিকে P য়েই হ'ল বিন্দুটোৰ স্থান। মন কৰা যে P বিন্দুটো প্ৰথম চোকত আছে, কাৰণ P ৰ দুয়োটা স্থানাংকই ধনাত্মক। একেদৰে তোমালোকে Q(5,–4) বিন্দুটো সমতলত সংস্থাপন কৰিব পাৰিবা। x-অক্ষৰপৰা Q বিন্দুটোৰ দূৰত্ব ঋণাত্মক y-অক্ষৰ দিশত 4 একক, সেয়ে ইয়াৰ স্থানাংক হ'ল –4। (চিত্ৰ 3.15 চোৱা) Q বিন্দুটো চতুৰ্থ চোকত আছে। কিয়?

উদাহৰণ 3 ঃ কাৰ্টীয় সমতলত (5,0), (0,5), (2,5), (5,2), (-3,5), (-3,-5), (5,-3) আৰু (6,1) বিন্দুকেইটাৰ অৱস্থান দেখুওৱা।

সমাধান ঃ 1 চে.মি = 1 একক ধৰি x-অক্ষ আৰু y-অক্ষ অংকন কৰা হ'ল। চিত্ৰ 3.16 অত বিন্দুবিলাকৰ অৱস্থান একোটাকৈ ফুট (dot) বা দাগৰ সহায়ত দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 3.16

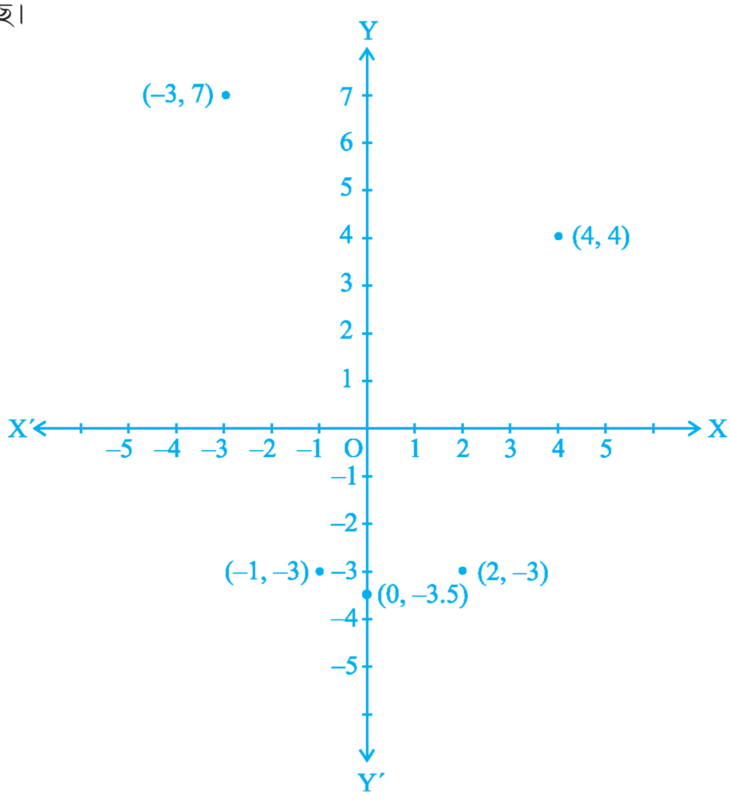
টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণৰপৰা তোমালোকে দেখিছা যে (5,0) আৰু (0,5) ৰ অৱস্থান একে নহয়। সেইদৰে (5,2) আৰু (2,5) ৰ অৱস্থান বেলেগ। তদুপৰি (–3,5) আৰু (5,–3) বেলেগ স্থানত আছে। এনেধৰণৰ বহুতো উদাহৰণৰ সহায়ত জানিব পাৰিবা যে যদি $x \neq y$, তেনেহ'লে কাৰ্টীয় সমতলত (x,y) ৰ স্থান (y,x) ৰ স্থানৰ সৈতে একে নহয়। সেয়েহে যদি x আৰু y-স্থানাংক

পৰস্পৰ সালসলনি কৰা হয়, তেন্তে (y,x) ৰ স্থান আৰু (x,y) ৰ স্থান বেলেগ বেলেগ হ'ব। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল, (x,y)ত x আৰু y ৰ ক্ৰম (order) গুৰুত্বপূৰ্ণ। সেইবাবে (x,y) ক ক্ৰমিক যুগল বুলি কোৱা হয়। ক্ৰমিক যুগল $(x,y) \neq$ ক্ৰমিক যুগল (y,x), যদিহে $x \neq y$। তদুপৰি $(x,y) = (y,x)$ হ'ব যদিহে $x = y$ হয়।

উদাহৰণ 4 ঃ তলত দিয়া সংখ্যাৰ ক্ৰমিক যুগল (x,y)ক কাৰ্টীয় সমতলত বিন্দু হিচাপে সংস্থাপিত কৰা। অক্ষ দুডালত 1 চে.মি. = 1 একক স্কেল ব্যৱহাৰ কৰা।

x	–3	0	–1	4	2
y	7	–3.5	–3	4	–3

সমাধান ঃ তালিকাত দিয়া সংখ্যাৰ যোৰবিলাক (–3, 7), (0, –3.5), (–1, –3), (4, 4) আৰু (2, –3) এই বিন্দুকেইটাৰে বুজাব পাৰি। এই বিন্দুকেইটাৰ অৱস্থান চিত্ৰ 3.17ত ফুট চিহ্নৰে দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 3.17

দ্বিতীয় কাৰ্য (Activity-2) ঃ *দুজন ব্যক্তিৰ মাজৰ খেল* ঃ লাগতিয়াল সামগ্ৰী— দুটা কাউণ্টাৰ বা মুদ্ৰা, লেখ কাগজ, দুটা বেলেগ ৰঙৰ পাশাগুটি বা dice (ধৰা এটা ৰঙা আনটো সেউজীয়া) ঃ

দুয়োটা কাউণ্টাৰ (0, 0)ত একেলগে ৰাখা। প্ৰতিজন খেলুৱৈয়েই একোবাৰকৈ দুয়োটা পাশাগুটিকে একেলগে দলিয়াব। ধৰা হ'ল, প্ৰথমজনে দলিয়াওতে ৰঙা পাশাগুটিটোত 3 আৰু সেউজীয়াটোত 1 পোৱা গ'ল। তেতিয়া সেইজনৰ কাউণ্টাৰটো (3, 1) লৈ নিয়া হ'ল। সেইদৰে দ্বিতীয়জনে দলিয়াওতে যদি ৰঙা পাশাগুটিটোত 2 আৰু সেউজীয়টোত 4 পোৱা যায় তেনেহ'লে তেওঁৰ কাউণ্টাৰটো (2, 4) লৈ নিব লাগিব। প্ৰথম খেলুৱৈজনে দ্বিতীয়বাৰ পাশাগুটি দুটা দলিয়াওতে ৰঙাটোত 1 আৰু সেউজীয়াটোত 4 পালে। তেওঁৰ কাউণ্টাৰটো (3, 1)ৰ পৰা (3 + 1, 1 + 4) লৈ নিব লাগিব। অৰ্থাৎ (3, 1)ৰ x স্থানাংকৰ লগত 1 আৰু y স্থানাংকৰ 4 যোগ দিব লাগিব।

এই খেলটোৰ লক্ষ্য হ'ল 'মাত্ৰাধিক্য' (over shooting) নোহোৱাকৈ অৰ্থাৎ ভুজ আৰু কোটিৰ কোনোটোৰ মান 10তকৈ বেছি নোহোৱাকৈ কোনজন খেলুৱৈ প্ৰথমে গৈ (10, 10)অত উপনীত হ'ব পাৰে। তদুপৰি এটা কাউণ্টাৰ গৈ আনটো কাউণ্টাৰে দখল কৰি থকা স্থানত ওপৰা ওপৰিকৈ থাকিব নোৱাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি প্ৰথমজনৰ কাউণ্টাৰটো দ্বিতীয়জনৰ কাউণ্টাৰটোৱে ইতিমধ্যে দখল কৰি থকা বিন্দুটো পায়গৈ তেনেহ'লে দ্বিতীয়জনৰ কাউণ্টাৰটো (0, 0) লৈ আহিব। আকৌ যদি 'মাত্ৰাধিক্য' নঘটাকৈ কাউণ্টাৰটো নিয়া সম্ভৱ নহয় তেনেহ'লে খেলুৱৈজনে সেইবাৰৰ তেওঁৰ সুবিধা হেৰুৱাব। তোমালোকে এই খেলটো কেইবাজনো বন্ধুৰ লগত খেলিব পাৰিবা।

মন্তব্য ঃ কাৰ্টীয় সমতলত বিন্দু সংস্থাপন কৰা কামটো কিছু পৰিমাণে বেলেগ বেলেগ অৱস্থাত লেখ অংকন কৰাৰ লগত তুলনা কৰিব পাৰি। উদাহৰণ স্বৰূপে, তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত পাই অহা সময়-দূৰত্বৰ লেখ, বাহু-পৰিসীমাৰ লেখ আদি। এইবিলাক অৱস্থাত অক্ষবিলাকক x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ ঠাইত t-অক্ষ, d-অক্ষ, s-অক্ষ, বা p-অক্ষ বুলি ক'ব পাৰি।

অনুশীলনী 3.3

1. (–2, 4), (3, –1), (–1, 0), (1, 2) আৰু (–3, –5) এই প্ৰতিটো বিন্দু কোনটো চোক বা কোনডাল অক্ষত আছে? কাৰ্টীয় সমতলত সংস্থাপন কৰি তোমাৰ উত্তৰৰ যথাৰ্থতা পৰীক্ষা কৰা।

2. তলৰ তালিকাখনৰপৰা (x, y) বিন্দুকেইটা দূৰত্বৰ উপযুক্ত একক লৈ সমতলত সংস্থাপন কৰা।

x	–2	–1	0	1	3
y	8	7	–1.25	3	–1

3.4 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাখিনি পঢ়িলা—

1. এটা লক্ষ্যবস্তু বা বিন্দু সমতলত সংস্থাপন কৰিবলৈ আমাক দুডাল পৰস্পৰ লম্ব ৰেখাৰ প্ৰয়োজন। ইয়াৰে এডাল অনুভূমিক আৰু আনডাল উলম্ব।

2. সমতলখনক কাৰ্টীয় বা কাৰ্টেজীয় সমতল বা স্থানাংক সমতল আৰু ৰেখা দুডালক স্থানাংক অক্ষ বোলা হয়।

3. অনুভূমিক ৰেখাডালক x-অক্ষ আৰু উলম্ব ৰেখাডালক y-অক্ষ বোলা হয়।

4. স্থানাংক অক্ষ দুডালে সমতলখনক চাৰিভাগত বিভক্ত কৰে আৰু ইয়াৰে একোটা ভাগক চোক বা পাদ বোলে।

5. অক্ষ দুডালে পৰস্পৰক ছেদ কৰা বিন্দুটোক মূলবিন্দু বোলে।

6. এটা বিন্দুৰ y-অক্ষৰপৰা দূৰত্বক x-স্থানাংক বা ভুজ বোলে। বিন্দুটোৰ x-অক্ষৰপৰা দূৰত্বক y-স্থানাংক বা কোটি বোলে।

7. যদি এটা বিন্দুৰ ভুজ x আৰু কোটি y, তেনেহ'লে বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ব (x, y)।

8. x-অক্ষৰ ওপৰত থকা কোনো বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ল $(x, 0)$। সেইদৰে y-অক্ষৰ ওপৰত থকা কোনো বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ল $(0, y)$।

9. মূলবিন্দুৰ স্থানাংক $(0, 0)$।

10. এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি প্ৰথম চোকত থাকিলে $(+, +)$, আৰু দ্বিতীয় চোকত থাকিলে $(-, +)$, তৃতীয় চোকত থাকিলে $(-, -)$ আৰু চতুৰ্থ চোকত থাকিলে $(+, -)$ ধৰণৰ হয়। ইয়াত + আৰু – চিনে ক্ৰমে ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা আৰু ঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা বুজাইছে।

11. যদি $x \neq y$ তেনেহ'লে $(x, y) \neq (y, x)$। কিন্তু $(x, y) = (y, x)$ হ'ব যদিহে $x = y$।

G8Z3Q5

চতুৰ্থ অধ্যায়

দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ
(Linear Equations in Two Variables)

4.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে এটা চলক থকা ৰৈখিক সমীকৰণৰ বিষয়ে পঢ়িছা। এটা চলক থকা ৰৈখিক সমীকৰণ এটা লিখিব পাৰিবানে? তোমালোকে ক'ব পাৰা যে $x + 1 = 2$, $x + \sqrt{2} = 0$ আৰু $\sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0$ আদি হ'ল এটা চলক থকা ৰৈখিক সমীকৰণৰ উদাহৰণ। তদুপৰি তোমালোকে জানা যে এনে এটা সমীকৰণৰ এটা অদ্বিতীয় (এটা আৰু এটাই মাত্ৰ) সমাধান থাকে। এই সমাধানক সংখ্যাৰেখাত কেনেকৈ উপস্থাপন কৰিব পাৰি সেই কথা হয়তো তোমালোকৰ মনত আছে। এই অধ্যায়ত এটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ সম্পৰ্কীয় জ্ঞানৰ পুনৰালোচনা কৰা হ'ব আৰু ইয়াত দুটা চলকযুক্ত সমীকৰণলৈ সম্প্ৰসাৰিত কৰা হ'ব। তোমালোকে বিবেচনা কৰিবলগীয়া প্ৰশ্ন কিছুমান এনেধৰণৰ হ'ব—

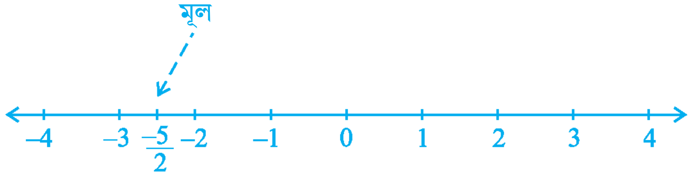
দুটা চলকযুক্ত সমীকৰণৰ এটা সমাধান আছেনে? যদি আছে, এই সমাধান অদ্বিতীয়নে? কাৰ্টীয় সমতলত এই সমাধান দেখিবলৈ কেনেকুৱা হ'ব? এই প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিওঁতে তোমালোকে তৃতীয় অধ্যায়ত পাই অহা ধাৰণাসমূহো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিবা।

4.2 ৰৈখিক সমীকৰণ (Linear Equations) ঃ

তোমালোকে এতিয়ালৈকে কিমান শিকিলা প্ৰথমতে তাকে মনত পেলোৱা যাওঁক। তলৰ সমীকৰণটো লোৱা ঃ

$$2x + 5 = 0$$

ইয়াৰ সমাধান, অৰ্থাৎ সমীকৰণটোৰ মূল $-\frac{5}{2}$। এই সমাধানক সংখ্যাৰেখাত তলত দিয়া ধৰণেৰে দেখুৱাব পাৰি ঃ



চিত্ৰ 4.1

এটা সমীকৰণ সমাধান কৰোতে তোমালোকে সদায় তলত দিয়া কথাকেইটা নিশ্চয়কৈ মনত ৰাখিবা ঃ

(i) সমীকৰণটোৰ দুয়োপক্ষত একেটা সংখ্যাই যোগ কৰা (বা বিয়োগ কৰা) হয়।

(ii) সমীকৰণটোৰ দুয়োপক্ষক একেটা অশূন্য সংখ্যাৰেই পূৰণ (বা হৰণ কৰা) হয়।

এতিয়া আমি তলৰ অৱস্থাটো বিবেচনা কৰো ঃ

নাগপুৰত অনুষ্ঠিত হোৱা ভাৰত আৰু শ্ৰীলংকাৰ মাজৰ এখন এদিনীয়া আন্তঃৰাষ্ট্ৰীয় ক্ৰিকেট মেচত দুজন ভাৰতীয় বেটচ্‌মেনে একেলগে 176 ৰাণ কৰিলে। এই তথ্যক এটা সমীকৰণ হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

ইয়াত দেখিছা যে এজনৰো ৰাণৰ সংখ্যা জ্ঞাত নহয়। অৰ্থাৎ ইয়াত দুটা অজ্ঞাত ৰাশি আছে। এই অজ্ঞাত ৰাশি দুটা বুজাবলৈ x আৰু y ব্যৱহাৰ কৰা হওঁক। সেয়ে এজন বেটচ্‌মেনে কৰা ৰাণৰ সংখ্যা x আৰু আনজনৰ ৰাণৰ সংখ্যা y। সেয়ে আমি পাওঁ যে—

$x + y = 176$, ইয়েই উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

এইটো দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰ উদাহৰণ। এনে সমীকৰণৰ চলক দুটা x আৰু yৰে বুজোৱা এটা প্ৰচলিত প্ৰথা যদিও কেতিয়াবা অন্য আখৰো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰ কিছুমান উদাহৰণ হ'ল ঃ

$1.2s + 3t = 5$, $p + 4q = 7$, $\pi u + 5v = 9$ আৰু $3 = \sqrt{2}x - 7y$.

মন কৰিবা যে এই সমীকৰণবিলাক একাদিক্ৰমে তলত দিয়া ধৰণেও পাতিব পাৰি—

$1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$

আৰু $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$

সেয়ে কোনো এটা সমীকৰণ যদি $ax + by + c = 0$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি য'ত a, b আৰু c বাস্তৱ সংখ্যা আৰু a আৰু b দুয়োটাই শূন্য নহয়, তেনেহ'লে তাকে দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ বোলা হয়। ইয়াৰ অৰ্থ এয়ে হ'ল যে তোমালোকে এনেকুৱা বহুতো সমীকৰণৰ কথা ভাবিব পাৰিবা।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ প্ৰতিটো সমীকৰণ $ax + by + c = 0$ আৰ্হিত লিখা আৰু প্ৰতি ক্ষেত্ৰতে a, b আৰু cৰ মান উল্লেখ কৰা ঃ

(i) $2x + 3y = 4.37$, (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$, (iii) $4 = 5x - 3y$, (iv) $2x = y$

সমাধান ঃ (i) $2x + 3y = 4.37$ সমীকৰণটো $2x + 3y - 4.37 = 0$ ধৰণেৰে লিখিব পাৰি।
ইয়াত $a = 2$, $b = 3$, $c = -4.37$

(ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$ সমীকৰণটো $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ বুলিও লিখিব পাৰি। ইয়াত $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ আৰু $c = -4$

(iii) $4 = 5x - 3y$ সমীকৰণটো $5x - 3y - 4 = 0$ ধৰণেৰে লিখিব পাৰি। ইয়াত $a = 5$, $b = -3$ আৰু $c = -4$। এই সমীকৰণটো যে $-5x + 3y + 4 = 0$ বুলিও লিখিব পাৰি তোমালোকে মানি ল'বানে? এই ক্ষেত্ৰত $a = -5$, $b = 3$ আৰু $c = 4$।

(iv) $2x = y$ সমীকৰণটোক $2x - y + 0 = 0$ বুলিও লিখিব পাৰি। ইয়াত $a = 2$, $b = -1$ আৰু $c = 0$।

$ax + b = 0$ আৰ্হিৰ সমীকৰণবিলাকো দুটা চলকযুক্ত বৈখিক সমীকৰণৰ উদাহৰণ। কাৰণ এইবিলাকক $ax + 0.y + b = 0$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণস্বৰূপে, $4 - 3x = 0$ক $-3x + 0.y + 4 = 0$ ৰূপত লিখিব পাৰি।

উদাহৰণ 2 ঃ তলৰ প্ৰতিটোকে একোটা দুটা চলকযুক্ত সমীকৰণ হিচাপে লিখা ঃ

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

সমাধান ঃ (i) $x = -5$ সমীকৰণটো হ'ব $1.x + 0.y = -5$ বা $1.x + 0.y + 5 = 0$

(ii) $y = 2$ ক লিখিব পাৰি $0.x + 1.y = 2$ বা $0.x + 1.y - 2 = 0$ হিচাপে।

(iii) $2x = 3$ক লিখিব পাৰি $2x + 0.y - 3 = 0$ হিচাপে।

(iv) $5y = 2$ক লিখিব পাৰি $0.x + 5y - 2 = 0$ হিচাপে।

অনুশীলনী 4.1

1. এখন টোকা বহীৰ দাম এটা কলমৰ দামৰ দুগুণ। এই উক্তিটো প্ৰকাশ হোৱাকৈ দুটা চলকযুক্ত এটা বৈখিক সমীকৰণ গঠন কৰা। (ইয়াত এখন টোকাবহীৰ দাম x টকা আৰু এটা কলমৰ দাম y টকা বুলি লোৱা)

2. তলৰ বৈখিক সমীকৰণবিলাক $ax + by + c = 0$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰা আৰু প্ৰতি ক্ষেত্ৰতে a, b আৰু cৰ মান উল্লেখ কৰা।

(i) $2x + 3y = 9.3\bar{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$

(iv) $x = 3y$ (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$

(vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 এটা ৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধান (Solution of a Linear Equation) ঃ

তোমালোকে দেখিছা যে সকলো এক চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰেই এটা অদ্বিতীয় সমাধান থাকে। দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰ বেলিকা তোমালোকে কি ক'বা? যিহেতু এনে সমীকৰণৰ দুটা চলক থাকে, গতিকে ইয়াৰ সমাধান মানে হ'ল এযোৰ মান। ইয়াৰে এটা x ৰ আৰু আনটো y ৰ মান যি দুটাই সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। আমি এতিয়া $2x + 3y = 12$ সমীকৰণটোলৈ চাওঁ। ইয়াত $x = 3$ আৰু $y = 2$ সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান। কাৰণ, যদি সমীকৰণটোত $x = 3$ আৰু $y = 2$ প্ৰতিষ্ঠাপন কৰা হয়, তেনেহ'লে দেখা যায় যে

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

এই সমাধানক (বা মূল দুটাক) ক্ৰমিক যুগল (3, 2)ৰে লিখা হয়। ইয়াৰে প্ৰথমটো x ৰ মান আৰু পিছৰটো y ৰ মান। সেইদৰে, ওপৰৰ সমীকৰণটোৰ আন এটা সমাধান হ'ল (0, 4)।

অন্যহাতেদি (1, 4) ক্ৰমিক যুগলটো $2x + 3y = 12$ ৰ সমাধান নহয়। কাৰণ $x = 1$ আৰু $y = 4$ প্ৰতিষ্ঠাপন কৰিলে $2x + 3y = 14$ হে পোৱা যায়, 12 নাপাও। মন কৰিবা যে ওপৰৰ সমীকৰণটোৰ (0, 4) এটা সমাধান হয়, কিন্তু (4, 0) সমাধান নহয়।

তোমালোকে $2x + 3y = 12$ৰ অতি কমেও দুটা সমাধান পাইছা, যি দুটা হ'ল (3, 2) আৰু (0, 4)। তোমালোকে আৰু অন্য সমাধান উলিয়াব পাৰিবানে? (6, 0) এটা সমাধান বুলি মানি ল'বানে? পৰীক্ষা কৰি চোৱা। আচল কথাটো হ'ল, তলত দিয়া উপায়েৰে তোমালোকে বহুতো সমাধান উলিয়াব পাৰিবা। $2x + 3y = 12$ সমীকৰণটোত তোমাৰ ইচ্ছামতে x ৰ এটা মান লোৱা (ধৰা $x = 2$)। তেতিয়া সমীকৰণটো হ'ব $4 + 3y = 12$। এইটো এটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ। ইয়াক সমাধান কৰিলে হ'ব $y = \frac{8}{3}$। গতিকে $2x + 3y = 12$ ৰ আন এটা সমাধান হ'ব $(2, \frac{8}{3})$। একেদৰেই, $x = -5$ লৈ পাওঁ $-10 + 3y = 12$। ইয়াৰপৰা পাওঁ, $y = \frac{22}{3}$। গতিকে $2x + 3y = 12$ ৰ আন এটা সমাধান হ'ল $(-5, \frac{22}{3})$। সেয়ে দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ এটাৰ বেলেগ বেলেগ সমাধানৰ অন্ত নাই। অৰ্থাৎ দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ এটাৰ অসীম সংখ্যক সমাধান থাকে।

উদাহৰণ 3 ঃ $x + 2y = 6$ সমীকৰণৰ চাৰিটা ভিন্ন সমাধান উলিওৱা।

সমাধান ঃ নিৰীক্ষণ কৰি পাওঁ যে সমীকৰণটোৰ $x = 2$, $y = 2$ এটা সমাধান। কাৰণ $x = 2$ আৰু $y = 2$ পাতিলে পাওঁ

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

এতিয়া ধৰো $x = 0$। x ৰ এই মানৰ বাবে এই সমীকৰণটো $2y = 6$ লৈ ৰূপান্তৰিত হয় যাৰ $y = 3$ এটা অদ্বিতীয় সমাধান। গতিকে $x + 2y = 6$ ৰ আন এটা সমাধান হ'ল $x = 0$, $y = 3$।

সেইদৰে $y = 0$ ল'লে সমীকৰণটো হ'ব $x = 6$। গতিকে $x + 2y = 6$ ৰ আন এটা সমাধান হ'ল $x = 6, y = 0$। শেষত $y = 1$ লওঁ। এতিয়া প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ব $x + 2 = 6$। ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $x = 4$। গতিকে সমীকৰণটোৰ (4, 1) আন এটা সমাধান। গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ অসীম সংখ্যক সমাধানৰ ভিতৰৰে চৰিটা সমাধান হ'ল (2, 2), (0, 3), (6, 0) আৰু (4, 1)।

মন্তব্য ঃ মন কৰা যে এটা সমীকৰণৰ সমাধান এটা উলিওৱাৰ সহজ উপায় হ'ল ঃ $x = 0$ লৈ তাৰ অনুৰূপে y ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। সেইদৰে $y = 0$ লৈ তাৰ অনুৰূপে x ৰ মান পোৱা যায়।

উদাহৰণ 4 ঃ তলৰ প্ৰতিটো সমীকৰণৰে দুটাকৈ সমাধান উলিওৱা ঃ

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$ (iii) $3y + 4 = 0$

সমাধান ঃ (i) $x = 0$ লৈ পাওঁ, $3y = 12$ অৰ্থাৎ $y = 4$। গতিকে (0, 4) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান। সেইদৰে $y = 0$ লৈ পাওঁ যে $x = 3$। সেয়ে (3, 0) টোও এটা সমাধান।

(ii) $x = 0$ লৈ পাওঁ যে $y = 0$। সেয়ে (0, 0) হ'ল প্ৰদত্ত সমীকৰণৰ এটা সমাধান। এতিয়া যদি $y = 0$ লোৱা, তোমালোকে পুনৰ (0, 0) পাবা যিটো আগৰ সমাধানৰ সৈতে একে। আন এটা সমাধান পাবলৈ $x = 1$ লোৱা। এতিয়া কৰি চালে পাবা যে এই মানৰ বাবে y ৰ মান হ'ব $-\frac{2}{5}$ । গতিকে $(1, -\frac{2}{5})$ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ আন এটা সমাধান।

(iii) $3y + 4 = 0$ সমীকৰণটো সজাই লিখিলে হ'ব $0.x + 3y + 4 = 0$। তোমালোকে দেখিবা যে x ৰ যিকোনো মানৰ বাবে $y = -\frac{4}{3}$ । গতিকে সমীকৰণটোৰ দুটা সমাধান $(0, -\frac{4}{3})$ আৰু $(1, -\frac{4}{3})$ বুলি লিখিব পাৰি।

অনুশীলনী 4.2

1. তলত দিয়া সম্ভাব্য উত্তৰকেইটাৰ মাজৰ কোনটো সত্য আৰু কিয়?

$y = 3x + 5$ সমীকৰণটোৰ

(i) এটা অদ্বিতীয় সমাধান আছে (ii) মাত্ৰ দুটা সমাধান আছে

(iii) অসীম সংখ্যক সমাধান আছে।

2. তলৰ প্ৰতিটো সমীকৰণেৰে চাৰিটাকৈ সমাধান উলিওৱা ঃ

(i) $2x + y = 7$, (ii) $\pi x + y = 9$, (iii) $x = 4y$

3. তলৰ কোনকেইটা ক্ৰমিক যুগল $x - 2y = 4$ ৰ সমাধান হয় আৰু কোনকেইটা নহয় পৰীক্ষা কৰা ঃ

(i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0)

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) (1, 1)

4. যদি $x = 2, y = 1$ সমীকৰণ $2x + 3y = k$ ৰ এটা সমাধান তেন্তে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

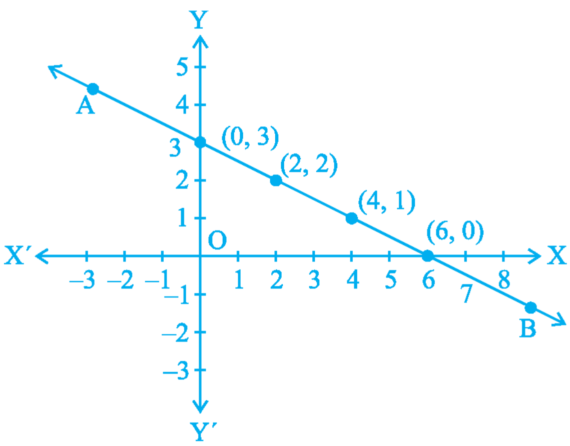
4.4 দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰ লেখ (Graph of a Linear Equation in Two Variables) ঃ

এতিয়ালৈকে তোমালোকে বীজগণিতীয় পদ্ধতিৰে দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰিছা। এতিয়া এইবিলাকৰ জ্যামিতীয় প্ৰদৰ্শন লক্ষ্য কৰিম। তোমালোকে জানা যে এনেধৰণৰ একোটা সমীকৰণৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। এইবিলাকক স্থানাংক তলত কেনেকৈ দেখুৱাবা? এনে সমীকৰণৰ সমাধান যুৰীয়া মানেৰে প্ৰকাশ কৰা পদ্ধতিটোৰ পৰাই তোমালোকে এই কথাটোৰ আভাস পাব পাৰা। উদাহৰণ 3 ত দিয়া ৰৈখিক সমীকৰণ $x + 2y = 6$ ৰ সমাধানবিলাক তলত দিয়াৰ দৰে তালিকা আকাৰত লিখিব পাৰি। ইয়াত x ৰ মানৰ তলতে সেইটোৰ অনুৰূপে পোৱা y ৰ মানটো লিখা হয়।

তালিকা 1

x	0	2	4	6	...	...
y	3	2	1	0	...	...

আগৰ অধ্যায়ত তোমালোকে বিন্দু এটা লেখ কাগজত কেনেকৈ সংস্থাপিত কৰে সেই বিষয়ে পঢ়িছিলা। এতিয়া আমি লেখ কাগজত (0, 3), (2, 2), (4, 1) আৰু (6, 0) বিন্দুকেইটা সংস্থাপন কৰোঁ। ইয়াৰে যিকোনো দুটা বিন্দু সংযোগ কৰিলে এডাল ৰেখা পাবা। ধৰা এই ৰেখাডালৰ নাম AB। (চিত্ৰ 4.2 চোৱা)



চিত্ৰ 4.2

তোমালোকে মন কৰিছানে যে আন দুটা বিন্দুও এই AB ৰেখাডালৰ ওপৰতে আছে? এই ৰেখাডালতে থকা অন্য এটা বিন্দু লোৱা। ধৰা সেই বিন্দুটো (8, –1)। এইটো সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়নে? বাস্তৱিকতে $8 + 2(–1) = 6$। গতিকে (8, –1)টো সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়। AB ৰেখাডালৰ ওপৰত থকা আন এটা বিন্দু আকৌ লোৱা আৰু বিন্দুটোৰ স্থানাংকই সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে নে নকৰে সত্যাপন কৰি চোৱা। এতিয়া, ABৰ ওপৰত নথকা কোনো এটা বিন্দু লোৱা। ধৰা বিন্দুটো (2, 0)। এই স্থানাংকই সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰেনে? পৰীক্ষা কৰি চালে পাবা যে সিদ্ধ নকৰে।

আমাৰ পৰ্যবেক্ষণবিলাক এতিয়া লিপিবদ্ধ কৰোঁ ঃ

1. যিবিলাক বিন্দুৰ স্থানাংকই সমীকৰণ $x + 2y = 6$ সিদ্ধ কৰে সেই বিন্দুবিলাক AB ৰেখাৰ ওপৰত থাকে।
2. AB ৰেখাৰ ওপৰত থকা প্ৰত্যেক বিন্দু (a, b) য়ে সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান দিয়ে আৰু এই সমাধান হ'ল $x = a$ আৰু $y = b$
3. কোনো বিন্দু যদি AB ৰেখাৰ ওপৰত নাথাকে তেনেহ'লে সেই বিন্দুৰ স্থানাংক সমীকৰণটোৰ সমাধান নহয়।

গতিকে তোমালোক এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰা যে এডাল ৰেখাৰ ওপৰত থকা প্ৰত্যেকটো বিন্দুৱেই ৰেখাডালৰ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে আৰু সমীকৰণটোৰ প্ৰত্যেক সমাধানেই ৰেখাডালৰ ওপৰত থকা একোটা বিন্দু। আচলতে, দুটা চলকযুক্ত এটা ৰৈখিক সমীকৰণক জ্যামিতিকভাৱে এডাল সৰলৰেখাৰে প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব পাৰি আৰু ইয়াৰ ওপৰত থকা বিন্দুবিলাক হ'ল সমীকৰণটোৰ সমাধানৰ সংগ্ৰহটো বা থুপটো। ইয়াকেই ৰৈখিক সমীকৰণটোৰ লেখ বুলি কোৱা হয়। গতিকে দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ এটাৰ লেখ আঁকিবলৈ হ'লে সমীকৰণটোৰ পৰা দুটা সমাধান নিৰ্ণয় কৰি এই সমাধানে বুজোৱা বিন্দু দুটা সংস্থাপন কৰিব পাৰিলেই আমাৰ বাবে যথেষ্ট। কাৰণ এই বিন্দু দুটা সংযোগ কৰিলেই এডাল ৰেখা পোৱা যাব। সেয়ে হ'লেও, তোমালোকে দুটাতকৈ বেছি বিন্দু উলিয়াই লেখ কাগজত সংস্থাপন কৰাটো বাঞ্চনীয়। কাৰণ তেনে কৰিলে তোমালোকে লেখডালৰ শুদ্ধতা লগে লগেই চাব পাৰিবা।

মন্তব্য ঃ এটা এক ঘাতৰ বহুপদী সমীকৰণ $ax + by + c = 0$ ক ৰৈখিক সমীকৰণ বুলি কোৱাৰ কাৰণ এয়ে যে ইয়াৰ জ্যামিতিক ৰূপ হ'ল এডাল সৰল ৰেখা।

উদাহৰণ 5 ঃ (1, 2) বিন্দুটো দিয়া থাকিলে, এই বিন্দুটো থকা ৰেখা এডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। এই ধৰণৰ সমীকৰণ কিমান আছে?

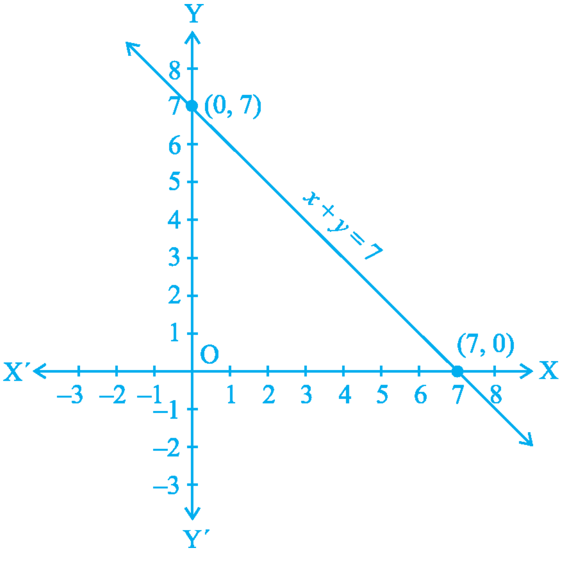
সমাধান ঃ ইয়াত তুমি বিচৰা ৰৈখিক সমীকৰণ এটাৰ সমাধান হ'ল (1, 2)। গতিকে তোমাক (1, 2) বিন্দুৰে যোৱা ৰেখা এডাল লাগে। এনেধৰণৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা উদাহৰণ হ'ল $x + y = 3$। সেইদৰে আন উদাহৰণ হ'ল $y - x = 1$, $y = 2x$। কাৰণ (1, 2) বিন্দুটোৰ স্থানাংকই এইকেইটা সমীকৰণো সিদ্ধ কৰে। দৰাচলতে (1, 2) বিন্দুটোৰ স্থানাংকই সিদ্ধ কৰা এই ধৰণৰ অসীম সংখ্যক ৰৈখিক সমীকৰণ আছে। এই কথাটো চিত্ৰৰ সহায়ত কেনেকৈ চাবা?

উদাহৰণ 6 ঃ $x + y = 7$ ৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ এই লেখটো অংকন কৰিবলৈ সমীকৰণটোৰ অতি কমেও দুটা সমাধানৰ আমাক প্ৰয়োজন। তোমালোকে চাব পাৰা যে $x = 0, y = 7$ আৰু $x = 7, y = 0$ সমীকৰণটোৰ দুটা সমাধান। সেয়ে তোমালোকে তলত দিয়া তালিকাখন লেখ অংকনৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিবা।

তালিকা 2

x	0	7
y	7	0



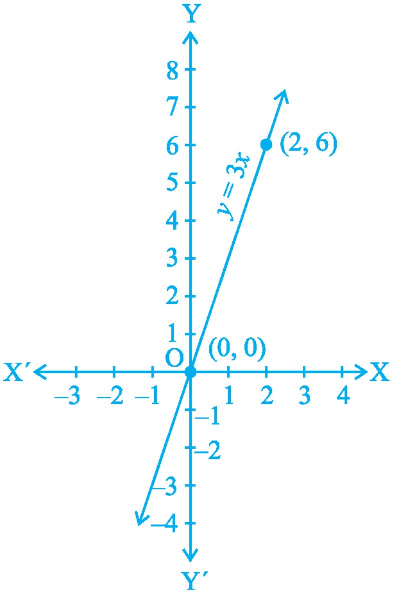
চিত্ৰ 4.3

এই তালিকাৰ বিন্দু দুটা সংস্থাপন কৰা আৰু এডাল ৰেখাৰে বিন্দু দুটা সংযোগ কৰি লেখটো অংকন কৰা। (চিত্ৰ 4.3 চোৱা)

উদাহৰণ 7 ঃ তোমালোকে জানা যে এটা বস্তুত প্ৰয়োগ কৰা বল বস্তুটোত সৃষ্টি হোৱা ত্বৰণৰ সৈতে সমানুপাতিক। এই অৱস্থাটো প্ৰকাশ কৰিবলৈ এটা সমীকৰণ লিখা আৰু সমীকৰণটোৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত জড়িত থকা চলক দুটা হ'ল বল আৰু ত্বৰণ। ধৰা হ'ল প্ৰয়োগ কৰা বল y একক আৰু সৃষ্টি হোৱা ত্বৰণ x একক। অনুপাত আৰু সমানুপাতৰ ধাৰণাৰে প্ৰশ্নত দিয়া তথ্যৰপৰা লিখিব পাৰি যে $y = kx$, ইয়াত k এটা ধ্ৰুৱক। (বিজ্ঞান বিষয়টোৰপৰা তোমালোকে জানা যে k হ'ল আচলতে বস্তুটোৰ ভৰ।)

এতিয়া যিহেতু আমি k কি নাজানো, গতিকে সঠিককৈ $y = kx$ ৰ লেখ আঁকিব নোৱাৰিম। তথাপি যদি kৰ নিৰ্দিষ্ট মান এটা লোৱা হয় তেনেহ'লে আমি লেখটো আঁকিব পাৰিম। ধৰা হ'ল $k = 3$। অৰ্থাৎ $y = 3x$ ক প্ৰতিনিধিত্ব কৰাকৈ ৰেখা এডাল আঁকিম।



চিত্ৰ 4.4

ইয়াৰ বাবে সমীকৰণটোৰ দুটা সমাধান উলিয়ালো। ধৰা হ'ল সেই দুটা (0, 0) আৰু (2, 6)। (চিত্ৰ 4.4 চোৱা)। লেখটোৰপৰা দেখিবা যে যদি প্ৰয়োগ কৰা বল 3 একক হয় তেনেহ'লে সৃষ্টি হোৱা ত্বৰণ হয় 1 একক। তদুপৰি, মন কৰা যে (0, 0) বিন্দুটো লেখডালৰ ওপৰত আছে। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল যে ত্বৰণ 0 একক হ'ব যদিহে প্ৰয়োগ বল 0 একক হয়।

মন্তব্য ঃ $y = kx$ আৰ্হিৰ সমীকৰণ এটাৰ লেখডাল এডাল ৰেখা হয়, যিডাল সদায় মূলবিন্দুৰে যায়।

উদাহৰণ 8 ঃ তলৰ চিত্ৰ 4.5ত দিয়া লেখবিলাকৰ কোনডাল লেখ তলত উল্লেখ থকা সমীকৰণবিলাকৰ মাজৰ কোনটো সমীকৰণৰ বাছনি কৰা।

(a) চিত্ৰ 4.5 (i)ৰ লেখডালৰ কাৰণে সমীকৰণটো হ'ব

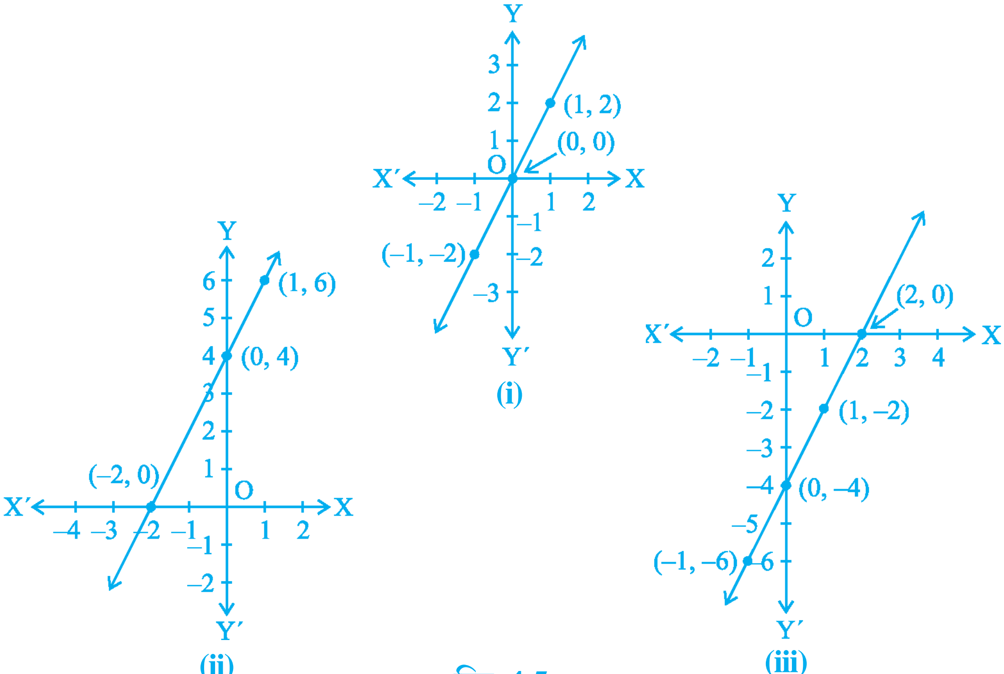
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) চিত্ৰ 4.5 (ii)ৰ কাৰণে সমীকৰণটো হ'ল

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) চিত্ৰ 4.5 (iii)ৰ কাৰণে সমীকৰণটো হ'ল

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



চিত্ৰ 4.5

সমাধান ঃ (a) চিত্ৰ 4.5 (i)ৰ পৰা, ৰেখাডালত থকা বিন্দুবিলাক হ'ল (–1,–2), (0, 0), (1, 2)। নিৰীক্ষণ কৰি পাওঁ যে $y = 2x$ টোৱেই হ'ল লেখটোৰ বাবে সমীকৰণ। তোমালোকে উলিয়াব পাৰিবা যে প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতেই y-স্থানাংক হ'ল x-স্থানাংকৰ দুগুণ।

(b) চিত্ৰ 4.5 (ii)ত, ৰেখাডালত থকা বিন্দুবিলাক হ'ল (–2, 0), (0, 4), (1, 6)। তোমালোকে দেখিছা যে এই বিন্দুবিলাকৰ স্থানাংকই $y = 2x + 4$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। গতিকে $y = 2x + 4$ সমীকৰণটোৱেই হ'ল চিত্ৰ 4.5(ii) ৰ লেখডালৰ বাবে সমীকৰণ।

(c) চিত্ৰ 4.5 (iii)ৰ পৰা, ৰেখাডালত থকা বিন্দুবিলাক হ'ল (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0)। নিৰীক্ষণ কৰি পাবা যে লেখটোৰ বাবে সমীকৰণটো হ'ল $y = 2x - 4$।

অনুশীলনী 4.3

1. তলত দিয়া দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণৰ প্ৰতিটোৱেই লেখ অংকন কৰা ঃ

(i) $x + y = 4$ (ii) $x - y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

2. (2, 4) বিন্দুৰে যোৱা দুডাল ৰেখাৰ সমীকৰণ লিখা। এনেধৰণৰ আৰু কিমান ৰেখা আছে আৰু কিয়?

3. (i) যদি (3, 4) বিন্দুটো $3y = ax + 7$ সমীকৰণটোৰ লেখডালৰ ওপৰত থাকে তেনেহ'লে a ৰ মান উলিওৱা।

(ii) যদি $(p, 4)$ বিন্দুটো $4x + y = 16$ লেখডালৰ ওপৰত থাকে, তেন্তে pৰ মান উলিওৱা।

(iii) যদি $2y = ax - 4$ সমীকৰণৰ লেখডাল (1, 2) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় তেন্তে a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(iv) যদি $(2k - 3, k + 2)$ বিন্দুটো $2x + 3y + 15 = 0$ সমীকৰণৰ লেখডালৰ ওপৰত থাকে, তেন্তে k ৰ মান উলিওৱা।

(v) (1, –2) বিন্দুটো $3x - 2y = 7$ সমীকৰণৰ লেখডালৰ ওপৰত আছেনে পৰীক্ষা কৰা।

(vi) (–3, 2) বিন্দুটো $4x + 7y = 9$ সমীকৰণৰ লেখডালৰ ওপৰত অৱস্থিত হয়নে ঠাৱৰ কৰা।

(vii) কি চৰ্তত $ax + by + c = 0$ আৰ্হিৰ সমীকৰণৰ লেখ মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যাব?

4. এখন মহানগৰত টেক্সীৰ ভাড়া এনেধৰণৰ ঃ
প্ৰথম কিলোমিটাৰটোৰ বাবে ভাড়া 8 টকা আৰু তাৰ পিছৰ দূৰত্বৰ ভাড়া হ'ল প্ৰতি কিলোমিটাৰত 5 টকা। অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব x কিলোমিটাৰ আৰু মুঠ ভাড়া y টকা বুলি ধৰি এই তথ্যৰ ভিত্তিত এটা ৰৈখিক সমীকৰণ লিখা আৰু ইয়াৰ লেখ অংকন কৰা।

5. তলত দিয়া বিকল্পবিলাকৰ পৰা সমীকৰণ একোটা বাছনি কৰা যিটোৰ লেখ চিত্ৰ 4.6 আৰু চিত্ৰ 4.7 ত দিয়া হৈছে ঃ

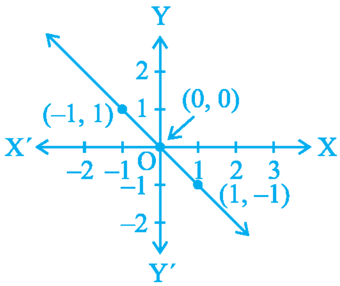
চিত্ৰ 4.6 ৰ বাবে **চিত্ৰ 4.7 ৰ বাবে**

(i) $y = x$ (i) $y = x + 2$

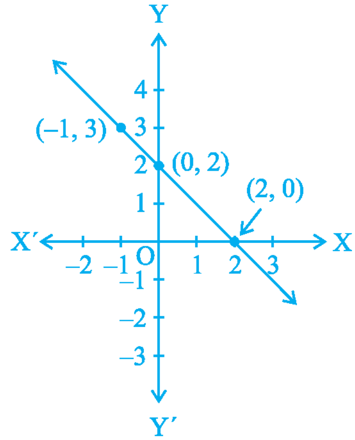
(ii) $x + y = 0$ (ii) $y = x - 2$

(iii) $y = 2x$ (iii) $y = -x + 2$

(iv) $2 + 3y = 7x$ (iv) $x + 2y = 6$



চিত্ৰ 4.6



চিত্ৰ 4.7

6. যদি এটা স্থিৰ (ধ্ৰুৱক) বল প্ৰয়োগ কৰাৰ ফলত কোনো এটা বস্তুৰে কৰা কাৰ্য বস্তুটোৱে অতিক্ৰম কৰা দূৰত্বৰ সমানুপাতিক হয়, তেনেহ'লে এই তথ্যক দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ এটাৰে প্ৰকাশ কৰা আৰু এই স্থিৰ বলক 5 একক ধৰি ইয়াৰ এটা লেখ অংকন কৰা। তদুপৰি এই লেখৰ পৰা বস্তুটোৱে কৰা কাৰ্য কিমান হ'ব উলিওৱা যেতিয়া বস্তুটোৱে অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব হয়

(i) 2 একক (ii) 0 একক

7. (i) এখন স্কুলৰ নৱম শ্ৰেণীৰ দুজনী ছাত্ৰী যামিনী আৰু ফাতিমাই একেলগে ভূমিকম্পত আক্ৰান্তসকলৰ বাবে প্ৰধানমন্ত্ৰীৰ সাহায্য পুঁজিলৈ 100 টকাৰ বৰঙণি আগবঢ়ালে। এই তথ্যক সিদ্ধ কৰাকৈ এটা ৰৈখিক সমীকৰণ লিখা। (তেওঁলোকৰ বৰঙণিক x টকা আৰু y টকা বুলি ধৰিব পাৰা)। ইয়াৰ এটা লেখ আঁকা।

(ii) যদি পুতেক আৰু বাপেকৰ বৰ্তমান বয়স ক্ৰমে x আৰু y চলকৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা হয় আৰু 10 বছৰ পিছত বাপেকৰ বয়স পুতেকৰ বয়সৰ দুগুণ হ'ব। এই তথ্যখিনি ৰৈখিক সমীকৰণৰত প্ৰকাশ কৰা আৰু ইয়াৰ লেখ অংকণ কৰা।

(iii) যদি 5 খন মেজৰ দাম 8 খন চকীৰ দামতকৈ 150 টকা বেছি, তেন্তে এখন চকীৰ দাম x টকা আৰু এখন মেজৰ দাম y বুলি ধৰি ৰৈখিক সমীকৰণটো গঠন কৰা আৰু ইয়াৰ লেখ অংকন কৰা।

(iv) যদি কোনো এটা ভগ্নাংশৰ হৰ 7 বঢ়োৱা হয় আৰু লব 1 কমোৱা হয় তেন্তে ভগ্নাংশটো $\frac{3}{2}$ হয়। হৰক x আৰু লবক y ধৰি ৰৈখিক সমীকৰণটো গঠন কৰা আৰু ইয়াক লেখৰ সহায়ত প্ৰদৰ্শন কৰা।

(v) আয়তাকাৰ এডৰা মাটিৰ পৰিসীমা 66 মিটাৰ। মাটিডৰাৰ দৈৰ্ঘ্য x মিটাৰ আৰু প্ৰস্থ y মিটাৰ ধৰি ইয়াৰ সমীকৰণটো গঠন কৰা।

8. আমেৰিকা যুক্তৰাষ্ট্ৰ, কানাডা আদিৰ দৰে দেশত উষ্ণতাক 'ফাৰেনহেইট' এককেৰে জোখা হয়, কিন্তু ভাৰতৰ দৰে দেশত ইয়াক 'চেলচিয়াছ' এককেৰে জোখে। তলত এটা ৰৈখিক সমীকৰণ দিয়া হ'ল যিটোৰ সহায়ত ফাৰেনহেইটক চেলচিয়াছলৈ পৰিৱৰ্তন কৰা হয় ঃ

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) চেলচিয়াছৰ বাবে x-অক্ষ আৰু ফাৰেনহেইটৰ বাবে y-অক্ষ ধৰি এই ৰৈখিক সমীকৰণটোৰ এটা লেখ অংকন কৰা।

(ii) যদি উষ্ণতা $30^{o}C$, তেন্তে এই উষ্ণতা ফাৰেনহেইটত কিমান?

(iii) যদি উষ্ণতা $95^{o}F$, তেন্তে এই উষ্ণতা চেলচিয়াছত কিমান?

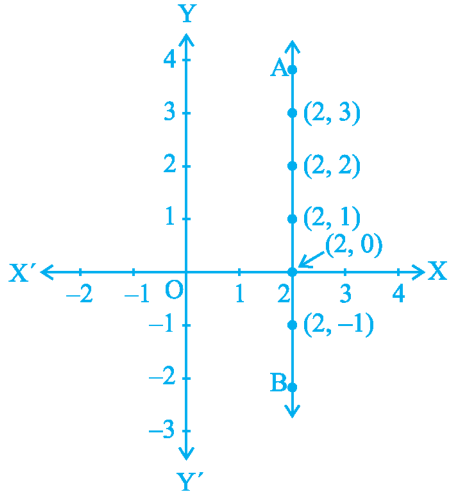
(iv) যদি উষ্ণতা $0^{o}C$, তেন্তে এই উষ্ণতা ফাৰেনহেইটত কিমান?
যদি উষ্ণতা $0^{o}F$, তেন্তে এই উষ্ণতা চেলচিয়াছত কিমান?

(v) এনে কোনো উষ্ণতা আছে নেকি যিটো ফাৰেনহেইট আৰু চেলচিয়াছ এই দুয়োটাতে সাংখ্যিকভাৱে একে? যদি আছে, নিৰ্ণয় কৰা।

4.5 x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ (Equations of Lines Parallel to the x-axis and y-axis) ঃ

স্থানাংক তলত থকা এটা প্ৰদত্ত বিন্দুৰ স্থানাংক কিদৰে লিখা হয় সেই বিষয়ে তোমালোকে পঢ়িছা। (2, 0), (–3, 0), (4, 0) আৰু $(n, 0)$, ইয়াত n যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা, এই বিন্দুবোৰ কাৰ্টীয় সমতলৰ ক'ত থাকে তোমালোকে জানানে? নিশ্চয়কৈ জানা যে, এই সকলো বিন্দু x-অক্ষত থাকে। কিন্তু কিয় থাকে জানানে? কাৰণ x-অক্ষত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰেই y-স্থানাংক 0। দৰাচলতে x-অক্ষৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ স্থানংকৰ আৰ্হি $(x, 0)$ ধৰণৰ। এতিয়া তোমালোকে x অক্ষৰ সমীকৰণ কি হ'ব অনুমান কৰিব পাৰিবানে? এই সমীকৰণ হ'ল $y = 0$। মনত ৰাখিবা যে $y = 0$ সমীকৰণটো $0.x + 1.y = 0$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। সেই একেদৰেই, লক্ষ্য কৰা যে y-অক্ষৰ সমীকৰণ হ'ল $x = 0$।

এতিয়া $x - 2 = 0$ এই সমীকৰণটো লোৱা। যদি এই সমীকৰণটোক এটাই মাত্ৰ চলক x থকা বুলি লোৱা হয়, তেন্তে ইয়াৰ অদ্বিতীয় সমাধান হ'ব $x = 2$ আৰু এইটো সংখ্যাৰেখাৰ এটা বিন্দু। কিন্তু যদি, এই সমীকৰণটোক দুটা চলকযুক্ত বুলি লোৱা হয়, তেনেহ'লে ইয়াক $x + 0.y - 2 = 0$ বুলি প্ৰকাশ কৰিব পৰা যাব। এই সমীকৰণটোৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। দৰাচলতে, এই সমাধানবিলাকৰ আৰ্হি হ'ল $(2, r)$ য'ত r যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা। তদুপৰি তোমালোকে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা যে $(2, r)$ আৰ্হিৰ সকলো বিন্দুৱেই এই সমীকৰণৰ একোটা সমাধান। সেই কাৰণে দুই চলকযুক্ত সমীকৰণ হিচাপে $x - 2 = 0$ সমীকৰণক চিত্ৰ 4.8ৰ লেখটোৰ AB ৰেখাৰ দ্বাৰা নিৰ্দেশ কৰিব পাৰি।



চিত্ৰ 4.8

উদাহৰণ 9 ঃ $2x + 1 = x - 3$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা আৰু এই সমাধানক

(i) সংখ্যাৰেখাত (ii) স্থানাংক তলত প্ৰদৰ্শন কৰি দেখুওৱা

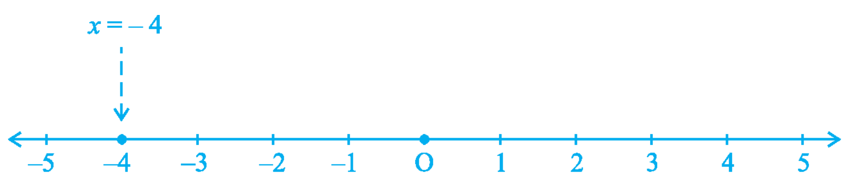
সমাধান ঃ সমীকৰণটো সমাধান কৰিলে পাওঁ

$2x + 1 = x - 3$

$2x - x = -3 - 1$

অৰ্থাৎ, $x = -4$

(i) এই সমাধানক সংখ্যাৰেখাত কিদৰে প্ৰদৰ্শন কৰা হয় তাকে চিত্ৰ 4.9অত দেখুওৱা হৈছে। ইয়াত $x = -4$ ক এটা চলকযুক্ত সমীকৰণ হিচাপে লোৱা হৈছে।



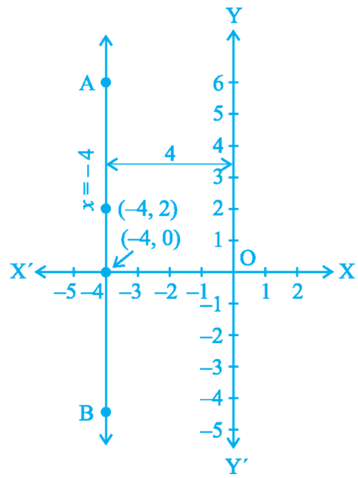
চিত্ৰ 4.9

(ii) আমি জানো যে $x = -4$ ক $x + 0.y = -4$ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি যিটো দুটা চলকযুক্ত এটা বৈখিক সমীকৰণ। ইয়াক এডাল ৰেখাৰে প্ৰকাশ কৰা হয়। এতিয়া yৰ বাবে সকলো

মানেই ল'ব পাৰি কাৰণ $0.y$ সদায় 0। কিন্তু x ৰ মানে সমীকৰণ $x = -4$ সিদ্ধ কৰিব লাগিব। সেই গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ দুটা সমাধান হ'ল $x = -4, y = 0$ আৰু $x = -4, y = 2$।

মন কৰিবা যে ABৰ লেখডাল y-অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ থকা এডাল সৰল ৰেখা আৰু এইডাল y-অক্ষৰ বাওঁহাতে 4 একক দূৰত আছে। (চিত্ৰ 4.10 লৈ মন কৰা)

এই ধৰণেৰে তোমালোকে x-অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ থকা এডাল ৰেখাৰ লেখ আঁকিব পাৰিবা যাৰ সমীকৰণটো হ'ব পাৰে $y = 3$ বা $0.x + 1.y = 3$ আৰ্হিৰ।



চিত্ৰ 4.10

অনুশীলনী 4.4

1. $y = 3$ৰ জ্যামিতিক উপস্থাপন উল্লেখ কৰা যদি ধৰা হয় যে, সমীকৰণটো
   (i) এটা চলকযুক্ত (ii) দুটা চলকযুক্ত
2. $2x + 9 = 0$ৰ জ্যামিতিক উপস্থাপন উল্লেখ কৰা যদি ধৰা হয় যে সমীকৰণটো
   (i) এটা চলকযুক্ত (ii) দুটা চলকযুক্ত

4.6 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাখিনি শিকিলা ঃ

1. যদি এটা সমীকৰণৰ আৰ্হি $ax + by + c = 0$, য'ত a, b, c বাস্তৱ সংখ্যা আৰু a আৰু b দুয়োটাই শূন্য নহয়, তেনেহ'লে ইয়াক দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ বোলা হয়।
2. দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ এটাৰ অসীম সংখ্যক সমাধান থাকে।
3. দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক প্ৰতিটো সমীকৰণৰ লেখ এডাল সৰল ৰেখা।
4. y-অক্ষৰ সমীকৰণ হ'ল $x = 0$ আৰু x-অক্ষৰ সমীকৰণ হ'ল $y = 0$।
5. $x = a$ সমীকৰণটোৰ লেখ হ'ল y-অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ থকা এডাল সৰল ৰেখা।
6. $y = a$ সমীকৰণটোৰ লেখ হ'ল x-অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ থকা এডাল সৰল ৰেখা।
7. $y = mx$ আৰ্হিৰ সমীকৰণ এটাই মূলবিন্দুৰেদি যোৱা এডাল সৰল ৰেখা নিৰ্দেশ কৰে।
8. দুটা চলক যুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণ এটাৰ লেখডালৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দু সেই ৰৈখিক সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান। তদুপৰি, এটা ৰৈখিক সমীকৰণৰ প্ৰতিটো সমাধানেই সেই সমীকৰণৰ লেখডালৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দু।

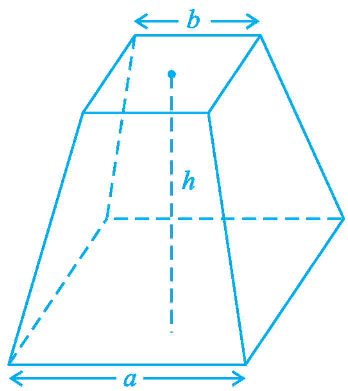
পঞ্চম অধ্যায়

ইউক্লিডৰ জ্যামিতিৰ পৰিচয় (Introduction to Euclid's Geometry)

5.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

জ্যামিতি (Geometry) শব্দটো গ্ৰীক ভাষাৰ শব্দ ‘geo’ অৰ্থাৎ পৃথিৱী (Earth) আৰু ‘metrein’ অৰ্থাৎ মাপ (to measure) ৰপৰা লোৱা হৈছে। ভাব হয়, জ্যামিতিৰ সৃষ্টি হৈছিল মূলতঃ মাটিৰ জোখমাখ ল’বলৈহে। ইজিপ্ত, বেবিলনীয়, চীন, ভাৰত, গ্ৰীক, ইনকাচ আদি প্ৰতিটো প্ৰাচীন সভ্যতাত গণিতৰ এই বিভাগটোৰ বিভিন্ন ৰূপত অধ্যয়ন চলিছিল। এই সভ্যতাসমূহৰ জনসাধাৰণ বিভিন্ন ব্যৱহাৰিক সমস্যাৰ সন্মুখীন হৈছিল আৰু তাৰ সমাধানৰ হেতু জ্যামিতি বিভিন্ন ৰূপত বিকশিত হৈছিল।

উদাহৰণস্বৰূপে, নীল নদীৰ পানীয়ে যেতিয়াই পাৰ বাগৰে, ই ভিন ভিন মালিকৰ ওচৰা-ওচৰিকৈ থকা পথাৰৰ মাজৰ সীমাও উটুৱাই লৈ যায়। এনে বানৰ পাছতে এই সীমাবোৰ পুনৰ নিৰ্ধাৰণ কৰিবলগীয়া হয়। এই উদ্দেশ্যে, সৰল ক্ষেত্ৰ-কালি নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আৰু সৰল নিৰ্মাণ কাৰ্য সমাপন কৰিবলৈ ইজিপ্তৰ অধিবাসীসকলে বহুতো জ্যামিতিক কৌশল আৰু নিয়ম উলিয়াই লৈছিল। শস্য ভাণ্ডাৰৰ আয়তন নিৰ্ণয় আৰু নলা আৰু পিৰামিড্ নিৰ্মাণতো তেওঁলোকে জ্যামিতিৰ জ্ঞান ব্যৱহাৰ কৰিছিল। উপৰি অংশ কাটি পেলোৱা এটা পিৰামিডৰ (চিত্ৰ 5.1 চোৱা) আয়তন উলিওৱাৰ নিৰ্ভুল সূত্ৰসমূহো তেওঁলোকে জানিছিল।



চিত্ৰ 5.1 ঃ উপৰি অংশ কাটি পেলোৱা এটা পিৰামিড

তোমালোকে জানা যে, পিৰামিড এটা গোটা বস্তু যাৰ ভূমি ত্ৰিভুজ, চতুৰ্ভুজ, বৰ্গ বা বহুভুজ আকৃতিৰ আৰু ইয়াৰ কাষৰ পৃষ্ঠ ত্ৰিভুজাকৃতিৰ আৰু এটা শীৰ্ষবিন্দুলৈ অভিসাৰী।

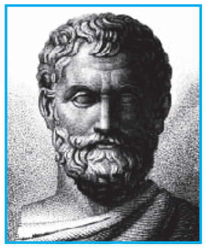
ভাৰত উপ-মহাদেশৰ মহেঞ্জুদাৰো আৰু হৰপ্পাৰ খননকাৰ্যসমূহতো সিন্ধু উপত্যকাৰ সভ্যতাত (প্ৰায় 3000 খ্ৰীঃ পূঃ) বিস্তৃতভাৱে জ্যামিতি ব্যৱহাৰ হোৱা পৰিলক্ষিত হয়। নগৰসমূহ যথেষ্ট উন্নত আৰু সুন্দৰভাৱে পৰিকল্পিত আছিল। উদাহৰণস্বৰূপে, পথবোৰ পৰস্পৰ সমান্তৰাল আৰু মাটিৰ তলত নৰ্দমাৰ ব্যৱস্থা আছিল। ঘৰবোৰত বিভিন্ন আকৃতিৰ বহুতো কোঠা আছিল। ইয়াৰ দ্বাৰা অনুমান কৰিব পাৰি যে নগৰখনৰ বাসিন্দাসকল জোখমাখ আৰু ব্যৱহাৰিক অংকশাস্ত্ৰত যথেষ্ট পাৰ্গত আছিল। নিৰ্মাণত ব্যৱহৃত ইটাবোৰ সুন্দৰভাৱে ভাটিত জ্বলোৱা আৰু তাৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু ডাঠৰ অনুপাত 4 : 2 : 1 পোৱা গৈছিল।

প্ৰাচীন ভাৰতত শুল্বসূত্ৰসমূহ (800 খ্ৰীঃ পূঃ ৰ পৰা 500 খ্ৰীঃ পূ) জ্যামিতিক নিৰ্মাণকাৰ্যৰ হাতপুথি হিচাপে ব্যৱহৃত হৈছিল। বেদী আৰু বৈদিক যাগ-যজ্ঞৰ ভেটি নিৰ্মাণ কাৰ্যৰ পৰাই বৈদিক যুগৰ জ্যামিতিৰ সূত্ৰপাত হৈছিল। পৱিত্ৰ হোমযজ্ঞৰ সুফল লাভ কৰিবলৈ হ'লে তাৰ ভেটি নিৰ্মাণ সুনিৰ্দিষ্ট আকাৰ আৰু ক্ষেত্ৰফল সম্পৰ্কীয় পৰামৰ্শাৱলীৰ মতে কৰিব লগা হৈছিল। ঘৰুৱা কাৰ্যৰ বাবে বৰ্গ আৰু বৃত্তাকাৰ ভেটি নিৰ্মাণ কৰাৰ পৰিৱৰ্তে ৰাজহুৱা পূজা-অৰ্চনাত আয়ত, ত্ৰিভুজ, ট্ৰেপিজিয়ামৰ যুটীয়া আকৃতিৰ ভেটি নিৰ্মাণ কৰিব লাগিছিল। শ্ৰীয়ন্ত্ৰ (অথৰ্ববেদত উল্লেখিত) নটা পৰস্পৰ ছেদী সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ সমষ্টি। এই ত্ৰিভুজকেইটা এনেদৰে সজোৱা হৈছে যে সিহঁতে 43 টা সহযোগী ত্ৰিভুজ সৃষ্টি কৰে। এই নিৰ্মাণ কাৰ্যত উপযুক্ত জ্যামিতি ব্যৱহাৰ কৰিছিল যদিও তাৰ অন্তৰালত থকা নীতি তেওঁলোকে ব্যাখ্যা কৰা নাছিল।

এই উদাহৰণসমূহৰপৰা ইয়াকে বুজিব পাৰি যে পৃথিৱীৰ প্ৰায় সকলো ঠাইতে জ্যামিতিৰ বিকাশ আৰু ব্যৱহাৰ হৈছিল। কিন্তু এই কাৰ্য কোনো প্ৰণালীবদ্ধ পদ্ধতিৰে কৰা হোৱা নাছিল। আমোদজনক কথাটো হ'ল এই জ্যামিতিৰ বিকাশসমূহৰ বাতৰি প্ৰাচীন কালত এটা প্ৰজন্মৰ পৰা অন্য প্ৰজন্মলৈ মুখেৰে, তাল গছৰ পাতত লিখি বা আন কিবা মাধ্যমেৰে প্ৰেৰণ কৰা হৈছিল। দেখা যায় যে ভাৰত আৰু ৰোমৰ দৰে বেবিলনীয়ৰ নিচিনা আন সভ্যতাতো জ্যামিতি এক প্ৰায়োগিকমুখী বিষয় হৈ আছিল। ইজিপ্তসকলে বিকাশ কৰা জ্যামিতি মূলতঃ ফলাফলৰ উক্তিৰে গঠিত আছিল। তাত কোনো পদ্ধতি সম্পৰ্কীয় সাধাৰণ নিয়ম নাছিল। বাস্তৱিকততে বেবিলন আৰু ইজিপ্তৰ লোকসকলে ঘাইকৈ প্ৰায়োগিক দিশত জ্যামিতি ব্যৱহাৰ কৰিছিল আৰু ইয়াক এক প্ৰণালীবদ্ধ বিজ্ঞান কৰি গঢ়ি তুলিবলৈ বিশেষ একো কৰা নাছিল। কিন্তু গ্ৰীচৰ দৰে সভ্যতাত কিছুমান নিৰ্মাণকাৰ্যই কিয় কাম কৰিছিল তাৰ যুক্তিৰ ওপৰত গুৰুত্ব প্ৰদান কৰিছিল। নিগমনাত্মক যুক্তিৰ সহায়ত আৱিষ্কৃত উক্তিসমূহৰ সভ্যতা প্ৰতিষ্ঠা কৰোতে গ্ৰীকসকলে অধিক মনোযোগ দিছিল। (পৰিশিষ্ট-I চোৱা)

সকলোৰে অৱগত হোৱাকৈ প্ৰথম প্ৰমাণ দাঙি ধৰাৰ কৃতিত্ব এজন গ্ৰীক গণিতজ্ঞ থেলেচকে প্ৰদান কৰা হয়। তেখেতৰ এই প্ৰমাণটো আছিল— এটা বৃত্তৰ ব্যাসে বৃত্তটোক দুটা সমান ভাগত

ভাগ কৰে। থেলেচৰ এজন বিখ্যাত ছাত্ৰ হ'ল 'পাইথাগোৰাচ' (572 খ্ৰীঃপূঃ) যাৰ বিষয়ে তোমালোকে সকলোৱে শুনিছা নিশ্চয়। 'পাইথাগোৰাচ' আৰু তেখেতৰ সহকৰ্মীসকলে বহুতো জ্যামিতিৰ ধৰ্ম আৱিষ্কাৰ কৰিছিল আৰু বহুলভাৱে জ্যামিতিৰ সূত্ৰসমূহৰ বিকাশ সাধন কৰিছিল। এই প্ৰক্ৰিয়া খ্ৰীঃ পূঃ 300 লৈ চলি আছিল। সেই সময়তে ইজিপ্তৰ আলেকজেণ্ড্ৰিয়াত 'ইউক্লিড' নামৰ গণিতৰ শিক্ষক এজনে তেতিয়ালৈকে জনাজাত হোৱা সকলো কৰ্ম গোটাই লৈ তাক তেখেতৰ বিখ্যাত গ্ৰন্থ 'এলিমেণ্টচ' (Elements)অত প্ৰণালীবদ্ধভাৱে সন্নিবিষ্ট কৰিছিল। তেখেতে 'এলিমেণ্টচ'খন 13 টা খণ্ডত বিভক্ত কৰি প্ৰতিটো খণ্ডকে একোখন পুথি হিচাপে নামকৰণ কৰিছিল। এই পুথিসমূহে সমগ্ৰ বিশ্বৰ নৱপ্ৰজন্মক জ্যামিতিৰ বিষয়বস্তু হৃদয়ংগম কৰাত প্ৰেৰণা যোগাই আহিছে।



থেলেচ (খৃষ্টপূৰ্ব 640-546)

চিত্ৰ 5.2

ইউক্লিড (খৃষ্টপূৰ্ব 325-265)

চিত্ৰ 5.3

এই অধ্যায়ত আমি ইউক্লিডৰ জ্যামিতিৰ বিশ্লেষণ সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম আৰু তাক বৰ্তমানৰ জ্যামিতিৰ লগত যোগসূত্ৰৰে বন্ধাৰ চেষ্টা কৰিম।

5.2 ইউক্লিডৰ সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য (Euclid's Definitions, Axioms and Postulates) ঃ

ইউক্লিডৰ সময়ৰ গ্ৰীক গণিতজ্ঞসকলে জ্যামিতিক তেওঁলোকে বসবাস কৰা পৃথিৱীখনৰ এটা বিমূৰ্ত আৰ্হিৰূপে ধাৰণা কৰিছিল। বিন্দু, ৰেখা, সমতল (বা পিঠি) আদিৰ ধাৰণা তেওঁলোকে চাৰিওফালে দেখা পোৱা বস্তুৰ পৰা লাভ কৰিছিল। চাৰিওকাষৰ ক্ষেত্ৰখন আৰু গোটা বস্তুসমূহ অধ্যয়ন কৰি গোটা বস্তুৰ এটা বিমূৰ্ত জ্যামিতিৰ ধাৰণা উদ্ভাৱন কৰিছিল। এটা গোটা বস্তুৰ আকাৰ, আকৃতি আৰু অৱস্থান আছে আৰু ইয়াক স্থানান্তৰ কৰিব পাৰি। ইয়াৰ কাষক পৃষ্ঠ বোলে। ইহঁতে ক্ষেত্ৰখনৰ এটা অংশৰপৰা আনটো অংশ পৃথক কৰে আৰু ইহঁতৰ স্থুলতা নাই বুলি ধৰা হয়। পৃষ্ঠৰ কাষ হ'ল বক্ৰ বা সৰলৰেখা। এই ৰেখাবোৰ বিন্দুত মিলিত হয়।

গোটা বস্তুৰপৰা বিন্দুলৈ থকা তিনিটা ঢাপ (গোটা বস্তু $\rightarrow$ পৃষ্ঠ $\rightarrow$ ৰেখা $\rightarrow$ বিন্দু)ৰ কথাটো বিবেচনা কৰা। প্ৰতিটো ঢাপতে আমি এটাকৈ পৰিসৰ হেৰুৱাও যাক 'মাত্ৰা'ও বোলে। সেইবাবে এটা গোটা বস্তুৰ তিনিটা মাত্ৰা আছে। অৰ্থাৎ গোটা বস্তু ত্ৰিমাত্ৰিক, পৃষ্ঠৰ মাত্ৰা দুই, ৰেখাৰ মাত্ৰা এক আৰু বিন্দুৰ মাত্ৰা নাই।

ইউক্লিডে এই উক্তিকেইটাক সংজ্ঞা হিচাপে সংক্ষিপ্ত ৰূপ দিয়ে। তেওঁ এই উক্তিসমূহ 23 টা

সংজ্ঞাত এলিমেণ্টচৰ প্ৰথম পুথিত ব্যাখ্যা কৰিছে। তলত ইয়াৰ কেইটামান দিয়া হ'ল—

1. এটা বিন্দুৰ কোনো অংশ নাই। (A **point** is that which has no part.)
2. এডাল ৰেখা হ'ল প্ৰস্থহীন দীঘ। (A **line** is breadthless length.)
3. ৰেখাৰ মূৰ দুটা হ'ল বিন্দু। (The ends of a line are points.)
4. এডাল সৰলৰেখা হ'ল এডাল ৰেখা যি তাৰ বিন্দুসমূহৰ সৈতে সমভাৱে বিৰাজমান। (A **straight line** is a line which lies evenly with the points on itself.)
5. এখন পৃষ্ঠৰ মাথোঁ দীঘ আৰু প্ৰস্থ আছে। (A **surface** is that which has length and breadth only.)
6. এখন পৃষ্ঠৰ কাষবোৰ হ'ল একোডাল ৰেখা। (The edges of a surface are lines.)
7. এখন সমতল হ'ল এখন তল যি তাৰ সৰলৰেখাবোৰৰ লগত সমভাৱে বিৰাজমান। (A **plane surface** is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.)

যদি তোমালোকে এই সংজ্ঞাবোৰ সূক্ষ্মভাৱে পৰ্যবেক্ষণ কৰা তেন্তে দেখিবা যে কিছুমান শব্দ যেনে— অংশ (part), প্ৰস্থ (breadth), দীঘ (length), সমভাৱে (equaly) আদিৰ আৰু অধিক পৰিষ্কাৰ ব্যাখ্যাৰ প্ৰয়োজন। উদাহৰণস্বৰূপে, তেখেতৰ বিন্দুৰ সংজ্ঞালৈ মন কৰা। এই সংজ্ঞাত 'এটা অংশ' কথাটোৰো সংজ্ঞাৰ আৱশ্যক। ধৰা হ'ল, তোমালোকে সংজ্ঞা দিলা যে 'এটা অংশ' হ'ল যি 'ক্ষেত্ৰ' আগুৰি থাকে, তেতিয়া আকৌ ক্ষেত্ৰৰ সংজ্ঞাৰ প্ৰয়োজন। সেইবাবে কিবা এটা সংজ্ঞা দিওঁতে আন বহুতো শব্দৰ সংজ্ঞা দিয়াৰ প্ৰয়োজন আহি পৰে আৰু সীমাহীনভাৱে তোমালোকে এক সংজ্ঞাৰ শৃংখল পাবা। এনে কাৰণতে গণিতজ্ঞসকলে জ্যামিতিৰ কিছু পদ সংজ্ঞাহীনভাৱে ৰখাত ঐক্যমত প্ৰকাশ কৰে। যি কি নহওঁক, ওপৰৰ সংজ্ঞাই যিয়েই নুবুজাওক, এটা বিন্দুৰ জ্যামিতিক ধাৰণাৰ বাবে আমাৰ এক স্বতঃস্ফূৰ্ত উপলব্ধি আছে। সেইবাবে, যদিও ফুটটোৰো কিছু মাত্ৰা আছে তথাপি বিন্দু এটাক এটা 'ফুটে'ৰে বুজাও।

2 নং সংজ্ঞাটোতো আমি একেই সমস্যাৰ সন্মুখীন হৈছোঁ, কিয়নো ইয়াতো প্ৰস্থ আৰু দীঘ দুটা সংজ্ঞাহীন শব্দ ব্যৱহাৰ কৰিছোঁ। এই কাৰণতে অধ্যয়নৰ বাবে প্ৰস্তুত কৰা যিকোনো এক বিষয়ত কিছুমান শব্দ সংজ্ঞাহীনভাৱে ৰাখি দিয়া হয়। সেইবাবে, জ্যামিতিত এটা বিন্দু, এডাল ৰেখা আৰু এখন সমতল (ইউক্লিডৰ মতে সমতল পৃষ্ঠ)ক অসংজ্ঞাবদ্ধ পদৰূপে বিবেচনা কৰা হয়। একমাত্ৰ কথাটো হ'ল আমি এই পদসমূহক অন্তঃদৃষ্টিৰে উপস্থাপন কৰিব পাৰো বা 'ভৌতিক আৰ্হি'ৰ সহায়ত তাক ব্যাখ্যা কৰিব পাৰোঁ।

তেখেতৰ সংজ্ঞাৰ আঁত ধৰি, ইউক্লিডে কিছুমান ধৰ্মক সত্যৰূপে ধাৰণা কৰিছিল যাৰ প্ৰমাণ নিষ্প্ৰয়োজন। আচল অৰ্থত এই ধাৰণাকেইটা 'প্ৰত্যক্ষভাৱে চিৰসত্য'। তেওঁ এইবোৰক দুটা ভাগত ভাগ কৰিছিল— স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য (axioms and postulates)। তেওঁ 'স্বীকাৰ্য' পদটো ব্যৱহাৰ কৰিছিল জ্যামিতিৰ বিশেষ সত্য ধাৰণাসমূহৰ ক্ষেত্ৰত। 'সাধাৰণ ধাৰণা' (বা স্বতঃসিদ্ধ) শব্দটো তেখেতে গণিতৰ সকলো ক্ষেত্ৰৰে ধাৰণাৰ অৰ্থত ব্যৱহাৰ কৰিছিল, ই জ্যামিতিৰ লগত বিশেষভাৱে জড়িত নাছিল।

স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্যৰ বিষয়ে সবিশেষ পৰিশিষ্ট-I ত চোৱা।

তলত ইউক্লিডৰ কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ (**Euclid's axiom**) দিয়া হ'ল যিবোৰ অৱশ্যে তেওঁৰ ক্ৰমমতে নহয়—

(1) একেটা বস্তুৰ লগত সমান বস্তুবোৰৰ এটা আনটোৰ লগত সমান।
(2) সমান সমান বস্তুৰ লগত একে সমান বস্তু যোগ কৰিলে যোগফলবোৰ সমান হ'ব।
(3) সমান সমান বস্তুৰ পৰা একে পৰিমাণ বিয়োগ কৰিলে বিয়োগফলবোৰ সমান হ'ব।
(4) যিবোৰ বস্তু এটা আনটোৰ লগত সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যায়, সেইবোৰ পৰস্পৰ সমান।
(5) সম্পূৰ্ণ বস্তু এটা তাৰ অংশতকৈ ডাঙৰ।
(6) একে বস্তুৰ দুগুণবোৰ পৰস্পৰ সমান।
(7) একে বস্তুৰ আধাবোৰ পৰস্পৰ সমান।

এই 'সাধাৰণ ধাৰণা'সমূহ কোনো এক প্ৰকাৰৰ মান (magnitude)ৰ প্ৰথম ধাৰণাটো সমতলৰ আকাৰবোৰত প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে যদি এটা ত্ৰিভুজৰ কালি এটা আয়তৰ কালিৰ সৈতে সমান আৰু আয়তটোৰ কালি বৰ্গ এটাৰ কালিৰ সমান, তেন্তে ত্ৰিভুজটোৰ কালি বৰ্গটোৰ কালিৰো সমান।

একেজাতীয় মানৰ তুলনা আৰু যোগ কৰিব পাৰি কিন্তু ভিন্নজাতীয় মান তুলনা কৰিব নোৱাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, এডাল ৰেখা এটা আয়তৰ লগত যোগ কৰিব নোৱাৰি, একেদৰে এটা কোণ এটা পঞ্চভুজৰ লগত তুলনা কৰিব নোৱাৰি।

4 নং স্বতঃসিদ্ধটোৱে এইটোকে কয় যে যদি দুটা বস্তু সমৰূপ (অৰ্থাৎ সম্পূৰ্ণৰূপে একে হয়) তেন্তে সিহঁত সমান। আন কথাত প্ৰতিটো বস্তুৱেই নিজৰ লগত সমান। এইটো 'ছুপাৰপজিচন' (Superposition) নীতিৰ ব্যাখ্যা। 5 নং স্বতঃসিদ্ধটোৱে আমাক 'আনতকৈ ডাঙৰ' (বা বৃহত্তৰ) শব্দৰ সংজ্ঞা দিয়ে। উদাহৰণস্বৰূপে যদি এটা ৰাশি B, আন এটা ৰাশি A ৰ অংশ হয়, তেন্তে Aক B আৰু আন তৃতীয় এটা ৰাশি C ৰ সমষ্টিৰূপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। প্ৰতীকেৰে $A > B$ ৰ অৰ্থ হ'ল আমি এটা C পাম যাতে $A = B + C$.

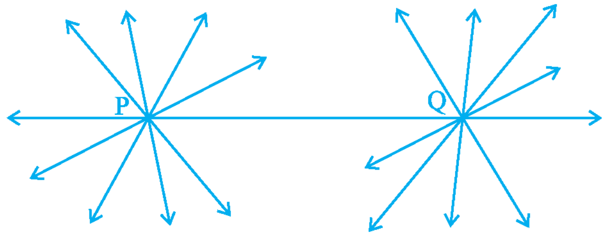
এতিয়া আমি ইউক্লিডৰ 5 টা স্বীকাৰ্য (**Euclid's five postulates**)ৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। সেইকেইটা হ'ল—

স্বীকাৰ্য 1 ঃ *এডাল সৰল ৰেখা এটা বিন্দুৰপৰা আন যিকোনো এটা বিন্দুলৈ টানিব পাৰি।*

মন কৰা, এই স্বীকাৰ্যই আমাক কৈছে যে অতি কমেও এডাল সৰলৰেখা দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, কিন্তু ই কোৱা নাই যে এই ক্ষেত্ৰত এনেকুৱা আৰু ৰেখা থাকিব নোৱাৰে। যি কি নহওক, তেওঁৰ কৰ্মৰাজিত ইউক্লিডে কোনো উল্লেখ নকৰাকৈয়ে প্ৰায়েই ধৰি লৈছে দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু সংযোগ কৰি মাথোঁ এডাল ৰেখা পোৱা যায়। আমি এই ফলটো তলৰ স্বীকাৰ্যটোৰ ৰূপত উল্লেখ কৰিব পাৰো—

স্বীকাৰ্য 5.1 ঃ প্ৰদত্ত দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে একক সৰলৰেখাহে পাব পাৰি।

P বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা কিমান ৰেখা Q ৰ মাজেৰেও যায়? (চিত্ৰ 5.4 চোৱা)। মাথোঁ এডাল, সেয়া হ'ল PQ। একেদৰে Qৰ মাজৰে যোৱা কিমান ৰেখা P মাজেৰেও যায়? মাথোঁ এডাল, সেয়া PQ। সেয়ে ওপৰৰ উক্তিটো স্ব-প্ৰামাণিক আৰু ফলত ইয়াক স্বতঃসিদ্ধ বুলি ধৰা হয়।

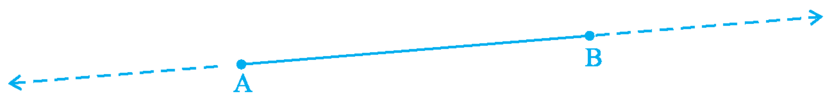


চিত্ৰ 5.4

স্বীকাৰ্য 2 ঃ *এডাল সীমিত ৰেখা (ৰেখাখণ্ড) অসীমলৈ বঢ়াই দিব পাৰি।*

মন কৰা যে আমি আজিকালি কোৱা ৰেখাখণ্ড শব্দটো ইউক্লিডে সীমিত ৰেখা বুলি কৈছিল। সেইবাবে বৰ্তমান সময়ত ব্যৱহৃত শব্দ মতে দ্বিতীয় স্বীকাৰ্যটোৰ বক্তব্য হ'ল,

এডাল ৰেখাখণ্ড দুই মূৰে বৃদ্ধি কৰি ৰেখা পাব পাৰি (চিত্ৰ 5.5)।



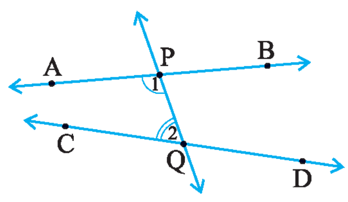
চিত্ৰ 5.5

স্বীকাৰ্য 3 ঃ *এটা বৃত্ত যিকোনো কেন্দ্ৰ আৰু যিকোনো ব্যাসাৰ্ধ লৈ আঁকিব পাৰি।*

স্বীকাৰ্য 4 ঃ *সকলো সমকোণ পৰস্পৰ সমান।*

স্বীকাৰ্য 5 ঃ *যদি এডাল ৰেখা আন দুডাল ৰেখাৰ ওপৰত আপতিত হৈ সৃষ্টি কৰা একেফালৰ অন্তঃকোণ দুটা একেলগে দুই সমকোণতকৈ সৰু হয় তেন্তে ৰেখা দুডাল অসীমভাৱে বঢ়াই দিলে যিফালৰ অন্তঃকোণৰ সমষ্টি দুই সমকোণতকৈ কম সেইফালে ৰেখা দুডাল মিলিত হ'ব।*

উদাহৰণ স্বৰূপে, চিত্ৰ 5.6 ত PQ ৰেখাডাল AB আৰু CD ৰেখাৰ ওপৰত এনেদৰে আপতিত হৈছে যাতে PQ ৰ বাঁওফালৰ অন্তঃকোণ 1 আৰু 2 ৰ সমষ্টি 180° তকৈ কম। সেয়ে শেষত AB আৰু CD য়ে PQৰ বাঁওফালে পৰস্পৰ ছেদ কৰিবগৈ।



চিত্ৰ 5.6

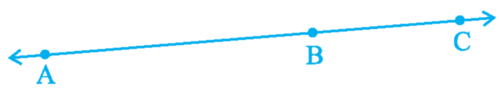
এতিয়া দেখা যায় যে স্বীকাৰ্য 5 বাকীকেইটাতকৈ অধিক জটিল। আনহাতে, স্বীকাৰ্য 1ৰ পৰা 4 লৈ এইকেইটা ইমান সহজ আৰু স্পষ্ট যে এইকেটাক 'স্ব-প্ৰামাণিক সত্য' বুলি ধৰা হয়। কিন্তু ইহঁতক প্ৰমাণ কৰিব নোৱাৰি। সেইবাবে এই উক্তিকেইটা প্ৰমাণহীনভাৱে গ্ৰহণ কৰা হৈছে (পৰিশিষ্ট I চোৱা)। স্বীকাৰ্য 5 ৰ জটিলতাৰ প্ৰতি লক্ষ্য ৰাখি পৰৱৰ্তী অনুচ্ছেদত ইয়াৰ প্ৰতি বিশেষ মনোযোগ দিয়া হৈছে।

আজিকালি স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য শব্দ দুটা পাৰস্পৰিক সাল-সলনি কৰি আৰু একেটা অৰ্থতে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। প্ৰকৃততে স্বীকাৰ্য এটা ক্ৰিয়াপদ। যেতিয়া আমি কওঁ যে আমি 'স্বীকাৰ্য কৰোঁহক' তেতিয়া আমি বুজো যে আমি কিছুমান উক্তি কৰিম যি বিশ্ব ব্ৰহ্মাণ্ডত পৰিলক্ষিত হোৱা সংঘটনৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত। ইয়াৰ সত্যতা বা সত্যাপন পাছতহে পৰীক্ষা কৰা হয়। যদি উক্তিটো সত্য বুলি প্ৰমাণিত হয় তাক স্বীকাৰ্য বুলি গ্ৰহণ কৰা হয়।

স্বতঃসিদ্ধবিলাকৰ এটা প্ৰণালীক সংগত (পৰিশিষ্ট I চোৱা) বোলা হয় যদিহে এই স্বতঃসিদ্ধসমূহৰপৰা এটাও উক্তি পোৱাটো অসম্ভৱ যি আন স্বতঃসিদ্ধ বা ইতিমধ্যে প্ৰমাণিত উক্তিৰ বিৰোধিতা কৰে। সেয়ে যেতিয়াই স্বতঃসিদ্ধৰ এটা প্ৰণালীৰ কথা কোৱা হয়, তেতিয়াই এই প্ৰণালীটো যে সংগত সেইটো নিশ্চিত কৰাটো প্ৰয়োজন।

ইউক্লিডে তেখেতৰ স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য প্ৰকাশ কৰাৰ পাছত এইবোৰৰ প্ৰয়োগেৰে আন আন ফলাফল প্ৰমাণ কৰি গৈছে। তাৰ পাছত এই ফলাফলবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি নিগমনাত্মক যুক্তিৰে আৰু কিছুমান ফলাফল প্ৰমাণ কৰি গৈছে। এইদৰে স্বীকাৰ্য প্ৰয়োগেৰে প্ৰমাণিত উক্তিসমূহক প্ৰতিজ্ঞা বা উপপাদ্য বোলা হয়। স্বীকাৰ্য স্বতঃসিদ্ধ, সংজ্ঞা আৰু ইতিমধ্যে প্ৰমাণিত উপপাদ্যৰ সহায়ত ইউক্লিডে 465 টা প্ৰতিজ্ঞা একে যুক্তিপূৰ্ণ শৃংখলতে প্ৰতিষ্ঠাপন কৰি গৈছে। জ্যামিতিৰ পৰৱৰ্তী অধ্যায় কেইটামানত কিছুমান উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত এই স্বীকাৰ্যবোৰ ব্যৱহাৰ কৰিবা। তলৰ উদাহৰণসমূহত ইউক্লিডে কিদৰে তেওঁৰ স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য কিছুমান ফলাফলৰ প্ৰমাণত প্ৰয়োগ কৰিছিল তাক আলোচনা কৰোঁহক।

উদাহৰণ 1 ঃ যদি A, B আৰু C এডাল ৰেখাৰ ওপৰৰ তিনিটা বিন্দু আৰু B, A আৰু Cৰ মধ্যৱৰ্তী বিন্দু তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে AB + BC = AC (চিত্ৰ 5.7 চোৱা)।



চিত্ৰ 5.7

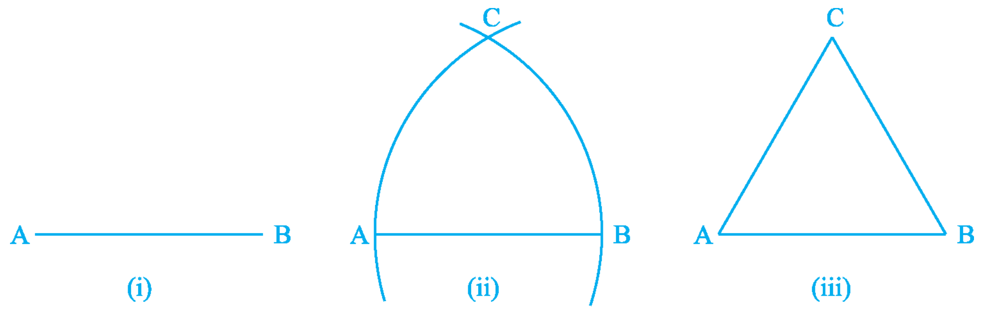
সমাধান ঃ চিত্ৰত AC, AB + BC ৰ সৈতে মিলি গৈছে। ইউক্লিডৰ স্বতঃসিদ্ধ (4) ৰ মতেও যিবোৰ বস্তুৰ এটা আনটোৰ লগত সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যায় সেইবোৰ সমান। সেইবাবে

$$AB + BC = AC$$

মন কৰিবা, এই সমাধানত ধৰি লোৱা হৈছে যে দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে একক ৰেখাহে পাব পাৰি।

উদাহৰণ 2 ঃ প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো প্ৰদত্ত ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ অংকন কৰিব পাৰি।

সমাধান ঃ ওপৰৰ উক্তিত যিকোনো দৈৰ্ঘ্যৰ এক ৰেখাখণ্ড দিয়া আছে, ধৰা ই AB। [চিত্ৰ 5.8(i) চোৱা]



চিত্ৰ 5.8

ইয়াত তোমালোকে কিছু অংকন কৰিব লাগিব। ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য 3 ৰ মতে তোমালোকে A বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি AB ব্যাসাৰ্ধ লৈ আৰু B বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি BA ব্যাসাৰ্ধ লৈ বৃত্ত অংকন কৰিব পাৰা [চিত্ৰ 5.8(ii) চোৱা]। দুয়োটা বৃত্তই পৰস্পৰ C বিন্দুত (ধৰোঁহক) মিলিত হৈছে। এতিয়া AC আৰু BC সংযোগ কৰা যাতে ΔABC পোৱা [চিত্ৰ 5.8(iii) চোৱা]। এতিয়া তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে ত্ৰিভুজটো সমবাহু অৰ্থাৎ $AB = AC = BC$।

এতিয়া, $AB = AC$, কাৰণ ইহঁত একে বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ। ....(1)

সেইদৰে $AB = BC$ (একে বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ) ....(2)

এতিয়া এই দুয়োটা তথ্য আৰু ইউক্লিডৰ স্বতঃসিদ্ধ মতে, একে বস্তুৰ লগত সমান বস্তুবোৰ পৰস্পৰ সমান। সেয়ে, $AB = AC = BC$। গতিকে ΔABC এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ।

মন কৰা, ইয়াত ইউক্লিডে ক'তো উল্লেখ নকৰাকৈ ধৰিছে যে A আৰু B বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি আঁকা বৃত্ত দুটাই পৰস্পৰ এটা বিন্দুত মিলিত হ'ব।

এতিয়া আমি এটা উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰিম যিটো সঘনাই আন ফলাফলতো ব্যৱহাৰ হয়।

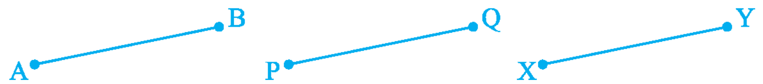
উপপাদ্য 5.1 ঃ *দুডাল নিৰ্দিষ্ট ৰেখাৰ এটাতকৈ বেছি সাধাৰণ বিন্দু থাকিব নোৱাৰে।*

প্ৰমাণ ঃ ইয়াত আমি দুডাল প্ৰদত্ত ৰেখা l আৰু m লওঁ। আমি দেখুৱাব লাগে যে ইহঁতৰ এটাহে সাধাৰণ বিন্দু আছে।

এতিয়াৰ বাবে ধৰা হওঁক, ৰেখা দুডাল দুটা ভিন্ন বিন্দুত কটাকটি কৰিছে আৰু বিন্দুকেইটা P, Q এনে ক্ষেত্ৰত তোমালোকে দুডাল ৰেখা পালা যি দুটা বিন্দু P আৰু Q ৰ মাজেৰে যায়। কিন্তু আমাৰ এই ধাৰণাটোৱে এটা স্বতঃসিদ্ধক বিৰোধিতা কৰিছে যাৰ মতে দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে এডালহে ৰেখা যাব পাৰে। গতিকে দুডাল ৰেখা দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যাব পাৰে বোলা আমাৰ প্ৰাৰম্ভিক ধাৰণাটো ভুল।

অনুশীলনী ঃ 5.1

1. তলৰ কোনবোৰ উক্তি সত্য আৰু কোনবোৰ অসত্য। তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে কাৰণ দেখুওৱা।
   (i) এটা বিন্দুৰ মাজেৰে মাথোঁ এডাল ৰেখাহে পাব পাৰি।
   (ii) দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে অসীম সংখ্যক ৰেখা পাব পাৰি।
   (iii) এডাল সীমিত ৰেখাখণ্ডক অসীমভাৱে দুই মূৰে বৃদ্ধি কৰিব পাৰি।
   (iv) যদি দুটা বৃত্ত সমান, তেন্তে সিহঁতৰ ব্যাসাৰ্ধও সমান।
   (v) চিত্ৰ 5.9 ত যদি AB = PQ আৰু PQ = XY, তেন্তে AB = XY.



চিত্ৰ 5.9

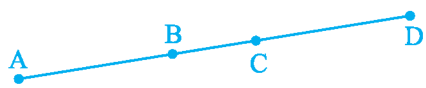
2. তলৰ প্ৰতিটো পদৰ সংজ্ঞা দিয়া। তাত কিবা আন পদ আছে নেকি যাৰ প্ৰথমে সংজ্ঞা দিয়াৰ প্ৰয়োজন? সেইবোৰ কি আৰু তুমি কেনেকৈ সেইবোৰ সংজ্ঞা দিবা?
   (i) সমান্তৰাল ৰেখা (ii) লম্ব ৰেখা (iii) ৰেখাখণ্ড
   (iv) এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ (v) বৰ্গ।

3. তলত দিয়া স্বীকাৰ্য দুটা বিবেচনা কৰা ঃ
   (i) প্ৰদত্ত দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু A আৰু B ৰ বাবে তৃতীয় এটা বিন্দু C পোৱা যায় যি A আৰু B ৰ মাজত অৱস্থিত।
   (ii) একে ৰেখাত নাথাকিবলৈ হ'লে অতি কমেও তিনিটা বিন্দু থাকে।
   এই স্বীকাৰ্য দুটাত কিবা সংজ্ঞাহীন পদ আছেনে? এই দুটা স্বীকাৰ্য সংগত নে? সিহঁতে ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য মানি লয়নে? ব্যাখ্যা কৰা।

4. যদি এটা বিন্দু C, দুটা বিন্দু A আৰু B ৰ মাজত থাকে যাতে AC = BC, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, AC = ½AB। চিত্ৰসহ ব্যাখ্যা কৰা।

5. 4 নং প্ৰশ্নত C বিন্দুক AB ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দু বোলে। প্ৰমাণ কৰা যে, যিকোনো ৰেখাখণ্ডৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে মধ্যবিন্দু থাকে।

6. চিত্ৰ 5.10 ত, যদি AC = BD, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে AB = CD



চিত্ৰ 5.10

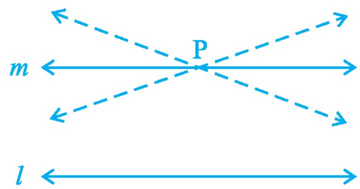
7. ইউক্লিডৰ স্বতঃসিদ্ধ তালিকাৰ স্বতঃসিদ্ধ 5 ক কিয় 'চিৰসত্য' বুলি বিবেচনা কৰা হয়? (মন কৰা যে প্ৰশ্নটো স্বীকাৰ্য 5 ৰ বিষয়ে নহয়)।

5.3 ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ সমতুল্য ভাষ্য (Equivalent Versions of Euclid's Fith Postulate) ঃ

ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো গণিতৰ ইতিহাসত যথেষ্ট তাৎপৰ্যপূৰ্ণ। অনুচ্ছেদ 5.2 ৰ পৰা পুনৰ ইয়াক মনত পেলোৱা। ইয়াৰপৰা বুজিব পাৰি যে যদি আপতিত ৰেখাৰ একে ফালৰ অন্তঃৰতী কোণৰ সমষ্টি 180° হয়, তেন্তে ৰেখা দুডালে পৰস্পৰ ছেদ নকৰে। এই স্বীকাৰ্যৰ বহুতো সমতুল্য ভাষ্য পোৱা যায়। তাৰে এটা হ'ল 'প্লেফেয়াৰৰ স্বতঃসিদ্ধ' (Playfair's Axiom) [1729 চনত স্কটলেণ্ডৰ গণিতজ্ঞ জন প্লেফেয়াৰে আগবঢ়াইছিল], সেয়া হ'ল—

'প্ৰতিডাল ৰেখা l আৰু l ৰ ওপৰত নথকা প্ৰতিটো বিন্দু P ৰ বাবে এডাল একক ৰেখা m পোৱা যায় যি l ৰ সমান্তৰাল আৰু P ৰ মাজেৰে যায়'।

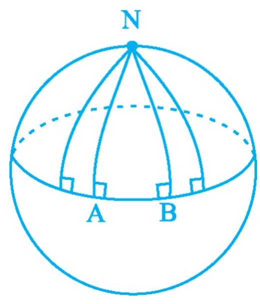
চিত্ৰ 5.11 ত তোমালোকে দেখিবা যে P ৰ মাজেৰে যোৱা সকলো ৰেখাৰ মাজত মাত্ৰ m ৰেখাডালহে l ৰ সমান্তৰাল।



চিত্ৰ 5.11

এই উক্তিটো তলত দিয়া ধৰণেও দিব পাৰি—

'দুডাল ভিন্ন পৰস্পৰক কটাকটি কৰা ৰেখা কেতিয়াও একেডাল ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'ব নোৱাৰে'।



চিত্ৰ 5.12

ইউক্লিডে তেওঁৰ প্ৰথম 28 টা উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰিবলৈ তেওঁৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো ব্যৱহাৰ কৰা নাছিল। তেওঁকে ধৰি ভালেমান গণিতজ্ঞই বিশ্বাস কৰিছিল যে পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো বাস্তৱিকতে এটা উপপাদ্য যাৰ প্ৰমাণ প্ৰথম চাৰিটা স্বীকাৰ্য আৰু আন আন স্বতঃসিদ্ধ প্ৰয়োগ কৰি দেখুৱাব পাৰি। কিন্তু উপপাদ্য হিচাপে পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো প্ৰমাণ কৰাৰ সকলো প্ৰচেষ্টাই বিফল হৈছিল। কিন্তু এই প্ৰচেষ্টাসমূহে আন বহুতো জ্যামিতিক তথ্যৰ উদ্ভাৱনৰ দৰে এক বৃহৎ সাফল্যৰ ফালে আগুৱাই দিছিল। এই জ্যামিতিক তথ্যসমূহ ইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰ পৰা যথেষ্ট পৃথক আছিল। এইবোৰক 'অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি' বোলা হয়। তেওঁলোকৰ সৃষ্টিক চিন্তনৰ ইতিহাসৰ এটা উল্লেখযোগ্য ঘটনা হিচাপে গণ্য কৰা হয়, কাৰণ তাৰ আগলৈকে সকলোৱে ভাবিছিল— ইউক্লিডৰ জ্যামিতিয়েই একমাত্ৰ জ্যামিতি আৰু বিশ্বব্ৰহ্মাণ্ড নিজেই ইউক্লিডীয়ান। আজিকালি আমি বাস কৰা ব্ৰহ্মাণ্ডৰ জ্যামিতি অ-ইউক্লিডীয়

বুলি প্ৰদৰ্শিত হৈছে। বাস্তৱিকতে ইয়াক ‘গোলকীয় জ্যামিতি’ (Spherical Geometry) বোলে। গোলকীয় জ্যামিতিত ৰেখাবোৰ সৰলৰেখা নহয়। সিহঁত বৃহৎ বৃত্তৰ অংশহে (বৃহৎ বৃত্ত হ’ল গোলকক কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা এখন সমতলে কাটিলে পোৱা বৃত্ত)।

চিত্ৰ 5.12 ত AN আৰু BN (দুয়োডাল এক বৃহৎ বৃত্তৰ অংশ) দুয়োডাল ৰেখা একে ৰেখা AB ৰ ওপৰত লম্ব। কিন্তু সিহঁত পৰস্পৰ মিলিত হৈছে, যদিও AB ৰেখাৰ একেফালৰ কোণৰ সমষ্টি 180^o তকৈ কম নহয় (অৰ্থাৎ ইয়াত $90^o + 90^o = 180^o$)। আকৌ মন কৰা যে ANB ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি 180^o তকৈ ডাঙৰ যিহেতু $\angle A + \angle B = 180^o$। সেয়েহে ইউক্লিডৰ জ্যামিতিৰ অস্তিত্ব কেৱল সমতলৰ আকাৰ বিলাকতহে থাকে। বক্ৰপৃষ্ঠত ইয়াৰ স্থিতি লোপ পায়।

আমি এতিয়া এটা উদাহৰণ লওঁ—

উদাহৰণ 3 ঃ তলৰ উক্তিটো লোৱাহঁক—

এযোৰ সৰলৰেখা পাব পাৰি যাতে সিহঁতে সকলো স্থানতে পৰস্পৰ সমদূৰত্বত থাকে। এই উক্তিটো ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ প্ৰত্যক্ষ ফল হয়নে? ব্যাখ্যা কৰা।

সমাধান ঃ যিকোনো এডাল ৰেখা l আৰু ইয়াৰ ওপৰত নথকা এটা বিন্দু P লোৱা হ’ল। এতিয়া প্লেফেয়াৰৰ স্বতঃসিদ্ধ মতে (যি পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ সমতুল্য) আমি জানো যে P ৰ মাজেৰে যোৱা এডাল একক ৰেখা m পোৱা যায়, যিডাল l ৰ সমান্তৰাল হয়।

এতিয়া , ৰেখা এডালৰপৰা বিন্দু এটাৰ দূৰত্ব হ’ল বিন্দুটোৰপৰা ৰেখাডাললৈ টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য। এই দূৰত্ব m ৰ যিকোনো বিন্দুৰপৰা l লৈ আৰু l ৰ যিকোনো বিন্দুৰপৰা m লৈ সদায় একে। সেয়ে, ৰেখা দুডাল সকলো স্থানতে সমদূৰত্বত অৱস্থান কৰে।

মন্তব্য ঃ পৰৱৰ্তী কেইটামান অধ্যায়ত যি জ্যামিতিৰ পাঠ পঢ়িবলৈ পাবা সেয়া ইউক্লিডৰ জ্যামিতি। কিন্তু আমি ব্যৱহাৰ কৰা স্বতঃসিদ্ধ আৰু উপপাদ্যবিলাক ইউক্লিডৰবোৰৰ পৰা বেলেগ বেলেগ হ’ব পাৰে।

অনুশীলনী ঃ 5.2

1. ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো সহজে বোধগম্য হোৱাকৈ তুমি কেনেকৈ পুনৰ লিখিবা?
2. ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যই সমান্তৰাল ৰেখাৰ অৱস্থিতি সূচায়নে? ব্যাখ্যা কৰা।

5.4 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা পঢ়িলা—

1. যদিও ইউক্লিডে বিন্দু, ৰেখা আৰু সমতলৰ সংজ্ঞা দিছিল তথাপি বিভিন্ন গণিতজ্ঞই সেয়া মানি নল’লে। সেয়ে এই পদকেইটা অসংজ্ঞাবদ্ধ ৰূপে বিবেচনা কৰা হয়।
2. স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকাৰ্যসমূহ কিছুমান ধাৰণা যিবোৰ স্পষ্টৰূপে চিৰসত্য উক্তি। ইয়াৰ প্ৰমাণ

দিয়া নহয়।

3. উপপাদ্যবোৰ হ'ল কিছুমান উক্তি যাক সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ, ইতিপূৰ্বে প্ৰমাণিত উক্তি আৰু নিৰ্গমনাত্মক যুক্তিৰে প্ৰমাণ কৰা হয়।

4. ইউক্লিডৰ কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ আছিল ঃ

(1) একে বস্তুৰ লগত সমান বস্তুবোৰৰ এটা আনটোৰ লগত সমান।

(2) সমান সমান বস্তুৰ লগত সমান বস্তু যোগ কৰিলে সমষ্টিবোৰ সমান হ'ব।

(3) সমান সমান বস্তুৰপৰা সমান বস্তু বিয়োগ কৰিলে ভাগশেষবোৰ সমান হ'ব।

(4) যিবোৰ বস্তুৰ এটা আনটোৰ লগত সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যায়, সেইবোৰ পৰস্পৰ সমান।

(5) এটা গোটা বস্তু তাৰ অংশতকৈ ডাঙৰ।

(6) একে বস্তুৰ দুগুণবোৰ পৰস্পৰ সমান।

(7) একে বস্তুৰ আধাবোৰ পৰস্পৰ সমান।

5. ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্যবোৰ আছিল ঃ

স্বীকাৰ্য 1 ঃ এডাল সৰলৰেখা এটা বিন্দুৰপৰা আন যিকোনো এটা বিন্দুলৈ টানিব পাৰি.

স্বীকাৰ্য 2 ঃ এডাল সীমিত ৰেখা (ৰেখাখণ্ড) অসীমভাৱে বঢ়াই দিব পাৰি।

স্বীকাৰ্য 3 ঃ এটা বৃত্ত যিকোনো কেন্দ্ৰ আৰু যিকোনো ব্যাসাৰ্ধ লৈ আঁকিব পাৰি।

স্বীকাৰ্য 4 ঃ সকলো সমকোণ পৰস্পৰ সমান।

স্বীকাৰ্য 5 ঃ যদি এডাল ৰেখা আন দুডাল ৰেখাৰ ওপৰত আপতিত হয় আৰু ই সৃষ্টি কৰা একেফালৰ অন্তঃকোণ দুটা একেলগে লৈ দুই সমকোণতকৈ কম হয়, তেন্তে ৰেখা দুডাল অসীমভাৱে বঢ়াই দিলে যি ফালৰ অন্তঃকোণৰ সমষ্টি দুই সমকোণতকৈ কম সেইফালে ৰেখা দুডাল মিলিত হ'ব।

6. ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ দুটা সমতুল্য উক্তি ঃ

(i) প্ৰতিডাল ৰেখা l আৰু ইয়াৰ ওপৰত নথকা প্ৰতিটো বিন্দু P ৰ বাবে এডাল একক ৰেখা m পোৱা যায় যি P বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু l ৰ সমান্তৰাল।

(ii) দুডাল নিৰ্দিষ্ট কটাকটি কৰা ৰেখা একেডাল ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'ব নোৱাৰে।

7. ইউক্লিডৰ প্ৰথম 4 টা স্বীকাৰ্য প্ৰয়োগ কৰি পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ প্ৰমাণ কৰাৰ সকলো প্ৰচেষ্টা বিফল হৈছিল। কিন্তু তাৰ যোগেদি আন বহুতো জ্যামিতিৰ সৃষ্টি হ'ল যাক অ'-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি (Non-Euclidean Geometry) বুলি কোৱা হয়।

U6R2T2

ষষ্ঠ অধ্যায়

ৰেখা আৰু কোণ (Lines and Angles)

6.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

পঞ্চম অধ্যায়ত তোমালোকে পঢ়িছা যে এডাল ৰেখা অংকন কৰিবৰ কাৰণে ন্যূনতম দুটা বিন্দুৰ প্ৰয়োজন হয়। তদুপৰি তোমালোকে কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ (axioms) পাইছিলা আৰু সেই বিলাকৰ সহায়ত তোমালোকে আন কিছুমান উক্তি প্ৰমাণ কৰিছিলা। এই অধ্যায়ত তোমালোকে দুডাল ৰেখাই পৰস্পৰক ছেদ কৰোঁতে সৃষ্টি হোৱা কোণৰ ধৰ্মৰ বিষয়ে পঢ়িবলৈ পাবা। তদুপৰি, দুডাল বা ততোধিক পৰস্পৰ সমান্তৰাল ৰেখাক এডাল ৰেখাই কিছুমান বিন্দুত ছেদ কৰোঁতে সৃষ্টি হোৱা কোণৰ ধৰ্মৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ব। এইবিলাকৰ উপৰি এই ধৰ্মসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি নিগমনাত্মক অনুধাৱনৰ (পৰিশিষ্ট 1 চোৱা) সহায়ত কিছুমান উক্তি প্ৰমাণ কৰিবলৈ পাবা। এনেধৰণৰ উক্তিবিলাক তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত কিছুমান কাৰ্য (activities) হিচাপে সত্যাপন কৰিছিলা।

তোমালোকে দৈনন্দিন জীৱনত দেখিছা যে সমতলৰ দাঁতি বা প্ৰান্তবিলাকে বিভিন্ন ধৰণৰ কোণ সৃষ্টি কৰে। সমতলৰ সহায়ত এই একেধৰণৰ আৰ্হি সাজিবলৈ তোমালোকক কোণ সম্পৰ্কীয় বিশদ জ্ঞানৰ প্ৰয়োজন। উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰা তুমি স্কুলৰ প্ৰদৰ্শনীত দিবৰ বাবে বাঁহৰ কাঠিৰে এটা জুপুৰী ঘৰৰ মডেল সাজিব বিচাৰিছা। কল্পনা কৰাচোন তুমি এইটো কেনেকৈ সাজিবা? তুমি কিছুমান কাঠি (বা শলা) পৰস্পৰ সমান্তৰালকৈ আৰু কিছুমান এঢলীয়াকৈ ৰাখিব লাগিব। যেতিয়া কোনো স্থাপতিবিদে কেইবা মহলীয়া অট্টালিকাৰ নক্সা তৈয়াৰ কৰিবলগীয়া হয় তেতিয়া তেওঁ ৰেখাবিলাক বিভিন্ন কোণত কটাকটি কৰাকৈ আৰু সমান্তৰালভাৱে থকাকৈ আঁকিবলগীয়া হয়। ৰেখা আৰু কোণ সম্পৰ্কীয় ধৰ্মবোৰ নজনাকৈ তেওঁ অট্টালিকাৰ নক্সা আঁকিব পাৰিব বুলি ভাবানে?

বিজ্ঞানত পোহৰৰ ধৰ্ম পঢ়োঁতে তোমালোকে ৰশ্মিৰ চিত্ৰ আঁকিছিলা। উদাহৰণস্বৰূপে পোহৰৰ ৰশ্মি এটা মাধ্যমৰপৰা আন এটা মাধ্যমত প্ৰৱেশত পোহৰৰ প্ৰতিসৰণৰ ধৰ্ম পঢ়িবলৈ তোমালোকে কটাকটি কৰা ৰেখা আৰু সমান্তৰাল ৰেখাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰিছিলা। যেতিয়া দুটা বা ততোধিক বলে

কোনো বস্তুৰ ওপৰত ক্ৰিয়া কৰে, তেতিয়া বলৰ সামূহিক প্ৰভাৱ অধ্যয়ন কৰাৰ বাবে সদৃশ ৰেখাখণ্ডৰে বলসমূহ বুজোৱা একোটা চিত্ৰ তোমালাকে অংকন কৰা। সেই সময়ত ৰশ্মি (বা ৰেখাখণ্ড)সমূহে কটাকটি কৰোঁতে বা সমান্তৰালকৈ থাকোতে যিবিলাক কোণ গঠন হয় সেইবিলাকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক তোমালোকে জানিব লাগিছিল। এটা স্তম্ভৰ উচ্চতা জানিবলৈ বা লাইট হাউছৰ পৰা এখন জাহাজৰ দূৰত্ব জানিবলৈ হ'লে অনুভূমিক ৰেখা আৰু দৃষ্টিৰেখাৰ মাজৰ কোণটো জানিব লাগে। এনে বহুতো উদাহৰণ দিব পৰা যায় য'ত ৰেখা আৰু কোণ ব্যৱহাৰ হয়। জ্যামিতিৰ পৰৱৰ্তী অধ্যায়বিলাকত তোমালোকে ৰেখা আৰু কোণ সম্পৰ্কীয় ধৰ্মৰ ব্যৱহাৰ কৰি আৰু বহুতো দৰকাৰী ধৰ্ম উলিয়াব পাৰিবা।

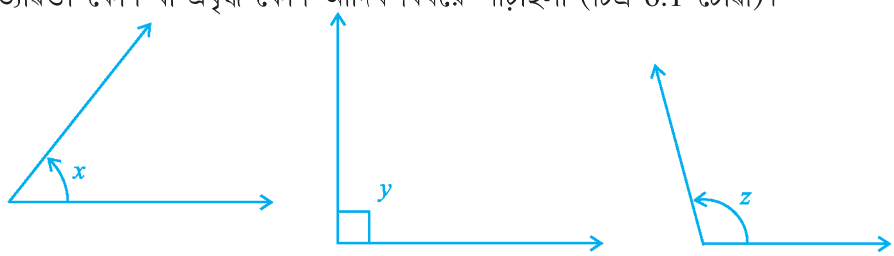
প্ৰথমে আমি আগৰ শ্ৰেণীত পাই অহা ৰেখা আৰু কোণৰ লগত সম্বন্ধ থকা কিছুমান পদ আৰু সংজ্ঞাৰ পুনৰ আলোচনা কৰিম।

6.2 মৌলিক পদসমূহ আৰু ইবোৰৰ সংজ্ঞা (Basic Terms and its Definitions) ঃ

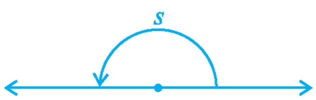
মনত পেলোৱা যে এডাল ৰেখাৰ দুটা প্ৰান্তবিন্দু থকা অংশ বা খণ্ড এটাক ৰেখাখণ্ড আৰু এটা প্ৰান্তবিন্দু থকা খণ্ড এটাক ৰশ্মি বোলে। মনত ৰাখিবা যে ৰেখাখণ্ড AB ক $\overline{AB}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ দীঘক AB ৰে বুজায়। এডাল 'ৰশ্মি AB'ক $\overrightarrow{AB}$ ৰে আৰু এডাল 'ৰেখা AB'ক $\overleftrightarrow{AB}$ ৰে দৰ্শোৱা হয়। সেয়ে হ'লেও আমি এই প্ৰতীক চিহ্ন বিলাক ব্যৱহাৰ নকৰো আৰু তাৰ সলনি ৰেখাখণ্ড AB, ৰশ্মি AB, দীঘ AB আৰু ৰেখা AB ক একেই প্ৰতীক AB ৰে সূচিত কৰিম। বিষয়বস্তুৰপৰাই এই বিলাকৰ অৰ্থ স্পষ্ট হ'ব। মাজে সময়ে সৰুফলাৰ বৰ্ণ l, m, n, আদিৰে ৰেখা একোডাল নিৰ্দেশ কৰা হ'ব।

যদি তিনিটা বা ততোধিক বিন্দু একেডাল ৰেখাতেই থাকে তেনেহ'লে সেই বিন্দুবিলাকক 'একৰেখীয় বিন্দু' বোলে আৰু অন্যথাই ইহঁত 'একৰেখীয় নহয়'।

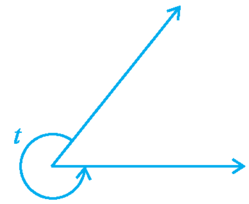
মনত পেলোৱা যে দুটা ৰশ্মি একেটা প্ৰান্তবিন্দুৰপৰাই উদ্ভৱ হ'লে এটা 'কোণ' গঠন হয়। যি দুটা ৰশ্মিয়ে কোণটোৰ সৃষ্টি কৰে সেই দুটাক কোণটোৰ 'বাহু' আৰু প্ৰান্ত বিন্দুটোক কোণটোৰ 'শীৰ্ষবিন্দু' বোলে। আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ, সমকোণ, সৰলকোণ আৰু প্ৰত্যাৱৰ্ত্তী কোণ বা প্ৰবৃদ্ধ কোণ আদিৰ বিষয়ে পঢ়িছিলা (চিত্ৰ 6.1 চোৱা)।



(i) সূক্ষ্মকোণ ঃ $0° < x < 90°$ (ii) সমকোণ ঃ $y = 90°$ (iii) স্থূলকোণ : $90° < z < 180°$



(iv) সৰলকোণ ঃ $s = 180°$



(v) প্ৰত্যাৱৰ্ত্তী বা প্ৰবৃদ্ধ ঃ $180° < t < 360°$

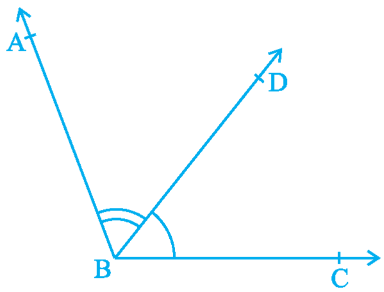
চিত্ৰ 6.1 ঃ **বিভিন্ন ধৰণৰ কোণ**

এটা সূক্ষ্মকোণৰ জোখ 0° আৰু 90° ৰ ভিতৰত থাকে আৰু এটা সমকোণ সঠিককৈ 90° ৰ সমান। এটা কোণ 90° তকৈ ডাঙৰ, কিন্তু 180° তকৈ সৰু হ'লে, ইয়াক স্থূলকোণ বোলে। তদুপৰি মনত পেলোৱা যে এটা সৰল কোণ 180° ৰ সমান। এটা কোণ 180° তকৈ ডাঙৰ, কিন্তু 360° তকৈ সৰু হ'লে তাক প্ৰত্যাৱৰ্ত্তী বা প্ৰবৃদ্ধ কোণ বোলে। আকৌ দুটা কোণৰ যোগফল 90° হ'লে কোণ দুটাক পূৰক কোণ বোলে আৰু কোণ দুটাৰ যোগফল 180° হ'লে সিহঁতক সম্পূৰক কোণ বোলে।

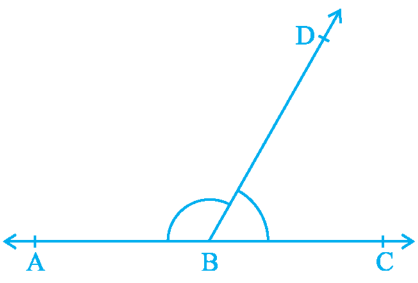
সেইদৰে, তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত সন্নিহিত কোণৰ বিষয়ে পঢ়িছা (চিত্ৰ 6.2 চোৱা)। দুটা কোণক সন্নিহিত কোণ বুলি কোৱা হয়, যেতিয়া সিহঁতৰ এটা উমৈহতীয়া (বা সাধাৰণ) শীৰ্ষবিন্দু, এডাল উমৈহতীয়া বাহু থাকে আৰু সিহঁতৰ আন দুডাল বাহু (যি দুডাল উমৈহতীয়া নহয়) উমৈহতীয়া বাহুডালৰ দুয়োফালে থাকে। চিত্ৰ 6.2 ত দেখুওৱা ∠ABD আৰু ∠DBC দুটা সন্নিহিত কোণ। BD ৰশ্মিডাল সিহঁতৰ উমৈহতীয়া বাহু আৰু B বিন্দুটো উমৈহতীয়া শীৰ্ষ বিন্দু। BA আৰু BC ৰশ্মি দুডাল উমৈহতীয়া বাহু নহয়। তদুপৰি, যেতিয়া দুটা কোণ সন্নিহিত হয়, তেতিয়া সেই দুটা কোণৰ যোগফল উমৈহতীয়া নোহোৱা বাহু দুটাই কৰা কোণটোৰ সমান। সেই কাৰণে আমি লিখিব পাৰো যে

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC.$$

মন কৰা যে ∠ABC আৰু ∠ABD সন্নিহিত কোণ নহয়। কিয়? কাৰণ ইহঁতৰ BD আৰু BC বাহু দুটা উমৈহতীয়া নহয়, যি দুটা উমৈহতীয়া বাহু BA ৰ একেফালেই আছে।

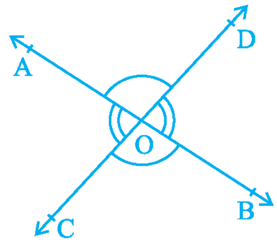


চিত্ৰ 6.2 ঃ **সন্নিহিত কোণ**



চিত্ৰ 6.3 ঃ **ৰৈখিক যুৰীয়া কোণ**

যদি চিত্ৰ 6.2ত দিয়া উমৈহতীয়া নোহোৱা BA আৰু BC বাহু দুটাই এডাল সৰলৰেখা গঠন কৰে তেনেহ'লে আকৃতিত দেখিবলৈ চিত্ৰ 6.3 ত দিয়াৰ দৰে হ'ব। এই অৱস্থাত, ∠ABD আৰু ∠DBC ক ৰৈখিক যুৰীয়া কোণ বুলি কোৱা হয়।

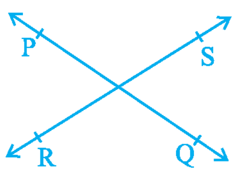


চিত্ৰ 6.4 ঃ **বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ**

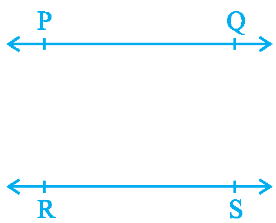
তোমালোকৰ বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণৰ বিষয়ে মনত আছে নিশ্চয়। ধৰা, AB আৰু CD ৰেখা দুটাই পৰস্পৰক O বিন্দুত কটাকটি কৰিলে বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ গঠন হয় (চিত্ৰ 6.4 চোৱা)। ইয়াত দুযোৰ বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ পোৱা যায়। ইয়াৰে এযোৰ ∠AOD আৰু ∠BOC। আনযোৰ উলিয়াব পাৰিবানে?

6.3 কটাকটি কৰা ৰেখা আৰু কটাকটি নকৰা ৰেখা (Intersecting Lines and Non-intersecting Lines) ঃ

এখন কাগজত PQ আৰু RS ৰেখা দুডাল অংকন কৰা। তোমালোকে এই ৰেখা দুডালক চিত্ৰ 6.5 (i) আৰু চিত্ৰ 6.5 (ii) ত দিয়াৰ দৰে দুটা বিভিন্ন ধৰণেৰে আঁকিব পাৰিবা।



(i) কটাকটি কৰা ৰেখা



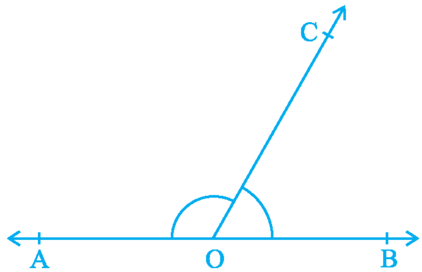
(ii) কটাকটি নকৰা (সমান্তৰাল) ৰেখা

চিত্ৰ 6.5 ঃ **বিভিন্ন প্ৰকাৰে অংকন কৰা দুডাল ৰেখা**

ৰেখাৰ ধাৰণা কি আছিল মনত পেলোৱা। এডাল ৰেখা দুয়ো দিশত অসীমলৈ প্ৰসাৰিত হৈ থাকে। চিত্ৰ 6.5 (i) ৰ PQ আৰু RS ৰেখা দুডাল কটাকটি কৰা ৰেখা আৰু চিত্ৰ 6.5 (ii) ৰ ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল। মন কৰিবা যে এই পৰস্পৰ সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ বেলেগ বেলেগ বিন্দুত অঁকা উমৈহতীয়া লম্ববিলাকৰ দীঘ সমান। এই সমান দীঘক সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব বুলি কোৱা হয়।

6.4 কোণৰ যোৰ (Pairs of Angles) ঃ

6.2 অনুচ্ছেদত তোমালোকে পূৰক কোণ, সম্পূৰক কোণ, সন্নিহিত কোণ, ৰৈখিক যুৰীয়া কোণ আদিৰ দৰে কোণৰ যোৰ কিছুমানৰ সংজ্ঞা পাইছা। তোমালোকে এই কোণ বিলাকৰ মাজত



চিত্ৰ 6.6 ঃ **বৈখিক যুৰীয়া কোণ**

থকা কিবা সম্পৰ্ক ভাবি পাইছানে? এডাল ৰেখাৰ ওপৰত যেতিয়া এডাল ৰশ্মি দণ্ডায়মান হয় তেতিয়া যিকেইটা কোণ উৎপন্ন হয় সেইকেইটাৰ মাজৰ সম্পৰ্ক আমি এতিয়া উলিয়াম। চিত্ৰ 6.6 ত দেখুওৱাৰ দৰে এডাল ৰেখাৰ ওপৰত এডাল ৰশ্মি দণ্ডায়মান হোৱাকৈ এটা চিত্ৰ আঁকা। ৰেখাডালক AB আৰু ৰশ্মিটোক OC বুলি লোৱা হ'ল। O বিন্দুত কি কি কোণ উৎপন্ন হৈছে? সেই কোণবিলাক হ'ল $\angle AOC$, $\angle BOC$ আৰু $\angle AOB$।

আমি $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ বুলি লিখিব পাৰিমনে? ....(1)

নিশ্চয় পাৰিম। (ইয়াৰ কাৰণ কি সন্নিহিত কোণৰ বিষয়ে থকা 6.2 অনুচ্ছেদ চোৱা)

$\angle AOB$ ৰ জোখ কিমান? এই কোণৰ জোখ হ'ল $180°$। (কিয়?) ....(2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা $\angle AOC + \angle BOC = 180°$ বুলি ক'ব পাৰিবানে? হয়, পাৰিবা। (কিয়?)

ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা আমি তলত দিয়া স্বতঃসিদ্ধটো লিখিব পাৰিম ঃ

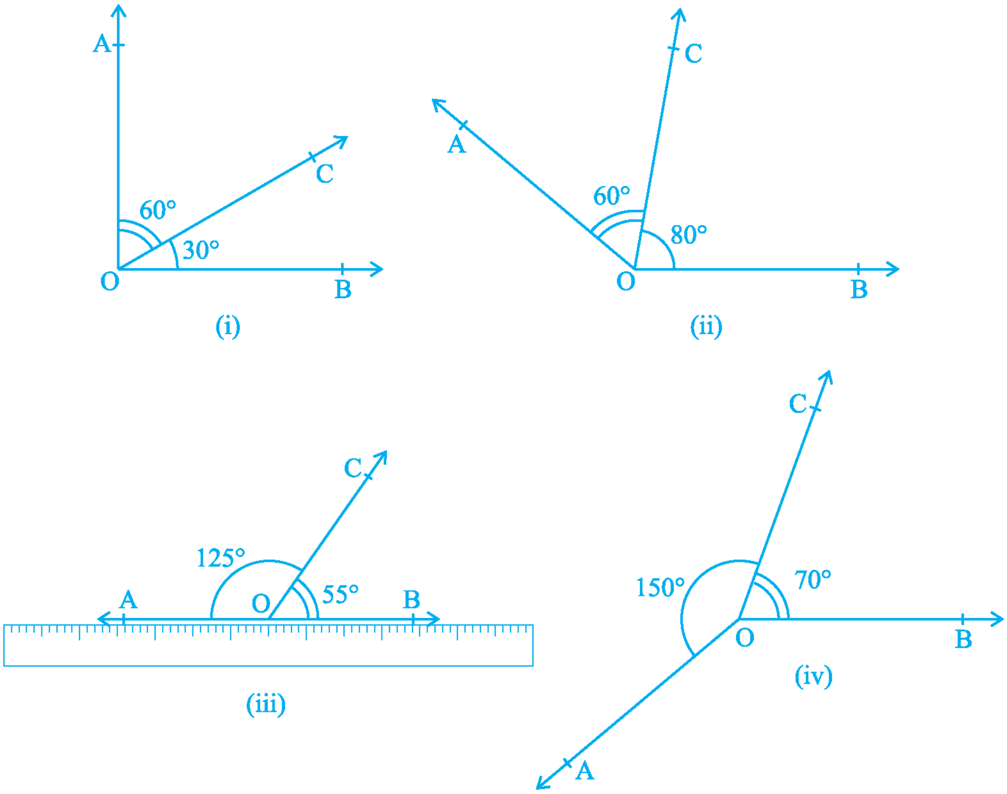
স্বতঃসিদ্ধ 6.1 ঃ *এডাল ৰেখাৰ ওপৰত এটা ৰশ্মি থিয় কৰাই ৰাখিলে সৃষ্টি হোৱা সন্নিহিত কোণ দুটাৰ সমষ্টি 180°।*

মনত পেলোৱা যে যেতিয়া দুটা সন্নিহিত কোণৰ সমষ্টি $180°$ হয় তেতিয়া কোণ দুটাক বৈখিক যুৰীয়া কোণ বুলি কয়।

স্বতঃসিদ্ধ 6.1 ত প্ৰদত্ত যে 'এডাল ৰেখাৰ ওপৰত এটা ৰশ্মি থিয় কৰাই ৰখা হয়'। এই 'প্ৰদত্ত' কথাটোৰ পৰা আমি এই সিদ্ধান্তলৈ আহিছো যে 'এইদৰে সৃষ্টি হোৱা দুটা সন্নিহিত কোণৰ সমষ্টি $180°$'। তোমালোকে 6.1 স্বতঃসিদ্ধটো আন ধৰণেৰে লিখিব পাৰিবানে? অৰ্থাৎ 6.1 স্বতঃসিদ্ধৰ সিদ্ধান্তটো 'প্ৰদত্ত' হিচাপে আৰু 'প্ৰদত্ত'টো 'সিদ্ধান্ত' হিচাপে ল'ব লাগে। এনে কৰিলে হ'ব ঃ

(A) যদি দুটা সন্নিহিত কোণৰ যোগফল $180°$ হয়, তেনেহ'লে এডাল ৰেখাৰ ওপৰত এটা ৰশ্মি থিয় হৈ থাকিব (অৰ্থাৎ যি দুটা ৰেখা উমৈহতীয়া নহয়, সেই দুটাই এডাল ৰেখা সৃষ্টি কৰে)

এতিয়া তোমালোকে দেখিছা যে স্বতঃসিদ্ধ 6.1 আৰু উক্তি (A) ভাবাৰ্থ অনুসৰি এটা আনটোৰ বিপৰীত। আমি ইয়াৰে এটাক আনটোৰ প্ৰতিলোম (বা বিপৰীত) বুলি কওঁ। উক্তি (A) সত্য হয় নে নহয় আমি নাজানো। ইয়াকে পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওঁক। চিত্ৰ 6.7 ত দিয়াৰ দৰে বিভিন্ন জোখৰ কিছুমান সন্নিহিত কোণ আঁকা। প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে যি দুটা বাহু উমৈহতীয়া নহয়, তাৰে এটাৰ কাষত স্কেল এডাল ৰাখা। এতিয়া এই উমৈহতীয়া নোহোৱা বাহু দুটাৰ আনটোও স্কেলডালৰ লগ লাগি আছে নে?



চিত্ৰ 6.7 ঃ বিভিন্ন জোখৰ সন্নিহিত কোণ

তোমালোকে দেখিবা যে একমাত্ৰ চিত্ৰ 6.7 (iii) তহে যি দুটা বাহু উমৈহতীয়া নহয় সেই দুয়োটা স্কেলডালৰ সৈতে লগলাগি আছে। অৰ্থাৎ A, O আৰু B বিন্দুকেইটা একে ৰেখাতেই আছে আৰু OC ৰশ্মি এই ৰেখাত থিয় হৈ আছে। তদুপৰি দেখিবা যে $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$। ইয়াৰ পৰা তোমালোকে এই সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰিবা যে (A) উক্তিটো সত্য। সেয়ে তোমালোকে তলত দিয়াৰ দৰে এটা স্বতঃসিদ্ধ লিখিব পাৰিবা ঃ

স্বতঃসিদ্ধ 6.2 ঃ *যদি দুটা সন্নিহিত কোণৰ সমষ্টি 180°, তেন্তে কোণ দুটাৰ যি দুটা বাহু উমৈহতীয়া নহয় সেই দুটাই এডাল ৰেখাৰ সৃষ্টি কৰে।*

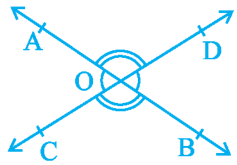
সুস্পষ্ট কাৰণত, ওপৰৰ দুয়োটা স্বতঃসিদ্ধক একেলগে 'ৰৈখিক যোৰৰ স্বতঃসিদ্ধ' বোলা হয়।

এতিয়া আমি দুটা ৰেখাই পৰস্পৰক ছেদ কৰা অৱস্থাটো নিৰীক্ষণ কৰিম।

মনত পেলোৱা, আগৰ শ্ৰেণীত পাইছিলা যে যেতিয়া দুডাল ৰেখাই পৰস্পৰক ছেদ কৰে, তেতিয়া বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ বিলাক সমান হয়। এই কথাটো এতিয়া প্ৰমাণ কৰিম। পৰিশিষ্ট-1ত এটা প্ৰমাণৰ বাবে থকা উপাদানবিলাক চোৱা আৰু তলৰ প্ৰমাণটো চাওঁতে সেইবিলাক মনত ৰাখিবা।

উপপাদ্য 6.1 ঃ *যদি দুডাল ৰেখাই পৰস্পৰ কটাকটি কৰে, তেনেহ'লে বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ বিলাক সমান।*

প্ৰমাণ ঃ ওপৰৰ উক্তিটোত দিয়া আছে যে 'দুডাল ৰেখাই পৰস্পৰ কটাকটি কৰে'। গতিকে, ধৰা হ'ল চিত্ৰ 6.8ত দিয়াৰ দৰে AB আৰু CD দুডাল ৰেখাই O বিন্দুত পৰস্পৰক কটাকটি কৰিছে। ইয়াৰ ফলত দুযোৰ বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণৰ সৃষ্টি হৈছে আৰু সেই দুযোৰ হ'ল—



চিত্ৰ 6.8 ঃ **বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ**

(i) ∠AOC আৰু ∠BOD (ii) ∠AOD আৰু ∠BOC.

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে ∠AOC = ∠BOD আৰু ∠AOD = ∠BOC।

এতিয়া, OA ৰশ্মিটো CD ৰেখাৰ ওপৰত থিয় হৈ আছে।

গতিকে, ∠AOC + ∠AOD = 180° (ৰৈখিক যোৰৰ স্বতঃসিদ্ধ) ....(1)

আমি লিখিব পাৰিমনে যে ∠AOD + ∠BOD = 180°? পাৰিম। (কিয়?) ....(2)

এতিয়া (1) আৰু (2)ৰপৰা লিখিব পাৰিম যে

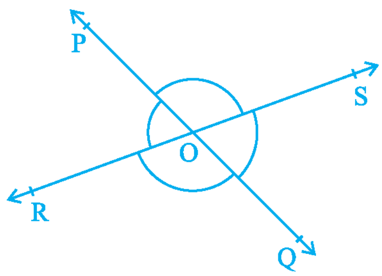
∠AOC + ∠AOD = ∠AOD + ∠BOD

ইয়াৰপৰা পাওঁ ∠AOC = ∠BOD (অনুচ্ছেদ-5.2 ৰ স্বতঃসিদ্ধ-3 চোৱা)

একেদৰেই প্ৰমাণ কৰিব পাৰিম যে ∠AOD = ∠BOC

আমি এতিয়া ৰৈখিক যোৰৰ স্বতঃসিদ্ধ আৰু উপপাদ্য 6.1 ৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি কিছুমান উদাহৰণ কৰিম।

উদাহৰণ 1 ঃ চিত্ৰ 6.9 অত PQ আৰু RS ৰেখা দুডালে পৰস্পৰক O বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। যদি ∠ POR : ∠ROQ = 5 : 7, তেনেহ'লে সকলোবিলাক কোণ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 6.9

সমাধান ঃ ∠POR + ∠ROQ = 180° (ৰৈখিক যুৰীয়া কোণ)

কিন্তু দিয়া আছে যে ∠POR : ∠ROQ = 5 : 7

গতিকে, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

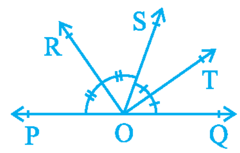
সেইদৰে, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

এতিয়া, ∠POS = ∠ROQ = 105° (বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ)

আৰু ∠SOQ = ∠POR = 75° (বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ)

উদাহৰণ 2 ঃ চিত্ৰ 6.10 ত, OS ৰশ্মিটো POQ ৰেখাৰ ওপৰত আছে। OR আৰু OT ৰশ্মি দুটা ক্ৰমে $\angle POS$ আৰু $\angle SOQ$ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক। যদি $\angle POS = x$, $\angle ROT$ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ OS ৰশ্মিটো POQ ৰেখাৰ ওপৰত আছে।



চিত্ৰ 6.10

গতিকে, $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

কিন্তু $\angle POS = x$, গতিকে $x + \angle SOQ = 180°$

সেয়ে, $\angle SOQ = 180° - x$

এতিয়া, OR ৰশ্মিয়ে $\angle POS$ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, গতিকে

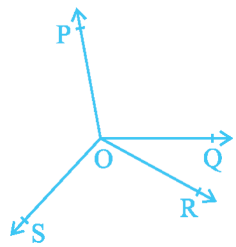
$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS = \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

সেইদৰে $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ = \frac{1}{2} \times (180° - x) = 90° - \frac{x}{2}$

এতিয়া, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT = \frac{x}{2} + 90 - \frac{x}{2} = 90°$

উদাহৰণ 3 ঃ চিত্ৰ 6.11 ত OP, OQ, OR আৰু OS চাৰিটা ৰশ্মি। প্ৰমাণ কৰা যে

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$



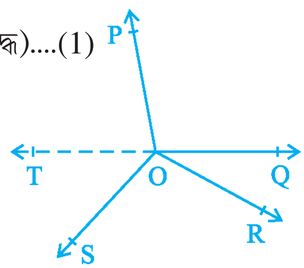
চিত্ৰ 6.11

সমাধান ঃ চিত্ৰ 6.11 ত চাৰিটা ৰশ্মি OP, OQ, OR বা OS ৰ যিকোনো এটাক তোমালোকে এটা বিন্দুলৈ পিছুৱাই বৰ্ধিত কৰিব লাগিব। ধৰা OQ ৰশ্মিটো T বিন্দুলৈ পিছুৱাই বৰ্ধিত কৰাত

TOQ ৰেখা পোৱা গ'ল। (চিত্ৰ 6.12 চোৱা)।

এতিয়া TOQ ৰেখাৰ ওপৰত OP ৰশ্মি থিয় হৈ আছে।

গতিকে, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (ৰৈখিক যোৰৰ স্বতঃসিদ্ধ)....(1)



চিত্ৰ 6.12

সেইদৰে, TOQ ৰেখাৰ ওপৰত OS ৰশ্মি আছে।

গতিকে, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ ....(2)

কিন্তু $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

গতিকে (2)ৰ পৰা

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ ....(3)

এতিয়া (1) আৰু (3) যোগ কৰিলে পাওঁ,

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ ....(4)

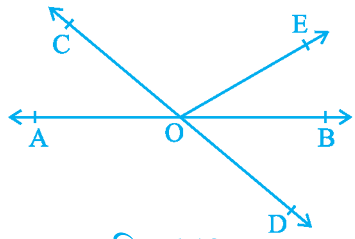
কিন্তু $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

গতিকে (4) ৰ পৰা

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

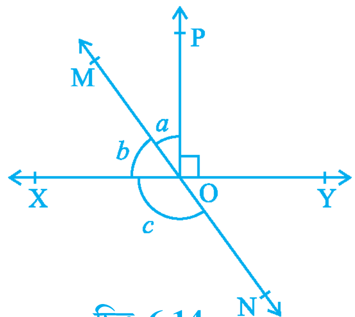
অনুশীলনী 6.1

1. চিত্ৰ 6.13 ত AB আৰু CD ৰেখাই O বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। যদি $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ আৰু $\angle BOD = 40°$, তেন্তে $\angle BOE$ আৰু প্ৰত্যাৱৰ্ত্তী $\angle COE$ নিৰ্ণয় কৰা।



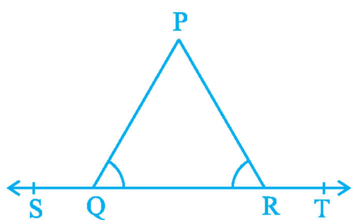
চিত্ৰ 6.13

2. চিত্ৰ 6.14 ত, XY আৰু MN ৰেখাই O বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। যদি $\angle POY = 90°$ আৰু $a : b = 2 : 3$, তেন্তে c নিৰ্ণয় কৰা।



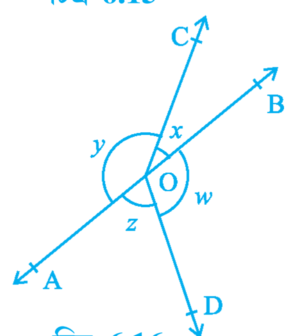
চিত্ৰ 6.14

3. চিত্ৰ 6.15ত, $\angle PQR = \angle PRQ$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে
$\angle PQS = \angle PRT$



চিত্ৰ 6.15

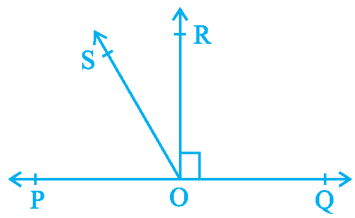
4. চিত্ৰ 6.16ত, যদি $x + y = w + z$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে AOB এডাল ৰেখা।



চিত্ৰ 6.16

5. চিত্ৰ 6.17ত, POQ এডাল ৰেখা। OR ৰশ্মি PQ ৰেখাৰ ওপৰত লম্ব। OP আৰু OR ৰশ্মিৰ মাজত থকা আন এডাল ৰশ্মি হ'ল OS। প্ৰমাণ কৰা যে

$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$.

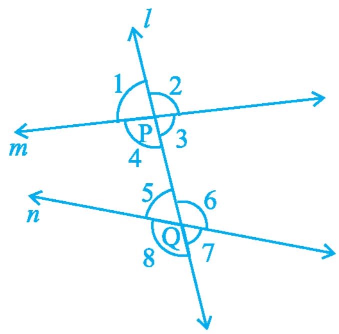


চিত্ৰ 6.17

6. দিয়া আছে যে $\angle XYZ = 64°$ আৰু XYক P বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া হৈছে। এই তথ্যৰ সহায়ত এটা চিত্ৰ অংকন কৰা। যদি YQ ৰশ্মিয়ে $\angle ZYP$ ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, তেন্তে $\angle XYQ$ আৰু প্ৰত্যাৱৰ্তী $\angle QYP$ নিৰ্ণয় কৰা।

6.5 সমান্তৰাল ৰেখা আৰু তিৰ্যক ৰেখা (Parallel Lines and a Transversal) ঃ

মনত পেলোৱা যে যেতিয়া এডাল ৰেখাই দুডাল বা ততোধিক ৰেখাক নিৰ্দিষ্ট বিন্দু কিছুমানত ছেদ কৰে তেতিয়া সেই ৰেখাডালক তিৰ্যক ৰেখা বোলে (চিত্ৰ 6.18 চোৱা)। l ৰেখাডালে m আৰু n ৰেখা দুডালক ক্ৰমে P আৰু Q বিন্দুত কাটিছে। সেই কাৰণে, l ৰেখাডাল m আৰু n ৰেখাৰ তিৰ্যক। লক্ষ্য কৰা যে P আৰু Q বিন্দু দুটা প্ৰতিটোতে চাৰিটাকৈ কোণৰ সৃষ্টি হৈছে।



চিত্ৰ 6.18

এই কোণকেইটাক $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 8$ হিচাপে নাম দিয়া হ'ল। (চিত্ৰ 6.18 চোৱা)

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ আৰু $\angle 8$ এই কোণকেইটাক বহিঃকোণ আৰু $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ আৰু $\angle 6$ এই কোণকেইটাক অন্তঃকোণ বোলে।

মনত পেলোৱা যে আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে এডাল তিৰ্যকে দুটা ৰেখাক ছেদ কৰোতে গঠন হোৱা কিছুমান যুৰীয়া কোণৰ নাম দিছিলা। সেইবিলাক তলত দিয়াৰ দৰে ঃ

(a) অনুৰূপ কোণ (Corresponding angles) ঃ

(i) $\angle 1$ আৰু $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ আৰু $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ আৰু $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ আৰু $\angle 7$

(b) একান্তৰ অন্তঃকোণ (Alternate interior angles) ঃ

(i) $\angle 4$ আৰু $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ আৰু $\angle 5$

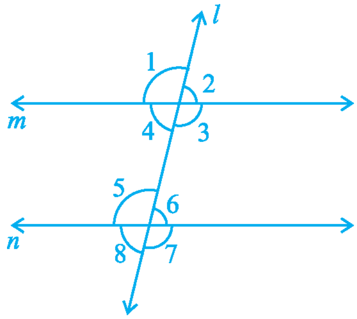
(c) একান্তৰ বহিঃকোণ (Alternate exterior angles) ঃ

(i) $\angle 1$ আৰু $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ আৰু $\angle 8$

(d) তিৰ্যকৰ একেফালে থকা অন্তঃকোণ (Interior angles on the same side of the transversal) ঃ

(i) $\angle 4$ আৰু $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ আৰু $\angle 6$

তিৰ্যকৰ একেফালে থকা অন্তঃকোণবিলাকক ক্ৰমিক অন্তঃকোণ (consecutive interior angles) বা মিত্ৰ অন্তঃকোণ (allied angles) বা সহঃ অন্তঃকোণ (co-interior angles)ও বোলা হয়। বহু সময়ত আকৌ একান্তৰ অন্তঃকোণৰ সলনি কেৱল একান্তৰ কোণ নামটোহে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।



চিত্ৰ 6.19

এতিয়া আমি এই যুৰীয়া কোণবিলাকৰ মাজত থকা সম্পৰ্ক উলিয়াম যেতিয়া m ৰেখাডাল n ৰেখাডালৰ লগত সমান্তৰাল হৈ থাকে। তোমালোকে জানা যে তোমালোকৰ টোকাবহীৰ ৰেখাবিলাক পৰস্পৰ সমান্তৰাল। গতিকে পেঞ্চিল আৰু স্কেলৰ সহায়ত এই ৰেখাবিলাকৰ যিকোনো দুডালৰ ওপৰত দুডাল সমান্তৰাল ৰেখা অংকন কৰা আৰু এই দুডালক কটাকৈ এডাল তিৰ্যক আঁকা (চিত্ৰ 6.19 দ্ৰষ্টব্য)।

এতিয়া এযোৰ অনুৰূপ কোণ জোখা আৰু সিহঁতৰ মাজৰ সম্পৰ্ক উলিওৱা। তোমালোকে পাবা যে $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ আৰু $\angle 3 = \angle 7$। ইয়াৰপৰা তোমালোকে তলত দিয়া স্বতঃসিদ্ধটো লিখিব পাৰিবা

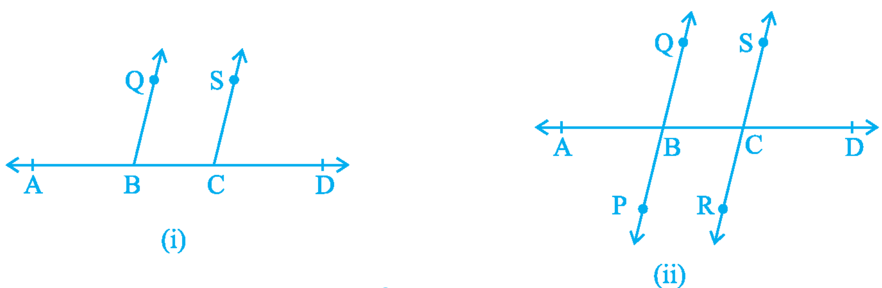
স্বতঃসিদ্ধ 6.3 ঃ *যদি এডাল তিৰ্যকে দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক ছেদ কৰে তেন্তে প্ৰত্যেক যোৰা অনুৰূপ কোণ সমান হ'ব।*

স্বতঃসিদ্ধ 6.3 টোক 'অনুৰূপ কোণৰ স্বতঃসিদ্ধ' বুলি কোৱা হয়। এতিয়া এই স্বতঃসিদ্ধৰ বিপৰীতটো তলত দিয়া হ'ল।

দুডাল সৰল ৰেখাক এডাল তিৰ্যকে ছেদ কৰিলে যদি এযোৰ অনুৰূপ কোণ সমান হয় তেন্তে সৰলৰেখা দুডাল সমান্তৰাল হ'ব।

এই উক্তিটো সত্য হ'বনে? ইয়াৰ যথাৰ্থতা তলত দিয়াৰ দৰে চাব পাৰি ঃ

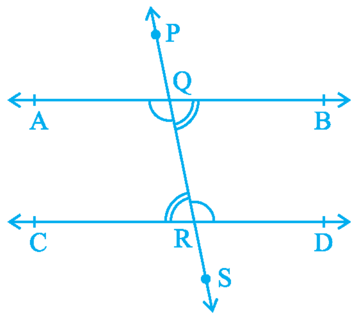
AD ৰেখাডাল অংকন কৰি তাতে B আৰু C দুটা বিন্দু লোৱা। চিত্ৰ 6.20(i)ত দিয়াৰ দৰে, B আৰু C বিন্দুত $\angle ABQ$ আৰু $\angle BCS$ কোণ দুটা পৰস্পৰ সমান হোৱাকৈ অংকন কৰা। QB আৰু SC ৰেখা দুডাল AD ৰ আনটো দিশে বঢ়াই দি PQ আৰু RS ৰেখা দুডাল গঠন কৰা [চিত্ৰ



চিত্ৰ 6.20

6.20 (ii) চোৱা]। তোমালোকে দেখা পাবা যে এই ৰেখা দুডালে পৰস্পৰক কটাকটি নকৰে। তোমালোকে PQ আৰু RS ৰ বিভিন্ন বিন্দুত উমৈহতীয়া লম্ব অংকন কৰা আৰু সিহঁতৰ জোখ লোৱা। তোমালোকে এই লম্ববিলাকৰ দীঘ সমানেই পাবা। গতিকে তোমালোকে এই সিদ্ধান্তলৈ আহিব পাৰিবা যে ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল। সেই কাৰণে অনুৰূপ কোণৰ স্বতঃসিদ্ধৰ বিপৰীতটোও সত্য। গতিকে আমি তলত দিয়া স্বতঃসিদ্ধটো পাওঁ ঃ

স্বতঃসিদ্ধ 6.4 ঃ *দুডাল ৰেখাক এডাল তিৰ্যকে ছেদ কৰিলে যদি এযোৰ অনুৰূপ কোণ সমান হয়, তেনেহ'লে ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল হ'ব।*



চিত্ৰ 6.21

এডাল তিৰ্যকে দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক ছেদ কৰোতে গঠন হোৱা একান্তৰ অন্তঃকোণৰ মাজৰ সম্পৰ্ক উলিয়াবলৈ অনুৰূপ কোণৰ স্বতঃসিদ্ধ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিম নে? চিত্ৰ 6.21ত AB আৰু CD সমান্তৰাল ৰেখা দুডালক PS তিৰ্যকে ক্ৰমে Q আৰু R বিন্দুত ছেদ কৰিছে।

এতিয়া ∠BQR = ∠QRC আৰু ∠AQR = ∠QRD বুলি লিখিব পাৰিমনে?

তোমালোকে জানা যে

∠PQA = ∠QRC (অনুৰূপ কোণৰ স্বতঃসিদ্ধ) ....(1)

∠PQA = ∠BQR হ'বনে? হয়, হ'ব। (কাৰণ কি?) ....(2)

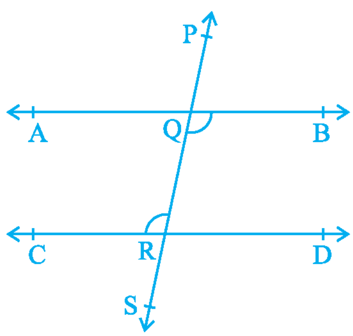
গতিকে (1) আৰু (2)ৰ পৰা ল'ব পাৰিবা যে

∠BQR = ∠QRC।

সেইদৰে, ∠AQR = ∠QRD।

এই ফলাফলসমূহ তলত দিয়াৰ দৰে এটা উপপাদ্য হিচাপে ক'ব পাৰি ঃ

উপপাদ্য 6.2 ঃ *যদি দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক এডাল তিৰ্যকে ছেদ কৰে, তেন্তে প্ৰত্যেকযোৰ একান্তৰ অন্তঃকোণ সমান হ'ব।*



চিত্ৰ 6.22

এতিয়া অনুৰূপ কোণৰ বিপৰীত স্বতঃসিদ্ধ ব্যৱহাৰ কৰি, যদি এযোৰ একান্তৰ আন্তঃকোণ সমান হয় তেন্তে ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল হ'ব বুলি দেখুৱাব পাৰিমনে? চিত্ৰ 6.22ত, PS তিৰ্যকে AB আৰু CD ৰেখাক ক্ৰমে Q আৰু R বিন্দুত ছেদ কৰিছে যাতে

∠BQR = ∠QRC। এতিয়া AB ∥ CD হ'বনে?

∠BQR = ∠PQA (কিয়?) ....(1)

কিন্তু ∠BQR = ∠QRC (দিয়া আছে) ....(2)

গতিকে, (1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি লিখিব পাৰো যে

$\angle PQA = \angle QRC$

কিন্তু ইহঁত অনুৰূপ কোণ। গতিকে AB || CD (অনুৰূপ কোণৰ বিপৰীত স্বতঃসিদ্ধ)

এই ফলাফলক তলত দিয়া উপপাদ্যটোৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

উপপাদ্য 6.3 ঃ *যদি এডাল তিৰ্যকে দুডাল ৰেখাক ছেদ কৰোতে এযোৰ একান্তৰ অন্তঃকোণ সমান হয়, তেন্তে ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল হ'ব।*

এই একে ধৰণেৰে তোমালোকে তিৰ্যকৰ একেফালে স্থিত অন্তঃকোণৰ লগত সম্পৰ্ক থকা তলত দিয়া উপপাদ্য দুটা পাবা।

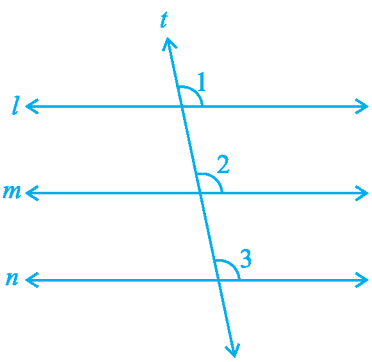
উপপাদ্য 6.4 ঃ *যদি দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক কোনো তিৰ্যকে ছেদ কৰে, তেন্তে তিৰ্যকৰ একেফালে থকা প্ৰত্যেকযোৰ অন্তঃকোণ সম্পূৰক (অৰ্থাৎ সিহঁতৰ সমষ্টি দুই সমকোণৰ সমান)।*

উপপাদ্য 6.5 ঃ *যদি এডাল তিৰ্যকে দুডাল ৰেখাক এনেদৰে কটাকটি কৰে যাতে তিৰ্যকৰ একেফালে উৎপন্ন হোৱা অন্তঃকোণ দুটা সম্পূৰক, তেন্তে সেই ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল হ'ব।*

তোমালোকৰ মনত পৰিব পাৰে যে আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে কাৰ্যৰ (activity)ৰ সহায়ত ওপৰৰ স্বতঃসিদ্ধ আৰু উপপাদ্যবিলাকৰ সত্যাসত্য নিৰূপণ কৰিছিলা। সেই কাৰ্যবিলাক ইয়াতো পুনৰ কৰি চাব পাৰা।

6.6 এডাল ৰেখাৰ সমান্তৰাল ৰেখা (Lines Parallel to the Same Line) ঃ

যদি দুডাল ৰেখা আন এডাল ৰেখাৰ সৈতে সমান্তৰাল হয় তেন্তে সেই প্ৰথম ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল হ'বনে? ইয়াকে এতিয়া পৰীক্ষা কৰি চাওঁ। চিত্ৰ 6.23 ত ৰেখা m || ৰেখা l আৰু ৰেখা n || ৰেখা l।



চিত্ৰ 6.23

ধৰা হ'ল, l, m আৰু n ৰেখাৰ বাবে t ৰেখাক তিৰ্যক হিচাপে অঁকা হ'ল। দিয়া আছে যে ৰেখা m || ৰেখা l আৰু ৰেখা n || ৰেখা l।

গতিকে $\angle 1 = \angle 2$ আৰু $\angle 1 = \angle 3$

(অনুৰূপ কোণৰ স্বতঃসিদ্ধ)

গতিকে $\angle 2 = \angle 3$ (কিয়?)

কিন্তু $\angle 2$ আৰু $\angle 3$ অনুৰূপ কোণ আৰু সিহঁত সমান।

গতিকে তোমালোকে ক'ব পাৰা যে ৰেখা m || ৰেখা n

(অনুৰূপ কোণৰ বিপৰীত উপপাদ্য)

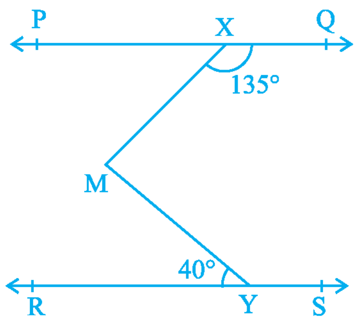
এই ফলাফলক তলত দিয়াৰ দৰে উপপাদ্য আকাৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

উপপাদ্য 6.6 ঃ *যদি দুডাল ৰেখা কোনো একে এডাল ৰেখাৰ সৈতে সমান্তৰাল, তেন্তে সেই ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল।*

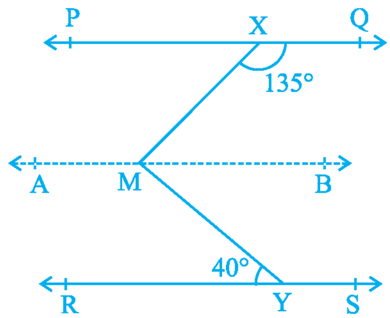
টোকা ঃ *ওপৰত দিয়া ধৰ্মটো দুডাল ৰেখাতকৈ অধিক ৰেখাৰ ক্ষেত্ৰতো প্ৰযোজ্য।*

এতিয়া আমি সমান্তৰাল ৰেখা সম্পৰ্কীয় কিছুমান উদাহৰণ সমাধান কৰিম।

উদাহৰণ 4 ঃ চিত্ৰ 6.24ত, যদি PQ || RS, $\angle MXQ = 135°$ আৰু $\angle MYR = 40°$ তেন্তে $\angle XMY$ উলিওৱা।



চিত্ৰ 6.24



চিত্ৰ 6.25

সমাধান ঃ ইয়াত, চিত্ৰ 6.25 ত দিয়াৰ দৰে M বিন্দুৰ মাজেদি যোৱাকৈ AB ৰেখাডাল PQৰ সমান্তৰালকৈ আঁকিব লগা হ'ল।

এতিয়া AB || PQ আৰু PQ || RS

সেই কাৰণে, AB || RS (কিয় ?)

এতিয়া $\angle QXM + \angle XMB = 180°$ (AB || PQ, XM তিৰ্যকৰ একেফালৰ অন্তঃকোণ)

কিন্তু $\angle QXM = 135°$

গতিকে $135° + \angle XMB = 180°$

সেয়ে, $\angle XMB = 45°$ ....(1)

এতিয়া $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, একান্তৰ কোণ)

গতিকে $\angle BMY = 40°$ ....(2)

(1) আৰু (2) যোগ কৰিলে পাবা যে $\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$

অৰ্থাৎ $\angle XMY = 85°$

উদাহৰণ 5 ঃ যদি এডাল তিৰ্যকে কোনো দুডাল ৰেখাক এনেভাৱে ছেদ কৰে যে এযোৰ অনুৰূপ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল।

সমাধান ঃ চিত্ৰ 6.26 ত, AD তিৰ্যকডালে PQ আৰু RS ৰেখাক ক্ৰমে B আৰু C বিন্দুত ছেদ কৰিছে। BE ৰশ্মিটো $\angle ABQ$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক আৰু CG ৰশ্মিটো $\angle BCS$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক আৰু BE || CG।

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে PQ || RS।

দিয়া আছে যে BE ৰশ্মিটো ∠ABQ ৰ সমদ্বিখণ্ডক

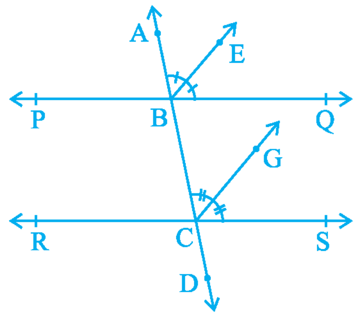
গতিকে $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ .....(1)

সেইদৰে, CG ৰশ্মিটো ∠BCS ৰ সমদ্বিখণ্ডক।

গতিকে $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ ....(2)

কিন্তু BE || CG আৰু AD তিৰ্যক।

সেই কাৰণে ∠ABE = ∠BCG (অনুৰূপ কোণৰ স্বতঃসিদ্ধ) ....(3)



চিত্ৰ 6.26

(1) আৰু (2)ক (3)ত প্ৰতিষ্ঠাপন কৰিলে পাবা যে

$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$ অৰ্থাৎ $\angle ABQ = \angle BCS$

কিন্তু এই কোণ দুটা AD তিৰ্যকে PQ আৰু RS ৰেখাক ছেদ কৰোতে উৎপন্ন হোৱা অনুৰূপ কোণ আৰু ইহঁত সমান।

গতিকে PQ || RS (অনুৰূপ কোণৰ বিপৰীত স্বতঃসিদ্ধ)

উদাহৰণ 6 ঃ চিত্ৰ 6.27 অত, AB || CD আৰু CD || EF। তদুপৰি EA ⊥ AB। যদি ∠BEF = 55°, তেন্তে x, y আৰু z ৰ মান উলিওৱা।

সমাধান ঃ $y + 55° = 180°$ (ED তিৰ্যকৰ একেফালৰ অন্তঃকোণ)

গতিকে, $y = 180° - 55° = 125°$

আকৌ $x = y$ (AB || CD, অনুৰূপ কোণৰ স্বতঃসিদ্ধ)

গতিকে $x = 125°$

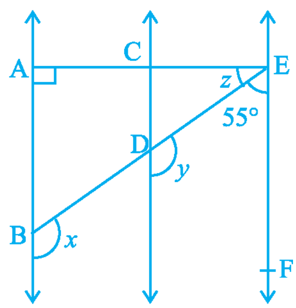
এতিয়া, যিহেতু AB || CD আৰু CD || EF, গতিকে AB || EF।

গতিকে ∠EAB + ∠FEA = 180°

(EA তিৰ্যকৰ একেফালৰ অন্তঃকোণ)

গতিকে, $90° + z + 55° = 180°$

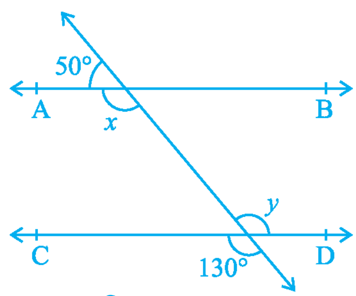
ইয়াৰপৰা পাওঁ, $z = 35°$



চিত্ৰ 6.27

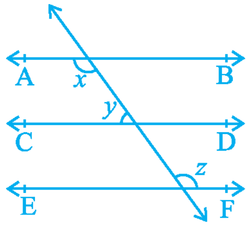
অনুশীলনী 6.2

1. চিত্ৰ 6.28 অত x আৰু y ৰ মান উলিওৱা আৰু তাৰ পাছত দেখুওৱা যে AB || CD.



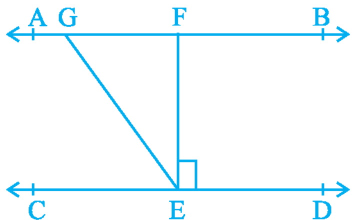
চিত্ৰ 6.28

2. চিত্ৰ 6.29 ত যদি AB ∥ CD, CD ∥ EF আৰু $y : z = 3 : 7$, তেন্তে x নিৰ্ণয় কৰা।



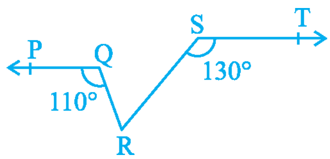
চিত্ৰ 6.29

3. চিত্ৰ 6.30 ত, যদি AB ∥ CD, EF ⊥ CD আৰু ∠GED = 126°, তেন্তে ∠AGE, ∠GEF আৰু ∠FGE উলিওৱা।



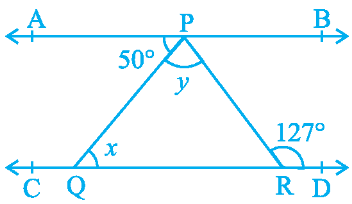
চিত্ৰ 6.30

4. চিত্ৰ 6.31 ত, যদি PQ ∥ ST, ∠PQR = 110° আৰু ∠RST = 130°, তেন্তে ∠QRS নিৰ্ণয় কৰা।
[ইংগিত ঃ R বিন্দুৰে যোৰাকৈ STৰ সমান্তৰালভাৱে থকাকৈ এডাল ৰেখা অংকন কৰা]



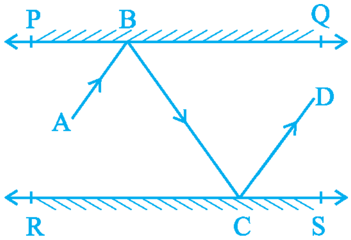
চিত্ৰ 6.31

5. চিত্ৰ 6.32 ত, যদি AB ∥ CD, ∠APQ = 50° আৰু ∠PRD = 127°, তেন্তে x আৰু y উলিওৱা।



চিত্ৰ 6.32

6. চিত্ৰ 6.33 ত, PQ আৰু RS দাপোণ দুখনক পৰস্পৰ সমান্তৰালকৈ ৰখা হৈছে। AB আপতিত ৰশ্মি PQ দাপোণৰ B বিন্দুত পৰিছে আৰু প্ৰতিফলিত হৈ BC পথেৰে গৈ RS দাপোণৰ C বিন্দুত পৰিছে। এই ৰশ্মি আকৌ CD দিশেৰে বিপৰীতক্ৰমত প্ৰতিফলিত হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে AB ∥ CD।



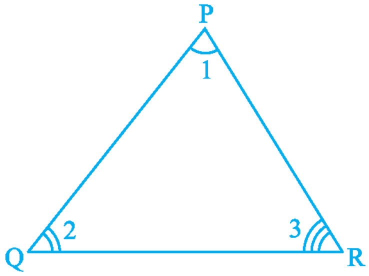
চিত্ৰ 6.33

6.7 ঃ ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি ধৰ্ম (Angle Sum Property of a Triangle) ঃ

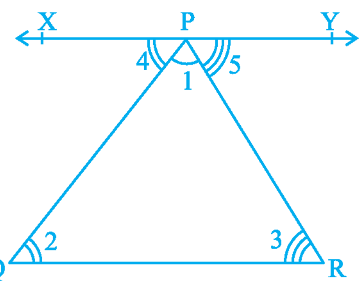
আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে কাৰ্যৰ জৰিয়তে শিকিছিলা যে এটা ত্ৰিভুজৰ আটাইকেইটা কোণৰ সমষ্টি 180°। এই উক্তিটো সমান্তৰাল ৰেখাৰ সম্পৰ্কত পোৱা স্বতঃসিদ্ধ আৰু উপপাদ্যবিলাকৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

উপপাদ্য 6.7 ঃ *এটা ত্ৰিভুজৰ কোণবিলাকৰ সমষ্টি 180°।*

প্ৰমাণ ঃ ওপৰৰ উক্তিত কি দিয়া আছে চোৱা যাওঁক। অৰ্থাৎ আমাৰ অনুমান (hypothesis) কি আৰু কি প্ৰমাণ কৰিব লাগে। আমাক দিয়া আছে যে PQR এটা ত্ৰিভুজ আৰু $\angle 1$, $\angle 2$ আৰু $\angle 3$ ইয়াৰ কোণ। (চিত্ৰ 6.34 চোৱা)। প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$। চিত্ৰ 6.35ত দেখুওৱাৰ দৰে QRৰ সমান্তৰালকৈ আৰু তাৰ বিপৰীত শীৰ্ষ P ৰে যোৱাকৈ XPY এডাল ৰেখা অংকন কৰা হ'ল যাতে আমি সমান্তৰাল ৰেখা সম্পৰ্কীয় ধৰ্মসমূহ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ।



চিত্ৰ 6.34



চিত্ৰ 6.35

এতিয়া XPY এডাল ৰেখা।

গতিকে $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ ....(1)

কিন্তু XPY ∥ QR আৰু PQ, PR দুডাল তিৰ্যক।

গতিকে $\angle 4 = \angle 2$ আৰু $\angle 5 = \angle 3$

(একান্তৰ কোণৰ যোৰ)

(1)ত $\angle 4$ আৰু $\angle 5$ প্ৰতিস্থাপন কৰি পাওঁ,

$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$

অৰ্থাৎ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

মনত পেলোৱা যে আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে এটা ত্ৰিভুজৰ বহিঃকোণ গঠনৰ বিষয়ে পঢ়িছিলা (চিত্ৰ 6.36 চোৱা)। QR বাহুক S বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল। $\angle PRS$ ক ΔPQRৰ এটা বহিঃকোণ বুলি কোৱা হয়।

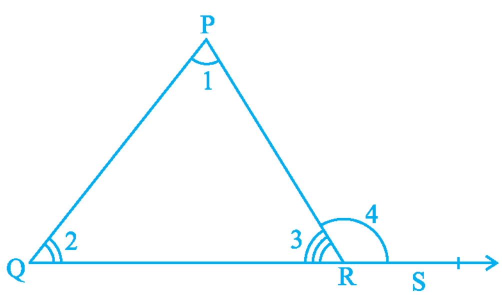
$\angle 3 + \angle 4 = 180°$ হ'বনে? (কিয়?) ....(1)

তদুপৰি, দেখিছা যে

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (কিয়?) ....(2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা তোমালোকে পাবা যে

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$



চিত্ৰ 6.36

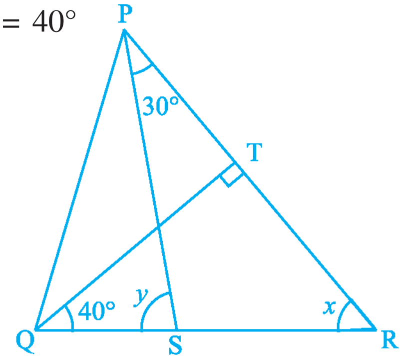
এই ফলাফলটোক তলত দিয়া উপপাদ্যটোৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

উপপাদ্য 6.8 ঃ *যদি এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বাহু বঢ়াই দিয়া হয়, তেন্তে উৎপন্ন হোৱা বহিঃকোণটো বিপৰীত অন্তঃকোণ দুটাৰ সমষ্টিৰ সমান।*

ওপৰৰ উপপাদ্যৰপৰা এইটো স্পষ্ট যে ত্ৰিভুজৰ বহিঃকোণ এটা বিপৰীত ফালে থকা প্ৰতিটো অন্তঃকোণতকৈ ডাঙৰ।

এতিয়া ওপৰৰ উপপাদ্যৰ ভিত্তিত কিছুমান উদাহৰণ লওঁ আঁহা।

উদাহৰণ 7 ঃ চিত্ৰ 6.37ত, যদি $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40°$ আৰু $\angle SPR = 30°$, তেন্তে x আৰু y উলিওৱা।



চিত্ৰ 6.37

সমাধান ঃ TQR ত্ৰিভুজত, $90° + 40° + x = 180°$

(ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি ধৰ্ম)

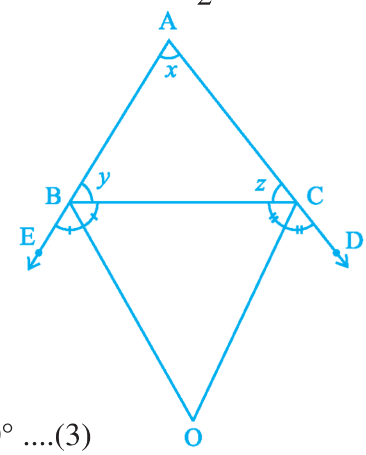
গতিকে $x = 50°$

এতিয়া, $y = \angle SPR + x$ (উপপাদ্য 6.8)

গতিকে, $y = 30° + 50° = 80°$

উদাহৰণ 8 ঃ চিত্ৰ 6.38ত, ΔABC ৰ AB আৰু AC বাহুক ক্ৰমে E আৰু D বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল। যদি $\angle CBE$ আৰু $\angle BCD$ সমদ্বিখণ্ডক দুডাল ক্ৰমে BO আৰু CO আহি O বিন্দুত মিলিত হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$.

সমাধান ঃ BO ৰশ্মিটো $\angle CBE$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্ৰ 6.38

গতিকে, $\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE = \frac{1}{2}(180° - y)$

$= 90° - \frac{y}{2}$ ....(1)

সেইদৰে, CO ৰশ্মিটো $\angle BCD$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক।

গতিকে, $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}(180° - z)$

$= 90° - \frac{z}{2}$ ....(2)

BOC ত্ৰিভুজৰ, $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ ....(3)

(3) ত (1) আৰু (2) প্ৰতিষ্ঠাপন কৰিলে পাবা যে

$$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$$

গতিকে $\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

বা, $\angle BOC = \frac{1}{2}(y + z)$ ....(4)

কিন্তু $x + y + z = 180°$ (ত্রিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি ধৰ্ম)

গতিকে $y + z = 180° - x$

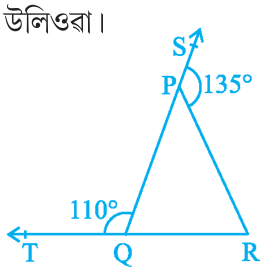
সেয়ে, (4) ৰ পৰা পাওঁ, $\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x) = 90° - \frac{x}{2} = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$

অনুশীলনী 6.3

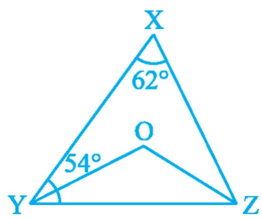
1. চিত্ৰ 6.39ত, ΔPQR ৰ QP আৰু RQ বাহু দুটাক ক্ৰমে S আৰু T বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল। যদি $\angle SPR = 135°$ আৰু $\angle PQT = 110°$, তেন্তে $\angle PRQ$ নিৰ্ণয় কৰা।

2. চিত্ৰ 6.40 ত $\angle X = 62°$, $\angle XYZ = 54°$। যদি ΔXYZ ৰ YO আৰু ZO ক্ৰমে $\angle XYZ$ আৰু $\angle XZY$ৰ সমদ্বিখণ্ডক, তেন্তে $\angle OZY$ আৰু $\angle YOZ$ উলিওৱা।

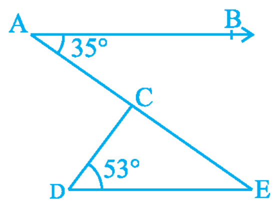
3. চিত্ৰ 6.41 ত, যদি AB ‖ DE, $\angle BAC = 35°$ আৰু $\angle CDE = 53°$, তেন্তে $\angle DCE$ উলিওৱা।



চিত্ৰ 6.39



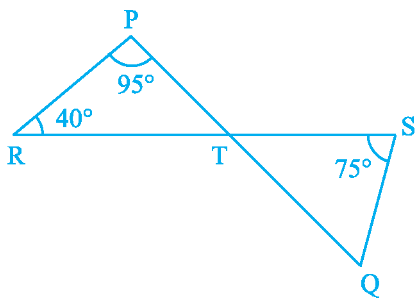
চিত্ৰ 6.40



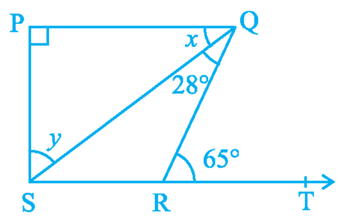
চিত্ৰ 6.41

4. চিত্ৰ 6.42 ত যদি PQ আৰু RS ৰেখাই T বিন্দুত কটাকটি কৰে যাতে $\angle PRT = 40°$, $\angle RPT = 95°$ আৰু $\angle TSQ = 75°$, তেন্তে $\angle SQT$ উলিওৱা।

5. চিত্ৰ 6.43 ত, যদি PQ ⊥ PS, PQ ‖ SR, $\angle SQR = 28°$ আৰু $\angle QRT = 65°$, তেন্তে x আৰু y ৰ মান উলিওৱা।



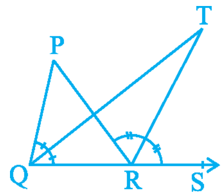
চিত্ৰ 6.42



চিত্ৰ 6.43

6. চিত্ৰ 6.44 ত, ΔPQRৰ QR বাহুক S বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল। যদি $\angle PQR$ আৰু $\angle PRS$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডাল T বিন্দুত মিলিত হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\angle QTR = \frac{1}{2}\angle QPR.$$



চিত্ৰ 6.44

6.8 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাখিনি পালা ঃ

1. যদি এডাল ৰেখাৰ ওপৰত এটা ৰশ্মি থিয় হৈ থাকে, তেন্তে উৎপন্ন হোৱা সন্নিহিত কোণ দুটাৰ সমষ্টি 180° হ'ব। ইয়াৰ বিপৰীতটোও সত্য হয়। এই ধৰ্মক ৰৈখিক যোৰৰ স্বতঃসিদ্ধ বোলে।
2. যদি দুডাল ৰেখাই পৰস্পৰক কটাকটি কৰে, তেন্তে বিপ্ৰতীপ শীৰ্ষক কোণ দুটা পৰস্পৰ সমান।
3. যদি এডাল তিৰ্যকে দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক ছেদ কৰে, তেন্তে
   (i) প্ৰত্যেক যোৰ অনুৰূপ কোণ পৰস্পৰ সমান।
   (ii) প্ৰত্যেক যোৰ একান্তৰ অন্তঃকোণ পৰস্পৰ সমান।
   (iii) তিৰ্যকৰ একেফালে থকা প্ৰত্যেক যোৰ অন্তঃকোণ পৰস্পৰ সম্পূৰক।
4. যদি এডাল তিৰ্যকে দুডাল ৰেখাক এনেভাৱে কাটে যাতে তলৰ যিকোনো এটা ঘটে
   (i) অনুৰূপ কোণ বিলাকৰ যিকোনো এযোৰ সমান হয়, বা
   (ii) একান্তৰ অন্তঃকোণ বিলাকৰ যিকোনো এযোৰ সমান হয়, বা
   (iii) তিৰ্যকৰ একেফালে থকা যিকোনো এযোৰ অন্তঃকোণ পৰস্পৰ সম্পূৰক হয় তেন্তে, সেই ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল।
5. যিবিলাক ৰেখা কোনো এডাল প্ৰদত্ত ৰেখাৰ সমান্তৰাল, সেই ৰেখাবিলাক পৰস্পৰ সমান্তৰাল।
6. এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিওটা কোণৰ যোগফল 180°।
7. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বাহু বঢ়াই দিয়া হয়, তেন্তে উৎপন্ন হোৱা বহিঃকোণটো বিপৰীত অন্তঃকোণ দুটাৰ যোগফলৰ সমান।

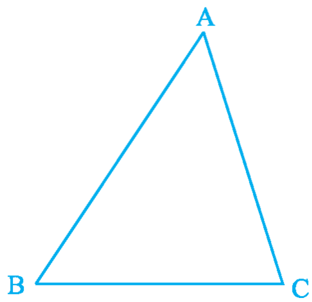
X5W9Z1

সপ্তম অধ্যায়

ত্ৰিভুজ (Triangles)

7.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

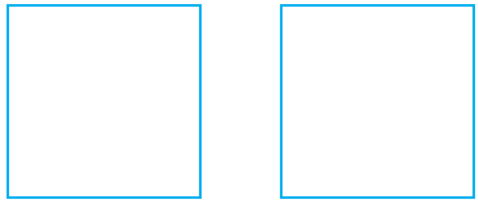
আগৰ শ্ৰেণীসমূহত তোমালোকে ত্ৰিভুজ আৰু ইয়াৰ নানাধৰণৰ ধৰ্মৰ বিষয়ে শিকি আহিছা। তোমালাকে জানা যে তিনিডাল কটাকটি কৰা ৰেখাই সৃষ্টি কৰা আৱদ্ধ ক্ষেত্ৰক ত্ৰিভুজ বোলা হয়। (‘ত্ৰি’ মানে ‘তিনি’)। এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহু, তিনিটা কোণ আৰু তিনিটা শীৰ্ষবিন্দু থাকে। উদাহৰণস্বৰূপে, চিত্ৰ 7.1 ত ΔABC ৰ দ্বাৰা চিহ্নিত ত্ৰিভুজ ABC ত AB, BC, CA হ’ল তিনিটা বাহু বা ভুজ, $\angle A, \angle B, \angle C$ তিনিটা কোণ আৰু A, B, C তিনিটা শীৰ্ষবিন্দু। অধ্যায়-6 অত তোমালোকে ত্ৰিভুজৰ কিছুমান ধৰ্মৰ বিষয়েও পাই আহিছা। এই অধ্যায়ত তোমালোকে ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা, সৰ্বসমতাৰ বিধি, ত্ৰিভুজৰ কেইটামান অতিৰিক্ত ধৰ্ম আৰু এটা ত্ৰিভুজত থকা অসমতাৰ বিষয়ে বিতংভাবে জানিব পাৰিবা। এই ধৰ্মসমূহৰ সৰহভাগকে তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীসমূহত ইতিমধ্যে প্ৰত্যায়ন বা সত্যাপন (verify) কৰি আহিছা। এতিয়া সেইবোৰৰ কেইটামানৰ আমি প্ৰমাণ আগবঢ়াম।



চিত্ৰ 7.1

7.2 ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা (Congruence of Triangles) ঃ

তোমালোকে নিশ্চয় লক্ষ্য কৰিছা যে একে আকাৰৰ তোমালোকৰ ফটোগ্ৰাফৰ নকল দুখন অভিন্ন। সেইদৰে, একে আকাৰৰ দুপাত খাৰু নাইবা একেটা বেংকে বিতৰণ কৰা দুখন এ. টি. এম. কাৰ্ড অভিন্ন হোৱা দেখা যায়। তোমালোকৰ মনত পৰিব পাৰে যে একেটা বছৰতে টকাশালৰপৰা ওলোৱা দুটা এটকীয়া মুদ্ৰাৰ এটা আনটোৰ ওপৰত ৰাখিলে ইটোৱে সিটোৰ ওপৰত সম্পূৰ্ণৰূপে খাপ খাই পৰে।



চিত্ৰ 7.2

এনেধৰণৰ আকাৰসমূহক কি কোৱা হয়, তোমালোকৰ মনত আছেনে? দৰাচলতে, এইবোৰক সৰ্বসম আকাৰ বোলা হয় (সৰ্বসম মানে হ'ল— সকলো ক্ষেত্ৰতে সমান নাইবা তেনেবোৰ আকাৰ যিবোৰৰ আকৃতি আৰু আকাৰ উভয়ে একে)।

এতিয়া, একে ব্যাসাৰ্দ্ধৰ দুটা বৃত্ত আঁকি এটাক আনটোৰ ওপৰত ৰাখা। কি দেখিলা? সিহঁতৰ এটা আনটোৰ সৈতে সম্পূৰ্ণৰূপে খাপ খাই পৰে আৰু তেতিয়া আমি কওঁ যে বৃত্ত দুটা সৰ্বসম। একে জোখৰ বাহুৰ এটা বৰ্গ আন এটাৰ ওপৰত ৰাখি (চিত্ৰ 7.2) নাইবা সমান বাহুৰ দুটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ এটা আনটোৰ ওপৰত ৰাখি এই কাৰ্যৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটোৱা। তুমি দেখিবা যে বৰ্গ দুটাৰ এটা আনটোৰ সৰ্বসম আৰু সমবাহু ত্ৰিভুজৰ বেলিকাও কথা একেটাই।

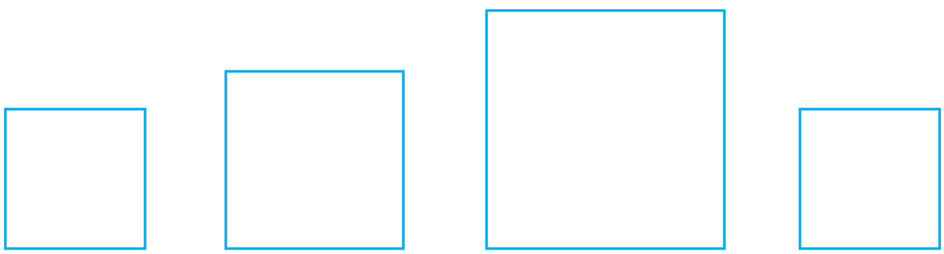
তোমালোকৰ হয়তো আচৰিত লাগিছে এই বুলি যে আমি কি কাৰণেনো সৰ্বসমতাৰ চৰ্চা কৰিব লাগে। তোমালোকে তোমালোকৰ ৰেফ্ৰিজাৰেটৰত থকা বৰফৰ থালবোৰ লক্ষ্য কৰিছা নিশ্চয়। মন কৰা যে বৰফ তৈয়াৰ কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা আটাইবোৰ সাঁচেই সৰ্বসম। থালখনত সাঁচ বনাবলৈ কাটি উলিওৱা খাজবোৰো (আয়তীয়, বৃত্তীয় বা ত্ৰিভুজীয়, যিয়েই নহওক) সৰ্বসম। গতিকে যেতিয়াই সাইলাখ একেধৰণৰ বা অভিন্ন বস্তু তৈয়াৰ কৰিবলগীয়া হয় তেতিয়াই সাঁচ তৈয়াৰ কৰিবলৈ সৰ্বসমতাৰ ধাৰণা ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

কোনো কোনো সময়ত কলমত ৰিফিল সলনি কৰিবলৈ তোমালোকে অসুবিধাৰ সন্মুখীন হোৱা নিশ্চয় যেতিয়া নতুন ৰিফিলৰ আকাৰ সলনি কৰিব খোজা ৰিফিলৰ আকাৰৰ সৈতে একে নহয়। স্পষ্টভাৱে, যদি ৰিফিল দুডাল অভিন্ন বা সৰ্বসম হয় তেন্তে নতুন ৰিফিলডাল কলমটোত সঠিকভাৱে খাপ খাই পৰিব।

গতিকে, দৈনন্দিন জীৱনধাৰণত তোমালোকে অনেক উদাহৰণ পাবা যিবোৰত সামগ্ৰীসমূহৰ সৰ্বসমতা প্ৰয়োগ কৰিবলগীয়া হয়।

সৰ্বসম আকাৰৰ আৰু কেইটামান উদাহৰণৰ কথা তোমালোকে ভাবিব পাৰানে?

চিত্ৰ 7.3 (i) ত অংকিত বৰ্গটোৰ লগত তলৰ কোনবোৰ আকাৰ সৰ্বসম নহয়?



(i) (ii) (iii) (iv)

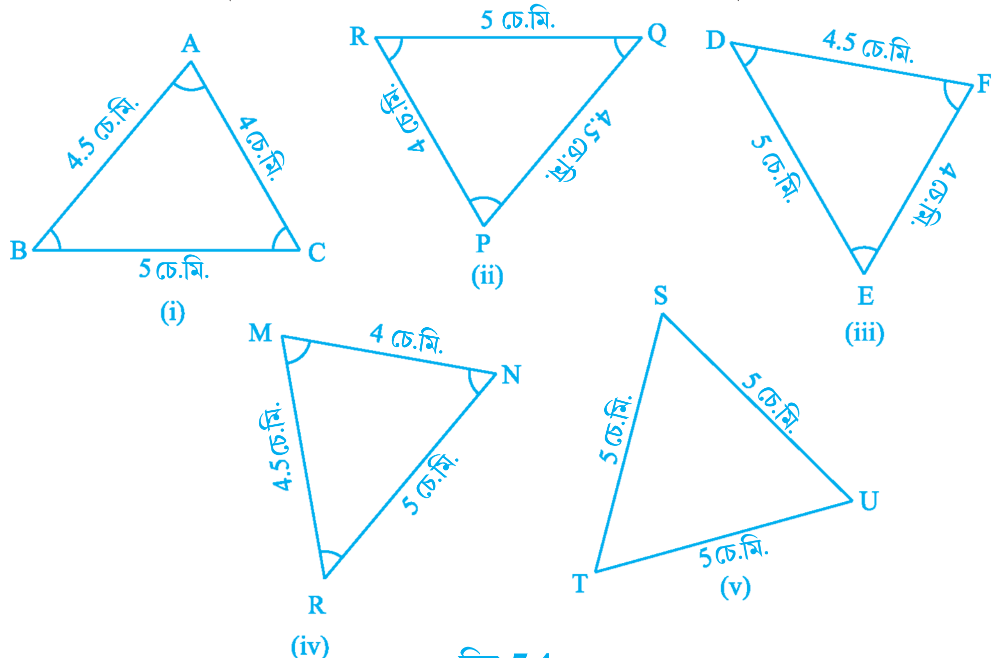
চিত্ৰ 7.3

স্পষ্টভাবে 7.3 (ii) আৰু (iii) ৰ ডাঙৰ বৰ্গ দুটা 7.3 (i) ৰ বৰ্গটোৰ সৈতে সৰ্বসম নহয়, কিন্তু 7.3 (iv) ৰ বৰ্গটো 7.3 (i) ৰ বৰ্গৰ সৈতে সৰ্বসম।

এতিয়া, দুটা ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বিষয়টো আলোচনা কৰা যাওক।

তোমালোকে ইতিমধ্যে জানা যে দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম হয় যদি এটাৰ বাহু আৰু কোণবোৰ আনটোৰ অনুৰূপ বাহু আৰু কোণৰ সমান হয়।

এতিয়া তলৰ ত্ৰিভুজবোৰৰ কোনবোৰ চিত্ৰ 7.4 (i) ৰ ABC ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসম?



চিত্ৰ 7.4

চিত্ৰ 7.4 (ii) ৰ পৰা (v) লৈ প্ৰতিটো ত্ৰিভুজ কাটি উলিওৱা আৰু প্ৰয়োজন অনুসাৰে ঘূৰাই ΔABC ক ঢাকিবলৈ চেষ্টা কৰা। লক্ষ্য কৰা যে চিত্ৰ 7.4 ৰ (ii), (iii) আৰু (iv) ত্ৰিভুজকেইটা ΔABC ৰ সৰ্বসম। আনহাতে, 7.4 (v) ৰ ΔTSU, ΔABC ৰ সৰ্বসম নহয়।

যদি ΔPQR, ΔABC ৰ সৰ্বসম হয়, তেতিয়া আমি এনেদৰে লিখোঁ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$.

মন কৰা যে যেতিয়া $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ তেতিয়া ΔPQR ৰ বাহুবোৰ ΔABC ৰ অনুৰূপ সমান বাহুৰ লগত মিলি যায় আৰু উভয় ত্ৰিভুজৰ কোণৰ ক্ষেত্ৰতো কথা একেটাই হয়।

অৰ্থাৎ PQ, AB ৰ সৈতে, QR, BC ৰ সৈতে আৰু RP, CA ৰ সৈতে মিলি যায়; সেইদৰে ∠P, ∠A ৰ সৈতে, ∠Q, ∠B ৰ সৈতে আৰু ∠R, ∠C ৰ সৈতে খাপ খায়। অৰ্থাৎ P বিন্দু A বিন্দুৰ সৈতে, Q, B ৰ সৈতে আৰু R, C ৰ সৈতে মিলি যায় যাক আমি বুজাওঁ এনেদৰে—

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

মন কৰা যে এই অনুৰূপতা সাপেক্ষে $\Delta PQR \cong \Delta ABC$; কিন্তু $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ এইদৰে লিখাটো শুদ্ধ নহ'ব।

সেইদৰে, চিত্ৰ 7.4 (iii) ৰ ক্ষেত্ৰত

$FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$ আৰু $EF \leftrightarrow CA$ আৰু $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$ আৰু $E \leftrightarrow C$

গতিকে, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ হ'ব কিন্তু, $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ শুদ্ধ নহয়।

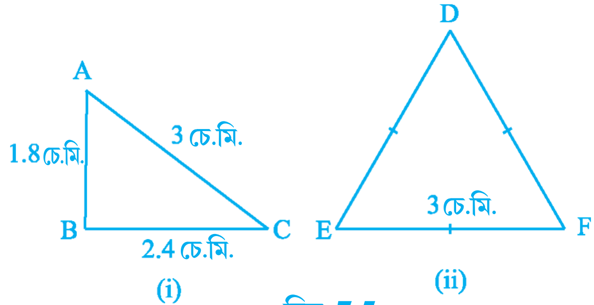
চিত্ৰ 7.4 (iv) ত দেখুওৱা ত্ৰিভুজটো আৰু ΔABC ৰ মাজৰ অনুৰূপ সম্বন্ধকেইটা উল্লেখ কৰা। গতিকে, প্ৰতীকী ৰূপত ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা বুজাবলৈ হ'লে শীৰ্ষবিন্দুবোৰৰ অনুৰূপ সম্পৰ্কটো শুদ্ধকৈ প্ৰকাশ কৰাটো আৱশ্যক।

মন কৰা যে— সৰ্বসম ত্ৰিভুজত অনুৰূপ অংশবোৰ পৰস্পৰ সমান আৰু 'সৰ্বসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশবোৰ'ৰ (Corresponding parts of congruent triangles) পৰিবৰ্তে আমি সংক্ষেপে CPCT লিখো।

7.3 ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা বিচাৰৰ চৰ্তসমূহ (Criteria for Congruence of Triangles) ঃ

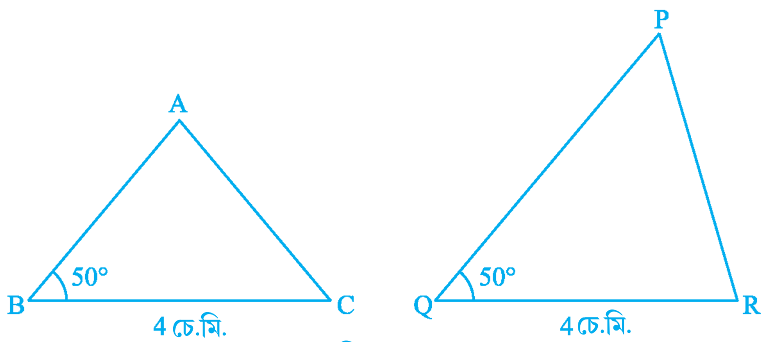
আগৰ শ্ৰেণীসমূহত তোমালোকে ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ চাৰিবিধ চৰ্তৰ বিষয়ে শিকিছা। আমি সেইবোৰ মনত পেলাই চাওহঁক।

দুটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰা যাৰ মাথোন একোটাকৈ বাহুৰ জোখ 3 চেণ্টিমিটাৰ। এই ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হয়নে? মন কৰা যে সিহঁত সৰ্বসম নহয় (চিত্ৰ 7.5 চোৱা)



চিত্ৰ 7.5

এতিয়া, দুটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰা যাৰ মাথোন একোটাকৈ বাহু আৰু কোণৰ জোখ ক্ৰমে 4 চেণ্টিমিটাৰ আৰু 50^{o} (চিত্ৰ 7.6 চোৱা)। ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসমনে?



চিত্ৰ 7.6

মন কৰা যে এই ত্ৰিভুজ দুটাও সৰ্বসম নহয়।

কিছুমান অধিক ত্ৰিভুজৰ যোৰ লৈ এই কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা।

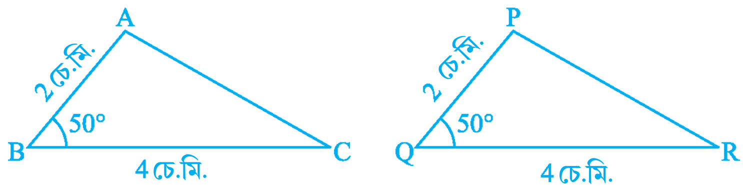
গতিকে, একোযোৰ বাহু বা একোযোৰ বাহু আৰু একোযোৰ কোণৰ সমতা ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বাবে পৰ্যাপ্ত নহয়।

যদি সমান কোণবোৰৰ আন বাহুবোৰো সমান হয় তেন্তে কি হ'ব?

চিত্ৰ 7.7 ত BC = QR, $\angle B = \angle Q$ আৰু লগতে AB = PQ। এতিয়া, ΔABC আৰু ΔPQR সৰ্বসমতাৰ বিষয়ে তুমি কি ক'বা?

আগৰ পাঠসমূহৰপৰা স্মৰণ কৰা যে এইক্ষেত্ৰত ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম। চিত্ৰ 7.7 ত সন্নিবিষ্ট ΔABC আৰু ΔPQR ৰ ক্ষেত্ৰত এই কথাৰ প্ৰত্যায়ন কৰি চোৱা।

ত্ৰিভুজৰ আন কিছুমান যোৰ লৈ এই কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। তুমি মন কৰিছানে যে ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বাবে দুটা বাহু আৰু সিহঁতৰ মধ্যবৰ্তী কোণৰ সমতাই যথেষ্ট। এৰা, এই সমতাই যথেষ্ট।



চিত্ৰ 7.7

এইটো হ'ল ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ প্ৰথম চৰ্ত।

স্বীকাৰ্য 7.1 (সৰ্বসমতাৰ বা-কো-বা বিধি) ঃ *দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম হ'ব যদি এটাৰ দুটা বাহু আৰু সিহঁতৰ মধ্যবৰ্তী কোণ আনটো ত্ৰিভুজৰ দুই বাহু আৰু সিহঁতৰ মধ্যবৰ্তী কোণৰ সমান হয়।*

এই ফলাফলটো ইতিপূৰ্বে লাভ কৰা কোনোধৰণৰ ফলাফলৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰিব নোৱাৰি আৰু সেয়েহে ইয়াক এটা স্বীকাৰ্য হিচাপে মানি লোৱা হয় (পৰিশিষ্ট-1 চোৱা)

এতিয়া আমি কেইটামান উদাহৰণ লওঁহক।

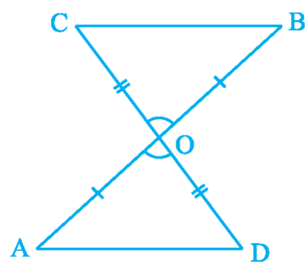
উদাহৰণ 1 ঃ চিত্ৰ 7.8 ত OA = OB আৰু OD = OC।

দেখুওৱা যে (i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ আৰু (ii) AD || BC

সমাধান ঃ (i) লক্ষ্য কৰা যে

ΔAOD আৰু ΔBOC ত

$$\left.\begin{aligned} OA &= OB \\ OD &= OC \end{aligned}\right\} \text{(প্ৰদত্ত)}$$



চিত্ৰ 7.8

আকৌ, যিহেতু $\angle AOD$ আৰু $\angle BOC$ য়ে এযোৰ বিপ্ৰতীপ কোণৰ সৃষ্টি কৰে, আমি

পাওঁ—

$\angle AOD = \angle BOC$

গতিকে $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (বা-কো-বা বিধি অনুসৰি)

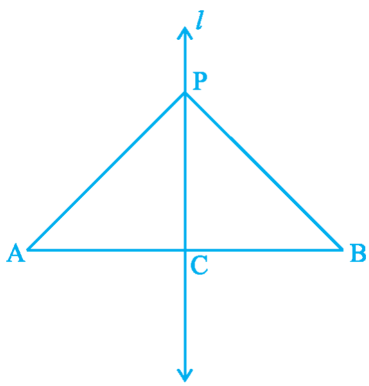
(ii) AOD আৰু BOC সৰ্বসম ত্ৰিভুজত আনবোৰ অনুৰূপ অংশও সমান।

গতিকে, $\angle OAD = \angle OBC$ আৰু কোণ দুটাই ৰেখাখণ্ড AD আৰু BC ৰ বাবে একান্তৰ বা বিপৰ্যস্ত কোণ সৃষ্টি কৰে।

সেয়েহে, AD ∥ BC

উদাহৰণ 2 ঃ AB এডাল ৰেখাখণ্ড আৰু l ইয়াৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। P, l ৰ ওপৰত এটা বিন্দু হ'লে দেখুওৱা যে P বিন্দুটো A আৰু B ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী।

সমাধান ঃ l ৰেখাডাল AB ৰ ওপৰত লম্ব আৰু ই AB ৰ মধ্যবিন্দু C ৰে যায় (চিত্ৰ 7.9 চোৱা)



চিত্ৰ 7.9

দেখুৱাব লাগে যে PA = PB

ΔPCA আৰু ΔPCB ত্ৰিভুজ দুটা বিবেচনা কৰা।

আমি পাওঁ

AC = BC (C, AB ৰ মধ্যবিন্দু)

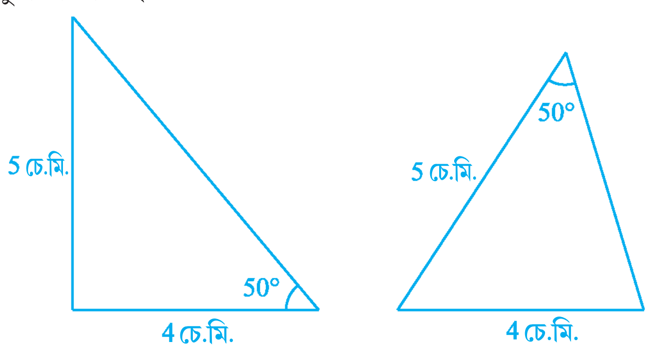
$\angle PCA = \angle PCB = 90^o$ (প্ৰদত্ত)

PC = PC (সাধাৰণ বাহু)

গতিকে, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (বা-কো-বা বিধি)

আৰু সেয়েহে, PA = PB, কাৰণ সিহঁত সৰ্বসম ত্ৰিভুজ দুটাৰ অনুৰূপ বাহু।

এতিয়া দুটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰা হওঁক যাৰ দুটাকৈ বাহুৰ জোখ 4 চে.মি. আৰু 5 চে.মি. আৰু এটাকৈ কোণৰ জোখ 50^o আৰু এই কোণটো সমান সমান বাহুৰ অন্তৰ্গত নহয়। (চিত্ৰ 7.10 চোৱা) ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হয়নে?

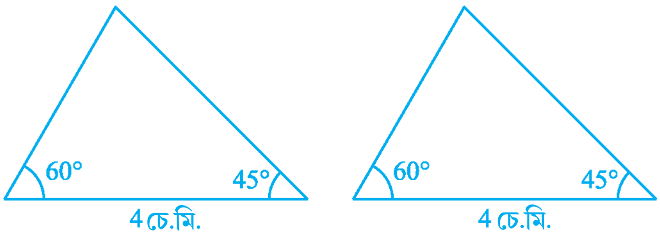


চিত্ৰ 7.10

লক্ষ্য কৰা যে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম নহয়।

ত্ৰিভুজৰ অধিক যোৰ কিছুমান লৈ এই কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। তুমি দেখিবা যে ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বাবে সমান কোণবোৰ সমান সমান বাহুৰ যোৰৰ অন্তৰ্গত হোৱাটো বৰ আৱশ্যকীয়। সেয়েহে, সৰ্বসমতাৰ বা-কো-বা বিধি প্ৰযোজ্য কিন্তু কো-বা-বা নাইবা বা-বা-কো বিধি প্ৰযোজ্য নহয়।

ইয়াৰ পিছত দুটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰিবলৈ চেষ্টা কৰাহক যাৰ দুটাকৈ কোণৰ জোখ 60^{o} আৰু 45^{o} আৰু এই কোণ দুটাৰ অন্তৰ্গত বাহুৰ জোখ 4 চে.মি. (চিত্ৰ 7.11 চোৱা)



চিত্ৰ 7.11

এই ত্ৰিভুজ দুটা কাটি উলিওৱা আৰু এটাক আনটোৰ ওপৰত স্থাপন কৰা। কি দেখিলা? দেখিবা যে এটা ত্ৰিভুজে আনটো ত্ৰিভুজক সম্পূৰ্ণৰূপে আবৰি ধৰিছে অৰ্থাৎ ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম। ত্ৰিভুজৰ কেইটামান অধিক যোৰ লৈ কাৰ্যটো পুনৰাবৃত্তি কৰা। দেখিবা যে ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বাবে দুটাকৈ বাহু আৰু সিহঁতৰ অন্তৰ্গত কোণৰ সমতাৰ চৰ্তটো পৰ্যাপ্ত।

সৰ্বসমতাৰ এই চৰ্তটোৱেই হ'ল— কোণ-বাহু-কোণ চৰ্ত আৰু সংক্ষেপে ইয়াক কো-বা-কো এইদৰে লিখা হয়। আগৰ শ্ৰেণীসমূহতে তোমালোকে পৰীক্ষণৰদ্বাৰা এই চৰ্তটো, প্ৰত্যায়ণ কৰি আহিছা। কিন্তু, এতিয়া আমি এই ফলটোৰ বৰ্ণনা আৰু প্ৰমাণ আগবঢ়াম।

যিহেতু এই ফলটোৰ প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা যায় সেয়েহে ইয়াক উপপাদ্য আখ্যা দিয়া হয় আৰু ইয়াক প্ৰমাণ কৰাৰ বাবে আমি সৰ্বসমতাৰ বা-কো-বা স্বীকাৰ্যটোৰ প্ৰয়োগ কৰিম।

উপপাদ্য 7.1 (সৰ্বসমতাৰ কো-বা-কো বিধি) ঃ *দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম হ'ব যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুই কোণ আৰু সিহঁতৰ অন্তৰ্গত বাহুটো আনটো ত্ৰিভুজৰ দুই কোণ আৰু অন্তৰ্গত বাহুৰ সমান হয়।*

প্ৰমাণ ঃ (i) ABC আৰু DEF ত্ৰিভুজ দুটা এনেধৰণে দিয়া আছে যে

$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

আৰু BC = EF.

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগিব যে $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

উক্ত প্ৰমাণৰ বাবে তিনিটা ক্ষেত্ৰ (Case) সৃষ্টি হয়—

ক্ষেত্ৰ (i) ঃ ধৰা হওক, AB = DE (চিত্ৰ 7.12 চোৱা) এতিয়া, কি লক্ষ্য কৰিছা? তুমি হয়তো

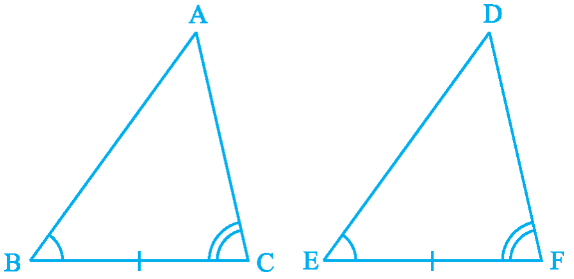
লক্ষ্য কৰিছা যে,

$AB = DE$ (ধৰি লোৱা হৈছে)

$\angle B = \angle E$ (প্ৰদত্ত)

$BC = EF$ (প্ৰদত্ত)

গতিকে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (বা-কো-বা বিধিৰ দ্বাৰা)

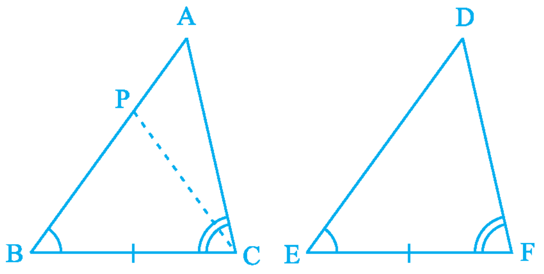


চিত্ৰ 7.12

ক্ষেত্ৰ (ii) ঃ সম্ভৱ হ'লে, ধৰা হওক $AB > DE$

তেতিয়া, আমি AB ৰ ওপৰত এটা বিন্দু P এনেভাবে লব পাৰোঁ যে $PB = DE$.

এতিয়া ΔPBC আৰু ΔDEF ত্ৰিভুজ দুটা বিবেচনা কৰা (চিত্ৰ 7.13 চোৱা)



চিত্ৰ 7.13

ΔPBC আৰু ΔDEF ত লক্ষ্য কৰা যে

$PB = DE$ (অংকন মতে)

$\angle B = \angle E$ (প্ৰদত্ত)

$BC = EF$ (প্ৰদত্ত)

গতিকে, সৰ্বসমতাৰ বা-কো-বা স্বীকাৰ্য অনুসৰি আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ যে—

$\Delta PBC \cong \Delta DEF$

ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম কাৰণে সিহঁতৰ অনুৰূপ অংশবোৰ পৰস্পৰ সমান।

গতিকে, $\angle PCB = \angle DFE$

কিন্তু আমাক দিয়া আছে যে—

$\angle ACB = \angle DFE$

সেয়েহে, $\angle ACB = \angle PCB$

এয়া সম্ভৱনে?

এয়া সম্ভৱ হ'ব, কেৱল যদি P বিন্দু A ৰ সৈতে মিলি যায়। অৰ্থাৎ $BA = ED$

সেয়েহে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (বা-কো-বা স্বীকাৰ্য মতে)

ক্ষেত্ৰ (iii) ঃ যদি $AB < DE$, তেন্তে DE ৰ ওপৰত আমি এটা বিন্দু M লব পাৰো যাতে

$ME = AB$ আৰু ক্ষেত্ৰ (ii) ত আগবঢ়োৱা ধৰণে যুক্তি প্ৰয়োগ কৰি আমি সিদ্ধান্তলৈ আহিব পাৰোঁ যে $AB = DE$ আৰু এইদৰে,

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

এতিয়া ধৰি লোৱা, দুটা ত্ৰিভুজৰ দুযোৰ কোণ আৰু এযোৰ অনুৰূপ বাহু পৰস্পৰ সমান কিন্তু বাহু দুটা অনুৰূপ সমান কোণযোৰবিলাকৰ অন্তৰ্গত নহয়। তথাপি ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হবনে? তুমি দেখিবা যে সিহঁত সৰ্বসম হ'ব। কিয় ক'ব পাৰিবানে?

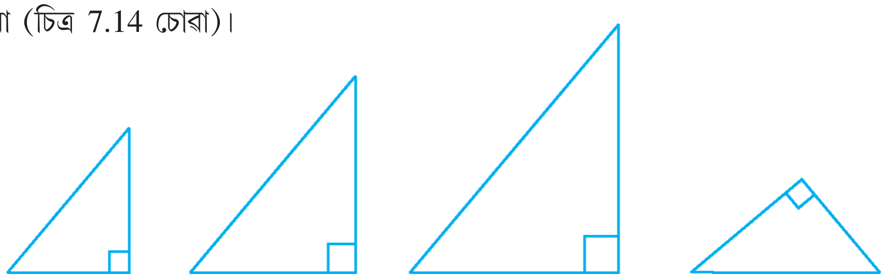
তুমি জানা যে ত্ৰিভুজৰ তিনিটা কোণৰ সমষ্টি 180^o গতিকে, যদি দুযোৰ কোণ পৰস্পৰ সমান তেন্তে তৃতীয় কোণযোৰো পৰস্পৰ সমান (ত্ৰিভুজৰ কোণ সমষ্টি ধৰ্ম)

সেয়েহে, দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম হ'ব যদি ত্ৰিভুজ দুটাৰ যিকোনো দুযোৰ কোণ আৰু এযোৰ অনুৰূপ বাহু পৰস্পৰ সমান। ইয়াক আমি **কো-কো-বা সৰ্বসমতাৰ বিধি** হিচাপে চিহ্নিত কৰিব পাৰোঁ।

এতিয়া, আমি নিম্নোক্ত কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰি চাওহঁক—

40^o, 50^o আৰু 90^o জোখৰ কোণ সহ বেলেগ বেলেগ ত্ৰিভুজ অংকন কৰা। এনেধৰণৰ কিমানটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰিব পৰা যাব?

দৰাচলতে, বেলেগ বেলেগ বাহু দৈৰ্ঘৰ তুমি যিমান বিচাৰা সিমানটা এনে ত্ৰিভুজ আঁকিবা পাৰিবা (চিত্ৰ 7.14 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.14

মন কৰা যে ত্ৰিভুজবোৰ পৰস্পৰ সৰ্বসম হ'বও পাৰে আৰু নহ'বও পাৰে।

গতিকে, তিনিটা কোণৰ সমতা ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বাবে পৰ্যাপ্ত চৰ্ত নহয়। সেইবাবে, ত্ৰিভুজৰ

সৰ্বসমতাৰ বাবে তিনিটা সমান অংশৰ ভিতৰত এটা অংশ বাহু হ'বই লাগিব।

আমি এতিয়া কেইটামান অধিক উদাহৰণ বিবেচনা কৰোঁহক।

উদাহৰণ-3 ঃ এডাল ৰেখাখণ্ড AB আন এডাল ৰেখাখণ্ড CD ৰ সমান্তৰাল। O, AD ৰ মধ্যবিন্দু (চিত্ৰ 7.15 চোৱা)। দেখুওৱা যে (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O, BC ৰও মধ্যবিন্দু।

সমাধান ঃ (i) ΔAOB আৰু ΔDOC ত্ৰিভুজ দুটা বিবেচনা কৰা।

$\angle ABO = \angle DCO$ (বিপৰ্যস্ত কোণ, যিহেতু AB||CD আৰু BC সিহঁতৰ ছেদক)

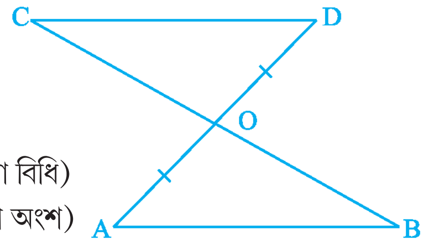
$\angle AOB = \angle DOC$ (বিপ্ৰৰীত কোণ)

OA = OD (প্ৰদত্ত)

সেয়েহে $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (সৰ্বসমতাৰ কো-কো-বা বিধি)

(ii) OB = OC (CPCT) (সৰ্বসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশ)

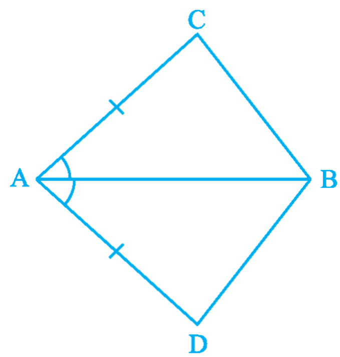
গতিকে O, BC ৰ মধ্যবিন্দু।



চিত্ৰ 7.15

অনুশীলনী 7.1

1. চতুৰ্ভুজৰ ACBD ত AC = AD আৰু AB য়ে $\angle A$ ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰিছে (চিত্ৰ 7.16 চোৱা)। দেখুওৱা যে $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, BC আৰু BD সম্পৰ্কে তুমি কি ক'বা?



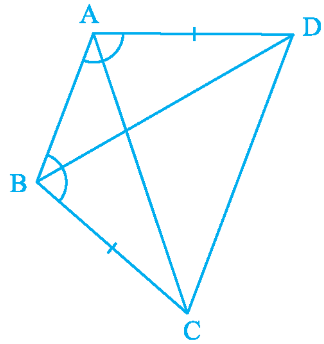
চিত্ৰ 7.16

2. ABCD এটা চতুৰ্ভুজ য'ত AD = BC আৰু $\angle DAB = \angle CBA$ (চিত্ৰ 7.17 চোৱা) প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

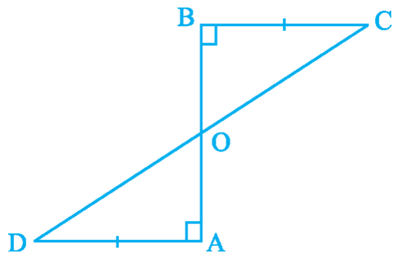
(ii) BD = AC

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



চিত্ৰ 7.17

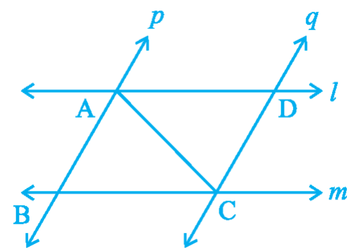
3. এডাল ৰেখাখণ্ড AB লৈ টনা AD আৰু BC দুডাল সমান লম্ব (চিত্ৰ 7.18 চোৱা)। দেখুওৱা যে CD য়ে AB ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।



চিত্ৰ 7.18

4. l আৰু m দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক আন এযোৰ সমান্তৰাল ৰেখা p আৰু q য়ে ছেদ কৰিছে (চিত্ৰ 7.19 চোৱা)। দেখুওৱা যে

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

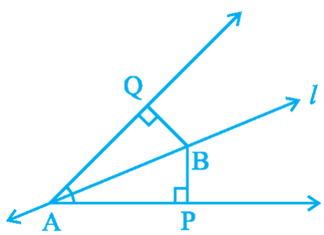


চিত্ৰ 7.19

5. l ৰেখাডাল $\angle A$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক আৰু B, l ৰ ওপৰত যিকোনো বিন্দু। B ৰ পৰা $\angle A$ ৰ বাহু দুটালৈ BP আৰু BQ দুডাল লম্ব (চিত্ৰ 7.20 চোৱা)। দেখুওৱা যে

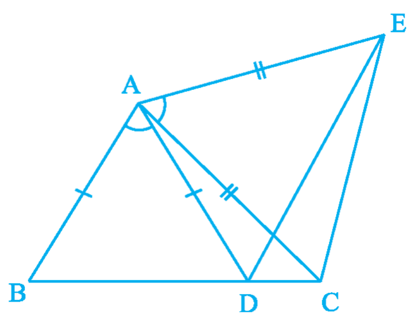
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) BP = BQ বা B, $\angle A$ ৰ দুই বাহুৰ পৰা সমদূৰত্বত অৱস্থিত।



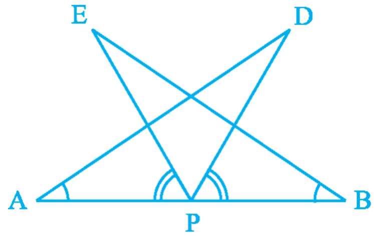
চিত্ৰ 7.20

6. চিত্ৰ 7.21 ত AC = AE, AB = AD আৰু $\angle BAD = \angle EAC$ । দেখুওৱা যে BC = DE



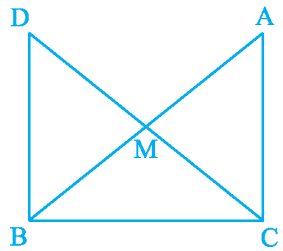
চিত্ৰ 7.21

7. AB এডাল ৰেখাখণ্ড আৰু P ইয়াৰ মধ্যবিন্দু। AB ৰ একেফালে থকা D আৰু E দুটা এনে বিন্দু যাতে ∠BAD = ∠ABE আৰু ∠EPA = ∠DPB (চিত্ৰ 7.22 চোৱা)।
দেখুওৱা যে
(i) ΔDAP ≅ ΔEBP
(ii) AD = BE



চিত্ৰ 7.22

8. C বিন্দুত সমকোণ সহ ABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ আৰু M, অতিভুজ AB ৰ মধ্যবিন্দু। C ক M ৰ সৈতে ৰেখাৰে সংলগ্ন কৰা হ'ল আৰু D বিন্দুলৈ এনেভাৰে বঢ়াই দিয়া হ'ল যাতে DM = CM। D বিন্দুক B ৰ সৈতে ৰেখাৰে সংলগ্ন কৰা হ'ল (চিত্ৰ 7.23 চোৱা)। দেখুওৱা যে
(i) ΔAMC ≅ ΔBMD
(ii) ∠DBC এটা সমকোণ
(iii) ΔDBC ≅ ΔACB
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$



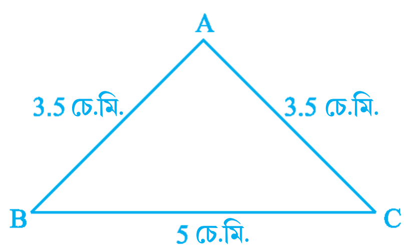
চিত্ৰ 7.23

7.4 ত্ৰিভুজৰ কেইটামান ধৰ্ম (Some Properties of a Triangle) ঃ

ওপৰৰ ছেদত ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ দুই ধৰণৰ চৰ্তৰ বিষয়ে তোমালোকে আলোচনা কৰি আহিছা। এতিয়া এই ফলবোৰ দুটা সমান বাহুবিশিষ্ট এটা ত্ৰিভুজৰ কিছুমান ধৰ্ম অধ্যয়ন কৰাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰয়োগ কৰা হ'ব।

তলত উল্লেখ কৰা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰা।

এটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰা যাৰ 3.5 চে.মি. জোখৰ দুটা সমান বাহু আছে আৰু তৃতীয় বাহুটোৰ জোখ 5 চে.মি. (চিত্ৰ 7.24 চোৱা)। এনেধৰণৰ অংকন তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীসমূহতে কৰি আহিছা।



চিত্ৰ 7.24

এনেবোৰ ত্ৰিভুজক কি বোলা হয় তোমালোকৰ মনত আছেনে? দুটা সমান বাহুবিশিষ্ট ত্ৰিভুজক কোৱা হয় সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ। গতিকে চিত্ৰ 7.24 ৰ ΔABC এটা

সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ য'ত AB = AC

এতিয়া ∠B আৰু ∠C কোণৰ জোখ লোৱা। কি দেখিলা?

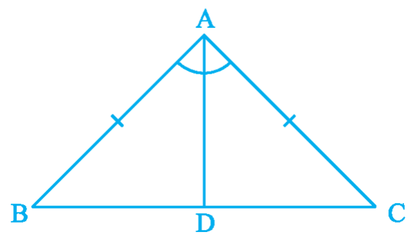
বেলেগ বেলেগ বাহুৰ আন সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত এই কাৰ্যৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা।

তোমালোকে মন কৰিবা যে এনেধৰণৰ প্ৰতিটো ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত সমান বাহুবোৰৰ বিপৰীত কোণবোৰ পৰস্পৰ সমান।

ই এটা অতি আৱশ্যকীয় ফল আৰু বাস্তৱিকতে ই যিকোনো সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰতে সত্য। তলত দেখুওৱা ধৰণে ইয়াৰ প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

উপপাদ্য 7.2 ঃ *এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ সমান বাহু দুটাৰ বিপৰীত কোণ দুটা সমান।*

এই উপপাদ্যটো বিভিন্নধৰণে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি ইয়াৰে এটা প্ৰমাণ ইয়াত আগবঢ়োৱা হ'ল।



চিত্ৰ 7.25

প্ৰমাণ ঃ ABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ য'ত AB = AC. প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে ∠B = ∠C

∠A ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰা হ'ল আৰু ধৰাহ'ল ∠A ৰ সমদ্বিখণ্ডক আৰু BC ৰ ছেদবিন্দু হ'ল D (চিত্ৰ 7.25 চোৱা)।

ΔBAD আৰু ΔCAD ত

AB = AC (প্ৰদত্ত)

∠BAD = ∠CAD (অংকন কৰা মতে)

AD = AD (সাধাৰণ বাহু)

গতিকে, ΔBAD ≅ ΔCAD (বা-কো-বা বিধি অনুসৰি)

সেয়েহে, ∠ABD = ∠ACD [যিহেতু সিহঁত সৰ্বসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশ।]

গতিকে ∠B = ∠C

উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটোও সঁচা হ'বনে? অৰ্থাৎ, যদি কোনো ত্ৰিভুজৰ দুটা কোণ সমান হয় তেন্তে আমি ক'ব পাৰিমনে যে কোণ দুটাৰ বিপৰীত বাহু দুটাও সমান?

পৰৱৰ্তী কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰা যাওঁক।

যিকোনো দীঘৰ BC বাহু লৈ ABC এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাতে $\angle B = \angle C = 50^o$

∠A ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰা যাতে এই সমদ্বিখণ্ডকে BC ক D বিন্দুত ছেদ কৰে। (চিত্ৰ 7.26 চোৱা)

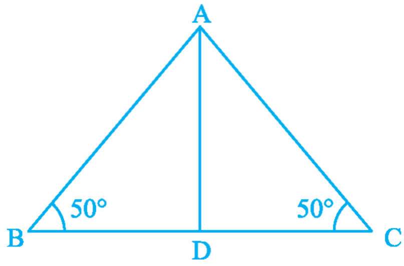
কাগজখিলাৰ পৰা ত্ৰিভুজটো কাটি উলিওৱা আৰু ইয়াক AD ৰ দিশত এনেভাৱে ভাঁজ কৰা যাতে শীৰ্ষবিন্দু C, ৰ সৈতে মিলি যায়।

AC আৰু AB বাহু সম্পৰ্কে কি ক'ব পাৰি?

মন কৰা যে AC, AB ৰ ওপৰত সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যায়।

গতিকে, AC = AB

আৰু কেইটামান ত্ৰিভুজ লৈ এই কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। প্ৰতিবাৰেই দেখা যাব যে সমান কোণৰ বিপৰীত বাহুবোৰ পৰস্পৰ সমান। গতিকে এই কথাখিনি উপপাদ্যৰ আকাৰত নিম্নোক্ত ধৰণে বৰ্ণনা কৰিব পাৰোঁ।



চিত্ৰ 7.26

উপপাদ্য 7.3 ঃ *ত্ৰিভুজৰ সমান কোণৰ বিপৰীত বাহুবোৰ পৰস্পৰ সমান।*

এই উপপাদ্যটো উপপাদ্য 7.2 ৰ বিপৰীত।

ইয়াক সৰ্বসমতাৰ কো-বা-কো বিধিৰদ্বাৰাও প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

এই ফলসমূহ প্ৰয়োগ কৰাৰ উদ্দেশ্যে কেইটামান অধিক উদাহৰণ লোৱা যাওক।

উদাহৰণ 4 ঃ ΔABC ত $\angle A$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক AD, BC ৰ ওপৰত লম্ব (চিত্ৰ 7.27 চোৱা)। দেখুওৱা যে AB = AC অৰ্থাৎ ΔABC টো সমদ্বিবাহু।

সমাধান ঃ ΔABD আৰু ΔACD ত

$\angle BAD = \angle CAD$ (প্ৰদত্ত)

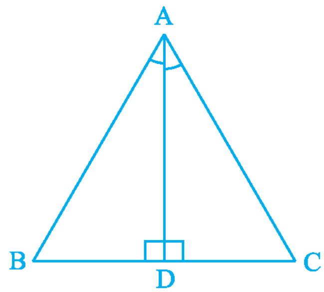
AD = AD (সাধাৰণ বাহু)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^o$ (প্ৰদত্ত)

গতিকে, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (কো-বা-কো বিধি)

সেয়েহে, AB = AC (CPCT)

অৰ্থাৎ, ΔABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ।



চিত্ৰ 7.27

উদাহৰণ 5 ঃ E আৰু F যথাক্ৰমে ΔABC ৰ সমান বাহু AB আৰু AC ৰ মধ্যবিন্দু (চিত্ৰ 7.28 চোৱা)। দেখুওৱা যে BF = CE.

সমাধান ঃ ΔABF আৰু ΔACE ত

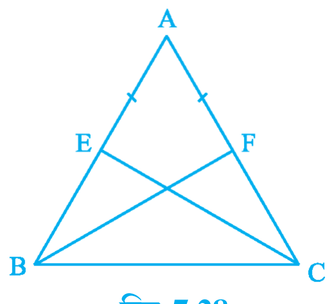
AB = AC (প্ৰদত্ত)

$\angle A = \angle A$ (সাধাৰণ কোণ)

AF = AE (সমান বাহুৰ অৰ্দ্ধাংশ)

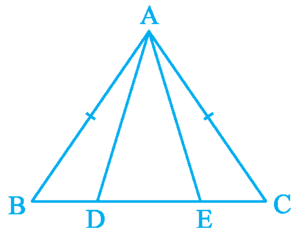
গতিকে, $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (বা-কো-বা বিধি)

সেয়েহে, BF = CE (CPCT)



চিত্ৰ 7.28

উদাহৰণ 6 ঃ সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ ABC ত AB = AC। BC ৰ ওপৰত D আৰু E দুটা বিন্দু যাতে BE = CD (চিত্ৰ 7.29 চোৱা)। দেখুওৱা যে AD = AE.



চিত্ৰ 7.29

সমাধান ঃ ΔABD আৰু ΔACE ত

AB = AC (প্ৰদত্ত) ...... (1)

∠B = ∠C (সমান বাহুৰ বিপৰীত কোণ) ...... (2)

তদুপৰি BE = CD

গতিকে, BE – DE = CD – DE

অৰ্থাৎ BD = CE ...... (3)

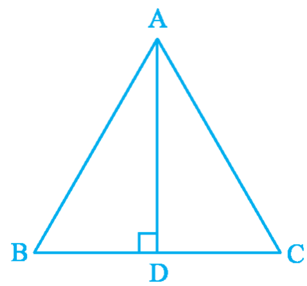
গতিকে, ΔABD ≅ ΔACE [(1), (2), (3) আৰু বা-কো-বা বিধি প্ৰয়োগ কৰি]

ইয়াৰপৰা, AD = AE (CPCT)

অনুশীলনী 7.2

1. এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ ABC ত AB = AC আৰু ∠B আৰু ∠C ৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালে O বিন্দুত পৰস্পৰ কটাকটি কৰে। A ক O ৰ সৈতে ৰেখাৰে সংলগ্ন কৰা। দেখুওৱা যে—

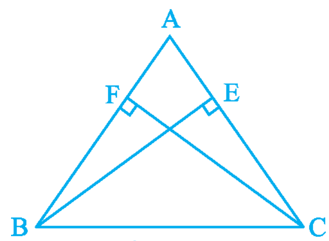
(i) OB = OC (ii) AO য়ে ∠A ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।



চিত্ৰ 7.30

2. ত্ৰিভুজ ABC ত AD, BC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক (চিত্ৰ 7.30 চোৱা)। দেখুওৱা যে ΔABC টো সমদ্বিবাহু য'ত AB = AC।

3. ABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ আৰু ইয়াৰ সমান বাহু AC আৰু AB লৈ ক্ৰমে BE আৰু CF উন্নতি অঁকা হৈছে (চিত্ৰ 7.31)। দেখুওৱা যে এই উন্নতি দুডাল পৰস্পৰ সমান।

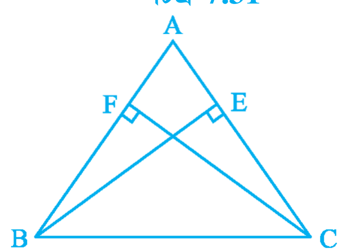


চিত্ৰ 7.31

4. ABC ত্ৰিভুজৰ AC আৰু AB বাহুলৈ টনা উন্নতি ক্ৰমে BE আৰু CF পৰস্পৰ সমান (চিত্ৰ 7.32) দেখুওৱা যে,

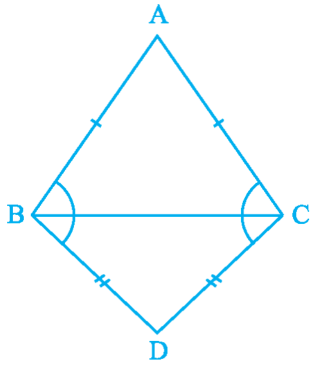
(i) ΔABE ≅ ΔACF

(ii) AB = AC অৰ্থাৎ ABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ।



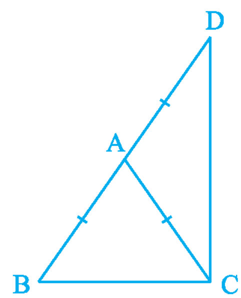
চিত্ৰ 7.32

5. একেডাল ভূমি BC ৰ ওপৰত ABC আৰু DBC দুটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ অঁকা হৈছে (চিত্ৰ 7.33 চোৱা)। দেখুওৱা যে
$\angle ABD = \angle ACD$



চিত্ৰ 7.33

6. ΔABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ, য'ত $AB = AC$। বাহু BA ক D বিন্দুলৈ এনেভাৱে বৰ্দ্ধিত কৰা হৈছে যাতে $AD = AB$ (চিত্ৰ 7.34 চোৱা)। দেখুওৱা যে, $\angle BCD$ সমকোণ।
7. ABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ, য'ত $\angle A = 90^o$ আৰু $AB = AC$। $\angle B$ আৰু $\angle C$ নিৰ্ণয় কৰা।
8. দেখুওৱা যে সমবাহু ত্ৰিভুজ এটাৰ প্ৰতিটো কোণেই 60^o ৰ সমান।

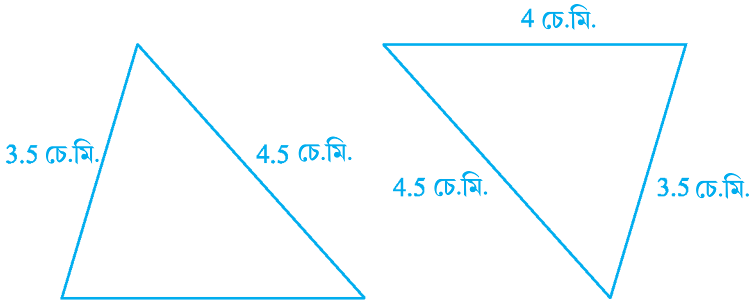


চিত্ৰ 7.34

7.5 ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা বিচাৰৰ আৰু কিছুমান চৰ্ত (Some more Criteria for Congruence of Triangles) ঃ

এই অধ্যায়ৰ আগভাগত তোমালোকে দেখিছা যে দুটা ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বাবে এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা কোণ যথাক্ৰমে আন এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা কোণৰ সৈতে সমান হোৱাটোৱেই পৰ্যাপ্ত নহয়। হয়তো তোমালোকৰ মনত কৌতুহলৰ সৃষ্টি হ'ব যে এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহু আন এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহুৰ সৈতে সমান হ'লে ত্ৰিভুজ দুটা পৰস্পৰ সৰ্বসম হ'বনে নহয়। তোমালোকে ইতিমধ্যে প্ৰত্যায়িত কৰি আহিছা যে বাস্তৱিকতে এইক্ষেত্ৰত ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হয়।

নিশ্চিত হ'বৰ বাবে 4 চে.মি., 3.5 চে.মি. আৰু 4.5 চে.মি. বাহুবিশিষ্ট দুটা ত্ৰিভুজ আঁকা (চিত্ৰ 7.35 চোৱা)। ত্ৰিভুজ দুটা কাটি উলিওৱা আৰু এটাৰ ওপৰত আনটো সংস্থাপন কৰা। কি লক্ষ্য কৰিছাঁ? সমান বাহুবোৰ ওপৰাওপৰিকৈ সজালে ত্ৰিভুজ দুটা পৰস্পৰ মিলি যায়। গতিকে সিহঁত সৰ্বসম।



চিত্ৰ 7.35

কিছুমান অধিক ত্ৰিভুজেৰে এই কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। ইয়াৰ পৰা আমি ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ অন্য এক বিধিত উপনীত হলোঁ।

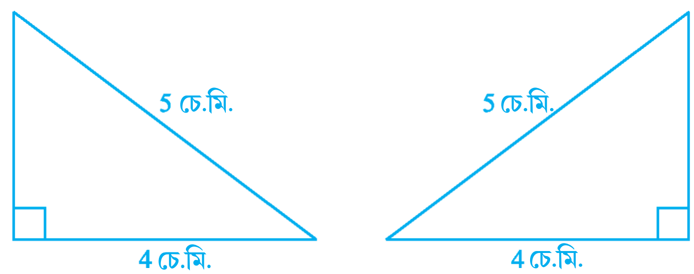
উপপাদ্য 7.4 **বা-বা-বা সৰ্বসমতাৰ বিধি (SSS Congruence Rule) ঃ** *যদি এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহু আন এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহুৰ সৈতে সমান হয়, তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম।*

এটা উপযুক্ত অংকনৰ সহায়ত এই উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

তোমালোকে ইতিমধ্যে দেখিছা যে **বা-কো-বা সৰ্বসমতা বিধিৰ ক্ষেত্ৰত** সমান কোণ যোৰ অনুৰূপ সমান বাহুবোৰৰ মধ্যৱৰ্তী হ'ব লাগিব আৰু যদি ইয়াৰ অন্যথা হয় তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম নহ'বও পাৰে।

এই কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰা—

দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজ অংকন কৰা যাৰ অতিভুজৰ জোখ 5 চে.মি. আৰু একোটিকৈ বাহুৰ জোখ 4 চে.মি. (চিত্ৰ 7.36 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.36

ত্ৰিভুজ দুটা কাটি উলিওৱা আৰু সমান বাহুবোৰ পৰস্পৰৰ ওপৰা ওপৰিকৈ পৰাকৈ এটাৰ ওপৰত আনটো ত্ৰিভুজ সংস্থাপন কৰা। আৱশ্যক অনুযায়ী ত্ৰিভুজ দুটা ঘূৰাই পকাই লোৱা। কি লক্ষ্য কৰিছা?

ত্ৰিভুজ দুটাৰ ইটো সিটোৰ সৈতে সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি গৈছে আৰু সেয়েহে সিহঁত সৰ্বসম। অন্য সমকোণী ত্ৰিভুজৰ যোৰ ব্যৱহাৰ কৰি এই কাৰ্যৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে

ইয়াৰ প্ৰত্যায়ন কৰিছা।

মন কৰা যে এই ক্ষেত্ৰত সমকোণটো প্ৰদত্ত বাহুযোৰৰ মধ্যবৰ্তী কোণ নহয়।

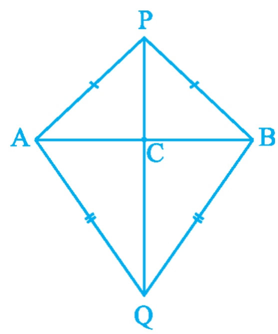
গতিকে, তোমালোকে নিম্নোক্ত সৰ্বসমতাৰ বিধিত উপনীত হ'লা।

উপপাদ্য 7.5 স-অ-বা সৰ্বসমতাৰ বিধি (RHS Congruence Rule) ঃ *যদি দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত এটাৰ কৰ্ণ আৰু এটা বাহু আনটোৰ কৰ্ণ আৰু এটা বাহুৰ সৈতে সমান হয় তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হ'ব।*

মন কৰা, **স-অ-বা মানে হ'ল সমকোণ-অতিভুজ-বাহু**।

এতিয়া কেইটামান উদাহৰণ বিবেচনা কৰা যাওক—

উদাহৰণ-7 ঃ AB এডাল ৰেখাখণ্ড। P আৰু Q, AB সাপেক্ষে পৰস্পৰ বিপৰীত ফালে অৱস্থিত দুটা বিন্দু যাতে সিহঁতৰ প্ৰতিটোৰে A আৰু B ৰ পৰা দূৰত্ব সমান (চিত্ৰ 7.37 চোৱা)। দেখুওৱা যে PQ ৰেখা AB ৰ লম্বসমদ্বিখণ্ডক।



চিত্ৰ 7.37

সমাধান ঃ তোমালোকক দিয়া আছে যে PA = PB আৰু QA = QB। তোমালোকে দেখুৱাব লাগিব যে PQ⊥AB আৰু PQ য়ে AB ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। ধৰাহওক, PQ য়ে AB ক C বিন্দুত ছেদ কৰে।

এই চিত্ৰটোত তোমালোকে দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজৰ কথা কল্পনা কৰিব পাৰানে?

ΔPAQ আৰু ΔPBQ ত্ৰিভুজ দুটা লোৱা যাওঁক।

এই ত্ৰিভুজ দুটাত

AP = BP (দিয়া আছে)

AQ = BQ (দিয়া আছে)

PQ = PQ (সাধাৰণ বা উমৈহতীয়া বাহু)

গতিকে, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (বা-বা-বা বিধি)

সেইবাবে, $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT)

এতিয়া, ΔPAC আৰু ΔPBC ত্ৰিভুজ দুটা লোৱা যাওঁক।

তোমালোকে পাবা—

AP = BP (দিয়া আছে)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ বুলি ওপৰত প্ৰমাণিত হৈছে)

PC = PC (সাধাৰণ বাহু)

গতিকে, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (বা-কো-বা বিধি)

সেয়েহে, AC = BC (CPCT) ..... (1)

আৰু $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

আকৌ, $\angle ACP+\angle BCP=180^o$ (ৰৈখিক যোৰ)

$\angle ACP+\angle ACP=180^o$ গতিকে, $2\angle ACP = 180^o$

অথবা, $\angle ACP = 90^o$ ...... (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা সহজেই তোমালোকে ক'ব পাৰিবা যে— PQ, AB ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

[মন কৰা যে, ΔPAQ আৰু ΔPBQ সৰ্বসমতা সাব্যস্ত নকৰাকৈ তোমালোকে $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ বুলি দেখুৱাব নোৱাৰিবা, যদিওবা

AP = BP (দিয়া আছে)

PC = PC (সাধাৰণ বাহু)

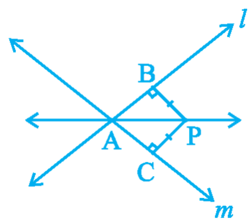
আৰু $\angle PAC = \angle PBC$(ΔABP ৰ ক্ষেত্ৰত সমান বাহুৰ বিপৰীত কোণ)

ইয়াৰ কাৰণ হ'ল— এই তথ্যবোৰে আমাক বা-বা-কো বিধি আগবঢ়ায় যিটো ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতাৰ বাবে সদায় প্ৰযোজ্য বা সত্য নহয়। তাৰোপৰি, কোণটো সমান বাহুযোৰৰ মধ্যবৰ্তী নহয়।]

কেইটামান অধিক উদাহৰণ বিবেচনা কৰা যাওক।

উদাহৰণ 8 ঃ A বিন্দুত কটাকটি কৰা দুডাল ৰেখা l আৰু m ৰ পৰা সমান দূৰত্বত অৱস্থিত এটা বিন্দু হ'ল P (চিত্ৰ 7.38 চোৱা)। দেখুওৱা যে AP ৰেখাই ৰেখাদুডালৰ মাজৰ কোণটোক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

সমাধান ঃ তোমালোকক দিয়া হৈছে যে l আৰু m ৰেখাদুডালে A বিন্দুত কটাকটি কৰে। ধৰাহওক $PB \perp l$, $PC \perp m$। আকৌ দিয়া আছে যে PB = PC তোমালোকে দেখুৱাব লাগিব যে $\angle PAB = \angle PAC$



চিত্ৰ 7.38

ΔPAB আৰু ΔPAC ত্ৰিভুজ দুটা বিবেচনা কৰোহঁক। এই ত্ৰিভুজ দুটাৰ ক্ষেত্ৰত

PB = PC (প্ৰদত্ত)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^o$ (প্ৰদত্ত)

PA = PA (সাধাৰণ বাহু)

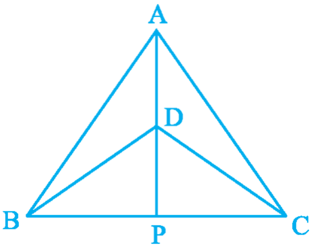
গতিকে $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (স-অ-বা বিধি)

গতিকে, $\angle PAB = \angle PAC$ (CPCT)

মন কৰা যে এই ফলটো অনুশীলনী 7.1 ৰ অনুশীলনী নং 5 ত প্ৰমাণিত ফলটোৰ বিপৰীত।

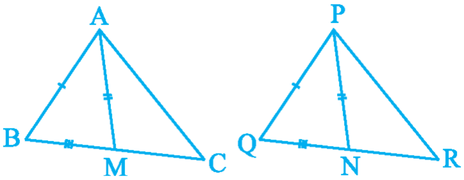
অনুশীলনী 7.3

1. একে ভূমি BC ৰ ওপৰত ΔABC আৰু ΔDBC দুটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ এনেকৈ অঁকা হৈছে যাতে শীৰ্ষবিন্দু A আৰু D, BC ৰ একেফালে থাকে (চিত্ৰ 7.39 চোৱা)। যদি AD ক বৰ্দ্ধিত কৰিলে BC ক P বিন্দুত কাটে তেন্তে দেখুওৱা যে,



চিত্ৰ 7.39

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$
   (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$
   (iii) AP য়ে $\angle A$ আৰু $\angle D$ উভয়কে সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
   (iv) AP, BC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।
2. ABC সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজটোৰ AD এডাল উন্নতি য'ত AB = AC। দেখুওৱা যে—
   (i) AD য়ে BC ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
   (ii) AD য়ে $\angle A$ ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
3. এটা ত্ৰিভুজ ABC ৰ দুই বাহু AB আৰু BC আৰু মধ্যমা AM যথাক্ৰমে আন এটা ত্ৰিভুজ PQR ৰ দুই বাহু PQ আৰু QR আৰু মধ্যমা PN ৰ সমান (চিত্ৰ 7.40 চোৱা)। দেখুওৱা যে—

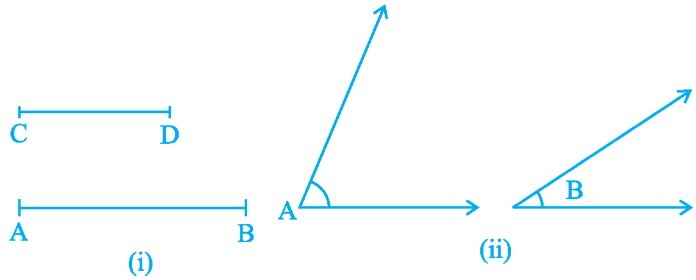


চিত্ৰ 7.40

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$
   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
4. BE আৰু CF এটা ত্ৰিভুজ ABC ৰ দুডাল সমান উন্নতি। সৰ্বসমতাৰ স-অ-বা বিধি ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে ABC ত্ৰিভুজটো সমদ্বিবাহু।
5. ABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ য'ত AB = AC। $AP \perp BC$ আঁকি দেখুওৱা যে $\angle B = \angle C$

7.6 এটা ত্ৰিভুজৰ প্ৰসংগত অসমতাসমূহ (Inequalities in a Triangle) ঃ

এই পৰ্যন্ত তোমালোকে প্ৰধানতঃ এটা বা একাধিক ত্ৰিভুজৰ বাহু আৰু কোণসমূহৰ সমতা বিষয়ক কথাবোৰ অধ্যয়ন কৰি আছা। কোনো কোনো সময়ত আমি অসমান বস্তু বা সামগ্ৰীৰ সৈতেও মুখামুখি হওঁহক। সেইবোৰৰ পাৰস্পৰিক তুলনা আমাৰ বাবে আৱশ্যকীয় হৈ পৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, চিত্ৰ 7.41 (i) ত AB ৰেখাখণ্ডটোৰ দীঘ তুলনামূলকভাৱে CD ৰেখাখণ্ডতকৈ বেছি আৰু চিত্ৰ 7.41 (ii) ত $\angle A$ কোণটো $\angle B$ কোণতকৈ ডাঙৰ।



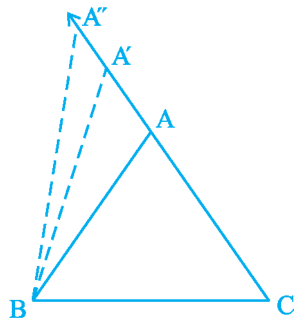
চিত্ৰ 7.41

এতিয়া আমি এটা ত্ৰিভুজৰ অসমান বাহু আৰু অসমান কোণবোৰৰ মাজত কোনোধৰণৰ সম্পৰ্ক আছে নে নাই পৰীক্ষা কৰি চাওহঁক। ইয়াৰ বাবে, আমি নিম্নোক্ত কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰোঁহক।

কাৰ্য ঃ ছবি অঁকা বোৰ্ড এখনৰ দুটা বিন্দু B আৰু C দুটা পিন নিৰ্দিষ্ট কৰি লোৱা আৰু এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বাহু BC ক বুজাবলৈ পিন দুটাক এডাল সূতাৰে গাঠি লোৱা।

আন এডাল সূতাৰ এটা মূৰ C ত সংযোগ কৰি লোৱা আৰু আনটো মূৰত পেঞ্চিল এডাল বান্ধি লোৱা। পেঞ্চিলডালেৰে এটা বিন্দু A চিন দি লোৱা আৰু ΔABC আঁকা (চিত্ৰ 7.42 চোৱা)। এতিয়া পেঞ্চিলডাল আঁতৰোৱা আৰু বৰ্দ্ধিত CA ত A ৰ পৰা আঁতৰাবলৈ (ইয়াৰ নতুন অৱস্থান) আন এটা বিন্দু A' চিহ্নিত কৰা।

গতিকে $A'C > AC$ (দীঘ তুলনা কৰি)। B ৰ সৈতে A' ক সংলগ্ন কৰি $A'BC$ ত্ৰিভুজটো সম্পূৰ্ণ কৰা। $\angle A'BC$ আৰু $\angle ABC$ সম্পৰ্কে তোমালোকৰ কি ধাৰণা হয়? সিহঁতৰ মান তুলনা কৰা। কি লক্ষ্য কৰিলা?



চিত্ৰ 7.42

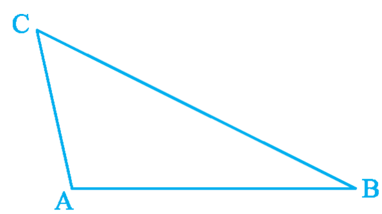
স্পষ্টভাৱে, $\angle A'BC > \angle ABC$

CA (বৰ্ধিত)ৰ ওপৰত কিছুমান অধিক বিন্দু চিহ্নিত কৰা আৰু BC বাহু আৰু চিহ্নিত বিন্দুবোৰেৰে ত্ৰিভুজ একোটা আঁকা।

তোমালোকে দেখিবা যে AC বাহুৰ দীঘ বঢ়াই যোৱাৰ লগে লগে (A ৰ বিভিন্ন অৱস্থান বিবেচনা কৰি) ইয়াৰ বিপৰীত কোণ $\angle B$ ৰ জোখো বাঢ়ি যায়।

এতিয়া, আন এটা কাৰ্য সম্পন্ন কৰা যাওক।

কাৰ্য ঃ এটা বিষমবাহু ত্ৰিভুজ (অৰ্থাৎ যাৰ আটাইবোৰ বাহুৰ জোখ বেলেগ বেলেগ) অংকন কৰা। বাহুবোৰৰ দীঘবোৰ জুখি লোৱা।



চিত্ৰ 7.43

এতিয়া, কোণবোৰৰ জোখ লোৱা। কি লক্ষ্য কৰিছা?

চিত্ৰ 7.43 ৰ ΔABC ত BC আটাইতকৈ দীঘল আৰু AC আটাইতকৈ চুটি বাহু।

আকৌ, $\angle$A আটাইতকৈ বৃহৎ আৰু $\angle$B আটাইতকৈ ক্ষুদ্ৰ কোণ।

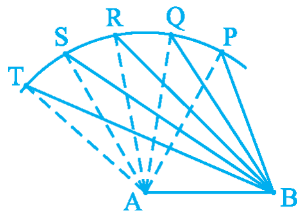
আন কিছুমান ত্ৰিভুজৰ সহায়ত কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা।

ত্ৰিভুজত অসমতাৰ এক গুৰুত্বপূৰ্ণ ফল আমি লাভ কৰিলোঁ। ইয়াক এটা উপপাদ্য হিচাপে তলত উল্লেখ কৰা হ'ল।

উপপাদ্য 7.6 ঃ *যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহু অসমান হয়, তেন্তে দীৰ্ঘতম বাহুটোৰ বিপৰীত কোণটো সদায় ডাঙৰ।*

চিত্ৰ 7.43 ত BC বাহুৰ ওপৰত CA = CP হোৱাকৈ P এটা বিন্দু লৈ তোমালোকে এই উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰিবা।

এতিয়া আমি আন এটা কাৰ্য সম্পন্ন কৰোঁহক।



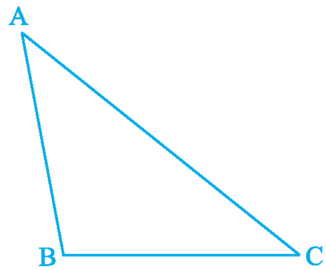
চিত্ৰ 7.44

কাৰ্য ঃ AB এডাল ৰেখাখণ্ড আঁকা। A ক কেন্দ্ৰ ধৰি আৰু যিকোনো ব্যাসাৰ্দ্ধ লৈ এটা বৃত্তচাপ আঁকা আৰু ইয়াৰ ওপৰত বিভিন্ন বিন্দু যেনে, P, Q, R, S, T চিহ্নিত কৰা।

এই বিন্দুবোৰৰ প্ৰতিটোকে A আৰু B ৰ সৈতে সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 7.44 চোৱা)। মন কৰা যে A ৰ পৰা T লৈ অগ্ৰসৰ হোৱাৰ লগে লগে $\angle$A কোণৰ জোখ ক্ৰমে বৃহত্তৰ হৈ গৈ থাকে। ইয়াৰ (কোণটোৰ) বিপৰীত বাহুৰ দীঘৰ পৰিণতি কি হয়? মন কৰা যে বাহুটোৰ দীঘো ক্ৰমে বাঢ়ি গৈ থাকে অৰ্থাৎ

$\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$

আৰু $TB > SB > RB > QB > PB.$



চিত্ৰ 7.45

এতিয়া, আটাইবোৰ কোণেই পৰস্পৰৰ অসমান হোৱাকৈ যিকোনো ত্ৰিভুজ অংকন কৰা। বাহুবোৰৰ দীঘবোৰ জুখি চোৱা (চিত্ৰ 7.45)।

মন কৰা যে বৃহত্তম কোণটোৰ বিপৰীত বাহুটো বৃহত্তম। চিত্ৰ 7.45 ত $\angle$B কোণটো বৃহত্তম আৰু AC বাহুটো বৃহত্তম।

কিছুমান অধিক ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা আৰু আমি দেখিবলৈ পাম যে উপপাদ্য 7.6 ৰ বিপৰীতটোও সত্য। এনেদৰে, আমি নিম্নোক্ত উপপাদ্যটো পাওঁহক।

উপপাদ্য 7.7 ঃ *যিকোনো ত্ৰিভুজত, ডাঙৰ কোণৰ বিপৰীত বাহুকেইটাও ডাঙৰ (অৰ্থাৎ অধিকতৰ দীঘবিশিষ্ট) বিৰোধৰ বা বিৰুদ্ধ পদ্ধতি অনুসৰণ কৰি এই উপপাদ্যটোৰ প্ৰমাণ আগবঢ়াব পাৰি।*

এতিয়া ABC এটা ত্ৰিভুজ লোৱা আৰু ইয়াত AB + BC, BC + AC আৰু AC + AB

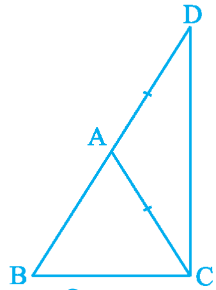
নিৰ্ণয় কৰা। কি লক্ষ্য কৰিছা?

তোমালোকে দেখিবা যে,

$AB + BC > AC$

$BC + AC > AB$ আৰু $AC + AB > BC$

আন কিছুমান ত্ৰিভুজ লৈ কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা আৰু ইয়াৰ সহায়ত তোমালোকে নিম্নোক্ত উপপাদ্যটো পাবা।



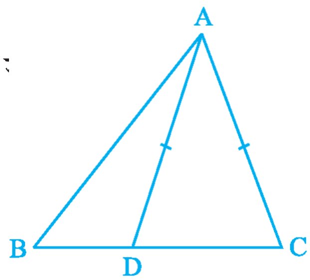
চিত্ৰ 7.46

উপপাদ্য 7.8 ঃ *এটা ত্ৰিভুজৰ যিকোনো দুটা বাহুৰ সমষ্টি তৃতীয় বাহুতকৈ ডাঙৰ (দীঘৰ অৰ্থত)।*

চিত্ৰ 7.46 ত মন কৰা যে ΔABC ৰ BA বাহুক D বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া হৈছে যাতে $AD = AC$। তোমালোকে দেখুৱাব পাৰিবানে যে $\angle BCD > \angle BDC$ আৰু $BA + AC > BC$? উপৰোক্ত উপপাদ্যটোৰ প্ৰমাণত উপনীত হ'লানে?

এই ফলসমূহৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল এটা উদাহৰণ বিবেচনা কৰা যাওক।

উদাহৰণ 9 ঃ ΔABC ৰ BC বাহুৰ ওপৰত D এটা বিন্দু লোৱা হ'ল যাতে $AD = AC$ (চিত্ৰ 7.47 চোৱা)। দেখুওৱা যে $AB > AD$



চিত্ৰ 7.47

সমাধান ঃ ΔDAC ত $AD = AC$ (দিয়া আছে)

গতিকে $\angle ADC = \angle ACD$ (সমান বাহুৰ বিপৰীত কোণবোৰ ঃ

এতিয়া,

ΔABD ৰ ক্ষেত্ৰত $\angle ADC$ এটা বহিঃকোণ।

গতিকে, $\angle ADC > \angle ABD$

বা, $\angle ACD > \angle ABD$

বা, $\angle ACD > \angle ABC$

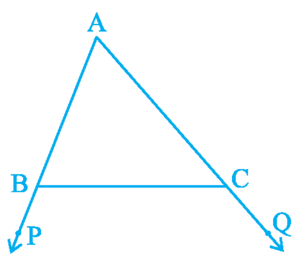
গতিকে, $AB > AC$ (ΔABC ৰ বৃহত্তৰ কোণৰ বিপৰীত বাহু)

বা, $AB > AD$ $(AD = AC)$

অনুশীলনী 7.4

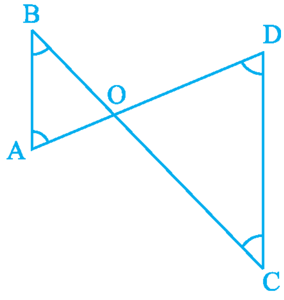
1. দেখুওৱা যে সমকোণী ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত অতিভুজেই হ'ল দীৰ্ঘতম বাহু।

2. চিত্ৰ 7.48 ত ΔABC ৰ AB আৰু AC বাহুক ক্ৰমে P আৰু Q বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া হৈছে। তদুপৰি, $\angle PBC < \angle QCB$। দেখুওৱা যে $AC > AB$.



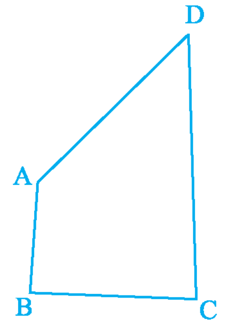
চিত্ৰ 7.48

3. চিত্ৰ 7.49 ত $\angle B < \angle A$ আৰু $\angle C < \angle D$ দেখুওৱা যে $AD < BC$



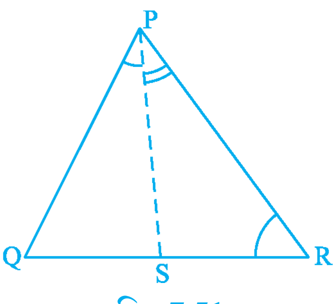
চিত্ৰ 7.49

4. ABCD চতুৰ্ভুজৰ AB আৰু CD যথাক্ৰমে হ্ৰস্বতম আৰু দীৰ্ঘতম বাহু (চিত্ৰ 7.50)। দেখুওৱা যে $\angle A > \angle C$ আৰু $\angle B > \angle D$



চিত্ৰ 7.50

5. চিত্ৰ 7.51 ত $PR > PQ$ আৰু PS য়ে $\angle QPR$ ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে $\angle PSR > \angle PSQ$



চিত্ৰ 7.51

6. দেখুওৱা যে এডাল ৰেখাত নথকা কোনো বিন্দুৰপৰা ৰেখাখণ্ডলৈ টনা আটাইবোৰ ৰেখাখণ্ডৰ ভিতৰত লম্ব ৰেখাখণ্ডডালেই হ'ল হ্ৰস্বতম।

অনুশীলনী 7.5 (বৈকল্পিক)*

1. ABC এটা ত্ৰিভুজ। ΔABC ৰ অন্তৰ্ভাগত এটা বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা যাতে ই ত্ৰিভুজটোৰ সকলো শীৰ্ষবিন্দুৰপৰা সমদূৰত্বত অৱস্থান কৰে।

2. এটা ত্ৰিভুজৰ অন্তৰ্ভাগত এটা বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা যাতে ই ত্ৰিভুজটোৰ আটাইবোৰ বাহুৰপৰা সমদূৰত্বত থাকে।

3. এখন বিশাল প্ৰমোদ কাননত প্ৰবেশ কৰা লোকসকল তিনিটা স্থানত থুপ খাই থাকে (চিত্ৰ 7.52)।

A. য'ত শিশুসকলৰ বাবে ভিন্ন তৰহৰ চোঁচৰা খেলনা (Slide) আৰু দোলনা (Swing) আছে।

B. যি স্থানৰ কাষত এটা কৃত্ৰিম হ্ৰদ অৱস্থিত

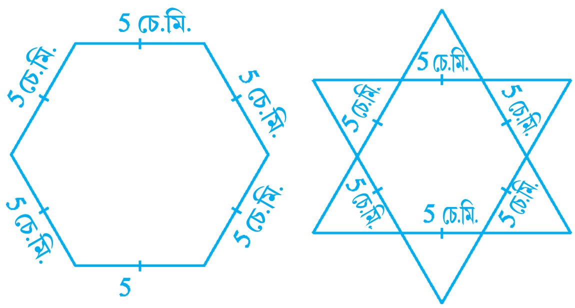
C. যি স্থান এটা বৃহৎ গাড়ীৰ যোৰা স্থান (Parking) আৰু প্ৰস্থান পথৰ (Exit) ওচৰত অৱস্থিত।

চিত্ৰ 7.52

থুপ খাই থকা লোকৰ বৃহত্তম সংখ্যকৰ ওচৰতে হোৱাকৈ এখন আইচ্ক্ৰীমৰ বিপণী কেনে স্থানত বহুৱাব লাগিব?

(ইংগিত ঃ দোকানখন A, B, C ৰ পৰা সমদূৰত্বত থাকিব লাগিব।)

4. ষড়ভুজ আৰু তৰা আকৃতিৰ ৰংগোলি দুটা (চিত্ৰ 7.53 (i) আৰু (ii)) যিমান সম্ভব সিমানটা 1 চে.মি. জোখৰ বাহু বিশিষ্ট সমবাহু ত্ৰিভুজেৰে সম্পূৰ্ণ কৰা। উভয় ক্ষেত্ৰতে ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা। ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা ক'ত অধিক?



চিত্ৰ 7.53

* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নল'বা।

7.7. সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে নিম্নোক্ত বিষয়সমূহৰ ওপৰত অধ্যয়ন কৰিলা।

1. দুটা চিত্ৰ সৰ্বসম হ'ব যদি সিহঁতৰ আকাৰ (shape) আৰু জোখ (size) একে হয়।
2. একে ব্যাসাৰ্দ্ধৰ দুটা বৃত্ত পৰস্পৰ সৰ্বসম।
3. একে বাহুবিশিষ্ট দুটা বৰ্গ সৰ্বসম।
4. যদি দুটা ত্ৰিভুজ ABC আৰু PQR অনুৰূপ সম্পৰ্ক $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ আৰু $C \leftrightarrow R$ সাপেক্ষে সৰ্বসম হয় তেন্তে প্ৰতীকেৰে ইয়াক $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ধৰণেৰে প্ৰকাশ কৰা হয়।
5. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহু আৰু সিহঁতৰ মধ্যবৰ্তী কোণটো আন এটা ত্ৰিভুজৰ দুই বাহু আৰু সিহঁতৰ মধ্যবৰ্তী কোণৰ সমান হয় তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হ'ব (বা-কো-বা সৰ্বসমতা বিধি)।
6. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা কোণ আৰু সিহঁতৰ মধ্যবৰ্তী বাহুটো আন এটা ত্ৰিভুজৰ দুই কোণ আৰু সিহঁতৰ মধ্যৱৰ্তী বাহুটোৰ সমান হয় তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হ'ব (কো-বা-কো সৰ্বসমতা বিধি)।
7. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা কোণ আৰু এটা বাহু আন এটা ত্ৰিভুজৰ দুই কোণ আৰু অনুৰূপ বাহুৰ সমান হয় তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হ'ব (কো-কো-বা সৰ্বসমতা বিধি)।
8. এটা ত্ৰিভুজৰ সমান বাহুৰ বিপৰীত কোণবোৰ সমান।
9. এটা ত্ৰিভুজৰ সমান কোণৰ বিপৰীত বাহুবোৰ সমান।
10. সমবাহু ত্ৰিভুজৰ প্ৰতিটো কোণেই 60^o ৰ সমান।
11. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহু আন এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহুৰ সৈতে সমান হয় তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হ'ব (বা-বা-বা সমৰ্বসমতা বিধি)।
12. যদি এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ এটাৰ অতিভুজ আৰু এটা বাহু আন এটাৰ অতিভুজ আৰু এটা বাহুৰ সমান হয় তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হ'ব (স-অ-বা সৰ্বসমতা বিধি)
13. এটা ত্ৰিভুজত দীৰ্ঘতৰ বাহুৰ বিপৰীত কোণটো বৃহত্তৰ।
14. এটা ত্ৰিভুজত বৃহত্তৰ কোণৰ বিপৰীত বাহুটো দীৰ্ঘতৰ।
15. এটা ত্ৰিভুজত যিকোনো দুই বাহুৰ দীঘৰ সমষ্টি তৃতীয় বাহুৰ দীঘতকৈ অধিক।

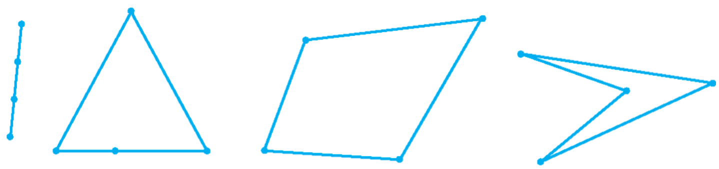
W9J5N5

অষ্টম অধ্যায়

চতুৰ্ভুজ (Quadrilateral)

8.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

ষষ্ঠ আৰু সপ্তম অধ্যায়ত তোমালোকে ত্ৰিভুজৰ বহুতো ধৰ্মৰ বিষয়ে পঢ়িছা আৰু তোমালোকে জানা যে তিনিটা একে ৰেখাত নথকা বিন্দুৰ যোৰ যোৰকৈ সংযোগ কৰিলে যি আৰ্হি পোৱা যায় সেইটো হ'ল ত্ৰিভুজ। এতিয়া আমি চাৰিটা বিন্দুৰ চিন দিলো আৰু এটা ক্ৰমত সিহঁতক যোৰ যোৰকৈ সংযোগ কৰিলে কি পাওঁ চোৱা যাওক।



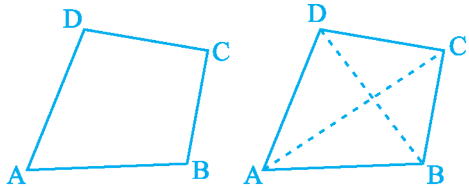
(i) (ii) (iii) (iv)

চিত্ৰ 8.1

মন কৰা যে আটাইকেইটা বিন্দু একেৰেখীয় হ'লে (অৰ্থাৎ একে ৰেখাত থাকিলে) আমি এডাল ৰেখাখণ্ড পাওঁ [চিত্ৰ 8.1 (i) চোৱা] বিন্দু চাৰিটাৰ যদি তিনিটা একেৰেখীয়, তেন্তে এটা ত্ৰিভুজ পাওঁ [চিত্ৰ 8.1 (ii) চোৱা]। যদি চাৰিটাৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়, তেন্তে আমি চাৰিটা বাহুৰ এটা বন্ধ আৰ্হি (বা চিত্ৰ) পাওঁ [চিত্ৰ 8.1 (iii) আৰু (iv) চোৱা]।

চাৰিটা বিন্দু একাদিক্ৰমে সংযোগ কৰি পোৱা এনেধৰণৰ এটা আৰ্হিক চতুৰ্ভুজ (Quadrilateral) বোলে। এই পাঠ্যপুথিত চিত্ৰ 8.1 (iii)ত দিয়া ধৰণৰ চতুৰ্ভুজহে বিবেচনা কৰিম, কিন্তু চিত্ৰ 8.1 (iv)ত দিয়া ধৰণৰ চতুৰ্ভুজ বিবেচনা নকৰিম।

এটা চতুৰ্ভুজৰ চাৰিটা বাহু, চাৰিটা কোণ আৰু চাৰিটা শীৰ্ষ বিন্দু আছে [চিত্ৰ 8.2 (i) চোৱা]।



(i) (ii)

চিত্ৰ 8.2

ABCD চতুৰ্ভুজৰ AB, BC, CD আৰু DA এই চাৰিটা বাহু; A, B, C আৰু D এই চাৰিটা শীৰ্ষ বিন্দু আৰু ∠A, ∠B, ∠C আৰু ∠D এই চাৰিটা শীৰ্ষবিন্দুকেইটাত উৎপন্ন হোৱা কোণ।

এতিয়া পৰস্পৰ বিপৰীত শীৰ্ষ A ৰ লগত C ক আৰু B ৰ লগত D ক সংযোগ কৰা [চিত্ৰ 8.2 (ii) চোৱা]

ABCD চতুৰ্ভুজৰ AC আৰু BD এই দুডাল কৰ্ণ।

এই অধ্যায়ত প্ৰধানকৈ বিভিন্ন ধৰণৰ চতুৰ্ভুজ, সিহঁতৰ ধৰ্মবিলাক আৰু বিশেষভাৱে সামান্তৰিকৰ ধৰ্মৰ বিষয়ে অধিক আলোচনা কৰিম।

তোমালোকে ভাবিব পাৰা যে আমিনো কিয় চতুৰ্ভুজৰ (বা সামান্তৰিকৰ) বিষয়ে পঢ়িব লাগে। তোমালোকে যদি চৌপাশৰ বিভিন্ন বস্তুবিলাক লক্ষ্য কৰা, তেন্তে দেখিবা যে সেইবিলাকৰ বহুতেই চতুৰ্ভুজৰ আৰ্হিৰ, যেনে— মজিয়াখন, বেৰবিলাক, চিলিং, শ্ৰেণীকোঠাৰ খিৰিকীবিলাক, ব'ৰ্ডখন, দাস্তাৰটোৰ প্ৰতিখন তল, তোমালোকৰ কিতাপৰ প্ৰতিটো পাত, তোমালোকৰ পঢ়া মেজৰ ওপৰভাগ ইত্যাদি। ইয়াৰে কিছুমান তলত দেখুওৱা হ'ল (চিত্ৰ 8.3 চোৱা)।

ব্লেক ব'ৰ্ড কিতাপ মেজ

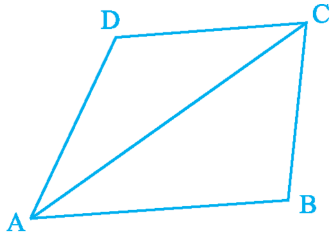
চিত্ৰ 8.3

যদিও আমি দেখা চৌপাশৰ বস্তুবিলাকৰ বেছিভাগেই এটা বিশেষ চতুৰ্ভুজৰ দৰে, যিটোক আয়ত বুলি কোৱা হয়, তথাপি আমি প্ৰধানকৈ চতুৰ্ভুজৰ বিষয়ে আৰু বিশেষভাৱে সামান্তৰিকৰ বিষয়ে অধিকভাৱে পঢ়িম। ইয়াৰ কাৰণ হ'ল আয়ত এটাও সামান্তৰিকেই আৰু সামান্তৰিকৰ সকলো ধৰ্মই আয়তৰ ক্ষেত্ৰটো সত্য হয়।

8.2 চতুৰ্ভুজৰ কোণ-সমষ্টি ধৰ্ম (Angle Sum Property of a Quadrilateral) ঃ

আমি এতিয়া চতুৰ্ভুজৰ কোণ-সমষ্টি ধৰ্ম মনত পেলাওঁ আহাঁ। এটা চতুৰ্ভুজৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি 360°। এডাল কৰ্ণ আঁকি চতুৰ্ভুজটো দুটা ত্ৰিভুজত ভাগ কৰি এই কথাৰ যথাৰ্থতা চাব পাৰি।

ধৰাহ'ল ABCD এটা চতুৰ্ভুজ আৰু AC ইয়াৰ এডাল কৰ্ণ (চিত্ৰ 8.4 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.4

ΔADC ৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি কিমান?

তোমালোকে জানা যে, $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180^\circ$ .... (1)

সেইদৰে, ΔABC ত, $\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^\circ$ .... (2)

(1) আৰু (2) যোগ কৰি পাওঁ,

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

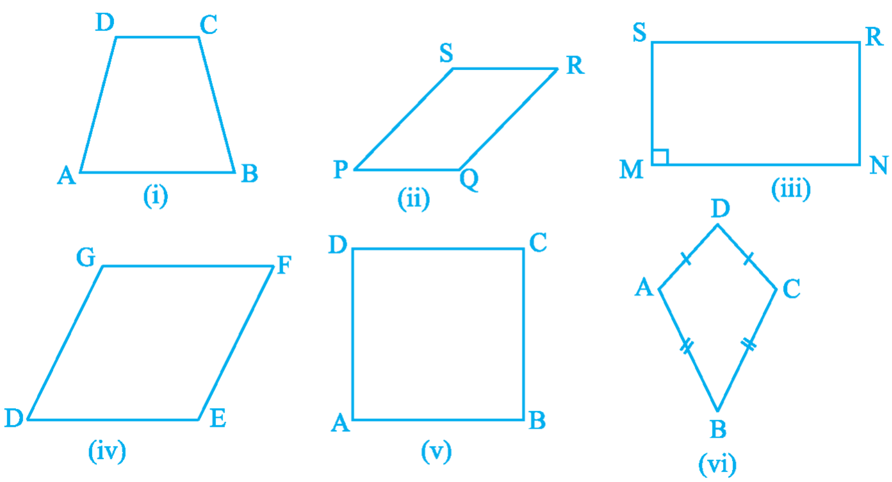
তদুপৰি $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ আৰু $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

সেয়ে, $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360^\circ$

অৰ্থাৎ *এটা চতুৰ্ভুজৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি 360°*

8.3 চতুৰ্ভুজৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ (Types of Quadrilaterals) ঃ

তলত অঁকা বিভিন্ন চতুৰ্ভুজবিলাক চোৱা।

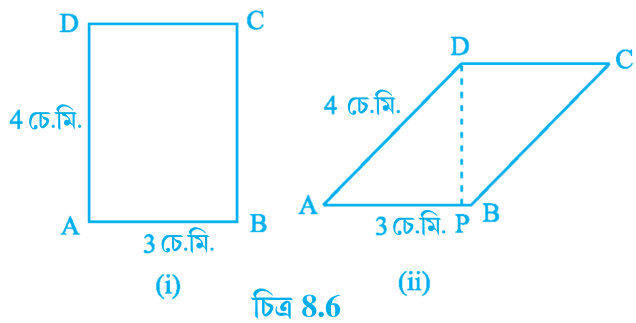


চিত্ৰ 8.5

লক্ষ্য কৰা যে ঃ

- চিত্ৰ 8.5(i) ত ABCD চতুৰ্ভুজৰ এযোৰ বিপৰীত বাহু, যেনে ঃ AB আৰু CD পৰস্পৰ সমান্তৰাল। তোমালোকে জানা যে ইয়াক ট্ৰেপিজিয়াম বুলি কোৱা হয়।
- চিত্ৰ 8.5(ii), (iii), (iv) আৰু (v) ৰ চতুৰ্ভুজ কেইটাৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত বাহু পৰস্পৰ সমান্তৰাল। মনত পেলোৱা যে এনেধৰণৰ চতুৰ্ভুজবিলাকক সামান্তৰিক বুলি কোৱা হয়। সেয়ে, চিত্ৰ 8.5(ii) ৰ PQRS চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক। সেইদৰে, চিত্ৰ 8.5 (iii), (iv) আৰু (v) ৰ চতুৰ্ভুজকেইটাৰ প্ৰতিটোৱেই একোটা সামান্তৰিক।
- মন কৰা যে চিত্ৰ 8.5 (iii) ৰ MNRS সামান্তৰিকটোৰ কোণ কেইটাৰ এটা, যেনে $\angle M$, সমকোণ। এই বিশেষধৰণৰ সামান্তৰিকটোক কি বুলি কোৱা হয় মনত পেলাবলৈ যত্ন কৰা। ইয়াক আয়ত (Rectangle) বুলি কোৱা হয়।
- চিত্ৰ 8.5 (iv) ৰ DEFG সামান্তৰিকটোৰ সকলোবোৰ বাহু সমান আৰু আমি জানো যে, ইয়াক ৰম্বাচ (Rhombus) বুলি কোৱা হয়।
- চিত্ৰ 8.5 (v) ৰ ABCD সামান্তৰকিটোৰ $\angle A = 90^o$ আৰু সকলোবোৰ বাহু সমান। ইয়াক বৰ্গ (square) বুলি কোৱা হয়।
- চিত্ৰ 8.5 (vi) ৰ ABCD চতুৰ্ভুজটোৰ AB = CD আৰু AB = CB; অৰ্থাৎ, সন্নিহিত বাহু দুযোৰ পৰস্পৰ সমান। এইটো সামান্তৰিক নহয়। ইয়াক 'চিলা' (Kite) বুলি কোৱা হয়।
  মন কৰা যে, বৰ্গ, আয়ত আৰু ৰম্বাচ এই সকলোবোৰেই সামান্তৰিক।
- বৰ্গ এটা আয়ত আৰু এটা ৰম্বাচো হয়।
- এটা সামান্তৰিক ট্ৰেপিজিয়ামো হয়।
- এটা চিলা সামান্তৰিক নহয়।
- ট্ৰেপিজিয়াম এটা সামান্তৰিক নহয় (কাৰণ ট্ৰেপিজিয়ামৰ এযোৰ বিপৰীত বাহুহে সমান্তৰাল আৰু সামান্তৰিক হ'বৰ কাৰণে দুইযোৰ বিপৰীত বাহুৱেই সমান্তৰাল হ'ব লাগে।)
- এটা আয়ত বা এটা ৰম্বাচ বৰ্গ নহয়।

চিত্ৰ 8.6 চোৱা। ইয়াত এটা আয়ত আৰু এটা সামান্তৰিক আছে আৰু দুয়োটাৰেই পৰিসীমা 14 cm।



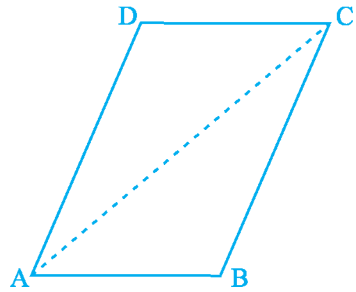
চিত্ৰ 8.6

ইয়াত সামান্তৰিকটোৰ কালি হ'ল DP × AB আৰু এই মান আয়তটোৰ কালিতকৈ, অৰ্থাৎ AB × AD তকৈ সৰু। কাৰণ DP < AD। সচৰাচৰ, মিঠাই দোকানীয়ে বৰফিবিলাক সামান্তৰিকৰ আৰ্হিত কাটে। কাৰণ এনে কৰিলে একেখন ট্ৰেট বৰফিৰ বেছি টুকুৰা ৰাখিব পাৰে। (এইবাৰ বৰফি খালে তোমালোকে ইয়াৰ আৰ্হিটো মন কৰিবা)

এতিয়া আমি আগৰ শ্ৰেণীত শিকা সামান্তৰিকৰ ধৰ্ম কিছুমানৰ পৰ্যালোচনা কৰিম।

8.4 সামান্তৰিকৰ ধৰ্ম (Properties of a Parallelogram) ঃ

আমি এটা কাম (activity) কৰোঁ। এখিলা কাগজৰপৰা এটা সামান্তৰিক কাটি ললোঁ আৰু চিত্ৰ 8.7 অত দিয়াৰ দৰে কৰ্ণইদি ইয়াক কাটি দুভাগ কৰিলোঁ। দুটা ত্ৰিভুজ পোৱা গ'ল। এই ত্ৰিভুজ দুটাৰ বিষয়ে কি ক'ব পাৰিবা?



চিত্ৰ 8.7

এটা ত্ৰিভুজক আনটোৰ ওপৰত পাতি দিয়া। প্ৰয়োজন হ'লে ঘূৰাই লৈ পাতিবা। কি দেখিলা?

লক্ষ্য কৰা যে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম।

বেলেগ বেলেগ সামান্তৰিক লৈ এই একেটা কামকে কৰি চোৱা। প্ৰত্যেকবাৰতেই দেখিবা যে প্ৰতিটো সামান্তৰিকক কৰ্ণই দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে।

এতিয়া আমি এই কথাটো প্ৰমাণ কৰিম।

উপপাদ্য 8.1 ঃ *সামান্তৰিকৰ এডাল কৰ্ণই সামান্তৰিকটোক দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে।*

প্ৰমাণ ঃ ধৰাহ'ল ABCD এটা সামান্তৰিক আৰু AC ইয়াৰ এডাল কৰ্ণ (চিত্ৰ 8.8 চোৱা)। লক্ষ্য কৰা যে AC কৰ্ণই ABCD সামান্তৰিকটোক দুটা ত্ৰিভুজত, যথা ΔABC আৰু ΔCDA, ভাগ কৰিছে। এই ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম বুলি এতিয়া প্ৰমাণ কৰিব লাগে।

মন কৰা যে ΔABC আৰু ΔCDA ৰ $BC \parallel AD$ আৰু AC এডাল তিৰ্যক।

গতিকে, $\angle BCA = \angle DAC$ (এযোৰ একান্তৰ কোণ)

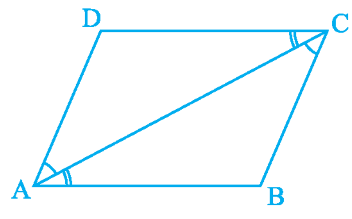
আকৌ, $AB \parallel DC$ আৰু AC এডাল তিৰ্যক।

গতিকে, $\angle BAC = \angle DCA$ (এযোৰ একান্তৰ কোণ)

আৰু $AC = CA$ (সাধাৰণ বাহু)

সেইবাবে, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (কো-বা-কো বিধি)

বা, AC কৰ্ণই ABCD সামান্তৰিকটোক ABC আৰু CDA এই দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত ভাগ কৰিছে।



চিত্ৰ 8.8

এতিয়া ABCD সামান্তৰিকটোৰ বিপৰীত বাহুবিলাকৰ জোখ লোৱা। কি দেখিলা? তোমালোকে

পাবা যে, AB=DC আৰু AD=BC। এইটো সামান্তৰিকৰ আন এটা ধৰ্ম। ইয়াক তলত দিয়া হ'ল।

উপপাদ্য 8.2 ঃ *এটা সামান্তৰিকৰ বিপৰীত বাহুবিলাক সমান।*

তোমালোকে ইতিমধ্যে প্ৰমাণ কৰিছা যে এডাল কৰ্ণই সামান্তৰিকটো দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে। গতিকে ইয়াৰপৰা তোমালোকে অনুৰূপ অংশবিলাকৰ (ধৰা বাহুবিলাক) বিষয়ে কি ক'ব পাৰিবা? সিহঁত পৰস্পৰ সমান। গতিকে AB = DC আৰু AD = BC।

এতিয়া এই ফলাফলৰ বিপৰীতটো কি? তোমালোকে ইতিমধ্যে জানা যে এটা উপপাদ্যত যি দিয়া থাকে সেই একেটাকে বিপৰীতটোত প্ৰমাণ কৰিব লাগে আৰু উপপাদ্যটোত যি প্ৰমাণ কৰা হ'ল তাকে বিপৰীতটোত দিয়া থাকে। সেই কাৰণে উপপাদ্য 8.2 ক তলত দিয়াৰ দৰেও লিখিব পাৰি—

যদি চতুৰ্ভুজ এটা সামান্তৰিক হয়, তেন্তে ইয়াৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত বাহু সমান। সেই কাৰণে ইয়াৰ বিপৰীতটো হ'ল ঃ

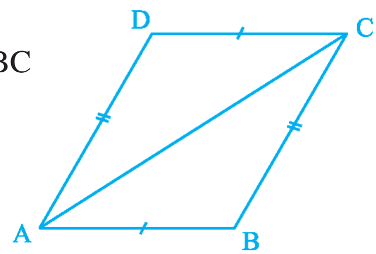
উপপাদ্য 8.3 ঃ *যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত বাহু সমান, তেন্তে ই এটা সামান্তৰিক।*

ইয়াৰ কাৰণ কি ক'ব পাৰিবানে?

ধৰা হ'ল ABCD চতুৰ্ভুজৰ AB = CD আৰু AD = BC (চিত্ৰ 8.9 চোৱা)। AC কৰ্ণ অংকন কৰা।

স্পষ্টভাৱে, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (কিয়?)

সেয়ে $\angle BAC = \angle DCA$ আৰু $\angle BCA = \angle DAC$ (কিয়?)



চিত্ৰ 8.9

এতিয়া তোমালোকে ক'ব পাৰিবানে যে ABCD এটা সামান্তৰিক? কিয়?

এইমাত্ৰ তোমালোকে দেখিলা যে এটা সামান্তৰিকৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত বাহু সমান আৰু বিপৰীতভাৱে, যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত বাহু সমান তেন্তে ই এটা সামান্তৰিক। এই একেটা ফলাফলকেই আমি প্ৰতিযোৰ বিপৰীত কোণৰ ক্ষেত্ৰতো হ'ব বুলি ক'ব পাৰিমনে?

এটা সামান্তৰিক অংকন কৰি ইয়াৰ কোণবোৰৰ জোখ লোৱা। কি দেখিলা? প্ৰতিযোৰ বিপৰীত কোণেই সমান। এই কামটোকে আন কিছুমান সামান্তৰিক লৈয়ো কৰা। ইয়াৰপৰা আমি তলত দিয়াৰ দৰে আন এটা ফল পালোঁ ঃ

উপপাদ্য 8.4 ঃ *এটা সামান্তৰিকৰ বিপৰীত কোণবিলাক সমান।*

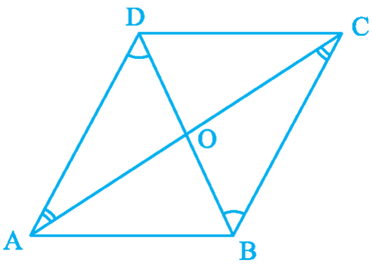
এতিয়া ইয়াৰ বিপৰীতটোও সত্য হয়নে? সত্য হয়। চতুৰ্ভুজৰ কোণ-সমষ্টি ধৰ্ম আৰু সমান্তৰাল ৰেখাক তিৰ্যকে ছেদ কৰাৰ ফল ব্যৱহাৰ কৰি আমি দেখা পাওঁ যে ইয়াৰ বিপৰীতটোও সত্য হয়। সেয়ে আমি তলত দিয়া উপপাদ্য এটাত পাওঁ ঃ

উপপাদ্য 8.5 ঃ *যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত কোণ সমান হয় তেন্তে ই এটা সামান্তৰিক।*

ইয়াৰ উপৰিও সামান্তৰিকৰ আৰু আন এটা ধৰ্ম আছে। ইয়াকে এতিয়া চোৱা যাওক। ABCD সামান্তৰিকটো আঁকা আৰু ইয়াৰ দুয়োডাল কৰ্ণ অংকন কৰা যাতে ইহঁতে O বিন্দুত কটাকটি কৰে। (চিত্ৰ 8.10 চোৱা)।

ইয়াৰপৰা OA, OB, OC আৰু OD ৰ জোখ লোৱা। কি দেখিলা? তোমালোকে দেখিবা যে

OA = OC আৰু OB = OD। অৰ্থাৎ কৰ্ণ দুডালৰ মধ্যবিন্দু হ'ল O। এই একেটা কামকেই আন কিছুমান সামান্তৰিক লৈ কৰি চোৱা। প্ৰতিবাৰতেই দেখিবা যে O বিন্দুটো দুয়োডাল কৰ্ণৰেই মধ্যবিন্দু। সেয়ে আমি তলত দিয়া উপপাদ্যটো পাওঁ ঃ



চিত্ৰ 8.10

উপপাদ্য 8.6 ঃ *সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।*

এতিয়া, যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয় তেন্তে কি হ'ব? ই এটা সামান্তৰিক হ'বনে? নিশ্চয়কৈ ই সত্য।

এই ফলাফলটো 8.6 উপপাদ্যটোৰ বিপৰীত ফল। ইয়াকে তলত দিয়া হ'ল ঃ

উপপাদ্য 8.7 ঃ *যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয় তেন্তে ই এটা সামান্তৰিক।*

তলত দিয়াৰ দৰে তোমালোকে ইয়াৰ কাৰণ দৰ্শাব পাৰিবা ঃ

চিত্ৰ 8.11ত, OA = OC আৰু OB = OD (দিয়া আছে)

গতিকে, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (কিয়?)

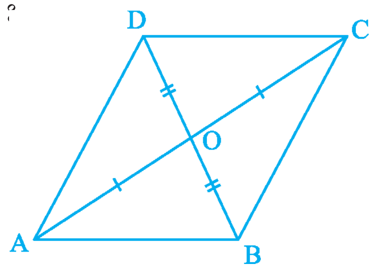
সেইবাবে, $\angle ABO = \angle CDO$ (কিয়?)

ইয়াৰ পৰা পাওঁ যে AB || CD

একেদৰেই, BC || AD

গতিকে ABCD এটা সামান্তৰিক।

এতিয়া আমি কিছুমান উদাহৰণ লওঁ।



চিত্ৰ 8.11

উদাহৰণ 1 ঃ দেখুওৱা যে এটা আয়তৰ প্ৰতিটো কোণেই সমকোণ।

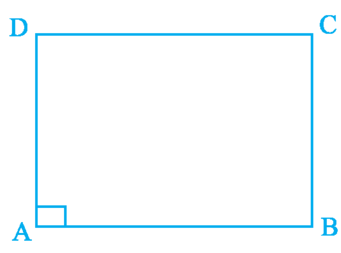
সমাধান ঃ আয়ত এটানো কি মনত পেলোৱা।

এটা আয়ত হ'ল এটা সামান্তৰিক যাৰ এটা কোণ সমকোণ।

ধৰা হ'ল, ABCD এটা আয়ত আৰু $\angle A = 90°$

আমি দেখুৱাব লাগে যে $\angle B = \angle C = \angle D = 90°$

আমি জানো যে AD || BC আৰু AB এডাল তিৰ্যক (চিত্ৰ 8.12 চোৱা)



চিত্ৰ 8.12

গতিকে $\angle A + \angle B = 180°$ (তিৰ্যকৰ একেফালৰ অন্তঃকোণ)

কিন্তু $\angle A = 90°$

গতিকে $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$

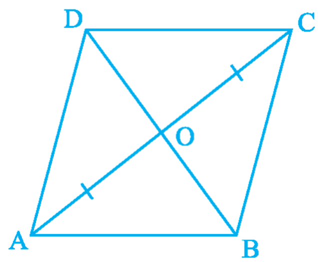
এতিয়া $\angle C = \angle A$ আৰু $\angle D = \angle B$ (সামান্তৰিকৰ বিপৰীত কোণ)

গতিকে $\angle C = 90°$ আৰু $\angle D = 90°$

সেয়ে, এটা আয়তৰ প্ৰতিটো কোণেই সমকোণ।

উদাহৰণ 2 ঃ দেখুওৱা যে ৰম্বাচৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ লম্ব।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল ABCD এটা ৰম্বাচ (চিত্ৰ 8.13 চোৱা)। তোমালোকে জানা যে



চিত্ৰ 8.13

AB = BC = CD = DA (কিয় ?)

এতিয়া ΔAOD আৰু ΔCOD ৰ পৰা OA = OC

(সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়)

OD = OD (সাধাৰণ বাহু)

AD = CD

গতিকে, $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (বা-বা-বা সৰ্বসম বিধি)

গতিকে $\angle AOD = \angle COD$ (সৰ্বসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণ)

কিন্তু, $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (ৰৈখিক যোৰ)

গতিকে $2\angle AOD = 180°$ অৰ্থাৎ $\angle AOD = 90°$

সেয়ে, ৰম্বাচৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ লম্ব।

উদাহৰণ 3 ঃ ABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ, যিটোৰ AB = AC। বহিঃকোণ PAC ক AD য়ে সমদ্বিখণ্ডিত কৰিছে আৰু CD ∥ AB (চিত্ৰ 8.14 চোৱা)। দেখুওৱা যে

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ আৰু (ii) ABCD এটা সামান্তৰিক।

সমাধান ঃ (i) ΔABC সমদ্বিবাহু আৰু ইয়াৰ AB = AC

(দিয়া আছে)।

গতিকে, $\angle ABC = \angle ACB$ (সমান বাহুৰ বিপৰীত কোণ)

আকৌ, $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$

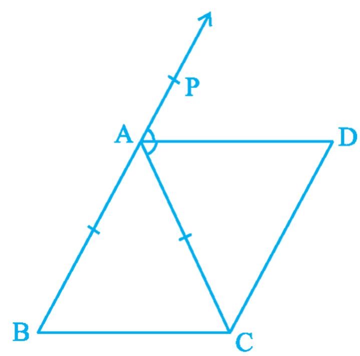
(ত্ৰিভুজৰ বহিঃকোণ)

বা, $\angle PAC = 2\angle ACB$ ....(1)

এতিয়া AD য়ে $\angle PAC$ ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

গতিকে, $\angle PAC = 2\angle DAC$ ....(2)

সেই কাৰণে, $2\angle ACB = 2\angle DAC$ [(1) আৰু (2)ৰ পৰা]



চিত্ৰ 8.14

বা, $\angle ACB = \angle DAC$

(ii) এই সমান কোণ দুটাই এযোৰ একান্তৰ কোণ গঠন কৰিছে। কাৰণ ইয়াত BC আৰু AD ৰেখাখণ্ডক AC তিৰ্যকে ছেদ কৰিছে।

গতিকে, $BC \parallel AD$

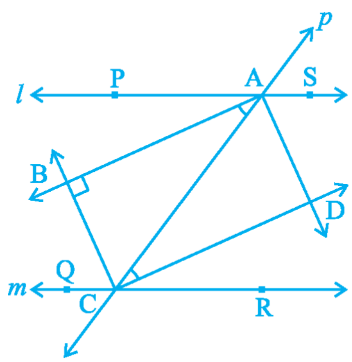
আকৌ, $BA \parallel CD$ (দিয়া আছে)

এতিয়া, ABCD চতুৰ্ভুজৰ দুইযোৰ বিপৰীত বাহু পৰস্পৰ সমান্তৰাল। সেয়ে, ABCD এটা সামান্তৰিক।

উদাহৰণ 4 ঃ দুডাল সমান্তৰাল ৰেখা l আৰু m ক p তিৰ্যকে ছেদ কৰিছে (চিত্ৰ 8.15 চোৱা)। দেখুওৱা যে অন্তঃকোণৰ সমদ্বিখণ্ডক কেইডালে গঠন কৰা চতুৰ্ভুজটো এটা আয়ত।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে $PS \parallel QR$ আৰু p তিৰ্যকডালে এই দুডালক ক্ৰমে A আৰু C বিন্দুত ছেদ কৰিছে।

$\angle PAC$ আৰু $\angle ACQ$ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালে B বিন্দুত কটাকটি কৰিছে আৰু $\angle ACR$ আৰু $\angle SAC$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালে D বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। আমি দেখুৱাব লাগে যে ABCD চতুৰ্ভুজটো এটা আয়ত।



চিত্ৰ 8.15

এতিয়া, $\angle PAC = \angle ACR$

(একান্তৰ কোণ, কাৰণ $l \parallel m$ আৰু p তিৰ্যক)

গতিকে, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

অৰ্থাৎ $\angle BAC = \angle ACD$। AB আৰু DC ৰেখাৰ AC তিৰ্যক কাৰণে এই দুটা কোণ এযোৰ একান্তৰ কোণ আৰু এই কোণ দুটা সমান।

গতিকে, $AB \parallel DC$

সেইদৰে, $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ আৰু $\angle CAD$ ৰ ক্ষেত্ৰত)

সেই কাৰণে, ABCD চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক।

তদুপৰি, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (ৰৈখিক যোৰ)

সেয়ে, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

বা, $\angle BAC + \angle CAD = 90°$

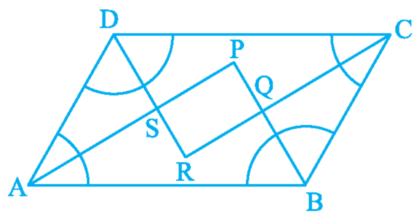
বা, $\angle BAD = 90°$

গতিকে, ABCD সামান্তৰিকটোৰ এটা কোণ 90°।

সেয়ে, ABCD এটা আয়ত।

উদাহৰণ 5 ঃ দেখুওৱা যে সামান্তৰিকৰ কোণকেইটাৰ সমদ্বিখণ্ডক কেইডালে এটা আয়ত গঠন কৰে।

সমাধান ঃ ABCD সামান্তৰিকৰ $\angle A$ আৰু $\angle B$, $\angle B$ আৰু $\angle C$, $\angle C$ আৰু $\angle D$, $\angle D$ আৰু $\angle A$ ৰ সমদ্বিখণ্ডকবিলাকৰ কটাকটি কৰা বিন্দুকেইটা যথাক্রমে P, Q, R আৰু S (চিত্ৰ 8.16 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.16

ΔASD ত কি দেখিছা?

যিহেতু $\angle D$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক DS আৰু $\angle A$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক AS,

গতিকে, $\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$ (A আৰু D কোণ দুটা তিৰ্যকৰ একেফালে থকা অন্তঃকোণ)

$= 90^\circ$

তদুপৰি, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ$ (ত্ৰিভুজৰ কোণ-সমষ্টি ধৰ্ম)

বা, $90^\circ + \angle DSA = 180^\circ$

বা, $\angle DSA = 90^\circ$

সেয়ে, $\angle PSR = 90^\circ$ ($\angle DSA$ ৰ বিপ্ৰতীপ কোণ)

সেইদৰে দেখুৱাব পাৰি যে, $\angle APB = 90^\circ$ বা $\angle SPQ = 90^\circ$ ($\angle DSA$ ক দেখুওৱাৰ দৰেই)

সেইদৰে, $\angle PQR = 90^\circ$ আৰু $\angle SRQ = 90^\circ$

গতিকে, PQRS এটা চতুৰ্ভুজ যাৰ আটাইকেইটা কোণেই সমকোণ। এতিয়া আমি ক'ব পাৰিমনে যে ই এটা আয়ত? পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওঁক। আমি দেখুৱাইছোঁ যে $\angle PSR = \angle PQR = 90^\circ$ আৰু $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^\circ$। গতিকে দুই যোৰ বিপৰীত কোণেই পৰস্পৰ সমান।

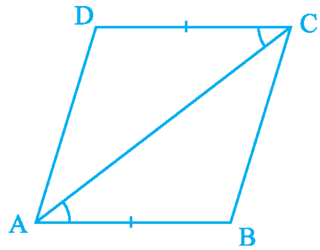
সেই কাৰণে, PQRS এটা সামান্তৰিক যাৰ এটা কোণ (আচলতে সকলো কোণেই) 90° আৰু সেয়েহে PQRS এটা আয়ত।

8.5 ঃ এটা চতুৰ্ভুজ সামান্তৰিক হোৱাৰ আন এটা চৰ্ত (Another Condition for a Quadrilateral to be a Parallelogram) ঃ

তোমালোকে এই অধ্যায়ত সামান্তৰিকৰ বহুতো ধৰ্মৰ বিষয়ে পঢ়িলা আৰু লগতে সত্যাপন কৰিও দেখিলা যে যদি কোনো চতুৰ্ভুজৰ ক্ষেত্ৰত এইবিলাকৰে যিকোনো এটা সিদ্ধ হয়, তেন্তে চতুৰ্ভুজটোক সামান্তৰিক বুলি কোৱা হয়।

এতিয়া আমি আৰু অন্য এটা চৰ্ত আলোচনা কৰিম যিটো এটা চতুৰ্ভুজ সামান্তৰিক হ'বৰ কাৰণে ন্যূনতম প্ৰয়োজনীয় চৰ্ত। এই চৰ্তটো এটা উপপাদ্য হিচাপে তলত দিয়া হ'ল।

উপপাদ্য 8.8 ঃ *এটা চতুৰ্ভুজক সামান্তৰিক বুলি কোৱা হ'ব যদিহে ইয়াৰ এযোৰ বিপৰীত বাহু সমান আৰু সমান্তৰাল।*



চিত্ৰ 8.17

চিত্ৰ 8.17 লৈ মন কৰা। ইয়াত AB = CD আৰু AB ‖ CD। এতিয়া AC কৰ্ণ অংকন কৰা হ'ল। তোমালোকে দেখুৱাব পাৰিবা যে

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (বা-কো-বা সৰ্বসম বিধি মতে)

গতিকে BC ‖ AD (কিয়?)

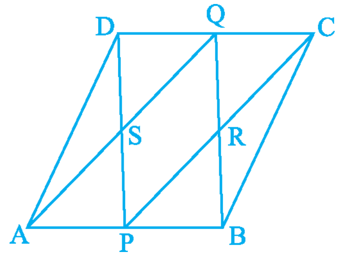
এতিয়া আমি সামান্তৰিকৰ এই ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ এটা উদাহৰণ লওঁ।

উদাহৰণ 6 ঃ ABCD এটা সামান্তৰিক আৰু ইয়াৰ AB আৰু CD বিপৰীত বাহুৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে P আৰু Q (চিত্ৰ 8.18 চোৱা)। যদি AQ য়ে DP ক S বিন্দুত ছেদ কৰে আৰু BQ য়ে CP ক R বিন্দুত ছেদ কৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে

(i) APCQ এটা সামান্তৰিক।

(ii) DPBQ এটা সামান্তৰিক।

(iii) PSQR এটা সামান্তৰিক।



চিত্ৰ 8.18

সমাধান ঃ (i) APCQ চতুৰ্ভুজৰ, AP ‖ QC ($\because$ AB ‖ CD) ....(1)

$$AP = \frac{1}{2} AB, \; CQ = \frac{1}{2} CD \text{ (দিয়া আছে)}$$

তদুপৰি, AB = CD (কিয়?)

গতিকে, AP = QC ....(2)

গতিকে APCQ এটা সামান্তৰিক। [(1) আৰু (2) ৰ পৰা, উপপাদ্য 8.8 ব্যৱহাৰ কৰি]

(ii) সেইদৰে, চতুৰ্ভুজ DPBQ এটা সামান্তৰিক। কাৰণ

DQ ‖ PB আৰু DQ = PB

(iii) PSQR চতুৰ্ভুজত,

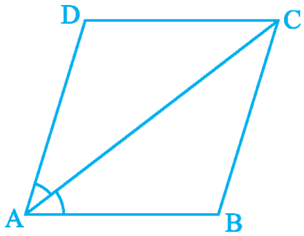
SP ‖ QR (DP ৰ এটা অংশ SP আৰু QB ৰ এটা অংশ QR)

সেইদৰে, SQ ‖ PR

গতিকে, PSQR এটা সামান্তৰিক।

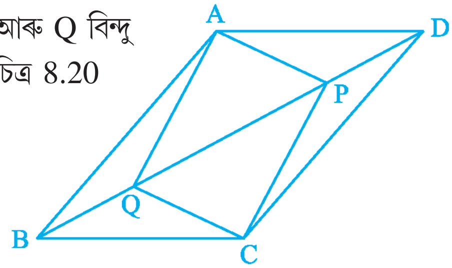
অনুশীলনী 8.1

1. এটা চতুৰ্ভুজৰ কোণকেইটাৰ অনুপাত 3 : 5 : 9 : 13। চতুৰ্ভুজটোৰ আটাইকেইটা কোণ নিৰ্ণয় কৰা।
2. যদি এটা সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুডাল সমান, তেন্তে দেখুওৱা যে ই এটা আয়ত।
3. যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণ দুডাল সমকোণত সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে ই এটা ৰম্বাচ।
4. দেখুওৱা যে, বৰ্গ এটাৰ কৰ্ণ দুডাল সমান আৰু ইহঁত পৰস্পৰ লম্বভাৱে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
5. দেখুওৱা যে যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণ দুডাল সমান আৰু ইহঁত পৰস্পৰ লম্বভাৱে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তেন্তে চতুৰ্ভুজটো এটা বৰ্গ।
6. ABCD সামান্তৰিকৰ AC কৰ্ণই ∠A ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। দেখুওৱা যে
   (i) কৰ্ণডালে C কোণকো সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
   (ii) ABCD এটা ৰম্বাচ।



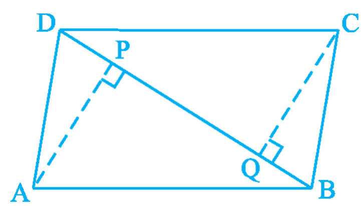
চিত্ৰ 8.19

7. ABCD এটা ৰম্বাচ। দেখুওৱা যে AC কৰ্ণই A আৰু C কোণ দুটাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে আৰু BD কৰ্ণই B আৰু D কোণ দুটাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
8. ABCD এটা আয়ত আৰু ইয়াৰ AC কৰ্ণই A আৰু C কোণক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। দেখুওৱা যে
   (i) ABCD এটা বৰ্গ।
   (ii) BD কৰ্ণই B আৰু D কোণক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
9. ABCD সামান্তৰিকৰ BD কৰ্ণৰ ওপৰত P আৰু Q বিন্দু দুটা এনেভাৱে লোৱা হ'ল যে DP = BQ (চিত্ৰ 8.20 চোৱা)। দেখুওৱা যে
   (i) ΔAPD ≅ ΔCQB
   (ii) AP = CQ
   (iii) ΔAQB ≅ ΔCPD
   (iv) AQ = CP
   (v) APCQ এটা সামান্তৰিক।



চিত্ৰ 8.20

10. ABCD এটা সামান্তৰিক। BD কৰ্ণৰ ওপৰত A আৰু C শীৰ্ষবিন্দুৰপৰা ক্ৰমে AP আৰু CQ লম্ব টনা হ'ল। (চিত্ৰ 8.21 চোৱা)। দেখুওৱা যে
    (i) ΔAPB ≅ ΔCQD
    (ii) AP = CQ



চিত্ৰ 8.21

11. ΔABC আৰু ΔDEF ৰ $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = EF$ আৰু $BC \parallel EF$। A, B আৰু C শীৰ্ষ বিন্দুকেইটা ক্ৰমে D, E আৰু F শীৰ্ষ বিন্দুকেইটাৰ লগত সংযোগ কৰা হ'ল (চিত্ৰ 8.22 চোৱা)। দেখুওৱা যে

(i) ABED চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক।

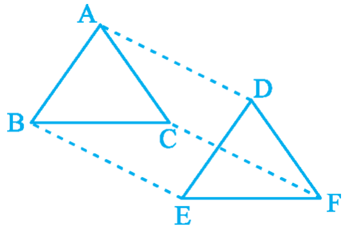
(ii) BEFC চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক।

(iii) $AD \parallel CF$ আৰু $AD = CF$।

(iv) ACFD চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক।

(v) $AC = DF$

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



চিত্ৰ 8.22

12. ABCD এটা ট্ৰেপিজিয়াম। ইয়াৰ $AB \parallel CD$ আৰু $AD = BC$ (চিত্ৰ 8.23 চোৱা). দেখুওৱা যে

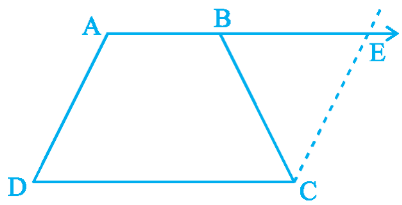
(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) কৰ্ণ AC = কৰ্ণ BD

[*ইংগিত ঃ* AB ক বঢ়াই দিয়া আৰু C বিন্দুৰেদি DA ৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা অংকন কৰা যাতে এইডালে AB ৰ বৰ্ধিত অংশত E বিন্দুত ছেদ কৰে।]

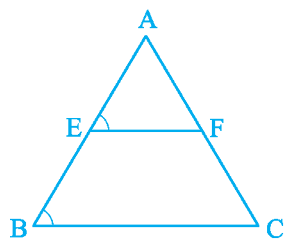


চিত্ৰ 8.23

8.6 মধ্যবিন্দু উপপাদ্য (The Mid-Point Theorem) ঃ

তোমালোকে ত্ৰিভুজ আৰু চতুৰ্ভুজৰ বহুতো ধৰ্মৰ বিষয়ে পঢ়িলা। এতিয়া আমি ত্ৰিভুজৰ বাহু বিলাকৰ মধ্যবিন্দুৰ লগত সম্পৰ্ক থকা আৰু আন এটা ফলাফল অধ্যয়ন কৰিম। তলৰ কাৰ্য (activity)টো কৰা।

এটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰা আৰু ইয়াৰ দুটা বাহুৰ মধ্যবিন্দু E আৰু F চিহ্নিত কৰা। E আৰু F সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 8.24 চোৱা)। EF আৰু BC ৰ জোখ লোৱা। $\angle AEF$ আৰু $\angle ABC$ ৰ জোখ লোৱা। এতিয়া কি দেখিলা? তোমালোকে পাবা যে $EF = \frac{1}{2} BC$ আৰু $\angle AEF = \angle ABC$। গতিকে $EF \parallel BC$। আন কিছুমান ত্ৰিভুজ লৈ এই কামটো পুনৰ কৰি চোৱা।



চিত্ৰ 8.24

ইয়াৰপৰা তোমালোকে তলত দিয়া উপপাদ্যটো পাবা।

উপপাদ্য 8.9 ঃ *এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহুৰ মধ্যবিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ড তৃতীয় বাহুৰ সমান্তৰাল।*

তলত দিয়া ইংগিতৰ আঁত ধৰি তোমালোকে উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰিবা।

চিত্ৰ 8.25 ত লক্ষ্য কৰা যে AB আৰু AC ৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে E আৰু F। তদুপৰি CD || BA

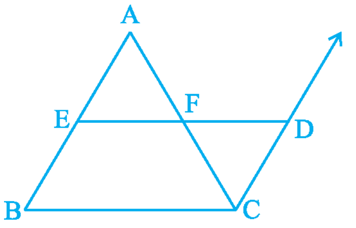
$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (কো-বা-কো বিধি)

সেয়ে, EF = DF আৰু BE = AE = DC (কিয় ?)

সেই কাৰণে, BCDE এটা সামান্তৰিক। (কিয় ?)

ইয়াৰপৰা, EF || BC

এই অৱস্থাত, মন কৰা যে $EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$



চিত্ৰ 8.25

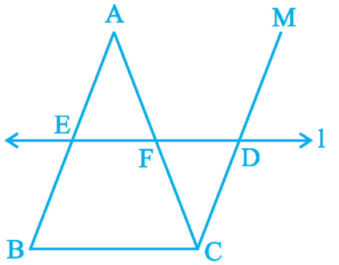
তোমালোকে উপপাদ্য 8.9 ৰ বিপৰীতটো কি ক'ব পাৰিবানে ? এই বিপৰীতটো সত্য হ'বনে ?

তোমালোকে দেখা পাবা যে ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটোও সত্য। ইয়াক তলত দিয়া হ'ল ঃ

উপপাদ্য 8.10 ঃ *এটা ত্ৰিভুজৰ এডাল বাহুৰ মধ্যবিন্দুৰে যোৱা ৰেখাডাল আন এটা বাহুৰ সমান্তৰাল হ'লে ৰেখাডালে তৃতীয় বাহুটোক সমদ্বিখণ্ডিত কৰিব।*

চিত্ৰ 8.26 ত, লক্ষ্য কৰা যে AB ৰ মধ্যবিন্দু E, E ৰে যোৱা l ৰেখাডাল BC ৰ সমান্তৰাল আৰু CM || BA।

ΔAEF আৰু ΔCDFৰ সৰ্বসমতাৰপৰা প্ৰমাণ কৰা যে AF = CF



চিত্ৰ 8.26

উদাহৰণ 7 ঃ ΔABC ৰ AB, BC আৰু CA বাহুৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে D, E আৰু F (চিত্ৰ 8.27 চোৱা)। দেখুওৱা যে D, E আৰু F বিন্দুকেইটা সংযোগ কৰিলে ABC ত্ৰিভুজটো চাৰিটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত বিভক্ত হ'ব।

সমাধান ঃ যিহেতু D আৰু E বিন্দু দুটা ABC ত্ৰিভুজৰ AB আৰু BC বাহুৰ মধ্যবিন্দু, গতিকে উপপাদ্য 8.9ৰ পৰা DE || AC।

সেইদৰে, DF || BC আৰু EF || AB।

সেইবাবে, ADEF, BDFE আৰু DFCE চতুৰ্ভুজকেইটা সামান্তৰিক।

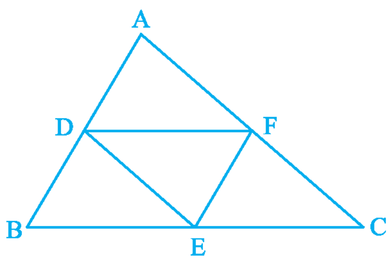
এতিয়া, BDFE সামান্তৰিকৰ DE এডাল কৰ্ণ।

গতিকে, $\Delta BDE \cong \Delta FED$

সেইদৰে, $\Delta DAF \cong \Delta FED$

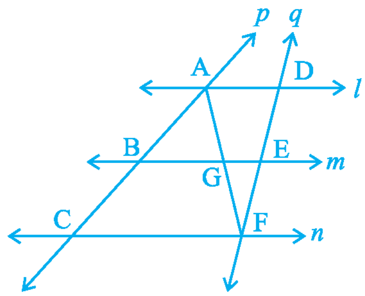
আৰু $\Delta EFC \cong \Delta FED$

গতিকে চাৰিওটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম।



চিত্ৰ 8.27

উদাহৰণ 8 ঃ l, m আৰু n এই সমান্তৰাল সৰলৰেখা তিনিডালক p আৰু q তিৰ্যক দুডালে এনেদৰে ছেদ কৰে যে p ৰ ওপৰত l, m আৰু n ৰ দ্বাৰা সৃষ্টি হোৱা AB আৰু BC ছেদাংশ দুটা সমান (চিত্ৰ 8.28 চোৱা)। দেখুওৱা যে l, m আৰু n ৰ দ্বাৰা q ওপৰত সৃষ্টি হোৱা DE আৰু EF ছেদাংশ দুটাও সমান।



চিত্ৰ 8.28

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে AB = BC। এতিয়া প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে DE = EF।

A আৰু F ক এডাল ৰেখাখণ্ডৰে সংযোগ কৰাত ই mক G বিন্দুত ছেদ কৰিছে।

ACFD ট্ৰেপিজিয়ামটো ΔACF আৰু ΔAFD এই ত্ৰিভুজ দুটাত বিভক্ত হৈছে।

ΔACF ৰ পৰা, দিয়া আছে যে AC ৰ মধ্যবিন্দু B (AB = BC) আৰু BG ‖ CF (কাৰণ $m \parallel n$).

গতিকে, AF ৰ মধ্যবিন্দু G (উপপাদ্য 8.10ৰ পৰা)।

এতিয়া ΔAFDৰ পৰা, একে যুক্তিকেই দিব পাৰি যে, AF ৰ মধ্যবিন্দু G, GE ‖ AD। গতিকে উপপাদ্য 8.10 ৰ সহায়ত পাওঁ যে DF ৰ মধ্যবিন্দু E।

অৰ্থাৎ DE = EF

অন্য ধৰণেৰে ক'ব পাৰি যে l, m আৰু n ৰ দ্বাৰাও q ৰ ওপৰত সমান সমান ছেদাংশৰ সৃষ্টি হয়।

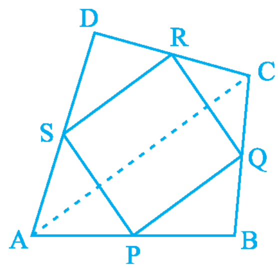
অনুশীলনী 8.2

1. ABCD এটা চতুৰ্ভুজ। ইয়াত AB, BC, CD আৰু DA ৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে P, Q, R আৰু S (চিত্ৰ 8.29 চোৱা)। AC ইয়াৰ কৰ্ণ। দেখুওৱা যে

(i) SR ‖ AC আৰু $SR = \frac{1}{2} AC$

(ii) PQ = SR

(iii) PQRS এটা সামান্তৰিক।

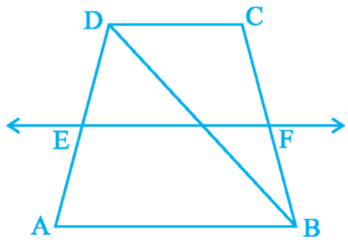


চিত্ৰ 8.29

2. ABCD এটা ৰম্বাচ। AB, BC, CD আৰু DA ৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে P, Q, R আৰু S। দেখুওৱা যে PQRS এটা আয়ত।

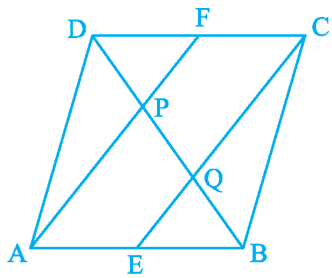
3. ABCD এটা আয়ত। P, Q, R আৰু S ক্ৰমে AB, BC, CD আৰু DAৰ মধবিন্দু। দেখুওৱা যে PQRS চতুৰ্ভুজটো এটা ৰম্বাচ।

4. ABCD এটা ট্ৰেপিজিয়াম। ইয়াৰ AB ∥ DC, BD এডাল কৰ্ণ আৰু E বিন্দুটো ADৰ মধ্যবিন্দু। E বিন্দুৰে যোৱা AB ৰ সমান্তৰালকৈ অঁকা ৰেখাডালে BC ক F বিন্দুত ছেদ কৰিছে (চিত্ৰ 8.30 চোৱা)। দেখুওৱা যে F বিন্দুটো BC ৰ মধ্যবিন্দু।



চিত্ৰ 8.30

5. ABCD সামান্তৰিকৰ E আৰু F বিন্দু দুটা ক্ৰমে AB আৰু CD বাহুৰ মধ্যবিন্দু (চিত্ৰ 8.31 চোৱা)। দেখুওৱা যে AF আৰু EC ৰেখাখণ্ডই BD কৰ্ণক সমানে ত্ৰিখণ্ডিত কৰে।



চিত্ৰ 8.31

6. দেখুওৱা যে চতুৰ্ভুজৰ বিপৰীত বাহুৰ মধ্যবিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ড দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

7. ABC ত্ৰিভুজৰ C কোণটো সমকোণ। AB অতিভুজৰ মধ্যবিন্দু M ৰে যোৱাকৈ আৰু BCৰ সমান্তৰালকৈ অঁকা ৰেখাই AC ক D বিন্দুত ছেদ কৰে। দেখুওৱা যে

(i) D বিন্দুটো AC ৰ মধ্যবিন্দু

(ii) MD ⊥ AC

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

8.7 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাকেইটা শিকিলা ঃ

1. এটা চতুৰ্ভুজৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি 360°।
2. সামান্তৰিকৰ এডাল কৰ্ণই সামান্তৰিকটোক দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত বিভক্ত কৰে।
3. এটা সামান্তৰিকৰ
   (i) বিপৰীত বাহুবোৰ সমান।
   (ii) বিপৰীত কোণবিলাক সমান।
   (iii) কৰ্ণ (অতিভুজ) দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
4. এটা চতুৰ্ভুজ সামান্তৰিক হ'ব, যদিহে
   (i) বিপৰীত বাহুবিলাক সমান, বা
   (ii) বিপৰীত কোণবিলাক সমান, বা
   (iii) কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়, বা
   (iv) এযোৰ বিপৰীত বাহু সমান আৰু সমান্তৰাল।
5. আয়তৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয় আৰু ইহঁত সমান। ইয়াৰ বিপৰীতটোও সত্য।
6. ৰম্বাচৰ কৰ্ণ দুডাল লম্বভাৱে পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়। ইয়াৰ বিপৰীতটোও সত্য।
7. বৰ্গৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ লম্বভাৱে সমদ্বিখণ্ডিত হয় আৰু ইহঁত সমান। ইয়াৰ বিপৰীতটোও সত্য।
8. ত্ৰিভুজৰ যিকোনো দুটা বাহুৰ মধ্যবিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ড তৃতীয় বাহুৰ সমান্তৰাল আৰু ইয়াৰ আধা।
9. ত্ৰিভুজৰ এটা বাহুৰ মধ্যবিন্দুৰে যোৱা আৰু আন এটা বাহুৰ সমান্তৰালকৈ থকা ৰেখাই তৃতীয় বাহুক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
10. এটা চতুৰ্ভুজৰ মধ্যবিন্দুবিলাক একাদিক্ৰমে সংযোগ কৰি গঠন কৰা চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক।

C7E9X6

নৱম অধ্যায়

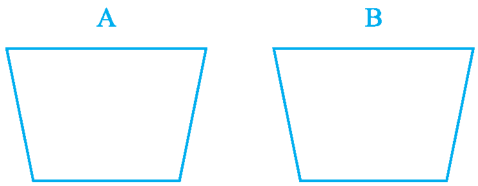
সামান্তৰিক আৰু ত্ৰিভুজৰ কালি
(Areas of parallelograms and Triangles)

9.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

পঞ্চম অধ্যায়ত তোমালোকে পাই আহিছা যে পথাৰবিলাকৰ নতুনকৈ সীমা নিৰ্দ্ধাৰণ আৰু সেইবোৰক উপযুক্ত অংশত বিভক্তকৰণৰ প্ৰক্ৰিয়াত আহি পৰা ভূ-ভাগৰ (মাটিৰ) জোখমাপেই জ্যামিতিৰ অধ্যয়নৰ প্ৰথম পাতনি। উদাহৰণস্বৰূপে মধু নামৰ এগৰাকী খেতিয়কৰ এখন ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ পথাৰ আছিল। তেওঁ এইখনক তেওঁৰ দুগৰাকী জীয়েক আৰু এজন পুতেকৰ মাজত সমানে ভাগ কৰি দিব খুজিলে। পথাৰখনৰ কালিৰ জোখ সঠিককৈ নিৰ্ণয় কৰাৰ পৰিবৰ্তে মাত্ৰ তেওঁ ত্ৰিভুজাকাৰ ক্ষেত্ৰখনৰ (পথাৰ) এটা বাহুক সমানে তিনিটা অংশত বিভক্ত কৰিলে আৰু প্ৰতিটো ভাগবিন্দুক বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুটোৰ লগত সংযুক্ত কৰিলে। এইদৰে পথাৰখন তিনিটা সমান ভাগত বিভক্ত হ'ল আৰু তেওঁ ল'ৰা-ছোৱালীৰ প্ৰতিজনকে একোটা অংশ দিলে। তোমালোকে ভাবানে যে, তেওঁ এইদৰে উলিওৱা তিনিওটা অংশৰেই প্ৰকৃততে কালিৰ জোখ একে সমান আছিল? এনেকুৱা ধৰণৰ প্ৰশ্ন আৰু আন এই সম্পৰ্কীয় সমস্যাবোৰৰ সমাধান পাবলৈ তোমালোকে ইতিমধ্যে আগৰ শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰি অহা সমতলীয় চিত্ৰবোৰৰ কালিৰ বিষয়ে পুনৰীক্ষণ কৰাৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

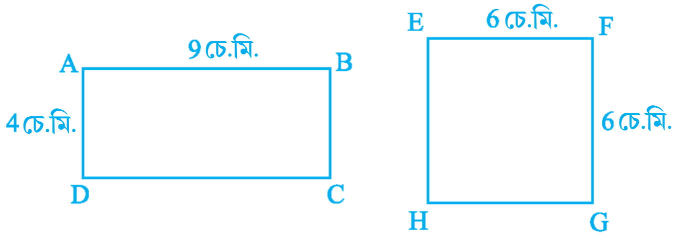
তোমালোকৰ বোধহয় মনত পৰিব যে সৰল বন্ধ চিত্ৰ এটাই আৱৰা সমতলৰ অংশ এটাক সেই চিত্ৰটো সাপেক্ষে এখন **সমতলীয় ক্ষেত্ৰ** (planar region) বোলে। এই সমতলীয় ক্ষেত্ৰৰ পৰিমাণ বা জোখ এটাকে ইয়াৰ **কালি** বোলে। এই পৰিমাণ বা জোখক সদায়ে এটা সংখ্যাৰ সহায়ত (কোনো এটা এককত) প্ৰকাশ কৰা হয়, যেনে 5 বৰ্গ চে.মি., 8 বৰ্গমিটাৰ, 3 হেক্টাৰ ইত্যাদি। গতিকে আমি ক'ব পাৰোঁ যে এটা চিত্ৰৰ কালি বুলিলে সমতলত সেই চিত্ৰটোৱে আগুৰা অংশৰ সৈতে জড়িত এটা সংখ্যাহে (কোনো এটা এককত) বুজায়।

আগৰ শ্ৰেণী আৰু সপ্তম অধ্যায়ৰপৰাই আমি সৰ্ব্বসম চিত্ৰবোৰৰ ধাৰণাৰ সৈতেও সুপৰিচিত হৈ আহিছোঁ। *দুটা চিত্ৰক সৰ্বসম বোলে যদি সিহঁতৰ আকৃতি একে আৰু একে জোখৰ হয়।*



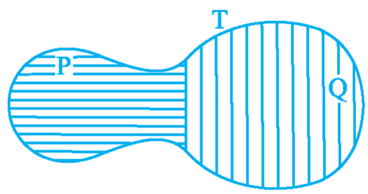
চিত্ৰ 9.1

আনভাষাত, যদি A আৰু B চিত্ৰ দুটা সৰ্বসম (চিত্ৰ 9.1 চোৱা) তেন্তে এখন নক্সা আঁকা কাকতৰ (tracing paper) সহায়ত তুমি এটা চিত্ৰক ইটোৰ ওপৰত সম্পূৰ্ণভাৱে ঢাক খোৱাকৈ সমাৰোপ (superimpose) কৰিব পাৰা। গতিকে *যদি দুটা চিত্ৰ A আৰু B সৰ্বসম, তেন্তে সিহঁতৰ কালি সমান হ'ব।* এই উক্তিৰ বিপৰীতটো কিন্তু সত্য নহয়। আন কথাত, *একে সমান কালিৰ দুটা চিত্ৰ সৰ্বসম নহ'বও পাৰে।* উদাহৰণ স্বৰূপে, চিত্ৰ 9.2 ত ABCD আৰু EFGH আয়ত দুটাৰ কালি একে (9×4 বৰ্গ চে.মি. আৰু 6 × 6 বৰ্গ চে.মি.), কিন্তু দেখদেখকৈ সিহঁত সৰ্বসম নহয়। (কিয়?)



চিত্ৰ 9.2

এতিয়া আমি তলৰ 9.3 চিত্ৰটোলৈ চাওঁহক—



চিত্ৰ 9.3

লক্ষ্য কৰা যে চিত্ৰ T য়ে আগুৰা সমতলীয় ক্ষেত্ৰটো P আৰু Q চিত্ৰ দুটাই আগুৰা দুটা সমতলীয় চিত্ৰৰে গঠিত। সহজতেই দেখা পাবা যে—

T চিত্ৰটোৰ কালি = P চিত্ৰৰ কালি + Q চিত্ৰৰ কালি।

তোমালোকে চিত্ৰ A ৰ কালিক কালি (A), চিত্ৰ B ৰ কালিক কালি (B), চিত্ৰ T ৰ কালিক কালি (T) ইত্যাদিৰূপে বুজাব পাৰা। এতিয়া ক'ব পাৰা যে—

এটা চিত্ৰৰ কালি সেই চিত্ৰটোৰে আগুৰা সমতলৰ অংশটোৰ সৈতে জড়িত এটা সংখ্যা (কোনো এটা এককত) যিয়ে তলৰ ধৰ্ম দুটা মানে—

(1) যদি A আৰু B চিত্ৰ দুটা সৰ্বসম, তেন্তে কালি (A) = কালি (B)

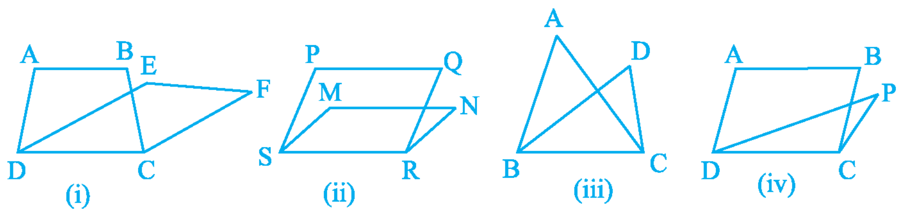
আৰু (2) যদি দুটা চিত্ৰ T য়ে আগুৰা সমতল ক্ষেত্ৰটো P আৰু Q দুটা অংশযুক্ত সমতল ক্ষেত্ৰৰ দ্বাৰা গঠিত তেন্তে

কালি (T) = কালি (P) + কালি (Q)

আয়ত, বৰ্গ, সামান্তৰিক, ত্ৰিভুজ ইত্যাদি বিভিন্ন চিত্ৰবোৰৰ কালি নিৰ্ণয়ৰ সূত্ৰ কিছুমানো তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীবোৰৰপৰা জানি আহিছা। আমি এই অধ্যায়ত একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থান কৰাৰ চৰ্তসাপেক্ষে এই জ্যামিতিক চিত্ৰবোৰৰ কালিৰ মাজত কিছুমান সম্পৰ্ক অধ্যয়ন কৰি এই সূত্ৰবোৰৰ বিষয়ে থকা জ্ঞান সুদৃঢ় কৰাৰ চেষ্টা কৰিম। এই অধ্যয়ন আমাৰ 'ত্ৰিভুজৰ সদৃশতা'ৰ ওপৰত পাবলগীয়া ফল কিছুমান বুজাৰ ক্ষেত্ৰতো প্ৰয়োজন হ'ব।

9.2 একে ভূমিৰ আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজৰ চিত্ৰ (Figures on the Same Base and Between the Same Parallels) ঃ

তলৰ চিত্ৰবোৰ চোৱা ঃ



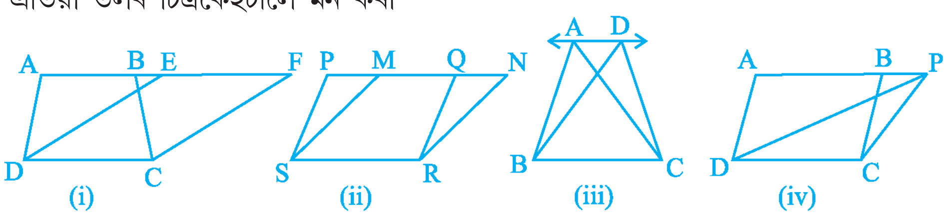
চিত্ৰ 9.4

9.4 (i) চিত্ৰটোত ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিকটোৰ এটা সাধাৰণ বাহু DC আছে। আমি ক'ম যে ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিক দুয়ো একেটা ভূমি DC ৰ ওপৰত আছে। একেদৰে—

চিত্ৰ 9.4 (ii) ত PQRS আৰু MNRS সামান্তৰিক দুটা একেটা ভূমি SR ৰ ওপৰত;

চিত্ৰ 9.4 (iii) ত ABC আৰু DBC ত্ৰিভুজ দুটা একেটা ভূমি BC ৰ ওপৰত আৰু চিত্ৰ 9.4(iv) ত ABCD সামান্তৰিক আৰু PDC ত্ৰিভুজটো একেটা ভূমি DC ৰ ওপৰত আছে।

এতিয়া তলৰ চিত্ৰকেইটালৈ মন কৰা—

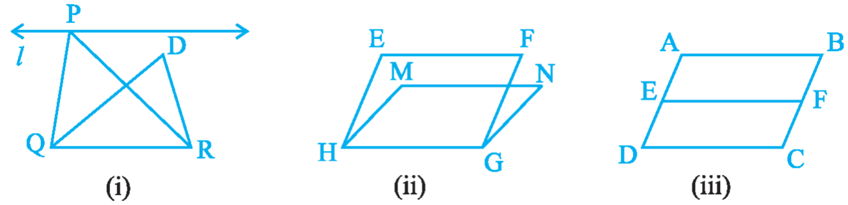


চিত্ৰ 9.5

ইয়াৰ 9.5(i) চিত্ৰটোত স্পষ্টভাবে ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিকটো একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আছে। তাৰোপৰি, DC ভূমিৰ বিপৰীতে ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ শীৰ্ষবিন্দু A আৰু B, আৰু EFCD সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষবিন্দু E আৰু F আটায়েই DC ৰ সমান্তৰাল এটা ৰেখা AF ৰ ওপৰত আছে। আমি ক'ম যে, ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিক উভয়ে একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AF আৰু DC ৰ মাজত অৱস্থিত। একেদৰে PQRS আৰু MNRS সামান্তৰিক দুটা একে ভূমি SR ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল PN আৰু SR ৰ মাজত অৱস্থিত [চিত্ৰ 9.5 (ii)], যিহেতু PQRS ৰ শীৰ্ষবিন্দু P আৰু Q আৰু MNRS ৰ শীৰ্ষবিন্দু M আৰু N আটাইকেইটাই ভূমি SR ৰ সমান্তৰাল এটা ৰেখা PN ৰ ওপৰত আছে। একেধৰণেৰে ABC আৰু DBC ত্ৰিভুজ দুটা একে ভূমি BC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AD আৰু BC ৰ [চিত্ৰ 9.5 (iii) চোৱা] মাজত অৱস্থিত; আৰু ABCD সামান্তৰিক আৰু PCD ত্ৰিভুজ একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AP আৰু DC ৰ মাজত [চিত্ৰ 9.5 (iv) চোৱা] অৱস্থিত।

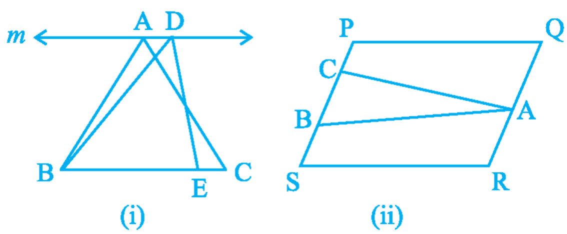
গতিকে, *দুটা চিত্ৰক একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু দুই সমান্তৰালৰ মাজত থকা বুলি কয় যদি সিহঁতৰ এটা সাধাৰণ ভূমি (বাহু) থাকে আৰু প্ৰতিটো চিত্ৰৰ সাধাৰণ ভূমিটোৰ বিপৰীতে থকা শীৰ্ষবিন্দুবোৰ (বা শীৰ্ষ বিন্দু) ভূমিৰ সমান্তৰাল এটা ৰেখাৰ ওপৰত থাকে।*

ওপৰৰ কথাখিনিত দৃষ্টি ৰাখি তোমালোকে এতিয়া ক'ব নোৱাৰিবা যে চিত্ৰ 9.6 (i) ত ΔPQR আৰু ΔDQR একে সমান্তৰাল l আৰু QR ৰ মাজত অৱস্থিত। একেদৰে চিত্ৰ 6(ii) ৰ EFGH



চিত্ৰ 9.6

আৰু MNGH সামান্তৰিক দুটা একে সমান্তৰাল EF আৰু HG ৰ মাজত অৱস্থিত নহয় আৰু চিত্ৰ 9.6 (iii) ৰ ABCD আৰু EFCD সামান্তৰিক দুটাও একে সমান্তৰাল AB আৰু DC ৰ মাজত (আনকি সিহঁতৰ DC সাধাৰণ ভূমি আৰু একে সমান্তৰাল AD আৰু BC ৰ মাজত থকা স্বত্বেও) অৱস্থিত নহয়।



চিত্ৰ 9.7

গতিকে এইটো স্পষ্টভাৱে মন কৰিব

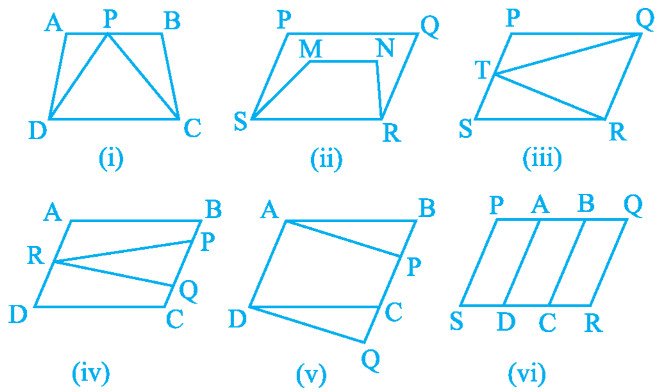
লাগিব যে—

সমান্তৰাল ৰেখা দুটাৰ ভিতৰত কোনোবা এটাত সাধাৰণ ভূমিটো থাকিব লাগিব।

মন কৰা যে 9.7 (i) চিত্ৰৰ ΔABC আৰু ΔDBE সাধাৰণ ভূমিৰ ওপৰত নাই। একেদৰে চিত্ৰ 9.7 (ii) ৰ ABC ত্ৰিভুজ আৰু PQRS সামান্তৰিকটোও একে ভূমিৰ ওপৰত নাই।

অনুশীলন 9.1

1. তলৰ চিত্ৰবোৰৰ কোনবোৰ একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থিত? এনেক্ষেত্ৰত সাধাৰণ ভূমিটো আৰু সমান্তৰাল ৰেখা দুটা উল্লেখ কৰা।

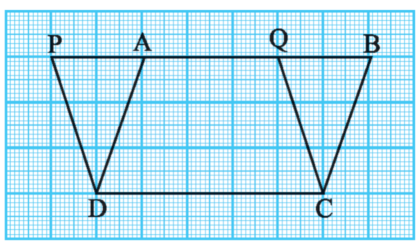


চিত্ৰ 9.8

9.3 একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা সামান্তৰিক (Parallelograms on the same Base and between the same Parallels) ঃ

এতিয়া আমি একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা দুটা সামান্তৰিকৰ কালিৰ মাজত থাকিব পৰা কোনো এক সম্পৰ্ক নিৰ্ণয় কৰাৰ চেষ্টা কৰিম। ইয়াৰ বাবে, আমি তলৰ কাৰ্যকেইটা কৰি লওঁ আহা।

কাৰ্য-1 ঃ এখন লেখকাকতত ABCD আৰু PQCD সামান্তৰিক দুটা চিত্ৰ 9.9 ত দেখুৱা ধৰণে আঁকি লওঁ।

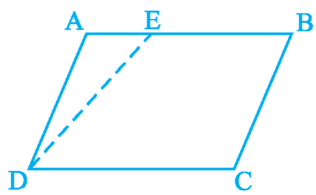


চিত্ৰ 9.9

ওপৰৰ দুয়োটা সামান্তৰিক একে ভূমি DC আৰু একে সমান্তৰাল PB আৰু DC ৰ মাজত আছে। বৰ্গবোৰ গণি সামান্তৰিক দুটাৰ কালি নিৰ্ণয়ৰ পদ্ধতিটো মনত পেলাব পাৰা।

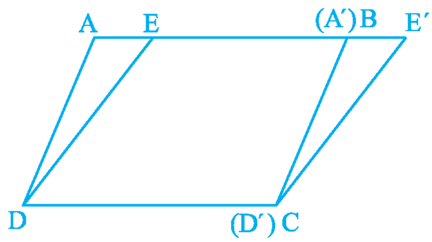
এই পদ্ধতিত, চিত্ৰটোৱে আৱৰি থকা সম্পূৰ্ণ বৰ্গবোৰৰ সংখ্যা আৰু চিত্ৰৰ ভিতৰত আধা বা আধাতকৈ বেছি অংশ সোমাই থকা বৰ্গবোৰৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰি কালি উলিওৱা হয়। যিবোৰ বৰ্গৰ আধাতকৈ কম অংশ চিত্ৰৰ ভিতৰত সোমাই থাকে সেইবোৰক উপেক্ষা কৰা হয়। তোমালোকে দেখিবা যে দুয়োটা সামান্তৰিকৰ কালিয়েই (প্ৰায়) 15 বৰ্গ চে.মি.। লেখকাকতত কেইযোৰমান আৰু সামান্তৰিক আঁকি এই কাৰ্যটো এখন খুঁটিমৰা বোৰ্ড (Geoboard) ব্যৱহাৰ কৰিও এই কাৰ্যক্ৰিয়াটো কৰিব পাৰি। পুনৰায় কৰা। তুমি কি লক্ষ্য কৰিছা? সামান্তৰিক দুটাৰ কালি বেলেগ বেলেগ নে একে সমান? প্ৰকৃততে সিহঁত সমান। সেয়ে ইয়েই তোমাক সিদ্ধান্তত উপনীত কৰাব যে— *একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰলাৰ মাজত অৱস্থিত সামান্তৰিকবোৰৰ কালিৰ পৰিমাণ সমান।* যি কি নহওঁক মনত ৰাখিবা যে এইটো এটা মাত্ৰ সত্যাপনহে।

কাৰ্য-2 ঃ এখন ডাঠ কাকত নাইবা এখন কাৰ্ডবোৰ্ড পাতৰ ওপৰত ABCD সামান্তৰিক এটা আঁকা। এতিয়া চিত্ৰ 9.10 অত দেখুৱাৰ দৰে DE ৰেখাখণ্ড এটা আঁকা।



চিত্ৰ 9.10

ইয়াৰ পিছত এখন নক্সা অঁকা কাকতৰ সহায় লৈ এখন বেলেগ কাকতত ΔADE ৰ সৰ্বসমকৈ $\Delta A'D'E'$ কাটি লোৱা। এতিয়া চিত্ৰ 9.11 অত দেখুৱা ধৰণেৰে $\Delta A'D'E'$ ক এনেদৰে বহুৱা যাতে ইয়াৰ $A'D'$ বাহু BC ৰ লগত মিলি যায়। লক্ষ্য কৰা যে ইয়াত একে ভূমি DC আৰু একে সমান্তৰাল AE' আৰু DC ৰ মাজত অৱস্থিত দুটা সামান্তৰিক ABCD আৰু $EE'CD$ আছে। ইহঁতৰ কালিৰ বিষয়ে তুমি কি ক'বা?



চিত্ৰ 9.11

যিহেতু $\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$, গতিকে কালি (ADE) = কালি ($A'D'E'$)

আকৌ কালি (ABCD) = কালি (ADE) + কালি (EBCD)

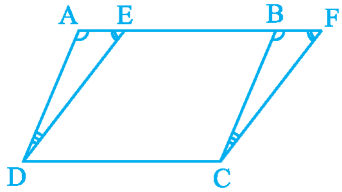
= কালি ($A'D'E'$) + কালি (EBCD)

= কালি ($EE'CD$)

গতিকে সামান্তৰিক দুটাৰ কালি সমান।

এতিয়া আমি এনেকুৱা দুটা সামান্তৰিকৰ মাজত থকা এই সম্পৰ্কটো প্ৰমাণ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰোঁ আঁহা।

উপপাদ্য 9.1 ঃ *একে ভূমিত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থিত সামান্তৰিকবোৰৰ কালি সমান।*



চিত্ৰ 9.12

প্ৰমাণ ঃ একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AF আৰু DC ৰ মাজত ABCD আৰু EFCD সামান্তৰিক দুটা দিয়া আছে (চিত্ৰ 9.12 চোৱা)।

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে কালি (ABCD) = কালি (EFCD)

ADE আৰু BCF ত্ৰিভুজ দুটাত,

$\angle DAE = \angle CBF$ (AD||BC আৰু তিৰ্যক AF ৰ পৰা অনুৰূপ কোণ) .... (1)

$\angle AED = \angle BFC$ (ED||FC আৰু তিৰ্যক AF ৰ পৰা অনুৰূপ কোণ) .... (2)

গতিকে, $\angle ADE = \angle BCF$ (ত্ৰিভুজৰ কোণ-সমষ্টি ধৰ্ম) .... (3)

আকৌ, AD = BC (ABCD সামান্তৰিকৰ বিপৰীত বাহু) .... (4)

এতেকে $\Delta ADE \cong \Delta BCF$ [কো-বা-কো বিধিমতে, (1), (2), (3) ব্যৱহাৰ কৰি]

গতিকে কালি (ADE)= কালি (BCF) (সৰ্বসম চিত্ৰৰ কালি সমান) .... (5)

এতিয়া, কালি (ABCD)= কালি (ADE) + কালি (EDCB)

= কালি (BCF) + কালি(EDCB) .... [(5 ৰ পৰা]

= কালি (EFCD)

∴ ABCD আৰু EFCD সামন্তৰিকৰ কলি সমান।

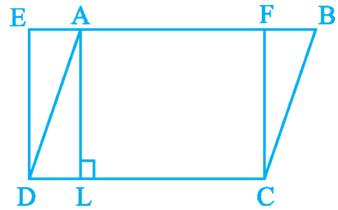
এতিয়া আমি ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ প্ৰয়োগ বৰ্ণনা কৰিবলৈ কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আঁহা।

উদাহৰণ 1 ঃ চিত্ৰ 9.13 ত ABCD এটা সামন্তৰিক আৰু EFCD এটা আয়ত।

তাৰোপৰি $AL \perp DC$। প্ৰমাণ কৰা যে,

(i) কালি (ABCD) = কালি (EFCD)

(ii) কালি (ABCD) = $DC \times AL$



চিত্ৰ 9.13

সমাধান ঃ (i) যিহেতু আয়তবোৰ সামান্তৰিক,

গতিকে, কালি (ABCD) = কালি (EFCD)

(উপপাদ্য 9.1)

(ii) ওপৰৰ ফলটোৰপৰা,

কালি (ABCD) = $DC \times FC$ (আয়তৰ কালি = দীঘ × প্ৰস্থ)

যিহেতু $AL \perp DC$, গতিকে, AFCL এটা আয়ত। ....(1)

∴ AL = FC ....(2)

গতিকে কালি (ABCD) = $DC \times AL$ [(1) আৰু (2) ৰ পৰা]

ওপৰৰ (ii) ফলটোৰপৰা মন কৰিব পৰা যে

এটা সামান্তৰিকৰ কালি ইয়াৰ যিকোনো এটা বাহু আৰু ইয়াৰ অনুৰূপ উন্নতিৰ পূৰণফল। তোমালোকৰ মনত পৰেনে যে পঞ্চম শ্ৰেণীতে তোমালোকে সামান্তৰিকৰ কালিৰ এই সূত্ৰটো অধ্যয়ন কৰি আহিছা। এই সূত্ৰটোৰ আধাৰত, উপপাদ্য 9.1 টো এনেধৰণেও লিখিব পাৰি—

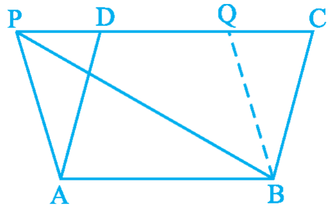
একে ভূমিৰ ওপৰত নাইবা সমান ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা সামান্তৰিকবোৰৰ কালি সমান।

ওপৰৰ উক্তিটোৰ বিপৰীতটো লিখিব পাৰিবানে? ই তলত দিয়াৰ দৰে হ'ব—

একে ভূমিৰ (নাইবা সমান ভূমিৰ) ওপৰত আৰু সমান কালিৰ সামান্তৰিকবোৰ একে সমান্তৰাল ৰেখাৰ মাজত থাকে।

বিপৰীতটো সত্যনে? সামান্তৰিকটোৰ কালিৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি বিপৰীত উক্তিটো প্ৰমাণ কৰা।

উদাহৰণ 2 ঃ এটা ত্ৰিভুজ আৰু এটা সামান্তৰিক যদি একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে, তেন্তে দেখুৱা যে ত্ৰিভুজটোৰ কালি সামান্তৰিকটোৰ কালিৰ আধা হ'ব।



চিত্ৰ 9.14

সমাধান ঃ ধৰা ΔABP আৰু সামান্তৰিক ABCD একে ভূমি AB আৰু একে সমান্তৰাল AB আৰু PC ৰ মাজত আছে। (চিত্ৰ 9.14)। তুমি দেখুৱাব খুজিছা যে

$$\text{কালি (PAB)} = \frac{1}{2} \text{ কালি (ABCD)}$$

আন এটা সামান্তৰিক পোৱাকৈ $BC \| AP$ আঁকা। এতিয়া সামান্তৰিকদ্বয় ABQP আৰু ABCD একে ভূমি AB ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AB আৰু PC ৰ মাজত আছে।

গতিকে, কালি (ABQP) = কালি (ABCD) [উপপাদ্য 9.1 মতে] ....(1)

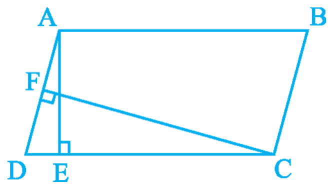
কিন্তু $\Delta PAB \cong \Delta BQP$ (PB কৰ্ণই ABQP সামান্তৰিকটোক দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত বিভক্ত কৰিছে।)

গতিকে কালি (PAB) = কালি (BQP) ....(2)

এতেকে, কালি (PAB) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABQP) [(2) ৰ পৰা] ....(3)

ইয়াৰপৰা কালি (PAB) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD) [(1) আৰু (3) ৰ পৰা]

অনুশীলনী 9.2



চিত্ৰ 9.15

1 চিত্ৰ 9.15 অত ABCD এটা সামান্তৰিক, $AE \perp DC$ আৰু $CF \perp AD$। যদি AB = 16 চে.মি., AE = 8 চে.মি. আৰু CF = 10 চে.মি., AD উলিওৱা।

2. ABCD সামান্তৰিক এটাৰ বাহুবোৰৰ মধ্যবিন্দুকেইটা যদি

যথাক্ৰমে E, F, G আৰু H, দেখুৱা যে কালি (EFGH) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)।

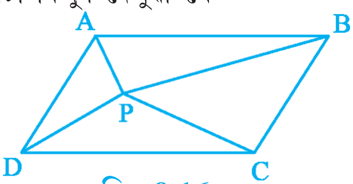
3. ABCD এটা সামান্তৰিকৰ DC আৰু AD বাহুত অৱস্থিত যথাক্ৰমে P আৰু Q যিকোনো দুটা বিন্দু। দেখুৱা যে কালি (APB) = কালি (BQC)।

4. চিত্ৰ 9.16 অত ABCD সামান্তৰিকটোৰ ভিতৰত P এটা বিন্দু। দেখুৱা যে—

(i) কালি (APB) + কালি (PCD) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)

(ii) কালি (APD) + কালি (PBC) = কালি (APB) + কালি (PCD)

[ইংগিত ঃ P ৰ মাজেৰে AB ৰ সমান্তৰালকৈ এটা ৰেখা টানা]

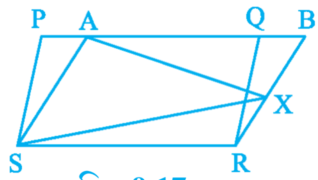


চিত্ৰ 9.16

5. চিত্ৰ 9.17 অত PQRS আৰু ABRS দুটা সামান্তৰিক। BR বাহুৰ ওপৰত X এটা যিকোনো বিন্দু। দেখুওৱা যে—

(i) কালি (PQRS) = কালি (ABRS)

(ii) কালি (AXS) = $\frac{1}{2}$ কালি (PQRS)

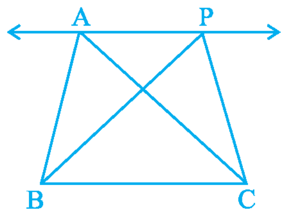


চিত্ৰ 9.17

6. এজন খেতিয়কৰ PQRS সামান্তৰিক এটাৰ আকৃতিৰ এখন খেতিপথাৰ আছিল। তেওঁ RS ৰ ওপৰত যিকোনো এটা বিন্দু ল'লে আৰু ইয়াক P আৰু Q বিন্দু দুটাৰ লগত সংযুক্ত কৰিলে। পথাৰখন কেইটা অংশত বিভক্ত হ'ল? এই অংশকেইটাৰ আকৃতিবোৰ কি কি? খেতিয়কজনে পথাৰখনৰ সমান সমান অংশত বেলেগ বেলেগ ঘেঁহু আৰু মাহৰ গুটি সিচিব খুজিলে। তেওঁ এইটো কিদৰে কৰিব?

9.4 একে ভূমিৰ ওপৰৰ আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা ত্ৰিভুজ (Triangles on the same Base and between the same Parallels) ঃ

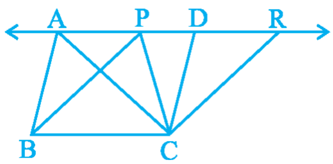
আমি চিত্ৰ 9.18 চাওঁহক। ইয়াত একে ভূমি BC ত আৰু একে সমান্তৰাল BC আৰু AP ৰ মাজত ABC আৰু PBC ত্ৰিভুজ দুটা তোমাৰ আছে। এনে ত্ৰিভুজবোৰৰ কালিবোৰৰ বিষয়ে তুমি কি ক'ব পাৰিবা? এই প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিবলৈ, তুমি লেখকাকত এখনৰ ওপৰত কেইবাযোৰও ত্ৰিভুজ একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকাকৈ অংকন কৰা আৰু বৰ্গ গণন পদ্ধতিৰে সিহঁতৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা কাৰ্যটো কৰি চাব পাৰা। প্ৰতিবাৰতে, তুমি দেখিবা যে ত্ৰিভুজ দুটাৰ কালি (প্ৰায়) একে। এই কাৰ্যটো জিওবোৰ্ড (খুঁটিবোৰ্ড) এখন ব্যৱহাৰ কৰিও কৰিব পাৰি। পুনৰায় দেখিবা যে কালি দুয়োটা (প্ৰায়) একে।



চিত্ৰ 9.18

ওপৰৰ প্ৰশ্নটোৰ এটা যুক্তিগত উত্তৰ পাবলৈ তোমালোকে এইদৰে আগবাঢ়িব পাৰা—

চিত্ৰ 9.18 ত CD||BA আৰু CR||BP আঁকা যাতে AP ৰেখাৰ ওপৰত D আৰু R বিন্দু থাকে (চিত্ৰ 9.19)



চিত্ৰ 9.19

ইয়াৰপৰা তুমি একে ভূমি BC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল BC আৰু AR ৰ মাজত PBCR আৰু ABCD সামান্তৰিক দুটা পাবা।

গতিকে, কালি (ABCD)= কালি (PBCR) (কিয়?)

এতিয়া, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

আৰু $\Delta PBC \cong \Delta CRP$ (কিয়?)

গতিকে কালি (ABC)= $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)

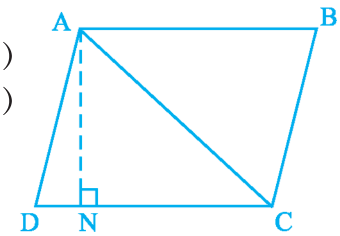
আৰু কালি (PBC) = $\frac{1}{2}$ কালি (PBCR) (কিয়)

সেয়েহে, কালি (ABC) = কালি (PBC)

এইদৰে, তোমালোকে তলৰ উপপাদ্যটোত এতিয়া আহি উপনীত হ'লা,

উপপাদ্য 9.2 ঃ *একে (নাইবা সমান) ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা দুটা ত্ৰিভুজৰ কালি সমান।*

এতিয়া ধৰা ABCD এটা সামান্তৰিক যাৰ AC এডাল কৰ্ণ (চিত্ৰ 9.20 চোৱা)। ধৰা AN ⊥ DC।



চিত্ৰ 9.20

মন কৰা যে, $\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (কিয়?)

গতিকে কালি (ADC) = কালি (CBA) (কিয়?)

∴ কালি (ADC)= $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)

$= \frac{1}{2}$ (DC × AN) (কিয়?)

গতিকে, ΔADC ৰ কালি = $\frac{1}{2}$ × ভূমি DC × অনুৰূপ উন্নতি AN।

অন্য কথাত *ত্ৰিভুজৰ কালি ইয়াৰ ভূমি (বা যিকোনো বাহু) আৰু অনুৰূপ উন্নতিৰ (বা উচ্চতাৰ) পূৰণফল।* তোমালোকৰ মনত আছেনে, ত্ৰিভুজৰ কালিৰ এই সূত্ৰটো সপ্তম শ্ৰেণীতেই শিকি আহিছা? এই সূত্ৰটোৰপৰা দেখিবা যে,

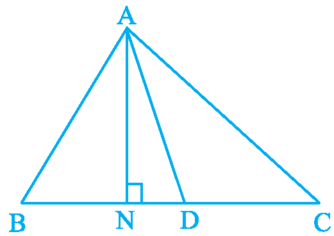
একে (বা সমান) ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান কালি থকা দুটা ত্ৰিভূজৰ অনুৰূপ উন্নতিও সমান।

সমান অনুৰূপ উন্নতি থাকিবলৈ হ'লে ত্ৰিভুজবোৰ একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকিব লাগিব। ইয়াৰপৰা তোমালোকে উপপাদ্য 9.2 ৰ বিপৰীত নিম্নোক্ত উপপাদ্য এটাত উপনীত হ'লা—

উপপাদ্য 9.3 ঃ *একে ভূমিৰ (সমান ভূমিৰ) ওপৰত থকা একে কালিবিশিষ্ট দুটা ত্ৰিভুজ একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে।*

ওপৰৰ ফলটোৰ প্ৰয়োগৰ বৰ্ণনা কৰাৰ বাবে আমি কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আঁহা।

উদাহৰণ 3 ঃ দেখুৱা যে কোনো ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা এডালে ইয়াক দুটা সমান কালিবিশিষ্ট ত্ৰিভুজত বিভক্ত কৰে।



চিত্ৰ 9.21

সমাধান ঃ ধৰা ABC এটা ত্ৰিভুজ আৰু AD ইয়াৰ এডাল মধ্যমা (চিত্ৰ 9.21 চোৱা)। তুমি দেখুৱাব লাগে যে,

কালি (ABD) = কালি (ACD)

যিহেতু কালিৰ সূত্ৰটো উন্নতিৰ সৈতে জড়িত, আমি $AN \perp BC$ আঁকি ল'ম।

এতিয়া, কালি (ABD) $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উন্নতি (ΔABDৰ)

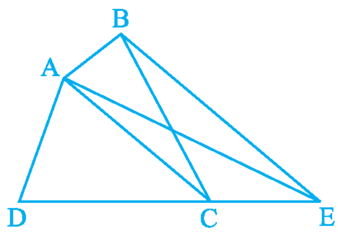
$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

$= \frac{1}{2} \times CD \times AN \quad (\because BD = CD)$

$= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উন্নতি (ΔACD ৰ)

= কালি (ACD)

উদাহৰণ 4 ঃ চিত্ৰ 9.22 ত ABCD এটা চতুৰ্ভুজ আৰু $BE \parallel AC$। BE ৰেখা DC ৰ বৰ্দ্ধিতাংশৰ E বিন্দুত লগ লাগিছে। দেখুৱা যে, ΔADE ৰ কালি ABCD চতুৰ্ভুজৰ কালিৰ সমান।



চিত্ৰ 9.22

সমাধান ঃ চিত্ৰটো সাৱধানে লক্ষ্য কৰা।

ΔBAC আৰু ΔEAC একে ভূমি AC আৰু একে সমান্তৰাল AC আৰু BE ৰ মাজত আছে।

গতিকে, কালি (BAC) = কালি (EAC) [উপপাদ্য 9.2 অনুসৰি]

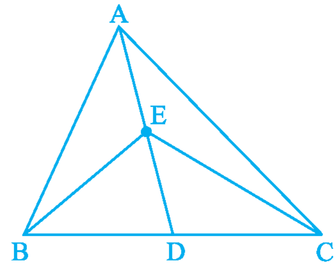
$\therefore$ কালি (BAC) + কালি (ADC) = কালি (EAC) + কালি (ADC)

[দুয়োপিনে সমান কালি যোগ কৰি]

বা কালি (ABCD) = কালি (ADE)

অনুশীলনী 9.3

1. চিত্ৰ 9.23 ত কোনো ত্ৰিভুজ ABC ৰ AD মধ্যমাৰ ওপৰত E এটা যিকোনো বিন্দু। দেখুওৱা যে, কালি (ABE) = কালি (ACE)।

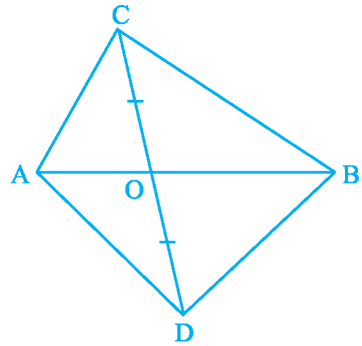


চিত্ৰ 9.23

2. ABC ত্ৰিভুজৰ AD মধ্যমাৰ E মধ্যবিন্দু। দেখুওৱা যে, কালি (BED) = $\frac{1}{4}$ কালি (ABC)।

3. দেখুওৱা যে এটা সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুটাই সামান্তৰিকটোক চাৰিটা সমান কালিৰ ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে।

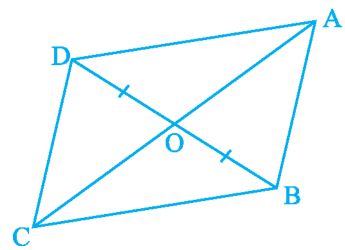
4. চিত্ৰ 9.24 ত একে ভূমি AB ৰ ওপৰত ABC আৰু ABD দুটা ত্ৰিভুজ। যদি AB ৰেখাই CD ৰেখাখণ্ডটোক O বিন্দুত সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে, কালি (ABC) = কালি (ABD)।



চিত্ৰ 9.24

5. এটা ত্ৰিভুজ ABC ৰ BC, CA আৰু AB বাহুকেইটাৰ মধ্যবিন্দু যথাক্ৰমে D, E আৰু F। দেখুওৱা যে,
   (i) BDEF এটা সামান্তৰিক
   (ii) কালি (DEF) = $\frac{1}{4}$ কালি (ABC)
   (iii) কালি (BDEF) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABC)।

6. চিত্ৰ 9.25 ত ABCD চতুৰ্ভূজৰ কৰ্ণ AC আৰু BD য়ে O বিন্দুত ছেদ কৰিছে যাতে OB = OD। যদি AB = CD, তেন্তে দেখুওৱা যে
   (i) কালি (DOC) = কালি (AOB)
   (ii) কালি (DCB) = কালি (ACB)
   (iii) DA||CB অৰ্থাৎ ABCD এটা সামন্তৰিক।
   [ইংগিত ঃ D আৰু B ৰ পৰা AC লৈ দুডাল লম্ব টানা]

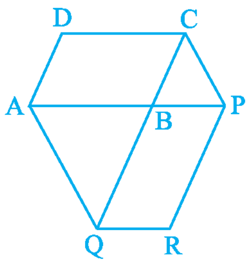


চিত্ৰ 9.25

7. ABC ত্ৰিভুজৰ AB আৰু AC বাহু দুটাৰ ওপৰত দুটা বিন্দু ক্ৰমে D আৰু E এনেদৰে লোৱা হৈছে যাতে কালি (DBC) = কালি (EBC)। প্ৰমাণ কৰা যে DE||BC।

8. ABC ত্ৰিভুজৰ BC বাহুৰ সমান্তৰাল XY এডাল ৰেখা। যদি BE||AC আৰু CF||AB য়ে XY ক ক্ৰমে E আৰু F বিন্দুত কাটে, তেন্তে দেখুওৱা যে
কালি (ABE) = কালি (ACE)

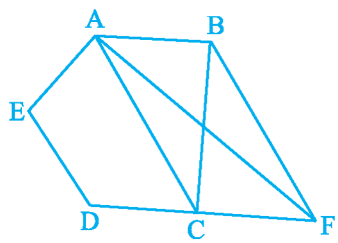
9. ABCD এটা সামান্তৰিকৰ AB বাহুটোক যিকোনো এটা বিন্দু P লৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল। এতিয়া A বিন্দুৰ মাজেৰে আৰু CP ৰ সমান্তৰালভাৱে টনা এটা ৰেখাই CB ৰ বৰ্ধিতাংশক Q বিন্দুত কাটিছে। এতিয়া PBQR সামান্তৰিকটো সম্পূৰ্ণ কৰা (চিত্ৰ 9.26 চোৱা)। দেখুওৱা যে
কালি (ABCD) = কালি (PBQR)
[**ইংগিত** ঃ AC আৰু PQ সংযোগ কৰা। এতিয়া কালি (ACQ) আৰু কালি (APQ) তুলনা কৰা]



চিত্ৰ 9.26

10. ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ AB||DC। কৰ্ণ AC আৰু BD য়ে পৰস্পৰক O বিন্দুত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, কালি (AOD) = কালি (BOC)।

11. চিত্ৰ 9.27 ত ABCDE এটা পঞ্চভুজ। B বিন্দুৰ মাজেৰে AC ৰ সমান্তৰাল ৰেখা এটাই DC ৰ বৰ্দ্ধিতাংশৰ F বিন্দুত কাটিছে। দেখুওৱা যে
(i) কালি (ACB) = কালি (ACF)
(ii) কালি (AEDF) = কালি (ABCDE)

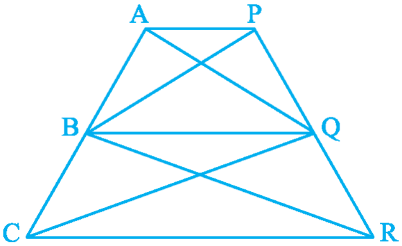


চিত্ৰ 9.27

12. ইন্দ্ৰ নামৰ গাঁওবাসী এজনৰ এটুকুৰা চতুৰ্ভুজ আকৃতিৰ মাটি আছিল। গাঁৱৰ গাঁও পঞ্চায়তে তাত স্বাস্থ্যকেন্দ্ৰ এটা প্ৰতিষ্ঠা কৰিবলৈ বুলি তেওঁৰ মাটিটুকুৰাৰ এটা চুকৰ পৰা কিছু অংশ ল'ব খুজিলে। ইন্দ্ৰ এই প্ৰস্তাবটোত সন্মত হ'ল এটা চৰ্তত যে তেওঁক তেওঁৰ মাটি টুকুৰাৰ পৰিবৰ্তে একে সমান পৰিমাণৰ মাটি এটুকুৰা তেওঁৰ মাটিৰ লগত লগলগাকৈ দিব লাগিব যাতে গোটেই মাটিখিনি এটা ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ হয়।
তেওঁৰ এই প্ৰস্তাৱটো কিদৰে কাৰ্যকৰী কৰিব পৰা যাব ব্যাখ্যা কৰা।

13. ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ AB||DC। AC ৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখাই AB ক X আৰু BCক Y বিন্দুত কাটিছে। প্ৰমাণ কৰা যে, কালি (ADX) = কালি (ACY)
[**ইংগিত** ঃ CX লগ লগোৱা।]

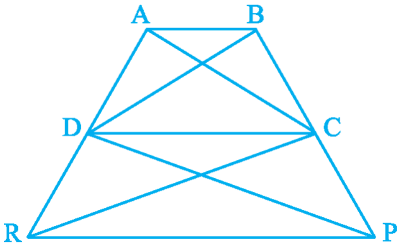
14. চিত্ৰ 9.28 অত AP||BQ||CR প্ৰমাণ কৰা যে, কালি (AQC) = কালি (PBR)



চিত্ৰ 9.28

15. ABCD চতুৰ্ভুজ এটাৰ AC আৰু BD কৰ্ণ দুডালে O বিন্দুত পৰস্পৰক এনেদৰে কাটিছে যাতে কালি (AOD) = কালি (BOC)। প্ৰমাণ কৰা যে, ABCD এটা ট্ৰেপিজিয়াম।

16. চিত্ৰ 9.29 অত কালি (DRC) = কালি (DPC), আৰু কালি (BDP) = কালি (ARC)। দেখুৱা যে, ABCD আৰু DCPR চতুৰ্ভুজ দুয়োটাই ট্ৰেপিজিয়াম।

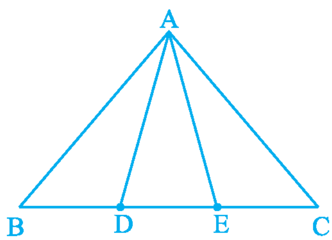


চিত্ৰ 9.29

অনুশীলনী 9.4 (ঐচ্ছিক)*

1. ABCD সমান্তৰিক আৰু ABEF আয়তটো একে ভূমি AB ৰ ওপৰত আছে আৰু ইহঁতৰ কালিও একে সমান। দেখুৱা যে সামান্তৰিকটোৰ পৰিসীমা আয়তটোৰ পৰিসীমাতকৈ ডাঙৰ।

2. চিত্ৰ 9.30 ত BC ৰ ওপৰত D আৰু E দুটা বিন্দু যাতে, BD=DE=EC। দেখুৱা যে, কালি (ABD) = কালি (ADE) = কালি (AEC)।



চিত্ৰ 9.30

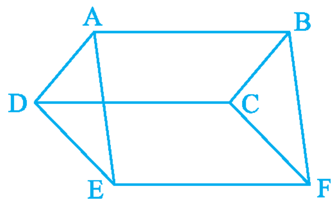
এতিয়া তুমি এই অধ্যায়ৰ ‘পৰিচিতি’তে এৰি অহা প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ দিব পাৰিবানে, যে মধুৰ খেতিপথাৰখন প্ৰকৃততে সমান সমান কালিৰ তিনিটা অংশত বিভক্ত কৰা হৈছিল নে নাই?

[**মন্তব্য ঃ** লক্ষ্য কৰা যে BD=DE=EC ল'লে ABC ত্ৰিভুজটো ABD, ADE আৰু AEC সমান কালিৰ তিনিটা ত্ৰিভুজত বিভক্ত হয়। একেধৰণে BC বাহুক n সংখ্যক সমান ভাগত বিভক্ত কৰি আৰু এনেদৰে পোৱা বিভাগ বিন্দুবোৰক BC ৰ বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুৰ লগত সংযুক্ত কৰি তুমি ABC ত্ৰিভুজক সমান কালিৰ nটা ত্ৰিভুজত ভাগ কৰিব পাৰিবা।]

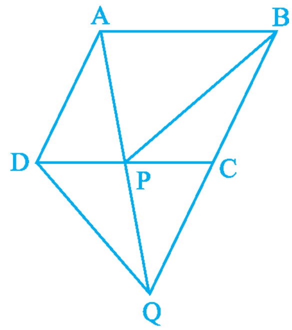
* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নল'বা।

3. চিত্ৰ 9.31 ত ABCD, DCFE আৰু ABFE তিনিও সামান্তৰিক। দেখুৱা যে, কালি (ADE) = কালি (BCF)।

4. চিত্ৰ 9.32 ত ABCD এটা সামান্তৰিক। BC ক Q বিন্দু এটালৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল যাতে AD=CQ। যদি AQ য়ে DC ক P বিন্দুত ছেদ কৰে, দেখুৱা যে, কালি (BPC) = কালি (DPQ)।
[ইংগিত ঃ AC লগ লগোৱা।]



চিত্ৰ 9.31



চিত্ৰ 9.32

5. চিত্ৰ 9.33 ত ABC আৰু BDE দুটা সমবাহু ত্ৰিভুজ যাতে BC ৰ মধ্যবিন্দু D। যদি AE য়ে BC ক F বিন্দুক কাটে, দেখুৱা যে,

(i) কালি (BDE) = $\frac{1}{4}$ × কালি (ABC)

(ii) কালি (BDE) = $\frac{1}{2}$ × কালি (BAE)

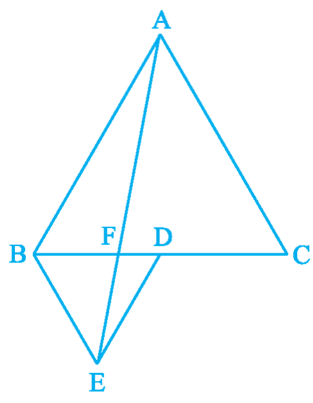
(iii) কালি (ABC) = 2 × কালি (BEC)

(iv) কালি (BFE) = কালি (AFD)

(v) কালি (BFE) = 2 × কালি (FED)

(vi) কালি (FED) = $\frac{1}{8}$ × কালি (AFC)

[ইংগিত ঃ EC আৰু AD লগ লগোৱা। দেখুৱা যে BE||AC আৰু DE||AB ইত্যাদি।]



চিত্ৰ 9.33

6. এটা চতুৰ্ভুজ ABCD ৰ কৰ্ণ AC আৰু BD য়ে পৰস্পৰক P বিন্দুত কাটিছে। দেখুৱা যে, কালি (APB) × কালি (CPD) = কালি (APD) × কালি (BPC)
[ইংগিত ঃ A আৰু C ৰ পৰা BD লৈ দুডাল লম্ব টানা।]

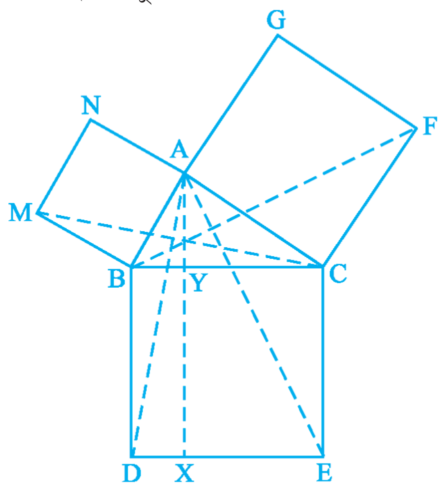
7. ABC ত্ৰিভুজৰ AB আৰু BC বাহু দুটাৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে P আৰু Q। যদি AP ৰ মধ্যবিন্দু R, তেন্তে দেখুৱা যে,

(i) কালি (PRQ) = $\frac{1}{2}$ × কালি (ARC)

(ii) কালি (RQC) = $\frac{3}{8}$ × কালি (ABC)

(iii) কালি (PBQ) = কালি (ARC)

8. চিত্র 9.34 অত A সমকোণ হোৱা ABC এটা সমকোণী ত্রিভুজ। BC, CA আৰু AB বাহুৰ ওপৰত যথাক্রমে BCED, ACFG আৰু ABMN বর্গ। ৰেখাখণ্ড AX⊥DE য়ে BC ৰ Y বিন্দুত মিলিছে। দেখুৱা যে



চিত্র 9.34

(i) ΔMBC ≅ ΔABD

(ii) কালি (BYXD) = 2 × কালি (MBC)

(iii) কালি (BYXD) = কালি (ABMN)

(iv) ΔFCB ≅ ΔACE

(v) কালি (CYXE) = 2 × কালি (FCB)

(vi) কালি (CYXE) = কালি (ACFG)

(vii) কালি (BCED) = কালি (ABMN) + কালি (ACFG)

টোকা ঃ (vii) ৰ ফলটো বিখ্যাত ‘**পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য**’। তোমালোকে এই উপপাদ্যটোৰ এটা সৰল প্রমাণ দশম শ্রেণীত শিকিবা)

9.5 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তুমি তলত দিয়া কথাকেইটা শিকিলা ঃ

1. এটা চিত্ৰই আগুৰা সমতলখনৰ অংশৰ সৈতে জড়িত কালি বা ক্ষেত্ৰফল (কোনো এককত) হৈছে এটা সংখ্যা।
2. দুটা সৰ্বাংগসম চিত্ৰৰ কালি সমান কিন্তু ইয়াৰ বিপৰীতটো সত্য নহ'বও পাৰে।
3. যদি এটা চিত্ৰ T য়ে গঠিত সামতলিক ক্ষেত্ৰ দুটা চিত্ৰ P আৰু Q ৰ সমতল ক্ষেত্ৰৰদ্বাৰা গঠিত ওপৰা-ওপৰি নোহোৱা ক্ষেত্ৰ হ'ব, তেন্তে কালি (T) = কালি (P) + কালি (Q), য'ত কালি (T) হৈছে চিত্ৰ-T ৰ কালি।
4. দুটা চিত্ৰক একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা বুলি কোৱা হয়, যদি সিহঁতৰ এটা সাধাৰণ ভূমি (বাহু) থাকে আৰু প্ৰতিটো চিত্ৰৰ সাধাৰণ ভূমিৰ বিপৰীতে থকা শীৰ্ষকেইটা ভূমিৰ সমান্তৰাল ৰেখা এডালত থাকে।
5. একে ভূমি (সমান ভূমি) আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা সামান্তৰিকবোৰৰ কালি সমান।
6. সামান্তৰিকৰ কালি হ'ল ভূমি আৰু সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতাৰ পূৰণফল।
7. একে ভূমি (বা সমান ভূমি) বিশিষ্ট আৰু একে কালি বিশিষ্ট সামান্তৰিকবোৰ একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থিত।
8. যদি সামান্তৰিক আৰু এটা ত্ৰিভুজ একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে, তেন্তে ত্ৰিভুজৰ কালি সামান্তৰিকৰ কালিৰ আধা।
9. একে ভূমি (বা সমান ভূমি) আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা ত্ৰিভুজবোৰৰ কালি সমান।
10. এটা ত্ৰিভুজৰ কালি ইয়াৰ ভূমি আৰু অনুৰূপ উচ্চতাৰ পূৰণফলৰ সমান।
11. একে কালি বিশিষ্ট আৰু একে ভূমি (বা সমান ভূমি) বিশিষ্ট ত্ৰিভুজবোৰ একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে।
12. এটা ত্ৰিভুজৰ মধ্যমাই ত্ৰিভুজটোক দুটা সমান কালিৰ ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে।

R6T7H5

দশম অধ্যায়

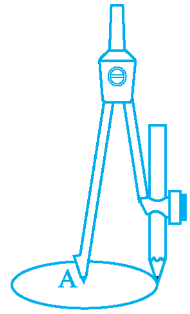
বৃত্ত (Circle)

10.1 অৱতৰণা (Introduction) ঃ

তোমালোকে দৈনন্দিন জীৱনত বহুতো ঘূৰণীয়া আকৃতিৰ বস্তু নিশ্চয় দেখিছাহঁক, যেনে— যানবাহনৰ চকা, খাৰু, বহুতো ঘড়ীৰ মুখৰ চাক, 50 পইচা, 1 টকা আৰু 5 টকাৰ মুদ্ৰা, চাবিৰ ৰিং, চোলাৰ বুটাম, আদি (চিত্ৰ 10.1)। ঘড়ী এটাত তোমালোকে নিশ্চয় লক্ষ্য কৰিছা যে চেকেণ্ডৰ কাঁটাডাল ঘড়ীটোৰ চাকত (dial) খৰকৈ ঘূৰি থাকে আৰু ইয়াৰ আগটোৱে ঘূৰণীয়া পথত গতি কৰি থাকে। চেকেণ্ডৰ কাঁটাৰ আগটোৱে অংকন কৰা এই পথটোক *বৃত্ত* বোলে। এই অধ্যায়ত তোমালোকে বৃত্ত, আন কেতবোৰ বৃত্ত সম্পৰ্কীয় পদ আৰু বৃত্তৰ কিছুমান ধৰ্মৰ সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিববলৈ পাবা।

চিত্ৰ 10.1

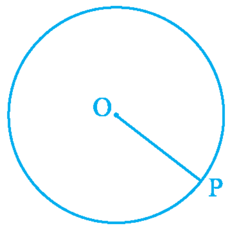
10.2 বৃত্ত আৰু ইয়াৰ সম্পৰ্কীয় পদ ঃ এক পুনৰালোচনা (Circles and Its Related Terms : A Review) ঃ



চিত্ৰ 10.2

এডাল কম্পাচ লোৱা আৰু ইয়াত পেঞ্চিল লগোৱা। ইয়াৰ জোঙা খুৰাটো কাগজৰ এটা বিন্দুত স্থাপন কৰা। আনটো খুৰা কিছুদূৰলৈ মেলি দিয়া। জোঙা খুৰাটো একেটা বিন্দুত ৰাখি আনটো খুৰা এপাক ঘূৰাই দিয়া। কাগজত পেঞ্চিলডালে অংকন কৰা বন্ধ ছবিটো কি? তোমালোকে জানা— এইটো এটা বৃত্ত (চিত্ৰ 10.2) তোমালোকে কেনেকৈ বৃত্তটো পালা? তোমালোকে এটা বিন্দু স্থিৰ কৰিলা (চিত্ৰ 10.2 ত A) আৰু A ৰ পৰা সমান দূৰত্বত থকা বাকী সকলো বিন্দু অংকন কৰিলা। এইটোৱে আমাক তলৰ সংজ্ঞাটো দিয়ে ঃ

এখন সমতলত এটা স্থিৰ বিন্দুৰপৰা নিৰ্দিষ্ট দূৰত্বত থকা সমতলখনৰ বিন্দুসমূহৰ সমষ্টি বা থুপটোকেই বৃত্ত বোলা হয়।

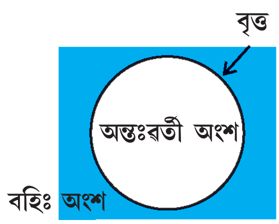


চিত্ৰ 10.3

স্থিৰ বিন্দুটোক বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু নিৰ্দিষ্ট দূৰত্বটোক বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ বোলে। চিত্ৰ 10.3 ত 'O' বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু দৈৰ্ঘ্য 'OP' বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ।

মন্তব্য ঃ মন কৰিব যে, বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ আৰু ইয়াৰ যিকোনো বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডকো বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ বোলা হয়। অৰ্থাৎ ব্যাসাৰ্ধক দুটা অৰ্থত ব্যৱহাৰ কৰা হয়— এডাল ৰেখাখণ্ডৰ অৰ্থত আৰু ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্যৰ অৰ্থত।

ষষ্ঠ শ্ৰেণীৰ পৰা তোমালোকে তলৰ কিছুমান ধাৰণাৰ লগত পৰিচয় হৈ আহিছা। আমি সেয়া মাথো ৰোমন্থনহে কৰিছোঁ।

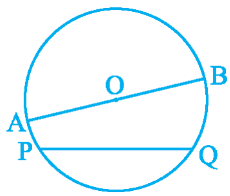


চিত্ৰ 10.4

এটা বৃত্তই তাৰ সমতলখনক তিনিটা অংশত বিভক্ত কৰে। সেয়া হ'ল (i) বৃত্তটোৰ ভিতৰভাগ যাক বৃত্তটোৰ অন্তঃৰৱৰ্তী অংশও বোলা হয়। (ii) বৃত্তটো আৰু (iii) বৃত্তৰ বাহিৰভাগ যাক বৃত্তটোৰ বহিঃ অংশও বোলা হয় (চিত্ৰ 10.4 চোঁৱা)। বৃত্তটো আৰু ইয়াৰ অন্তঃভাগে বৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰখন গঠন কৰে।

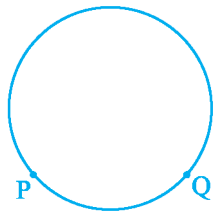
যদি তুমি বৃত্তৰ দুটা বিন্দু P আৰু Q লোৱা তেন্তে PQ ৰেখাখণ্ডক বৃত্তটোৰ এডাল জ্যা বোলা হয়। (চিত্ৰ 10.5 চোঁৱা) বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা জ্যাক বৃত্তটোৰ ব্যাস বোলে। ব্যাসাৰ্ধৰ নিচিনাকৈ বৃত্তৰ ব্যাসও দুটা অৰ্থত ব্যৱহৃত হয় সেয়া হ'ল এডাল ৰেখাখণ্ড আৰু ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্য। তোমালোকে ব্যাসতকৈ দীঘল আন কোনো জ্যা পোৱানে? নাই, তোমালোকে দেখিছা যে এডাল

ব্যাসেই বৃত্তৰ বৃহত্তম জ্যা। আৰু সকলো ব্যাসৰ দৈৰ্ঘ্য সমান, যি ব্যাসাৰ্ধৰ দৈৰ্ঘ্যৰ দুগুণ। চিত্ৰ 10.5 ত AOB বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাস। এটা বৃত্তৰ ব্যাসৰ সংখ্যা কিমান? এটা বৃত্ত আঁকা আৰু চোৱা ইয়াৰ ব্যাসৰ সংখ্যা কিমান পোৱা।



চিত্ৰ 10.5

দুটা বিন্দুৰ মাজৰ বৃত্তৰ একোটা অংশক এডাল চাপ বোলে। চিত্ৰ 10.6 ত বৃত্তৰ P আৰু Q বিন্দুৰ মাজৰ অংশবোৰ চোৱা। তোমালোকে তাত দুটা অংশ পাবা, এটা অংশ দীঘল আৰু আনটো ছুটি। (চিত্ৰ 10.7 চোঁৱা)। দীঘল অংশক অধি চাপ PQ আৰু ছুটি অংশটোক উপচাপ PQ বোলা হয়। উপচাপটোক $\overset{\frown}{PQ}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু অধিচাপ PQ ক $\overset{\frown}{PRQ}$ ৰে বুজোৱা হয়, য'ত R, P আৰু Q চাপৰ মধ্যৱৰ্তী বিন্দু। অন্যভাৱে নোকোৱালৈকে PQ চাপ বা $\overset{\frown}{PQ}$ এ উপচাপ PQ ক নিৰ্দেশ কৰিব। যেতিয়া P আৰু Q এডাল ব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দু হ'ব তেতিয়া দুয়োটা চাপ সমান হ'ব আৰু প্ৰত্যেকটোকে অৰ্ধবৃত্ত বোলা হয়।



চিত্ৰ 10.6

চিত্ৰ 10.7

বৃত্তটোৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্যক বৃত্তটোৰ *পৰিধি* বোলা হয়। এডাল জ্যা আৰু ইয়াৰ যিকোনো এটা চাপৰ মাজৰ অংশক বৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰটোৰ খণ্ড বা সাধাৰণভাৱে বৃত্ত খণ্ড বোলা হয়। তোমালোকে দুই প্ৰকাৰৰ বৃত্তখণ্ড পাবা, সেয়া হ'ল— মুখ্য (অধি) বৃত্তখণ্ড আৰু গৌণ (উপ) বৃত্তখণ্ড (চিত্ৰ 10.8)। এটা চাপ আৰু ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ দুডালৰ মাজৰ অংশটোক বৃত্তাংশ বোলা হয়। বৃত্তখণ্ডৰ নিচিনাকৈ, তোমালোকে পাবা যে উপচাপে উপ বৃত্তাংশ আৰু মুখ্য চাপে মুখ্য বৃত্তাংশৰ লগত সম্পৰ্ক ৰাখে। চিত্ৰ 10.9 ত OPQ ক্ষেত্ৰটো উপ বৃত্তাংশ আৰু বাকী বৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰ মুখ্য বা অধি বৃত্তাংশ। যেতিয়া দুটা চাপ সমান হয়, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেকটোৱেই অৰ্ধবৃত্ত, তেতিয়া দুয়োটা বৃত্তাংশ একে হ'ব আৰু প্ৰত্যেককে এটা *অৰ্ধবৃত্তাকাৰ ক্ষেত্ৰ* বোলে।

চিত্ৰ 10.8

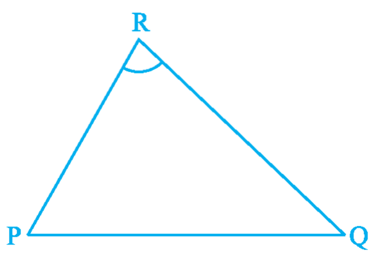
চিত্ৰ 10.9

অনুশীলনী 10.1

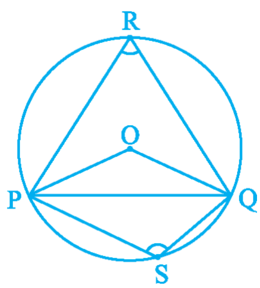
1. খালী ঠাই পূৰণ কৰা ঃ
   (i) বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ বৃত্তটোৰ .... ত অৱস্থিত (বহিঃভাগ/অন্তঃভাগ)
   (ii) এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা এটা বিন্দুৰ দূৰত্ব ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধতকৈ বেছি হ'লে ই বৃত্তটোৰ .... ত অৱস্থিত (বহিঃভাগ/অন্তঃভাগ)
   (iii) এটা বৃত্তৰ বৃহত্তম জ্যাডাল বৃত্তটোৰ ....।
   (iv) এটা চাপৰ প্ৰান্তবিন্দু এডাল ব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দু হ'লে চাপটো এটা ....।
   (v) এটা বৃত্তৰ বৃত্তখণ্ড বৃত্তটোৰ এটা চাপ আৰু .... মধ্যবৰ্তীক্ষেত্ৰ।
   (vi) এটা বৃত্তই বৃত্তটো থকা সমতলখনক .... ভাগত ভাগ কৰে।
2. সচাঁ বা মিছা লিখা ঃ তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দিয়া।
   (i) কেন্দ্ৰ আৰু বৃত্তৰ যিকোনো এটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ড বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাসাৰ্ধ।
   (ii) এটা বৃত্তৰ সীমিতসংখ্যকহে সমান জ্যা থাকে।
   (iii) এটা বৃত্তক তিনিটা সমান চাপত বিভক্ত কৰিলে প্ৰত্যেকেই এটা অধি চাপ হ'ব।
   (iv) এডাল জ্যা, যি বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধৰ দুগুণ সেয়া বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাস।
   (v) এটা বৃত্তাংশ বৃত্তৰ জ্যা আৰু ইয়াৰ অনুৰূপ চাপৰ মাজৰ ক্ষেত্ৰ।
   (vi) এটা বৃত্ত সামতলিক আকাৰ।

10.3 এডাল জ্যাই এটা বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণ (Angle Subtended by a Chord at a Point) ঃ

এডাল ৰেখাখণ্ড PQ লোৱা আৰু PQ ৰ ওপৰত নথকা R এটা বিন্দু লোৱা। PQ আৰু QR সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 10.10 চোৱা)। তেতিয়া ∠PRQ কোণটোক PQ ৰেখাখণ্ডই R বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণ বোলা হয়। চিত্ৰ 10.11 ত POQ, PRQ আৰু PSQ কোণবোৰক কি বোলা হয়? ∠POQ কোণক O কেন্দ্ৰত PQ জ্যাই উৎপন্ন কৰা কোণ বোলে, ∠PRQ আৰু ∠PSQ কোণক যথাক্ৰমে PQ এ R আৰু S বিন্দুত অধি আৰু উপ চাপ PQ ত উৎপন্ন কৰা কোণ বোলে।

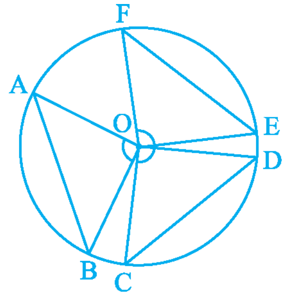


চিত্ৰ 10.10



চিত্ৰ 10.11

এডাল জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু ই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ মাজৰ সম্বন্ধৰ বিষয়ে পৰীক্ষা কৰি চোৱা হওঁক। তোমালোকে এটা বৃত্তৰ বিভিন্ন জ্যা আৰু সিহঁতে কেন্দ্ৰত কৰা কোণবোৰ অংকন কৰি দেখিবা যে দীঘল জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ চুটি জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণতকৈ ডাঙৰ। তোমালোকে বৃত্ত এটাৰ দুডাল সমান জ্যা ল'লে কি হ'ব? কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰ একে হয়নে নহয়?

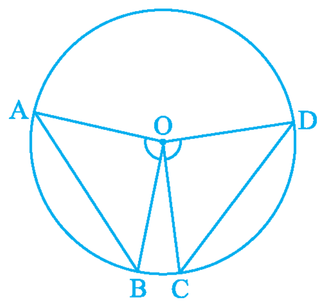


চিত্ৰ 10.12

দুই বা ততোধিক একে সমান জ্যা এটা বৃত্তত অংকন কৰা আৰু সিহঁতে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰৰ জোখ লোৱা (চিত্ৰ 10.12 চোঁৱা)। তোমালোকে পাবা যে, সিহঁতে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰ পৰস্পৰ সমান। এই কথাষাৰৰ এটা প্ৰমাণ দিওঁ আহাঁ।

উপপাদ্য 10.1 ঃ *এটা বৃত্তৰ সমান জ্যাবোৰে কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।*

প্ৰমাণ ঃ তোমালোকক O কেন্দ্ৰবিশিষ্ট বৃত্ত এটাৰ দুডাল সমান জ্যা AB আৰু CD দিয়া হ'ল (চিত্ৰ 10.13 চোৱা)। তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে, $\angle AOB = \angle COD$।



চিত্ৰ 10.13

AOB আৰু COD ত্ৰিভুজত,

$OA = OC$ (এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ)

$OB = OD$ (এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ)

$AB = CD$ (দিয়া আছে)

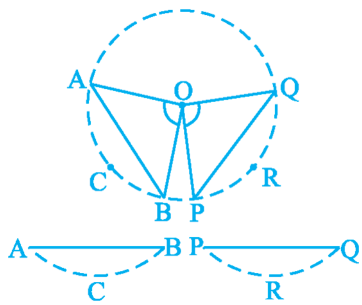
গতিকে $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (বাহু-বাহু-বাহু বিধি)

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\angle AOB = \angle COD$

(সৰ্বাংগসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশ)

মন্তব্য ঃ সুবিধাৰ বাবে, 'সৰ্বাংগসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশ' ক সংক্ষেপে CPCT বুলি ব্যৱহাৰ কৰিম কাৰণ তোমালোকে দেখা পাবা যে, এইটো আমি অতি সঘনাই ব্যৱহাৰ কৰিমহঁক।

এতিয়া, যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল জ্যাই কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে তেন্তে জ্যা দুডালৰ বিষয়ে তোমালোকে কি ক'বা? সিহঁত সমান নে নহয়? তলৰ কাৰ্যটোৰ জৰিয়তে এইটো পৰীক্ষা কৰি চোৱা হওঁক।



চিত্ৰ 10.14

এখন নক্সা অকাঁ কাগজ লোৱা আৰু এটা বৃত্ত ইয়াত অংকিত কৰা। বৃত্তটোৰ ওপৰে ওপৰে কাঁটিলে এখন কাঁহী পাবা। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ 'O' ত AOB কোণ আঁকা য'ত A আৰু B বৃত্তটোৰ বিন্দু। $\angle AOB$ ৰ সমানকৈ আন এটা কোণ POQ কেন্দ্ৰত

আঁকা। কাঁহীখন AB আৰু PQ ৰ ওপৰেৰে কাঁটা (চিত্ৰ 10.14 ত চোৱা)। তোমালোকে ACB আৰু PQR দুটা বৃত্তখণ্ড পাবা। যদি তোমালোকে এটা আনটোৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠা কৰা তেন্তে কি দেখিবা? সিহঁতে এটাক আনটোৱে আৱৰি পেলাব অৰ্থাৎ সিহঁত সৰ্বসম। গতিকে AB = PQ.

যদিও তোমালোকে ইয়াক এই নিৰ্দিষ্ট কাৰ্যটোতহে দেখিলা অন্যান্য সমান কোণৰ ক্ষেত্ৰতও চেষ্টা কৰি চোৱা। তলৰ উপপাদ্যটোৰ কাৰণে জ্যাবোৰ সদায় সমানেই ওলাব।

উপপাদ্য 10.2 ঃ *যদি এটা বৃত্তৰ জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণবোৰ সমান, তেন্তে জ্যাবোৰ পৰস্পৰ সমান।*

ওপৰৰ উপপাদ্যটো, উপপাদ্য 10.1 ৰ বিপৰীত। মন কৰা যে চিত্ৰ 10.13 ত তোমালোকে যদি $\angle AOB = \angle COD$ লোৱা তেন্তে

$$\Delta AOB \cong \Delta COD \text{ (কিয়?)}$$

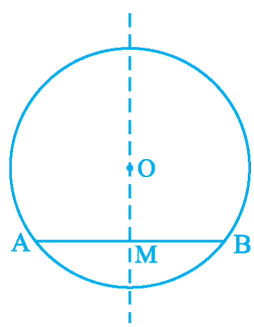
তোমালোকে এতিয়া পাবানে যে, AB = CD?

অনুশীলনী 10.2

1. মনত পেলোৱা যে দুটা বৃত্ত সৰ্বসম হ'ব যদি সিহঁতৰ ব্যাসাৰ্ধ একে হয়। প্ৰমাণ কৰা যে, সৰ্বসম বৃত্তৰ সমান জ্যাই কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।
2. প্ৰমাণ কৰা যে, যদি সৰ্বসম বৃত্তৰ জ্যাই কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে, তেন্তে জ্যাবোৰ সমান।

10.4 কেন্দ্ৰৰ পৰা এডাল জ্যালৈ টনা লম্ব (Perpendicular from the Centre to a Chord) ঃ

কাৰ্য ঃ এখন নক্সা অঁকা কাগজত এটা বৃত্ত আঁকা। ধৰাহ'ল 'O' ইয়াৰ কেন্দ্ৰ। এডাল জ্যা AB আঁকা। 'O' ৰ মাজেৰে যোৱা এডাল ৰেখাইদি কাগজখন ভাঁজ কৰা যাতে জ্যাডালৰ এটা অংশ আনটো অংশৰ ওপৰত পৰে। ধৰাঁ ভাঁজটোৱে AB ক M বিন্দুত কাঁটিছে। তেন্তে



চিত্ৰ 10.15

$\angle OMA = \angle OMB = 90^o$ বা OM, AB ৰ ওপৰত লম্ব। B বিন্দুটো A ৰ ওপৰত মিলি যায়নে (চিত্ৰ 10.15 চোঁৱা)? হয়, ই মিলি যায়। সেয়ে MA = MB।

তোমালোকে নিজে প্ৰমাণ কৰা যে OA আৰু OB সংযোগ কৰিলে সমকোণী ত্ৰিভুজ OMA আৰু OMB সৰ্বসম হ'ব। এই উদাহৰণটো তলৰ ফলাফলটোৰ এটা বিশেষ দৃষ্টান্তহে।

উপপাদ্য 10.3 ঃ *এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা এডাল জ্যালৈ টনা লম্বই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।*

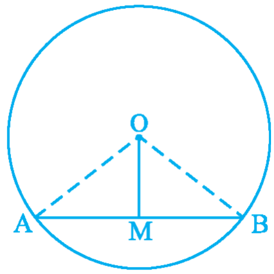
এই উপপাদ্যটোৰ বিপৰীত কি? এইটো লিখিবলৈ, প্ৰথমে উপপাদ্য 10.3 ত কি ধৰা হৈছে আৰু ইয়াৰ প্ৰমাণ কি তাক বুজিব লাগিব। দিয়া আছে যে, এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা এডাল জ্যালৈ

টনা লম্ব অঁকা হ'ল আৰু প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে ই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। সেইবাবে, বিপৰীত ক্ৰমে, পূৰ্ব অনুমান হ'ব— 'যদি এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা টনা ৰেখাই এডাল জ্যাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে' আৰু প্ৰমাণ কৰিব লগাটো হ'ব— 'ৰেখাডাল জ্যাডালৰ লম্ব'। সেইবাবে বিপৰীত উপপাদ্যটো হ'ব।

উপপাদ্য 10.4 ঃ *এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে টনা ৰেখাই এডাল জ্যাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰিলে ৰেখাডাল জ্যাডালৰ ওপৰত লম্ব।*

এইটো সত্যনে? কেইটামান অৱস্থালৈ চেষ্টা কৰা আৰু চোৱা। তোমালোকে দেখিবা যে আটাইকেইটা অৱস্থাতে এইটো সত্য। তলৰ অনুশীলনীটো কৰি চোৱা যে ই সাধাৰণভাৱে সত্য হয়নে নহয়। আমি ঢাপকেইটা লিখিম আৰু তোমালোকে কাৰণবোৰ দৰ্শোৱা।

ধৰোঁ, O কেন্দ্ৰ বিশিষ্ট বৃত্তৰ AB এডাল জ্যা আৰু O ক AB ৰ মধ্যবিন্দু Mৰ সৈতে সংযোগ কৰা হ'ল। তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে OM⊥AB, OA আৰু OB সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 10.16 চোৱা)



চিত্ৰ 10.16

OAM আৰু OBM ত্ৰিভুজত,

OA = OB (কিয়?)

AM = BM (কিয়?)

OM = OM (সাধাৰণ বাহু)

গতিকে, $\Delta OAM = \Delta OBM$ (কেনেকৈ?)

ইয়াৰপৰা পাওঁ, $\angle OMA = \angle OMB = 90^o$ (কিয়?)

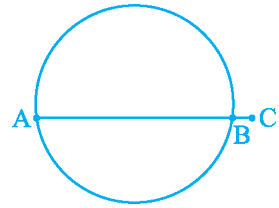
10.5 তিনিটা বিন্দুৰ মাজেৰে বৃত্ত (Circle through Three Points) ঃ

তোমালোকে ষষ্ঠ অধ্যায়ত শিকি আহিছা যে এডাল ৰেখা পাবলৈ হ'লে দুটা বিন্দুয়েই যথেষ্ট। অৰ্থাৎ, দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে এডাল আৰু মাথোন এডালহে ৰেখা পাব পাৰি। স্বাভাৱিকতে এটা প্ৰশ্ন উঠে। এটা বৃত্ত নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত কিমানটা বিন্দু যথেষ্ট (বা পৰ্যাপ্ত)

এটা বিন্দু P লোৱা। এই বিন্দুৰ মাজেৰে কিমান বৃত্ত আঁকিব পাৰি? তোমালোকে দেখিবা যে, এই বিন্দুৰ মাজেৰে তোমালোকে যিমান বিচাৰা সিমান বৃত্ত আঁকিব পাৰিবা [চিত্ৰ 10.17 (i) চোৱা]।

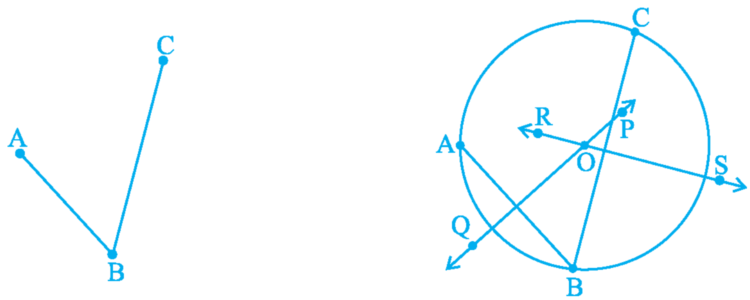
চিত্ৰ 10.17

এতিয়া দুটা বিন্দু P আৰু Q লোৱা। তোমালোকে আকৌ দেখিবা যে P আৰু Q ৰ মাজেৰে অসীম সংখ্যক বৃত্ত আঁকিব পাৰি [চিত্র 10.17 (ii) চোৱা]। যেতিয়া তোমালোকে তিনিটা বিন্দু A, B আৰু C লোৱা তেতিয়া কি হ'ব? তিনিটা একেৰেখাত থকা বিন্দুৰ মাজেৰে এটা বৃত্ত আঁকিব পাৰিবানে? নোৱাৰা। যদি বিন্দুকেইটা একে ৰেখাত থাকে তেন্তে তৃতীয়টো বিন্দু দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা বৃত্তৰ ভিতৰত বা বাহিৰত থাকিব (চিত্র 10.18 চোৱা)।



চিত্র 10.18

গতিকে, তিনিটা একে ৰেখাত নথকা বিন্দু বা অন্য অৰ্থত তিনিটা একেৰেখীয় নোহোৱা বিন্দু A, B আৰু C লোৱা হওঁক। [চিত্র 10.19 (i) চোৱা]। AB আৰু BC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ধৰোঁ ক্ৰমে PQ আৰু RS টানা। ধৰোঁ, এই লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুডালে পৰস্পৰ O বিন্দুত কাঁটিছে। (মন কৰা, PQ আৰু RS এ পৰস্পৰক ছেদ কৰিব কাৰণ সিহঁত সমান্তৰাল নহয়।) [চিত্র 10.19 (ii) চোৱা]।



চিত্র 10.19

এতিয়া O বিন্দুটো AB ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ ত আছে, গতিকে তুমি পাবা OA=OB কাৰণ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ সকলো বিন্দু ৰেখাখণ্ডৰ প্ৰান্তবিন্দুৰপৰা সমদূৰৱৰ্তী যাৰ প্ৰমাণ সপ্তম অধ্যায়ত দিয়া আছে।

একেদৰে, BC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক RS ত O বিন্দুটো আছে গতিকে তুমি পাবা—

$$OB = OC$$

গতিকে OA = OB = OC, যি সূচায় যে, A, B আৰু C বিন্দু তিনিটা O বিন্দুৰ পৰা সমদূৰত অৱস্থিত। গতিকে তুমি O ক কেন্দ্ৰ কৰি OA ব্যাসাৰ্ধ লৈ যদি এটা বৃত্ত আঁকা, ই B আৰু C ৰ মাজেৰেও যাব। তোমালোকে জানা যে, দুডাল ৰেখাই (লম্বসমদ্বিখণ্ডকে) মাথো এটা বিন্দুত কাটিব পাৰে। সেয়ে OA ব্যাসাৰ্ধ লৈ এটা বৃত্তহে পাব পাৰি। অন্য অৰ্থত A, B আৰু C ৰ মাজেৰে যোৱা এটা একক বৃত্ত পাব পাৰি। তোমালোকে এতিয়া তলৰ উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিবা।

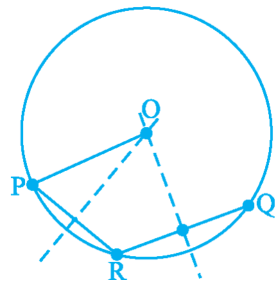
উপপাদ্য 10.5 ঃ *প্ৰদত্ত তিনিটা একেৰেখীয় নোহোৱা বিন্দুৰ মাজেৰে এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে বৃত্ত আঁকিব পাৰি।*

মন্তব্য ঃ যদি ABC এটা ত্ৰিভুজ, তেন্তে উপপাদ্য 10.5 ৰ মতে, ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দু A, B আৰু C ৰ মাজেৰে এটা একক বৃত্ত আঁকিব পাৰি। এই বৃত্তটোক ΔABC ৰ পৰিবৃত্ত বোলে। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধক ক্ৰমে পৰিকেন্দ্ৰ আৰু পৰিব্যাসাৰ্ধ বোলে।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা বৃত্তৰ এটা চাপ দিয়া আছে, বৃত্তটো সম্পূৰ্ণ কৰা।

সমাধান ঃ ধৰোঁ, এটা বৃত্তৰ PQ চাপ দিয়া আছে। আমি বৃত্তটো সম্পূৰ্ণ কৰিব লাগে, অৰ্থাৎ আমি ইয়াৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। চাপটোৰ ওপৰত এটা বিন্দু R লোৱা। PR আৰু QR সংযোগ কৰা। উপপাদ্য 10.5 ৰ প্ৰমাণত কৰা অংকন প্ৰণালী ব্যৱহাৰ কৰা আৰু কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

এনেকৈ পোৱা কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ লৈ আমি বৃত্তটো সম্পূৰ্ণ কৰিব পাৰিম (চিত্ৰ 10.20 চোৱা)



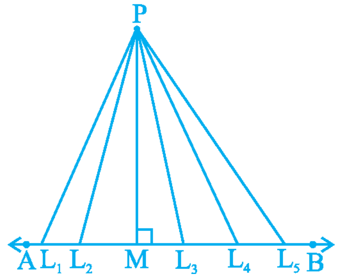
চিত্ৰ 10.20

অনুশীলনী 10.3

1. পৰস্পৰক ছেদ কৰাকৈ আৰু নকৰাকৈ বিভিন্ন বৃত্তৰ যোৰ অংকন কৰা। প্ৰত্যেক যোৰ বৃত্তৰ কিমান সাধাৰণ বিন্দু আছে? সাধাৰণ বিন্দুৰ সৰ্বোচ্চ সংখ্যা কি?
2. ধৰাহ'ল, তোমালোকক এটা বৃত্ত দিয়া আছে। বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰিববৈলে অংকন প্ৰণালী দিয়া।
3. যদি দুটা বৃত্তই দুটা বিন্দুত কটাকটি কৰে, প্ৰমাণ কৰা যে সিহঁতৰ কেন্দ্ৰ সাধাৰণ জ্যাৰ লম্বদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত অৱস্থিত।

10.6 সমান জ্যা আৰু কেন্দ্ৰৰ পৰা সিহঁতৰ দূৰত্ব (Equal Chords and Their Distances from the Centre) ঃ

ধৰোঁ, AB এডাল ৰেখা আৰু P যিকোনো এটা বিন্দু। যিহেতু এডাল ৰেখাত অসীম সংখ্যক বিন্দু থাকে, যদি তোমালোকে এই অসীম সংখ্যক বিন্দুবোৰ P ৰ লগত সংযোগ কৰা তেন্তে তোমালোকে অসীমসংখ্যক ৰেখাখণ্ড PL_1, PL_2, PL_3, PL_4, আদি পাবা। ইয়াৰ কোনটো P ৰ পৰা AB লৈ দূৰত্ব হ'ব? তোমালোকে কিছুসময় ভাবিলেই উত্তৰটো পাবা। এই ৰেখাখণ্ডসমূহৰ ভিতৰত P ৰ পৰা AB লৈ টনা লম্ব অৰ্থাৎ PM (চিত্ৰ 10.21) ডালেই আটাইতকৈ চুটি। গণিতত আমি, এই নূন্যতম দৈৰ্ঘ্য PM অকেই P ৰ পৰা AB লৈ দূৰত্ব বুলি সংজ্ঞা দিছোঁ।



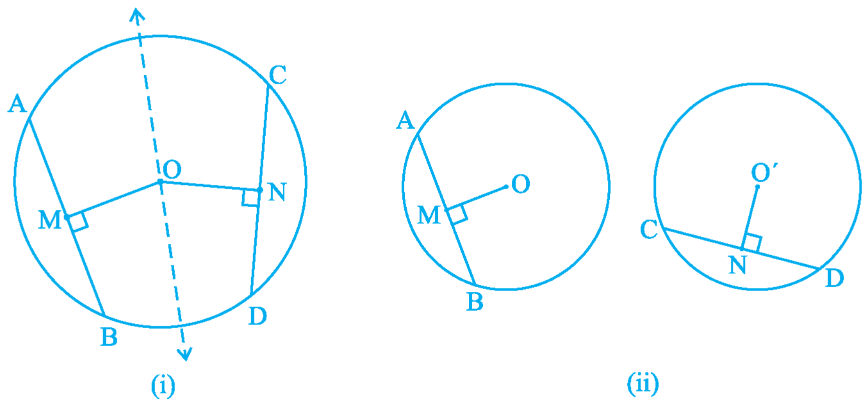
চিত্ৰ 10.21

সেইবাবে তোমালোকে ক'ব পাৰা যে,

কোনো বিন্দুৰপৰা এডাল ৰেখালৈ টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্যই হ'ল বিন্দুটোৰ পৰা ৰেখাডাললৈ দূৰত্ব।

মন কৰা যে, বিন্দুটো ৰেখাডালৰ ওপৰত অৱস্থিত হ'লে বিন্দুটোৰ পৰা ৰেখাডাললৈ দূৰত্ব শূন্য।

এটা বৃত্তত অসীম সংখ্যক জ্যা থাকিব পাৰে। এটা বৃত্তত কিছুমান জ্যা অংকন কৰি পৰ্যবেক্ষণ কৰিলে দেখিবা যে দীঘল জ্যাডাল চুটি জ্যাতকৈ কেন্দ্ৰৰ বেছি ওচৰত থাকে। তোমালোকে এটা বৃত্তৰ বিভিন্ন দৈৰ্ঘ্যৰ জ্যা অংকন কৰি কেন্দ্ৰৰপৰা সিহঁতৰ দূৰত্বৰ জোখ লৈ এইটো পৰ্যবেক্ষণ কৰিব পাৰা। দীৰ্ঘতম জ্যা অৰ্থাৎ ব্যাসৰ দূৰত্ব কেন্দ্ৰৰপৰা কিমান? যিহেতু কেন্দ্ৰ ইয়াৰ ওপৰত থাকে, সেয়ে দূৰত্ব শূন্য। তোমালোকে ভাবিছা নেকি যে, কেন্দ্ৰৰপৰা দূৰত্ব আৰু জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্যৰ মাজত কিবা সম্পৰ্ক আছে? যদি সেয়ে হয় চোৱা যাওঁক—

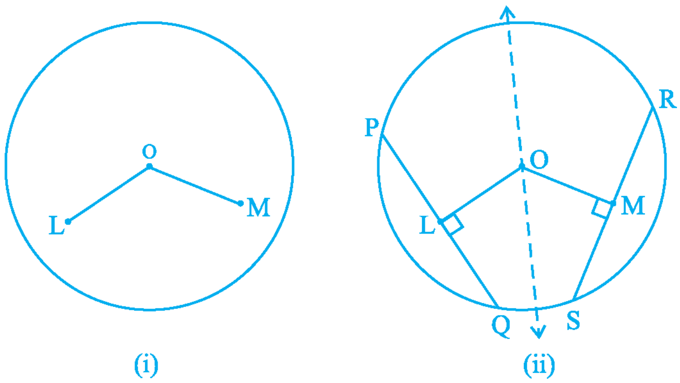


চিত্ৰ 10.22

কাৰ্য ঃ এখন নক্সা অঁকা কাগজত যিকোনো ব্যাসাৰ্ধৰ এটা বৃত্ত আঁকা। AB আৰু CD দুডাল সমান জ্যা আঁকা আৰু কেন্দ্ৰ O ৰ পৰা সিহঁতৰ ওপৰত ক্ৰমে OM আৰু ON লম্বও আঁকা। চিত্ৰটো এনেদৰে ভাঁজ কৰা যাতে D, B ৰ ওপৰত আৰু C, A ৰ ওপৰত পৰে [(চিত্ৰ 10.22 (i)]। তোমালোকে লক্ষ্য কৰিবা যে, O ভাঁজটোত আৰু N, M ৰ ওপৰত পৰিছে। গতিকে OM = ON কাৰ্যটো দুটা সৰ্বসম বৃত্ত যাৰ কেন্দ্ৰ O আৰু O′ আৰু প্ৰতি বৃত্ততে এডালকৈ দুডাল সমান জ্যা AB আৰু CD অংকন কৰি পুনৰাবৃত্তি কৰা। OM আৰু O′N সিহঁতৰ ওপৰত লম্ব আঁকা [(চিত্ৰ 10.22 (ii)]। এখন বৃত্তাকাৰ কাঁহী কাটি আনখনৰ ওপৰত স্থাপন কৰা যাতে AB, CD ৰ সৈতে মিলি যায়। তেতিয়া তোমালোকে পাবা যে O, O′ ৰ সৈতে মিলি গৈছে আৰু M, N ৰ সৈতে মিলি গৈছে। এনেদৰেই তোমালাকে তলৰ কথাখিনি সত্যাপন কৰিলা।

উপপাদ্য 10.6 ঃ *এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) সমান জ্যাবোৰ কেন্দ্ৰৰ (বা কেন্দ্ৰবোৰৰ) পৰা সমান দূৰত থাকে।*

ইয়াৰ পাছত এইটো দেখা যাব যে এই উপপাদ্যৰ বিপৰীত ভাষ্য সচাঁনে মিছা। এইক্ষেত্ৰত, O ক কেন্দ্ৰ কৰি এটা বৃত্ত আঁকা। কেন্দ্ৰ O ৰপৰা দুডাল সমান ৰেখাখণ্ড OL আৰু OM আঁকা



চিত্ৰ 10.23

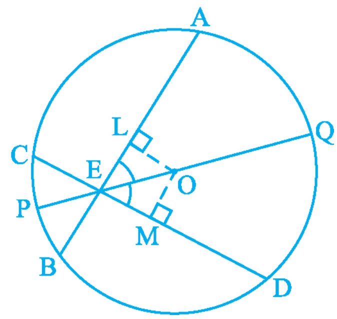
যাতে ইহঁত বৃত্তৰ অন্তঃভাগত থাকে [(চিত্ৰ 10.23 (i)]। তাৰপাছত বৃত্তটোৰ PQ আৰু RS জ্যা আঁকা যাতে OL আৰু OM ৰ ওপৰত ক্ৰমে লম্ব হয় [(চিত্ৰ 10.23 (ii)]। PQ আৰু RS ৰ দৈৰ্ঘ্যৰ জোখ লোৱা। এইবোৰ বেলেগ নেকি? নহয়, দুয়োটা একে। আৰু বেছি সংখ্যক সমান ৰেখাখণ্ড লৈ আৰু সিহঁতৰ লম্ব জ্যা অংকন কৰি কাৰ্যটোৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। এইটোৱে উপপাদ্য 10.6 ৰ বিপৰীত ভাষ্যৰ সত্যাপন কৰে যাক তলত দিয়াধৰণে কোৱা হয়—

উপপাদ্য 10.7 ঃ *এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা সমদূৰত থকা জ্যাবোৰ পৰস্পৰ সমান।*

ওপৰৰ ফলাফলসমূহ ব্যৱহাৰ ব্যাখ্যা কৰিবলৈ আমি এটা উদাহৰণ লওঁ—

উদাহৰণ 2 ঃ এটা বৃত্তৰ দুডাল কটাকটি কৰা জ্যাই সিহঁতৰ ছেদবিন্দুৰ মাজেদি যোৱা ব্যাসৰ লগত সমান কোণ উৎপন্ন কৰিলে প্ৰমাণ কৰা যে জ্যা দুডাল সমান।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, AB আৰু CD এটা বৃত্তৰ জ্যা যাৰ কেন্দ্ৰ O আৰু সিহঁতে E বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। PQ, E ৰ মাজেদি যোৱা ব্যাস যাতে, $\angle AEQ = \angle DEQ$ (চিত্ৰ 10.24 চোৱা)। তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে, AB = CD



চিত্ৰ 10.24

AB আৰু CD জ্যাৰ ওপৰত ক্ৰমে OL আৰু OM লম্ব আঁকা। এতিয়া

$\angle LOE = 180^o - 90^o - \angle LEO = 90^o - \angle LEO$

(ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি ধৰ্ম)

$= 90^o - \angle AEQ = 90^o - \angle DEQ$

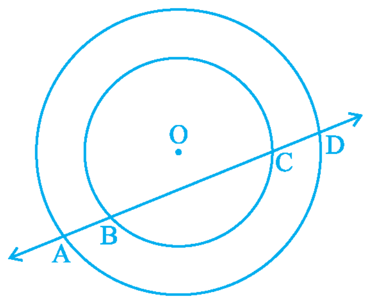
$= 90^o - \angle MEO = \angle MOE$

OLE আৰু OME ত্ৰিভুজত,

	$\angle LEO = \angle MEO$	(কিয়?)
	$\angle LOE = \angle MOE$	(ওপৰত প্ৰমাণিত)
	$EO = EO$	(সাধাৰণ বাহু)
গতিকে,	$\Delta OLE \cong \Delta OME$	(কিয়?)
ইয়াৰপৰা পাওঁ,	$OL = OM$	(CPCT)
গতিকে,	$AB = CD$	(কিয়)

অনুশীলনী 10.4

1. 5 চে.মি. আৰু 3 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্ত দুটাই দুটা বিন্দুত কটাকটি কৰিছে আৰু সিহঁতৰ কেন্দ্ৰৰ দূৰত্ব 4 চে.মি.। সাধাৰণ জ্যাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।
2. যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল সমান জ্যাই বৃত্তটোৰ ভিতৰত কটাকটি কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, এডাল জ্যাৰ ৰেখাখণ্ড দুটা আনডালৰ অনুৰূপ ৰেখাখণ্ড দুটাৰ লগত সমান।
3. যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল সমান জ্যাই বৃত্তটোৰ ভিতৰত কটাকটি কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, কেন্দ্ৰ আৰু ছেদবিন্দু সংযোগী ৰেখাই জ্যা দুডালৰ লগত সমান কোণ কৰে।
4. যদি এডাল ৰেখাই দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত (একে কেন্দ্ৰবিন্দুবিশিষ্ট বৃত্ত), যাৰ কেন্দ্ৰ O ক A, B, C আৰু D বিন্দুত কটাকটি কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, AB = CD [চিত্ৰ 10.25 চোৱা]।

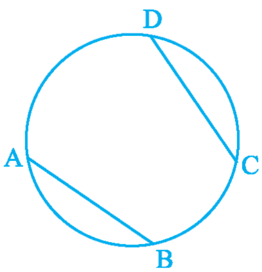


চিত্ৰ 10.25

5. এখন উদ্যানত থকা 5 মি. ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্ত এটাত তিনিজনী ছোৱালী ৰেজিয়া, মেৰী আৰু নীলাক্ষীয়ে থিয় হৈ এটা খেল খেলিছে। ৰেজিয়াই এটা বল মেৰীলৈ, মেৰীয়ে নীলাক্ষীলৈ আৰু নীলাক্ষীয়ে ৰেজিয়ালৈ দলিয়াইছে। যদি ৰেজিয়া আৰু মেৰীৰ মাজৰ দূৰত্ব আৰু মেৰী আৰু নীলাক্ষীৰ মাজৰ দূৰত্ব 6 মি. কৈ হয়, নীলাক্ষী আৰু ৰেজিয়াৰ মাজৰ দূৰত্ব কিমান?
6. এখন বসতিস্থলত 20 মি. ব্যাসাৰ্ধৰ এখন বৃত্তাকাৰ উদ্যান আছে। তিনিটা ল'ৰা অংকুৰ, ছৈয়দ আৰু চন্দনে হাতত তাঁৰযুক্ত পুতলাফোন লৈ ইয়াৰ সীমাত সমদূৰত্বত বহি আছে ইজনে-সিজনৰ লগত কথা পাতিবলৈ। প্ৰতিটো ফোনৰ তাঁৰৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

10.7 এটা বৃত্তৰ চাপে উৎপন্ন কৰা কোণ (Angle Subtended by an Arc of a Circle) ঃ

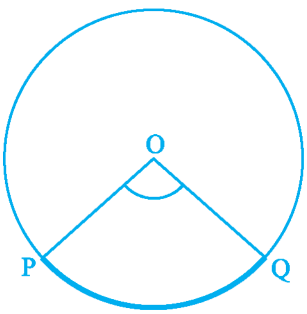
তোমালোকে দেখা পালা যে, ব্যাসৰ বাহিৰে আন জ্যাৰ প্ৰান্ত বিন্দু দুটাই বৃত্তক দুটা চাপত ভাগ কৰে— এটা অধি চাপ আৰু আনটো উপ চাপ। যদি তোমালোকে দুডাল সমান জ্যা লোৱা, তেন্তে চাপসমূহৰ জোখ সম্পৰ্কে তোমালোকে কি ক'ব পাৰা? এডাল জ্যাই সৃষ্টি কৰা এটা চাপ অন্যডাল জ্যাই সৃষ্টি কৰা অনুৰূপ চাপৰ সমাননে? মুঠতে, সিহঁত কেৱল দৈৰ্ঘ্যত সমান হোৱাতকৈও অধিক। সিহঁত সৰ্বসম কাৰণ সিহঁতক বেকাঁ বা ভাঁজ নকৰাকৈ এডাল আনডালৰ ওপৰত পেলাই দিলে দুয়োডাল সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যাব।



চিত্ৰ 10.26

তোমালোকে বৃত্ত এটাৰ পৰা CD জ্যাৰ অনুৰূপ চাপটো CD য়েদি কাটি তাক সমান জ্যা AB ৰ অনুৰূপ চাপৰ ওপৰত ৰাখি কথাষাৰৰ সত্যাপন কৰিব পাৰা। তোমালোকে পাবা যে CD চাপ সম্পূৰ্ণৰূপে AB চাপৰ লগত মিলি গৈছে। [চিত্ৰ 10.26 চোৱা]। ইয়াৰপৰা দেখা যায় যে সমান জ্যাবোৰে সৰ্বসম চাপ সৃষ্টি কৰে আৰু বিপৰীতক্ৰমে সৰ্বসম চাপে বৃত্তত সমান জ্যাৰ সৃষ্টি কৰে। তোমালোকে ইয়াক তলত দিয়া ধৰণে ক'ব পাৰা—

যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল জ্যা সমান, তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ চাপবোৰ সৰ্বসম আৰু বিপৰীতে, যদি দুটা চাপ সৰ্বসম হয় তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ জ্যাবোৰ সমান।



চিত্ৰ 10.27

আকৌ, এটা চাপে বৃত্তৰ কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ সংজ্ঞা হ'ল— চাপটোৰ অনুৰূপ জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ য'ত উপ চাপে কেন্দ্ৰত কোণটো আৰু অধি চাপে কেন্দ্ৰত তাৰ প্ৰবৃদ্ধ কোণটো উৎপন্ন কৰে। সেইবাবে চিত্ৰ 10.27 ত উপ চাপ PQ এ কেন্দ্ৰত কৰা কোণ হ'ল ∠POQ আৰু অধি চাপ PQ এ O ত কৰা প্ৰবৃদ্ধ কোণ POQ।

ওপৰৰ ধৰ্ম আৰু উপপাদ্য 10.1 অনুসৰি তলৰ ফলাফলটো সত্য—

এটা বৃত্তৰ সৰ্বসম চাপে (বা সমান চাপে) বৃত্তৰ কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।

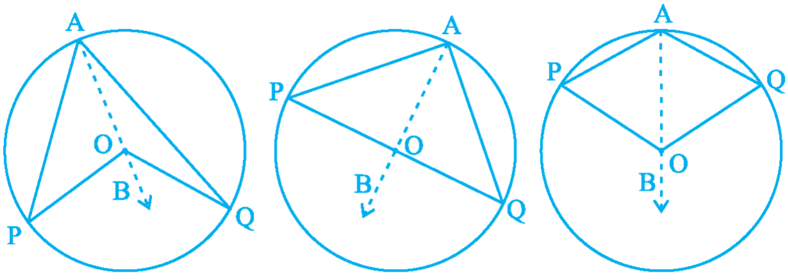
সেইবাবে, বৃত্তৰ জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ অনুৰূপ উপ চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ সমান। তলৰ উপপাদ্যটোৱে এটা চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ আৰু বৃত্তটোৰ এটা বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণৰ মাজৰ সম্বন্ধ নিৰূপণ কৰে।

উপপাদ্য 10.8 ঃ *বৃত্তৰ চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ, ই বৃত্তটোৰ আনটো অংশৰ যিকোনো বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণৰ দুগুণ।*

প্ৰমাণ ঃ প্ৰদত্ত যে এটা বৃত্তৰ চাপ PQ এ কেন্দ্ৰ O ত ∠POQ উৎপন্ন কৰিছে আৰু বৃত্তটোৰ

আনটো অংশৰ A বিন্দুত PAQ কোণ উৎপন্ন কৰিছে। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে

$$\angle POQ = 2\angle PAQ$$



চিত্ৰ 10.28

চিত্ৰ 10.28 ত দেখুওৱা ধৰণে তিনিটা বিভিন্ন অৱস্থা বিবেচনা কৰা। (i) ত PQ উপ চাপ, (ii) ত PQ চাপ অৰ্ধবৃত্ত আৰু (iii) ত PQ অধি চাপ।

AO সংযোগ কৰি আৰু ইয়াক B বিন্দুলৈ বৰ্দ্ধিত কৰি আটাইকেইটা অৱস্থাতে,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

কাৰণ এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বহিঃকোণ অন্তঃৰৰ্তী বিপৰীত কোণ দুটাৰ সমষ্টিৰ সমান। ইয়াৰোপৰি ΔOAQ ত,

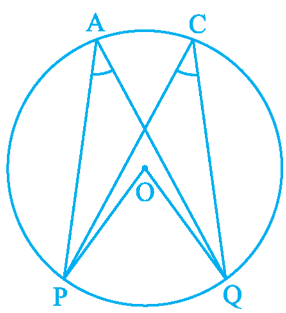
	$OA = OQ$	(এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ)	
সেইবাবে,	$\angle OAQ = \angle OQA$	(উপপাদ্য 7.5)	
ইয়াৰ পৰা পাওঁ,	$\angle BOQ = 2\angle OAQ$		.....(1)
একেদৰে,	$\angle BOP = 2\angle OAP$		.....(2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

এইটো, $\angle POQ = 2\angle PAQ$ সৈতে একে। .....(3)

(iii) নং অৱস্থাটোৰ ক্ষেত্ৰত, য'ত PQ অধি চাপ (3) ক প্ৰবৃদ্ধ কোণ POQ = $2\angle PAQ$ ৰে সলোৱা হ'ল।

মন্তব্য ঃ ধৰাহ'ল, আমি P আৰু Q বিন্দু সংযোগ কৰিলো আৰু ওপৰৰ চিত্ৰত PQ জ্যা পালো। তেন্তে $\angle PAQ$ কোণক PAQP বৃত্তাংশত সৃষ্টি হোৱা কোণও বোলা হয়।



চিত্ৰ 10.29

উপপাদ্য 10.8 ত, A বিন্দুটো বৃত্তটোৰ আনটো অংশৰ যিকোনো বিন্দু হ'ব পাৰে। গতিকে, যদি তোমালোকে অন্য এটা বিন্দু C বৃত্তটোৰ আনটো অংশত লোৱা (চিত্ৰ 10.29 চোৱা) তেন্তে

তোমালোকে পাবা যে,

$$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$$

গতিকে, $\angle PCQ = \angle PAQ$

এইটোৱে তলৰ উক্তিটো প্ৰমাণ কৰে—

উপপাদ্য 10.9 ঃ *এটা বৃত্তৰ একে বৃত্তাংশত অৱস্থিত কোণবোৰ সমান।*

আকৌ, উপপাদ্য 10.8 ৰ (ii) অৱস্থাটো বেলেগকৈ আলোচনা কৰা হওঁক।

ইয়াত $\angle PAQ$ এটা বৃত্তাংশ যিটো এটা অৰ্ধবৃত্তত অৱস্থিত কোণ। ইয়াৰোপৰি, $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2}\times 180^\circ = 90^\circ$ যদি অৰ্দ্ধবৃত্তটোত তোমালোকে অন্য এটা বিন্দু C লোৱা তেন্তে তোমালোকে পাবা যে,

$$\angle PCQ = 90^o$$

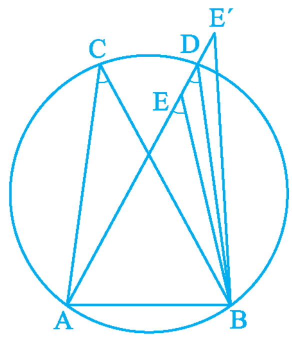
সেয়েহে, তোমালোকে বৃত্তৰ অন্য এটা ধৰ্ম পালা যে

এটা অৰ্ধবৃত্তত অৱস্থিত কোণবোৰ সমকোণ।

উপপাদ্য 10.9 ৰ বিপৰীতটোও সত্য। ইয়াক তলত দিয়া ধৰণেৰে ক'ব পাৰি—

উপপাদ্য 10.10 ঃ *যদি দুটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডই ইয়াৰ একেফালে থকা আন দুটা বিন্দুত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে, বিন্দু চাৰিটা এটা বৃত্তৰ ওপৰত অৱস্থিত হ'ব। (অৰ্থাৎ সিহঁত একচক্ৰীয়)।*

তোমালোকে এই ফলাফলৰ সত্যতা তলৰ কথাৰ পৰা দেখিবা—



চিত্ৰ 10.30

চিত্ৰ 10.30 ত, AB এডাল ৰেখাখণ্ড যি C আৰু D দুটা বিন্দুত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে। অৰ্থাৎ, $\angle ACB = \angle ADB$

A, B, C আৰু D বিন্দুকেইটা এটা বৃত্তত অৱস্থিত বুলি দেখুৱাবলৈ A, C আৰু B বিন্দুৰ মাজেৰে এটা বৃত্ত অঁকা হ'ল। ধৰাহ'ল ই D বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা নাই। তেন্তে ই AD (বা বৰ্দ্ধিত AD) ক, ধৰোঁ E (বা E$'$) বিন্দুত ছেদ কৰিব।

যদি A, C, E আৰু B বিন্দুকেইটা একে বৃত্তত থাকে,

$$\angle ACB = \angle AEB \text{ (কিয়?)}$$

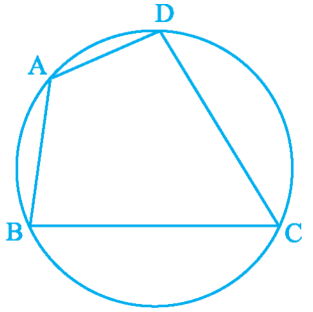
কিন্তু দিয়া আছে যে, $\angle ACB = \angle ADB$

সেয়েহে, $\angle AEB = \angle ADB$

এইটো সম্ভৱ নহয়, যেতিয়ালৈ E আৰু D সম্পূৰ্ণৰূপেৰ মিলি নাযায় (কিয়?) একেদৰে, E$'$ ও D ৰ সৈতে সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যাব লাগিব।

10.8 চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ (Cyclic Quadrilaterals) ঃ

এটা চতুৰ্ভুজ ABCD ক চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ বোলা হয় যদি ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দু চাৰিটা এটা বৃত্তত অৱস্থিত হয় (চিত্ৰ 10.31 চোঁৱা)। তোমালোকে এইধৰণৰ চতুৰ্ভুজৰ এটা বিশেষ ধৰ্ম পাবা। বিভিন্ন আকাৰৰ বাহুবিশিষ্ট বহুতো চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ অংকন কৰা আৰু ইহঁতক ABCD ৰূপত নাম দিয়া (এইটো বিভিন্ন ব্যাসাৰ্ধৰ বহুতো বৃত্ত আঁকি তাত চাৰিটাকৈ বিন্দু লৈ কৰিব পাৰি)। বিপৰীত কোণবোৰ জোখা আৰু তোমাৰ পৰ্যবেক্ষণ তলৰ তালিকাত লিখা।



চিত্ৰ 10.31

চতুৰ্ভুজৰ ক্ৰম. সংখ্যা	∠A	∠B	∠C	∠D	∠A+∠C	∠B+∠D
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

তালিকাখনৰপৰা তোমালোকে কি ধাৰণা কৰিলা?

জোখমাখৰ সৰু-সুৰা ভুল আওকাণ কৰি তোমালোকে পালা যে,

$\angle A + \angle C = 180^o$ আৰু $\angle B + \angle D = 180^o$।

এইটোৱে তলৰ কথাখিনি সত্যাপন কৰে—

উপপাদ্য 10.11 ঃ *চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি* 180^o*।*

আচলতে, এই উপপাদ্যৰ বিপৰীতটোও সত্য, যাক তলত দিয়াধৰণেৰে ক'ব পাৰি—

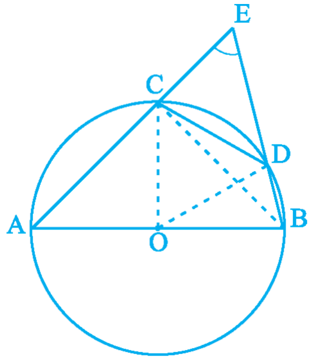
উপপাদ্য 10.12 ঃ *এটা চতুৰ্ভুজৰ এযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি* 180^o *হ'লে, চতুৰ্ভুজটো চক্ৰীয় হ'ব।*

তোমালোকে উপপাদ্য 10.10 ত খটোৱা নিয়মৰ নিচিনা নিয়ম অনুকৰণ কৰি এই উপপাদ্যৰ সত্যতা চাব পাৰা—

উদাহৰণ 3 ঃ চিত্ৰ 10.32 ত, AB এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাস, CD বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধৰ সমান দীঘৰ এডাল জ্যা। AC আৰু BD ক বৰ্দ্ধিত কৰিলে এটা বিন্দু E ত কটাকটি কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\angle AEB = 60^o$$

সমাধান ঃ OC, OD আৰু BC সংযোগ কৰা।



চিত্ৰ 10.32

ত্ৰিভুজ ODC সমবাহু (কিয়?)

সেয়েহে, $\angle COD = 60^o$

এতিয়া, $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD$ (উপপাদ্য 10.8)

ইয়াৰ পৰা $\angle CBD = 30^o$

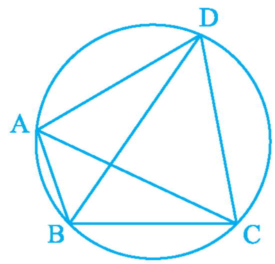
আকৌ $\angle ACB = 90^o$ (কিয়?)

সেয়েহে, $\angle BCE = 180^o - \angle ACB = 90^o$

যিটোৰ পৰা পাওঁ, $\angle CEB = 90^o - 30^o = 60^o$

অৰ্থাৎ $\angle AEB = 60^o$

উদাহৰণ 4 ঃ চিত্ৰ 10.33 ত, ABCD এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ য'ত AC আৰু BD ইয়াৰ কৰ্ণ। যদি $\angle DBC = 55^o$ আৰু $\angle BAC = 45^o$, $\angle BCD$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.33

সমাধান ঃ $\angle CAD = \angle DBC = 55^o$ (একে বৃত্তাংশৰ কোণ)

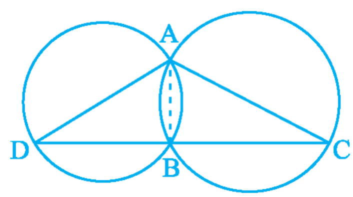
সেইবাবে $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55^o + 45^o = 100^o$

কিন্তু, $\angle DAB + \angle BCD = 180^o$

(চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ বিপৰীত কোণ)

গতিকে, $\angle BCD = 180^o - 100^o = 80^o$

উদাহৰণ 5 ঃ দুটা বৃত্তই A আৰু B দুটা বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। AD আৰু AC বৃত্ত দুটাৰ ব্যাস। (চিত্ৰ 10.34 চোঁৱা) প্ৰমাণ কৰা যে, B, DC ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত অৱস্থিত।



চিত্ৰ 10.34

সমাধান ঃ AB সংযোগ কৰা হ'ল।

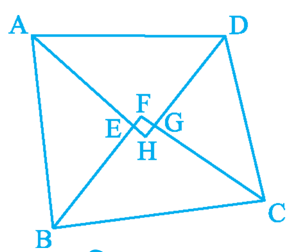
$\angle ABD = 90^o$ (অৰ্ধবৃত্তস্থ কোণ)

$\angle ABC = 90^o$ (অৰ্ধবৃত্তস্থ কোণ)

গতিকে, $\angle ABD + \angle ABC = 90^o + 90^o = 180^o$

সেইবাবে, DBC এডাল ৰেখা। অৰ্থাৎ B, DC ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত অৱস্থিত।

উদাহৰণ 6 ঃ প্ৰমাণ কৰা যে চতুৰ্ভুজৰ অন্তঃকোণৰ সমদ্বিখণ্ডকে সৃষ্টি কৰা চতুৰ্ভুজটো (যদি সম্ভৱ হয়) চক্ৰীয়।



চিত্ৰ 10.35

সমাধান ঃ চিত্ৰ 10.35 ত, ABCD এটা চতুৰ্ভুজ যাৰ অন্তঃকোণ A, B, C আৰু Dৰ সমদ্বিখণ্ডক ক্ৰমে AH, BF, CF আৰু DH এ EFGH চতুৰ্ভুজ গঠন কৰে।

এতিয়া,

$\angle FEH = \angle AEB = 180^o - \angle EAB - \angle EBA$ (কিয়?)

$= 180^o - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

আৰু $\angle FGH = \angle CGD = 180^o - \angle GCD - \angle GDC$ (কিয়?)

$= 180^o - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

সেইবাবে, $\angle FEH + \angle FGH$

$= 180^o - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180^o - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$= 360^o - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$

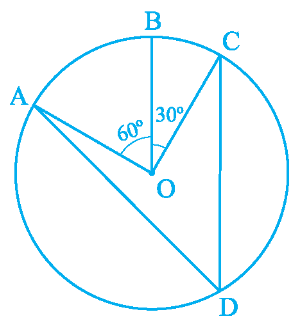
$= 360^o - \frac{1}{2} \times 360^o = 360^o - 180^o$

$= 180^o$

গতিকে, উপপাদ্য 10.12 ৰ মতে, EFGH চতুৰ্ভুজটো চক্রীয়।

অনুশীলনী 10.5

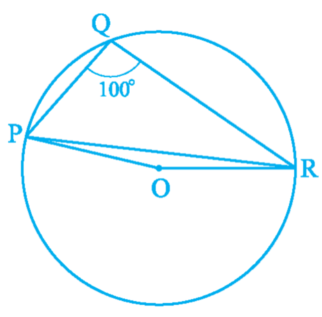
1. চিত্ৰ 10.36 ত, A, B আৰু C তিনিটা বিন্দু O কেন্দ্ৰবিশিষ্ট বৃত্তত অৱস্থিত যাতে $\angle BOC = 30^o$ আৰু $\angle AOB = 60^o$। যদি বৃত্তটোৰ ABC চাপত নথকা D এটা বিন্দু তেন্তে $\angle ADC$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.36

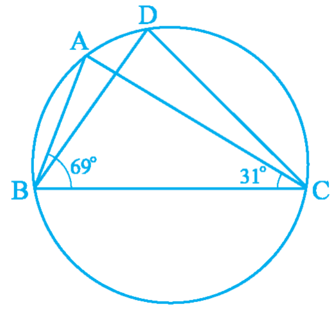
2. এটা বৃত্তৰ এডাল জ্যা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধৰ সমান। জ্যাডালে উপ চাপটোৰ কোনো বিন্দুত আৰু অধি চাপটোৰ কোনো বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

3. চিত্ৰ 10.37 ত $\angle PQR = 100^o$ য'ত P, Q আৰু R, 'O' কেন্দ্ৰবিশিষ্ট বৃত্তৰ বিন্দু। $\angle OPR$ নিৰ্ণয় কৰা।



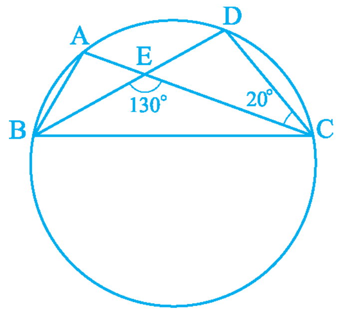
চিত্ৰ 10.37

4. চিত্ৰ 10.38 ত $\angle ABC = 69^o$, $\angle ACB = 31^o$, $\angle BDC$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.38

5. চিত্ৰ 10.39 ত A, B, C আৰু D এটা বৃত্তৰ চাৰিটা বিন্দু। AC আৰু BD এ E বিন্দুত কটাকটি কৰিছে যাতে $\angle BEC = 130^o$ আৰু $\angle ECD = 20^o$। $\angle BAC$ নিৰ্ণয় কৰা।



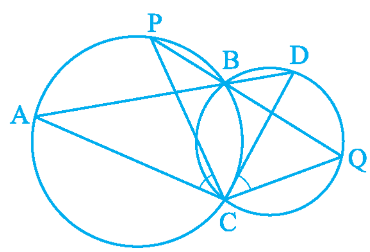
চিত্ৰ 10.39

6. ABCD এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ যাৰ কৰ্ণকেইডালে E বিন্দুত কটাকটি কৰে। যদি $\angle DBC = 70^o$, $\angle BAC = 30^o$, $\angle BCD$ নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰোপৰি, যদি AB = BC, $\angle ECD$ উলিওৱা।

7. যদি এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণ দুডাল ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দুৰেদি যোৱা বৃত্তৰ ব্যাস হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে ই এটা আয়ত।

8. যদি এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ অসমান্তৰাল বাহুযোৰ সমান, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে ই চক্ৰীয়।

9. দুটা বৃত্তই দুটা বিন্দু B আৰু C ত কটাকটি কৰিছে। Bৰ মাজেৰে দুডাল ৰেখাখণ্ড ABD আৰু PBQ টনা হ'ল যাতে, ইহঁতে ক্ৰমে A, D আৰু P, Q বিন্দুত বৃত্তদুটাক কাটিছে (চিত্ৰ 10.40 চোৱা)। প্ৰমাণ কৰা যে $\angle ACP = \angle QCD$



চিত্ৰ 10.40

10. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহুক ব্যাস হিচাপে লৈ বৃত্ত দুটা আঁকা হয়, প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্ত দুটাই কটাকটি কৰা বিন্দু তৃতীয় বাহুত থাকিব।

11. ABC আৰু ADC সমকোণী ত্ৰিভুজ দুটাৰ সাধাৰণ অতিভুজ AC, প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\angle CAD = \angle CBD$$

12. প্ৰমাণ কৰা যে এটা চক্ৰীয় সামান্তৰিক এটা আয়ত।

অনুশীলনী 10.6 (ঐচ্ছিক)*

1. প্ৰমাণ কৰা যে দুটা কটাকটি কৰা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ সংযোগী ৰেখাই ছেদবিন্দু দুটাত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।

2. 5 চে.মি. আৰু 11 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ জ্যা দুডাল ক্ৰমে AB আৰু CD পৰস্পৰ সমান্তৰাল আৰু কেন্দ্ৰৰ বিপৰীত ফালে অৱস্থিত। যদি AB আৰু CD ৰ মাজৰ দূৰত্ব 6 চে.মি. হয়, তেন্তে বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

3. এটা বৃত্তৰ দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্য ক্ৰমে 6 চে.মি. আৰু 8 চে.মি.। যদি চুটি জ্যাডাল কেন্দ্ৰৰপৰা 4 চে.মি. দূৰত্বত থাকে তেন্তে কেন্দ্ৰৰপৰা আনডালৰ দূৰত্ব কিমান?

4. এটা কোণ ABC ৰ শীৰ্ষবিন্দু এটা বৃত্তৰ বাহিৰত অৱস্থিত আৰু ধৰোঁ কোণৰ বাহু দুটাই বৃত্তটোত AD আৰু CE দুডাল সমান জ্যা কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, $\angle ABC$, AC আৰু DE জ্যাই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ পাৰ্থক্যৰ আধা।

5. প্ৰমাণ কৰা যে ৰম্বাচৰ যিকোনো বাহুক ব্যাস হিচাপে লৈ অংকন কৰা বৃত্ত ইয়াৰ কৰ্ণ দুডালৰ ছেদবিন্দুৰেদি যায়।

6. ABCD এটা সামন্তৰিক। A, B আৰু C ৰ মাজেৰে যোৱা বৃত্তই CD (যদি প্ৰয়োজন হয় বৰ্ধিত অংশ)ক E বিন্দুত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, AE = AD।

7. এটা বৃত্তৰ AC আৰু BD জ্যা দুডালে পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে, (i) AC আৰু BD ব্যাস, (ii) ABCD এটা আয়ত।

8. ABC ত্ৰিভুজৰ A, B আৰু C কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকবোৰে ইয়াৰ পৰিবৃত্তক ক্ৰমে D, E আৰু F বিন্দুত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, DEF ত্ৰিভুজৰ কোণবোৰ $90^o - \frac{1}{2}A$, $90^o - \frac{1}{2}B$ আৰু $90^o - \frac{1}{2}C$।

9. দুটা সৰ্বসম বৃত্তই পৰস্পৰ A আৰু B বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। A ৰ মাজেৰে যিকোনো ৰেখাখণ্ড PAQ টনা হ'ল যাতে P, Q বৃত্ত দুটাত থাকে। প্ৰমাণ কৰা যে, BP = BQ।

10. যিকোনো ত্ৰিভুজ ABC ত, যদি $\angle A$ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক আৰু BC ৰ সমদ্বিখণ্ডকে কটাকটি কৰে প্ৰমাণ কৰা যে সিহঁতে ABC ত্ৰিভুজৰ পৰিবৃত্তত কটাকটি কৰে।

* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নল'বা।

10.9 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা শিকিলা—

1. এটা বৃত্ত হ'ল এখন সমতলৰ সকলো বিন্দুৰ সমষ্টি (থুপ), যিবোৰ সমতলখনৰ এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা সমান দূৰত্বত থাকে।
2. এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসমবৃত্তৰ) সমান জ্যাবোৰে কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।
3. যদি এটা বৃত্ত (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) দুডাল জ্যাই কেন্দ্ৰত (অনুৰূপ কেন্দ্ৰবোৰত) সমান কোণ উৎপন্ন কৰে, তেন্তে জ্যাদুডাল সমান।
4. এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা জ্যালৈ টনা লম্বই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।
5. এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে টনা ৰেখাই এডাল জ্যাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰিলে ৰেখাডাল জ্যাৰ ওপৰত লম্ব।
6. তিনিটা একৰেখাত নথকা বিন্দুৰ মাজেৰে এটামাত্ৰ এটাহে বৃত্ত পোৱা যায়।
7. এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) সমান জ্যাবোৰ কেন্দ্ৰৰ (বা অনুৰূপ কেন্দ্ৰৰ) পৰা সমান দূৰত অৱস্থিত।
8. এটা বৃত্তৰ (বা সৰ্বসম বৃত্তৰ) কেন্দ্ৰৰ (বা অনুৰূপ কেন্দ্ৰৰ) পৰা সমদূৰত্ব অৱস্থিত জ্যাবোৰ সমান।
9. যদি এটা বৃত্তৰ দুটা চাপ সৰ্বসম তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ জ্যাবোৰ সমান আৰু বিপৰীতক্ৰমে, যদি এটা বৃত্তৰ দুডাল জ্যা সমান, তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ চাপবোৰ (উপ, অধি) সৰ্বসম।
10. এটা বৃত্তৰ সৰ্বসম চাপবোৰে কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে।
11. এটা বৃত্তৰ এটা চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণ ই বৃত্তটোৰ বাকী অংশৰ যিকোনো বিন্দুত কৰা কোণৰ দুগুণ।
12. একে বৃত্তখণ্ডস্থ কোণবোৰ সমান।
13. অৰ্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।
14. যদি দুটা বিন্দুসংযোগী এডাল ৰেখাখণ্ডই ই থকা ৰেখাডালৰ একেফালে থকা আন দুটা বিন্দুত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে, তেন্তে বিন্দু চাৰিটা এটা বৃত্তত অৱস্থিত।
15. এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি 180^o।
16. যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ এযোৰ বিপৰীত কোণৰ সমষ্টি 180^o, তেন্তে চতুৰ্ভুজটো চক্ৰীয়।

J1A6G2

একাদশ অধ্যায়

অংকন (Constructions)

11.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

আগৰ অধ্যায়বোৰত কোনো উপপাদ্যৰ প্ৰমাণ দিওঁতে বা সমস্যা সমাধানৰ বেলিকা অংকন কৰা চিত্ৰবোৰ যথাযথ হোৱাটোত বাধ্যবাধকতা নাছিল। সেই চিত্ৰবোৰ সমস্যাটো হৃদয়ংগম কৰিবলৈ আৰু যুক্তিসমূহৰ যথাৰ্থতা দাঙি ধৰিবলৈহে অংকন কৰা হৈছিল। যি কি নহওঁক কেতিয়াবা আমাক একেবাৰে শুদ্ধ চিত্ৰ (নক্সা)ৰ প্ৰয়োজন হয়, উদাহৰণস্বৰূপে এটা নিৰ্মাণ কৰিবলগীয়া বিল্ডিঙৰ নক্সা, কোনো সঁজুলিৰ নক্সা, এটা মেচিনৰ বিভিন্ন অংশৰ নক্সা আৰু পথ নিৰ্মাণৰ মেপ আদি। এই নক্সাসমূহ অংকন কৰিবলৈ কিছুমান প্ৰাথমিক জ্যামিতিৰ যন্ত্ৰপাতিৰ প্ৰয়োজন। এই ক্ষেত্ৰত তলত দিয়া বস্তুবোৰ থকা এটা জ্যামিতিৰ বাকচ নিশ্চয় তোমালোকৰ থাকিব ঃ

(i) এডাল সমান সমান ভাগত ভাগ কৰি চিহ্নিত কৰা স্কেল য'ত এফালে চেণ্টিমিটাৰ আৰু মিলিমিটাৰৰ দাগ কটা আৰু আনফালে ইঞ্চি আৰু তাৰ অংশসমূহৰ দাগ কটা থাকে।

(ii) এযোৰ ত্ৰিকোণী, এপাতৰ কোণকেইটা 90^{o}, 60^{o} আৰু 30^{o} আৰু আনপাতৰ কোণকেইটা 90^{o}, 45^{o} আৰু 45^{o}।

(iii) প্ৰয়োজন মতে মিলাই ল'ব পৰা এডাল ডিভাইডাৰ (বিভক্তক)

(iv) এটা মূৰত পেঞ্চিল লগাব পৰা সুবিধা থকা এডাল (বা এযোৰ) কম্পাছ।

(v) এডাল কোণমান যন্ত্ৰ বা প্ৰট্ৰেক্টৰ।

সাধাৰণতে এই আটাইকেইটা সঁজুলি এটা জ্যামিতিৰ নক্সা অংকনত প্ৰয়োজন হয়, যেনে— এটা ত্ৰিভুজ, এটা বৃত্ত, এটা চতুৰ্ভুজ, এটা বহুভুজ আদি নিৰ্দিষ্ট মাপত অংকনৰ বাবে ওপৰৰ সঁজুলিবোৰ দৰকাৰ হয়। কিন্তু জ্যামিতিৰ কোনো এক নক্সা অংকনৰ বেলিকা এডাল দাগহীন ৰুলাৰ, যাক 'সৰল প্ৰান্ত' (straight edge) বুলি কোৱা হয় আৰু এপাত কম্পাছ হ'লেই যথেষ্ট। জোখমাপ দিয়া নক্সা অংকনৰ বেলিকা দাগ চিহ্নিত স্কেল আৰু প্ৰটেক্টৰ ব্যৱহাৰ কৰিবও পাৰা।

এই অধ্যায়ত কিছুমান প্ৰাথমিক অংকন বিবেচনা কৰিমহঁক। এইবোৰ পিছত কিছুমান নিৰ্দিষ্ট প্ৰকাৰৰ ত্ৰিভুজ অংকনত ব্যৱহাৰ হ'ব।

11.2 প্ৰাথমিক অংকন (Basic Constructions) ঃ

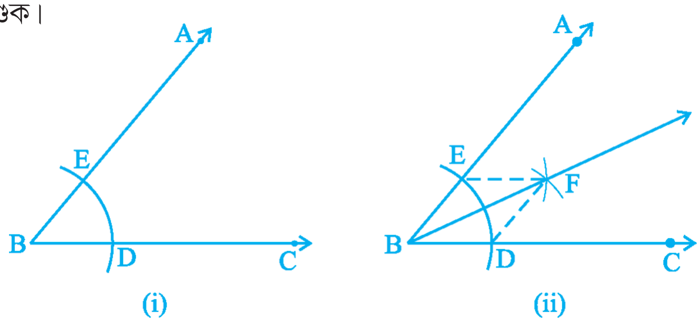
ষষ্ঠ শ্ৰেণীত তোমালোকে এটা বৃত্ত, এডাল ৰেখাখণ্ডৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o আৰু 120^o কোণ, এটা নিৰ্দিষ্ট কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক আদিৰ অংকন কোনো যুক্তি বা কাৰণ নিদিয়াকৈ কিদৰে কৰা হয় তাক শিকি আহিছা। এই অনুচ্ছেদত তোমালোকে ইয়াৰে কিছুমান অংকন কৰিব লাগিব য'ত এই অংকনৰ অন্তৰালত থকা যুক্তি প্ৰদৰ্শন কৰি কিয় অংকনবোৰ যথাৰ্থ হৈছে তাক প্ৰতিপন্ন কৰিব লাগিব।

অংকন 11.1 ঃ *প্ৰদত্ত এটা কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক অংকন কৰিব লাগে।*

প্ৰদত্ত কোণ ABC ৰ সমদ্বিখণ্ডক অংকন কৰিব লাগে।

অংকনৰ চাপ (Steps of Construction) ঃ

1. B বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি যিকোনো ব্যাসাৰ্ধ লৈ এটা চাপ আঁকা যাতে ই BA আৰু BC ৰশ্মিক ক্ৰমে E আৰু D বিন্দুত কটাকটি কৰে। [চিত্ৰ 11.1(i)]
2. ইয়াৰ পাছত, D আৰু E বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি $\frac{1}{2}$DE তকৈ বেছি ব্যাসাৰ্ধ লৈ দুটা চাপ আঁকা যাতে সিহঁতে পৰস্পৰ F বিন্দুত কটাকটি কৰে।
3. BF ৰশ্মি আঁকা [চিত্ৰ 11.1 (ii) চোৱা]। এই BF ৰশ্মিয়েই ABC কোণৰ আঁকিবলগীয়া সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্ৰ 11.1

এতিয়া চোৱা যাওঁক কেনেকৈ এই অংকন পদ্ধতিটোৱে আমাক আঁকিবলগীয়া সমদ্বিখণ্ডকডাল দিয়ে।

DF আৰু EF সংযোগ কৰা

BEF আৰু BDF ত্ৰিভুজত

BE = BD (একে চাপৰ ব্যাসাৰ্ধ)

EF = DF (সমান ব্যাসাৰ্ধৰ চাপ)

BF = BF (সাধাৰণ বাহু)

এতেকে $\Delta BEF \cong \Delta BDF$ (বাহু বাহু বাহু স্বীকাৰ্য)

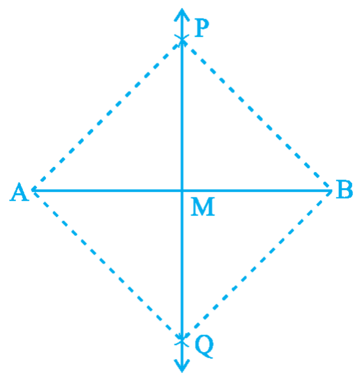
ইয়াৰপৰা $\angle EBF = \angle DBF$ [(CPCT) অৰ্থাৎ সৰ্বাংসম ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ অংশ সমান]

অংকন 11.2 ঃ *এডাল প্ৰদত্ত ৰেখাখণ্ডৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অংকন কৰিব লাগে।*

প্ৰদত্ত ৰেখাখণ্ড AB, আমি ইয়াৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক আঁকিব লাগে।

অংকনৰ ঢাপ (Steps of Construction) ঃ

1. A আৰু B বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি AB ৰেখাখণ্ডৰ দুয়োফালে $\frac{1}{2}$AB তকৈ ডাঙৰ ব্যাসাৰ্ধৰ পৰস্পৰ ছেদী বৃত্ত চাপ অংকন কৰা।
2. ধৰা এই চাপকেইটা P আৰু Q বিন্দুত কাটিছে। PQ সংযোগ কৰা। (চিত্ৰ 11.2 চোৱা)।
3. ধৰা হওঁক PQ এ AB ক M বিন্দুত কাটিছে। এতিয়া PMQ ৰেখাডালেই AB ৰ আঁকিবলগীয়া লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্ৰ 11.2

এতিয়া, আমি এই অংকন পদ্ধতিৰ পৰা AB ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক কিদৰে পালোঁ চাওঁ।

A আৰু B ক P আৰু Q দুয়োটা বিন্দুৰ লগত সংযোগ কৰি AP, AQ আৰু BP, BQ পোৱা গ'ল।

ত্ৰিভুজ PAQ আৰু PBQ ৰ পৰা পাওঁ—

AP = BP (সমব্যাসাৰ্ধৰ চাপ)

AQ = BQ (সমব্যাসাৰ্ধৰ চাপ)

PQ = PQ (সাধাৰণ বাহু)

এতেকে, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (বাহু বাহু বাহু স্বীকাৰ্য)

সেইবাবে, $\angle APM = \angle BPM$ [(CPCT)

এতিয়া, ত্ৰিভুজ PMA আৰু PMB ত

AP = BP (আগৰ দৰে)

PM = PM (সাধাৰণ বাহু)

$\angle APM = \angle BPM$ (ওপৰত প্ৰমাণিত)

এতেকে $\Delta PMA \cong \Delta PMB$ (বাহু কোণ বাহু বিধি)

গতিকে, AM = BM আৰু $\angle PMA = \angle PMB$ (CPCT)

যিহেতু $\angle PMA + \angle PMB = 180^o$ (ৰৈখিক যোৰ স্বতঃসিদ্ধ)

আমি পাওঁ $\angle PMA = \angle PMB = 90^o$

এতেকে, PM অৰ্থাৎ PMQ, AB ৰেখাখণ্ডৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

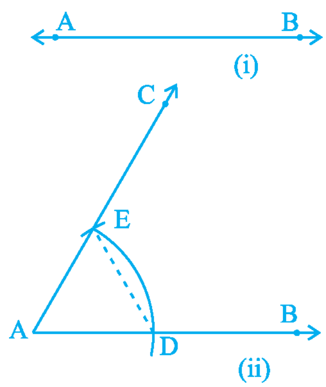
অংকন 11.3 ঃ *প্ৰদত্ত ৰশ্মি এডালৰ আদি বিন্দুত এটা 60^o কোণ আঁকিব লাগে।*

ধৰোঁ AB প্ৰদত্ত ৰশ্মিৰ আদি বিন্দু A [চিত্ৰ 11.3(i)]।

আমি এটা ৰশ্মি AC আঁকিব লাগে যাতে $\angle CAB = 60^o$ । তলত অংকনৰ এটা নিয়ম দিয়া হ'ল—

অংকনৰ ঢাপ (Steps of Construction) ঃ

1. A বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি যিকোনো ব্যাসাৰ্ধ লৈ এটা বৃত্তৰ চাপ আঁকা যাতে ই AB ক D বিন্দুত কাটে।
2. D বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি আগৰ একে ব্যাসাৰ্ধকে লৈ এটা চাপ আঁকা যি আগৰ চাপটোক E বিন্দুত কাটে।
3. AC ৰশ্মি E ৰ মাজেৰে আঁকা [চিত্ৰ 11.3(ii)]। এতিয়া $\angle CAB$ অংকন কৰিব লগীয়া 60^o কোণ। এতিয়া এই পদ্ধতিৰে কিদৰে 60^o ৰ কোণ পোৱা গ'ল তাক চাওঁ আঁহা—



চিত্ৰ 11.3

DE সংযোগ কৰা।

তেতিয়া, AE = AD = DE (অংকন মতে)

এতেকে, ΔEAD এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ। গতিকে $\angle EAD$, যি $\angle CAB$ ৰ সমান, এটা 60^o কোণ হ'ল।

অনুশীলনী 11.1

1. এটা প্ৰদত্ত ৰশ্মিৰ আদিবিন্দুত 90^o ৰ এটা কোণ অংকন কৰা আৰু অংকনৰ যথাৰ্থতা প্ৰতিপন্ন কৰা।

2. এটা প্ৰদত্ত ৰশ্মিৰ আদিবিন্দুত এটা 45^o কোণ অংকন কৰা আৰু অংকনৰ যথাৰ্থতা প্ৰতিপন্ন কৰা।

3. তলৰ মাপত কোণ অংকন কৰা ঃ

(i) 30^o (ii) $22\frac{1}{2}^o$ (i) 15^o

4. তলৰ কোণবোৰ অংকন কৰা আৰু প্ৰট্ৰেক্টৰ (কোণমান যন্ত্ৰ)ৰ সহায়ত জোখ লৈ সত্যাপন কৰা ঃ

(i) 75^o (ii) 105^o (iii) 135^o

5. কোনো এক বাহুৰ দীঘ লৈ এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ অংকন কৰা আৰু অংকন পদ্ধতিৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

11.3 ত্ৰিভুজৰ কিছুমান অংকন (Some Constructions of Triangles) ঃ

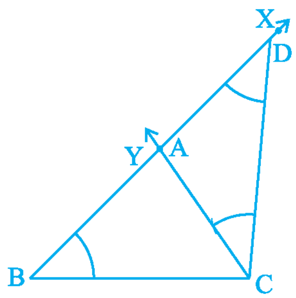
বৰ্তমানলৈকে, কিছুমান প্ৰাথমিক অংকনহে বিবেচনা কৰা হৈছে। ইয়াৰ পাছত আগৰ শ্ৰেণীত পাই অহা আৰু ওপৰত দিয়া অংকনসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি ত্ৰিভুজৰ কিছুমান অংকন কৰিম। সপ্তম অধ্যায়ৰ SAS, SSS, ASA আৰু RHS বিধিসমূহ মনত পেলোৱা যি দুটা ত্ৰিভুজৰ সৰ্বাংগসমতা প্ৰতিপন্ন কৰে। সেয়ে, এটা ত্ৰিভুজ অদ্বিতীয় হ'ব যদি ঃ (i) দুটা বাহু আৰু সিহঁতৰ মাজৰ কোণ দিয়া থাকে। (ii) তিনিটা বাহু দিয়া থাকে (iii) দুটা কোণ আৰু সিহঁতৰ সাধাৰণ বাহু (সংলগ্ন বাহু) দিয়া থাকে (iv) এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ, অতিভুজ আৰু এটা বাহু দিয়া থাকে। তোমালোকে সপ্তম শ্ৰেণীত এই ত্ৰিভুজসমূহ কিদৰে অংকন কৰে, সেয়া শিকি আহিছা। এতিয়া ত্ৰিভুজৰ আৰু কিছুমান অংকন বিবেচনা কৰা যাওঁক। তোমালোকে হয়তো মন কৰিছা যে এটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰিবলৈ ইয়াৰ কমেও তিনিটা অংশ দিয়া থাকিব লাগিব কিন্তু তিনিটা অংশৰ সকলোবোৰ সংযোজন ইয়াৰ বাবে পৰ্যাপ্ত নহয়। উদাহৰণ, স্বৰূপে যদি দুটা বাহু আৰু এটা কোণ (বাহু দুটাৰ অন্তৰৰ্তী কোণ নহয়) দিয়া থাকে, তেন্তে এনে এক অদ্বিতীয় ত্ৰিভুজৰ অংকন কৰাটো সদায় সম্ভৱ নহয়।

অংকন 11.4 ঃ *ভূমি, এটা ভূমি সংলগ্ন কোণ আৰু আন দুটা বাহুৰ সমষ্টি দিয়া থাকিলে ত্ৰিভুজটো অংকন কৰিব লাগে।*

ABC ত্ৰিভুজৰ ভূমি BC, এটা ভূমি সংলগ্ন কোণ (ধৰা) $\angle B$ আৰু AB + AC দিয়া আছে। ত্ৰিভুজটো অংকন কৰিব লাগে।

অংকনৰ ঢাপ (Steps of Construction) ঃ

1. BC ভূমি আঁকা আৰু B বিন্দুত প্ৰদত্ত কোণ ধৰোঁ, $\angle XBC$ আঁকা।
2. BX ৰশ্মিৰপৰা AB + AC ৰ সমানকৈ BD ৰেখাখণ্ড কাটা।
3. DC সংযোগ কৰা আৰু $\angle BDC$ সমানকৈ DCY কোণ অংকন কৰা।
4. ধৰা CY এ BX ক A বিন্দুত কাটিছে (চিত্ৰ 11.4)



চিত্ৰ 11.4

এতিয়া ABC আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজ পোৱা গ'ল।

আৱশ্যকীয় ত্ৰিভুজটো তুমি কেনেকৈ পালা চাওঁ আঁহা।

BC ভূমি আৰু কোণ ∠B দিয়া ধৰণেই অঁকা হ'ল। ইয়াৰ পাছত ACD ত্ৰিভুজৰপৰা ∠ACD = ∠ADC (অংকন মতে)

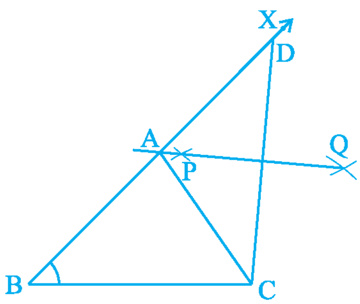
গতিকে AC = AD আৰু তেতিয়া AB = BD – AD = BD – AC

অৰ্থাৎ AB + AC = BD

বিকল্প নিয়ম (Alternative method)ঃ

প্ৰথম দুটা ঢাপ একেদৰে অনুসৰণ কৰা। ইয়াৰ পাছত CD ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ অংকন কৰা যাতে ই BD ক A বিন্দুত কাটে (চিত্ৰ 11.5 চোৱা)। AC সংযোগ কৰা। এতিয়া ABC ত্ৰিভুজটোৱেই আমাৰ আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজ। মন কৰা যে A, CD ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত আছে। সেয়ে AD = AC.

মন্তব্য ঃ ত্ৰিভুজটোৰ অংকন সম্ভৱ নহয় যদি AB + AC ≤ BC.



চিত্ৰ 11.5

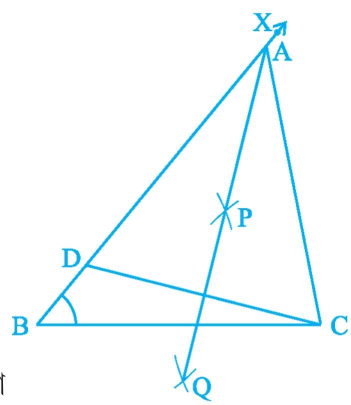
অংকন 11.5 ঃ *এটা ত্ৰিভুজৰ ভূমি, ভূমিসংলগ্ন এটা কোণ আৰু বাকী দুটা বাহুৰ পাৰ্থক্য দিয়া থাকিলে ত্ৰিভুজটো অংকন কৰিব লাগে।*

ABC ত্ৰিভুজৰ ভূমি BC, ভূমিসংলগ্ন কোণ ধৰা ∠B আৰু আন দুটা বাহুৰ পাৰ্থক্য AB – AC বা AC – AB দিয়া আছে, ত্ৰিভুজটো আঁকিব লাগে। স্পষ্টৰূপে, ইয়াৰ বাবে তলৰ দুটা অৱস্থা পোৱা যায়।

অৱস্থা (i) : ধৰোঁ AB > AC অৰ্থাৎ AB – AC দিয়া আছে।

অংকনৰ ঢাপ (Steps of Construction)ঃ

1. ভূমি BC আঁকা আৰু B বিন্দুত প্ৰদত্ত কোণৰ সমান কোণ ∠XBC অংকন কৰা।
2. BX ৰশ্মিৰ পৰা AB – AC ৰ সমানকৈ BD ৰেখাখণ্ড কাটি লোৱা।
3. DC সংযোগ কৰা আৰু ইয়াৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ অংকন কৰা।
4. ধৰোঁ ই BX ক A বিন্দুত কাটিছে। AC সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 11.6 চোৱা)।



চিত্ৰ 11.6

এতিয়া ABC য়েই অংকন কৰিবলগীয়া ত্ৰিভুজ পোৱা হ'ল।

এতিয়া আৱশ্যকীয় ত্ৰিভুজ ABC কেনেকৈ পালা সেয়া চোৱা যাওঁক—

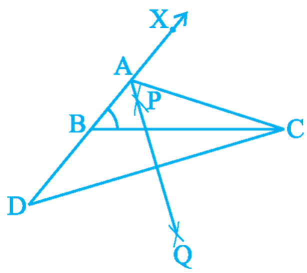
ভূমি BC আৰু ∠B প্ৰদত্ত জোখতে আঁকা হ'ল। A বিন্দুটো DC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত আছে। গতিকে, AD = AC

সেয়ে BD = AB – AD = AB – AC

অৱস্থা (ii) ঃ ধৰোঁ AB < AC অৰ্থাৎ AC – AB দিয়া আছে।

অংকনৰ ঢাপ (Steps of Construction) ঃ

1. অৱস্থা (i) ৰ সৈতে একে।
2. BC ৰ বিপৰীত দিশত বৰ্ধিত কৰা BX ৰেখাৰ পৰা AC – AB সমানকৈ BD কাটি লোৱা।
3. DC সংযোগ কৰা আৰু DC ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ (ধৰোঁ) অংকন কৰা।
4. PQ এ BXক ধৰা A বিন্দুত কাটিছে। AC সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 11.7 চোৱা)।



চিত্ৰ 11.7

এতিয়া আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজ ABC পোৱা হ'ল।

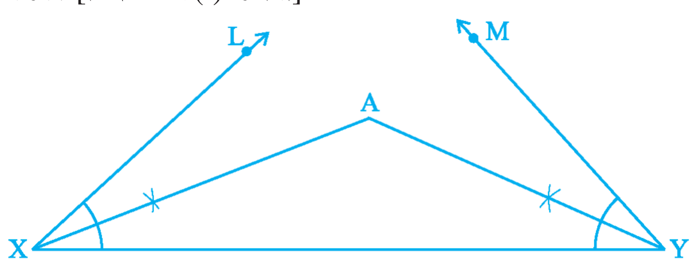
অৱস্থা (i) ত কৰাৰ দৰে তোমালোকে এই ক্ষেত্ৰতো অংকনৰ যথাৰ্থতা প্ৰতিপন্ন কৰিব পাৰিবা।

অংকন 11.6 ঃ *এটা ত্ৰিভুজৰ পৰিসীমা আৰু ভূমিসংলগ্ন কোণ দুটা দিয়া থাকিলে ত্ৰিভুজটো অংকন কৰিব লাগে।*

ধৰোঁ, প্ৰদত্ত ভূমিসংলগ্ন ∠B আৰু ∠C আৰু AB + BC + CA দিয়া আছে। ত্ৰিভুজ ABC আঁকিব লাগে।

অংকনৰ ঢাপ (Steps of Construction) ঃ

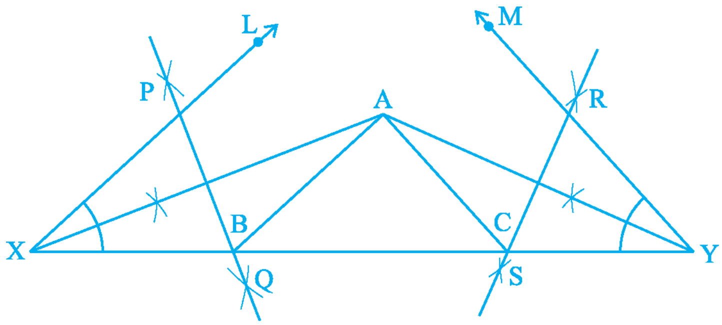
1. BC + CA + AB ৰ সমানকৈ XY ৰেখাখণ্ড আঁকা।
2. ∠B ৰ সমানকৈ ∠LXY আৰু ∠C ৰ সমানকৈ ∠MYX অংকন কৰা।
3. ∠LXY আৰু ∠MYX ক সমদ্বিখণ্ডিত কৰা। ধৰোঁ এই সমদ্বিখণ্ডক দুডালে A বিন্দুত কটাকটি কৰে। [চিত্ৰ 11.8(i) চোৱা]



চিত্ৰ 11.8 (i)

4. AX ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ আৰু AY ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক RS অংকন কৰা।

5. ধৰোঁ PQ এ XY ক B বিন্দুত আৰু RS এ XY ক C বিন্দুত কাটিছে। AB আৰু AC সংযোগ কৰা [চিত্ৰ 11.8(ii) চোৱা]।



চিত্ৰ 11.8(ii)

তেন্তে ABC য়েই হ'ল আমি আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজ। অংকনটোৰ যুক্তিযুক্ততাৰ বাবে লক্ষ্য কৰা যে B, AX ৰ লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ ৰ ওপৰত আছে।

গতিকে, XB = AB আৰু একেদৰে, CY = AC। ইয়াৰ পৰা পাওঁ যে

$$BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY$$

আকৌ $\angle BAX = \angle AXB$ (ΔAXB ত $AB = XB$)

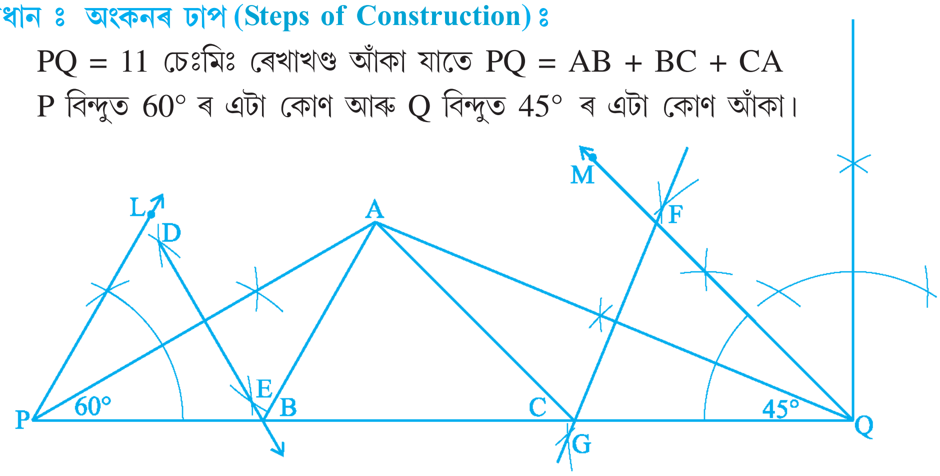
আৰু $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\angle AXB = \angle LXY$

একেদৰে $\angle ACB = \angle MYX$, যিটো আমাক লগাৰ দৰেই হ'ল।

উদাহৰণ 1 ঃ ABC ত্ৰিভুজৰ $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ আৰু AB + BC + CA = 11 চে.মি. দিয়া আছে। ত্ৰিভুজটো আঁকা।

সমাধান ঃ অংকনৰ ঢাপ (Steps of Construction) ঃ

1. PQ = 11 চেঃমিঃ ৰেখাখণ্ড আঁকা যাতে PQ = AB + BC + CA
2. P বিন্দুত 60° ৰ এটা কোণ আৰু Q বিন্দুত 45° ৰ এটা কোণ আঁকা।



চিত্ৰ 11.9

3. এই কোণ দুটা সমদ্বিখণ্ডিত কৰা। ধৰা হওঁক, এই সমদ্বিখণ্ডক দুডালে পৰস্পৰক A বিন্দুত কাটে।
4. AP ৰ লম্বসমদ্বিখণ্ডক DE আঁকা যাতে ই PQ ক B বিন্দুত ছেদ কৰে আৰু AQ ৰ লম্বসমদ্বিখণ্ডক FG আঁকা যাতে ই PQ ক C বিন্দুত ছেদ কৰে।
5. AB আৰু AC সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 11.9 চোৱা)।

এতিয়া, ABC য়েই আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজ হ'ল।

অনুশীলনী 11.2

1. ABC ত্ৰিভুজটো আঁকা য'ত BC = 7 চে.মি. $\angle B = 75^\circ$ আৰু AB + AC = 13 চে.মি.।

2. ABC ত্ৰিভুজটো আঁকা য'ত BC = 8 চে.মি. $\angle B = 45^\circ$ আৰু AB – AC = 3.5 চে.মি.।

3. PQR ত্ৰিভুজটো আঁকা য'ত QR = 6 চে.মি. $\angle Q = 60^\circ$ আৰু PR – PQ = 2চে.মি.

4. XYZ ত্ৰিভুজটো আঁকা য'ত $\angle Y = 30^\circ$, $\angle Z = 90^\circ$ আৰু XY + YZ + ZX = 11 চে.মি.

5. এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ আঁকা যাৰ ভূমি 12 চে.মি., অতিভুজ আৰু আনটো বাহুৰ সমষ্টি 18 চে.মি.।

11.4 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে ৰুলাৰ আৰু কম্পাছ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ অংকনসমূহ কৰিলা—

1. এটা কোণৰ সমদ্বিখণ্ডিতকৰণ।

2. এডাল প্ৰদত্ত ৰেখাখণ্ডৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অংকন।

3. 60° আদি কোণৰ মাপ অনুসৰি কোণৰ অংকন।

4. ভূমি, এটা ভূমিসংলগ্ন কোণ আৰু আন দুটা বাহুৰ সমষ্টি দিয়া থাকিলে ত্ৰিভুজৰ অংকন।

5. ভূমি, এটা ভূমি সংলগ্ন কোণ আৰু বাকী দুটা বাহুৰ পাৰ্থক্য দিয়া থাকিলে ত্ৰিভুজৰ অংকন।

6. ভূমি সংলগ্ন কোণ দুটা আৰু পৰিসীমা দিয়া থাকিলে ত্ৰিভুজটোৰ অংকন।

J3D8U8

দ্বাদশ অধ্যায়

হিৰ'ণৰ সূত্ৰ (Heron's Formula)

12.1 অৱতৰণা (Introduction) ঃ

আগৰ শ্ৰেণীবোৰত তোমালোকে বৰ্গ, আয়ত, ত্ৰিভুজ আৰু চতৰ্ভুজ আদিৰ দৰে বিভিন্ন আকৃতিৰ চিত্ৰবোৰৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছা। আয়ত, বৰ্গ, আদি চিত্ৰৰ কিছুমানৰ পৰিসীমা আৰু কালিৰ পৰিমাণো নিৰ্ণয় কৰিছা। উদাহৰণস্বৰূপে তোমালোকে তোমালোকৰ শ্ৰেণীকোঠাটোৰ মজিয়াখনৰ কালি আৰু পৰিসীমা উলিয়াব জানা।

মজিয়াখনৰ দাঁতিকাষেৰে আমি এপাক খোজ কাঢ়োঁ আঁহা; খোজকঢ়া দূৰত্বখিনি ইয়াৰ পৰিসীমা। কোঠাটোৰ মজিয়াৰ আকাৰৰ পৰিমাণ হ'ল ইয়াৰ কালি।

গতিকে যদি তোমাৰ শ্ৰেণীকোঠাটো আয়তাকাৰ, যাৰ দৈৰ্ঘ্য 10 মি. আৰু প্ৰস্থ 8 মি., ইয়াৰ পৰিসীমা হ'ব 2(10 মি. + 8 মি.) = 36 মি. আৰু ইয়াৰ কালি হ'ব 10 মি. × 8 মি. অৰ্থাৎ 80 বৰ্গমিটাৰ।

দীঘ বা প্ৰস্থৰ কাৰণে জোখৰ একক হিচাপে মিটাৰ (মি.) বা চেণ্টিমিটাৰ (চে.মি.) আদি লোৱা হয়।

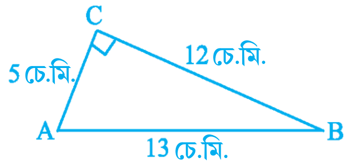
যিকোনো সমতল চিত্ৰৰ কালিৰ বাবে জোখৰ এককৰূপে বৰ্গমিটাৰ (মি^{2}) বা বৰ্গ চেণ্টিমিটাৰ (চেমি^{2}) আদি ধৰা হয়।

ধৰা তুমি এখন ত্ৰিভুজাকাৰ বাগিচাত বহি আছা। ইয়াৰ কালি কিদৰে উলিয়াবা? নৱম অধ্যায় আৰু আগৰ শ্ৰেণীবোৰৰপৰা তোমালোকে জানা যে ঃ

ত্ৰিভুজৰ কালি = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উন্নতি (Area of a triangle = $\frac{1}{2}$ × base × height) ..... (I)

লক্ষ্য কৰোঁ যে যেতিয়া ত্ৰিভুজটো সমকোণী, তেতিয়া ভূমি আৰু উন্নতি (উচ্চতা) হিচাপে

সমকোণটোক ধৰি থকা বাহু দুটা ব্যৱহাৰ কৰি আমি পোনপটীয়াকৈ সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰিব পাৰো। উদাহৰণস্বৰূপে যদি এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ ABC ৰ বাহুকেইটা ক্ৰমে 5 চে.মি., 12 চে.মি. আৰু 13 চে.মি. হ'লে আমি ভূমি 12 চে.মি. আৰু উন্নতি 5 চে.মি. বুলি লওঁ। (চিত্ৰ 12.1 চোৱা) তেন্তে ΔABC ৰ কালি হ'ব—



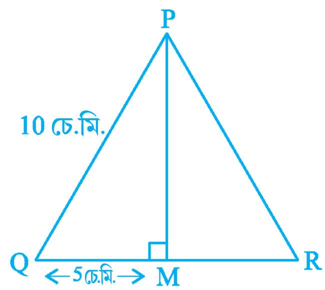
চিত্ৰ 12.1

$\frac{1}{2}$ × ভূমি × উন্নতি

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5$ চে.মি.^{2} অৰ্থাৎ 30 বৰ্গ চে.মি.।

মন কৰা যে আমি ইয়াত ভূমিটো 5 চে.মি. আৰু উন্নতিক 12 চে.মি. হিচাপেও ধৰিব পাৰিলোঁহেতেন।

এতিয়া ধৰা আমি 10 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ বাহু থকা এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ PQR ৰ কালি উলিয়াব লাগে (চিত্ৰ 12.2 চোৱা)। কালি উলিয়াবৰ বাবে আমাক ইয়াৰ উন্নতি লাগিব। তুমি এই ত্ৰিভুজটোৰ উন্নতি উলিয়াব পাৰিবানে?



চিত্ৰ 12.2

বাহু জনা থাকিলে উন্নতি কিদৰে উলিয়ায় আমি মনত পেলাওঁ। সমবাহু ত্ৰিভুজৰ এইটো সম্ভৱ। QR ৰ মধ্যবিন্দু M লোৱা আৰু ইয়াক P ৰ লগত সংযুক্ত কৰা। আমি জানোঁ যে PMQ এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ। গতিকে পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি আমি PM ৰ দীঘ এইদৰে উলিয়াব পাৰোঁ ঃ

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

অৰ্থাৎ $(10)^2 = PM^2 + 5^2$ যিহেতু QM = MR

গতিকে, আমি পাওঁ $PM^2 = 75$

অৰ্থাৎ, $PM = \sqrt{75}$ চে.মি. $= 5\sqrt{3}$ চে.মি.

এতেকে ΔPQR ৰ কালি $= \frac{1}{2}$ × ভূমি × উন্নতি

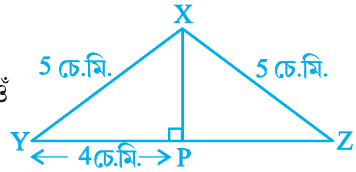
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3}$ বৰ্গ চে.মি.

$= 25\sqrt{3}$ বৰ্গ চে.মি.

এতিয়া এই সূত্ৰটোৰ সহায়ত এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰো কালি উলিয়াব পাৰোঁ নেকি আমি চাওঁ আঁহা। উদাহৰণস্বৰূপে, XYZ এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ লওঁ যাৰ সমান বাহু XY আৰু XZ প্ৰত্যেকৰ দীঘ 5 চে.মি. আৰু অসমান বাহু YZ ৰ দীঘ 8 চে.মি. (চিত্ৰ 12.3 চোৱা)।

এই ক্ষেত্ৰতো আমি ত্ৰিভুজটোৰ উন্নতি জানিবলৈ চেষ্টা কৰিম। সেয়ে, আমি Xৰ পৰা YZ বাহুৰ ওপৰত এডাল লম্ব XP টানো। তোমালোকে দেখিবা যে এই XP লম্বডালে YZ ভূমিক দুটা সমান অংশত ভাগ কৰিছে।

গতিকে, $YP = PZ = \frac{1}{2}YZ = 4$ চে.মি.



চিত্ৰ 12.3

এতিয়া, পাইথাগোৰাছৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি, আমি পাওঁ

$XP^2 = XY^2 - YP^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

গতিকে, $XP = 3$ চে.মি.

এতিয়া, ΔXYZ ৰ কালি $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $YZ \times$ উন্নতি XP

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3$ বৰ্গ চে.মি. $= 12$ চে.মি.^{2}

এতিয়া ধৰা যে আমি এটা বিষমবাহু ত্ৰিভুজৰ বাহুকেইটাৰ দীঘ জানোঁ, কিন্তু উন্নতি নাজানোঁ। তেতিয়াও তুমি ইয়াৰ কালি উলিয়াব পাৰিবানে? উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰা তোমাৰ এখন ত্ৰিভুজাকৃতিৰ বাগিচা আছে যাৰ বাহুকেইটাৰ দীঘ 40 মি., 32 মি. আৰু 24 মি.। ইয়াৰ কালি কিদৰে উলিয়াবা? যদি তুমি সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰিব বিচাৰিছা, নিশ্চিতভাৱে তুমি বাগিচাৰ আকাৰটোৰ উন্নতি উলিয়াব লাগিব। কিন্তু এই উন্নতি নিৰ্ণয়ৰ কোনো শুংসূত্ৰ আমাৰ হাতত নাই। নিৰ্ণয় কৰাৰ চেষ্টা কৰাচোন। যদি কৰিবলৈ সমৰ্থ নোহোৱা, তেন্তে পিছৰ অনুচ্ছেদলৈ আগবাঢ়া।

12.2 হিৰ'ণৰ সূত্ৰৰ সহায়ত এটা ত্ৰিভুজৰ কালি (Area of a Triangle– by Heron's Formula)ঃ

হিৰ'ণ ইজিপ্তৰ আলেকজেণ্ড্ৰিয়াত সম্ভৱতঃ 10 চনত জন্মগ্ৰহণ কৰিছিল। তেওঁ প্ৰায়োগিক গণিতত কাম কৰিছিল। গাণিতিক আৰু ভৌতিক বিষয়বোৰত তেওঁৰ বৰঙণি ইমানেই সংখ্যাগধুৰ আৰু বিচিত্ৰ আছিল যে এইবোৰ ক্ষেত্ৰত তেওঁক এজন প্ৰশস্ত লেখক হিচাপে গণ্য কৰা হয়। তেওঁৰ জ্যামিতিক কৰ্মবোৰৰ বেছিভাগেই তিনিখন কিতাপত লিখিত পৰিমিতিৰ সমস্যাবোৰ লৈ আছিল। প্ৰথমখন কিতাপ বৰ্গ, আয়ত, ত্ৰিভুজ, ট্ৰেপেজিয়াম, বিভিন্ন তৰহৰ বিশিষ্ট চতুৰ্ভুজ, সুষম বহুভুজ, বৃত্ত, বেলনৰ পৃষ্ঠ, শংকু, গোলক ইত্যাদিবোৰৰ পৃষ্ঠকালি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছিল। এই কিতাপতে হিৰ'ণে ত্ৰিভুজৰ তিনিটা বাহুৰ সম্পৰ্কত ইয়াৰ কালি নিৰ্ণয়ৰ বিখ্যাত সূত্ৰটো উলিয়াইছিল।

হিৰ'ণ (10 AD – 75 AD)
চিত্ৰ 12.4

ত্ৰিভুজৰ কালি সম্পৰ্কে হিৰ'ণে দিয়া সূত্ৰটো 'হিৰোৰ সূত্ৰ' বুলিও জনাজাত। ইয়াক এইদৰে বৰ্ণনা কৰা হয়—

$$\text{ত্ৰিভুজ এটাৰ কালি} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad .... \text{(II)}$$

য'ত a, b, c হ'ল ত্ৰিভুজটোৰ বাহু, আৰু

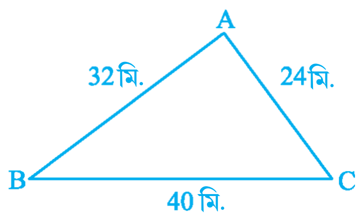
s = অৰ্ধ পৰিসীমা, অৰ্থাৎ ত্ৰিভুজৰ পৰিসীমাটোৰ আধা

$$= \frac{a+b+c}{2}$$

যি ক্ষেত্ৰত ত্ৰিভুজ এটাৰ উন্নতি উলিওৱাটো সহজ নহয়, তেনেক্ষেত্ৰত ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয়ত এই সূত্ৰটো সহায়ক হয়। ওপৰত উল্লেখ কৰি অহা ত্ৰিভুজাকৃতিৰ ABC বাগিচাখনৰ কালি উলিয়াবলৈ আমি ইয়াক প্ৰয়োগ কৰোঁ আহাঁ (চিত্ৰ 12.5 চোৱা)।

আমি ধৰো, a = 40 মি., b = 24 মি., c = 32 মি.,

যাতে আমি পাওঁ $s = \frac{40+24+32}{2}$ মি. = 48 মি.।



চিত্ৰ 12.5

s – a = (48 – 40) মি. = 8 মি.

s – b = (48 – 24) মি. = 24 মি.

s – c = (48 – 32) মি. = 16 মি.

গতিকে ABC বাগিচাখনৰ কালি

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{48\times8\times24\times16} \text{ মি.}^2 = 384 \text{ মি.}^2$$

আমি লক্ষ্য কৰিছো যে,

$32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$

গতিকে বাগিচাখনৰ বাহুবোৰে এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ গঠন কৰে। দীৰ্ঘতম বাহু অৰ্থাৎ অতিভুজ BC = 40 মি., আৰু AB আৰু AC বাহু দুটাৰ মাজৰ কোণটো 90^o হ'ব।

সূত্ৰ I ব্যৱহাৰ কৰি আমি পৰীক্ষা কৰিব পাৰো যে, বাগিচাখনৰ কালি = ½ × 32 × 24 মি.^{2} = 384 মি.^{2}।

আমি দেখিলো যে আমি পোৱা কালিৰ মানটো হিৰ'ণৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পোৱা মানটোৰ সৈতে একে।

এতিয়া হিৰ'ণৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি আমি এই সত্যটো আগতে আলোচনা কৰি অহা তলত উল্লেখিত ত্ৰিভুজবোৰৰ ক্ষেত্ৰটো পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰোঁ—

(i) 10 চে.মি. বাহুৰ সৈতে সমবাহু ত্ৰিভুজ।

(ii) সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ যাৰ সমান বাহু দুটা 5 চে.মি.। আৰু অসমান বাহুটো 8 চে.মি.।

তুমি দেখিবা যে,

(i) ৰ ক্ষেত্ৰত আমি পাওঁ $s = \dfrac{10+10+10}{2}$ চে.মি.=15 চে.মি.

ত্ৰিভুজটোৰ কালি $= \sqrt{15 \times (15-10)\,(15-10)\,(15-10)}$ চে.মি.^{2}

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ চে.মি.^{2}

$= 25\sqrt{3}$ চে.মি.^{2}

(ii) ৰ ক্ষেত্ৰত, আমি পাওঁ, $s = \dfrac{8+5+5}{2}$ চে.মি. = 9 চে.মি.

ত্ৰিভুজটোৰ কালি $= \sqrt{9(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}$ চে.মি.^{2}

$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ চে.মি.^{2} = 12 চে.মি.^{2}

আমি এতিয়া আৰু কিছুমান উদাহৰণ সমাধান কৰোঁ আঁহা ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ ত্ৰিভুজ এটাৰ দুটা বাহু 8 চে.মি. আৰু 11 চে.মি. আৰু ইয়াৰ পৰিসীমা 32 চে.মি. (চিত্ৰ 12.6) চোৱা। ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিওৱা।

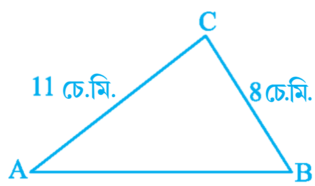
সমাধান ঃ ইয়াত আমি পাওঁ ত্ৰিভুজটোৰ পৰিসীমা = 32 চে.মি., a = 8 চে.মি. আৰু b = 11 চে.মি.। তৃতীয় বাহু c = 32 চে.মি. – (8 + 11) চে.মি. = 13 চে.মি.

গতিকে $2s = 32$, অৰ্থাৎ $s = 16$ চে.মি.

$s - a = (16 - 8)$ চে.মি. = 8 চে.মি.

$s - b = (16 - 11)$ চে.মি. = 5 চে.মি.

$s - c = (16 - 13)$ চে.মি. = 3 চে.মি.



চিত্ৰ 12.6

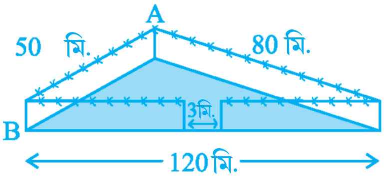
সেয়েহে ত্ৰিভুজটোৰ কালি = $\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

= $\sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ বৰ্গ চে.মি.

= $8\sqrt{30}$ বৰ্গ চে.মি.

উদাহৰণ 2 ঃ ABC ত্ৰিভুজাকৃতি উদ্যান এখনৰ বাহুবোৰ 120 মি., 80 মি. আৰু 50 মি. (চিত্ৰ 12.7 চোৱা)। ধনীয়া নামৰ মালী এজনে ইয়াৰ চাৰিওপিনে জেওঁৰা দিব আৰু ভিতৰত ঘাঁহ-বন ৰুব লাগে। তেওঁ কিমান মাটিকালিত ঘাঁহ ৰুব লাগিব? এটা ফালে 3 মিটাৰ বহলৰ প্ৰৱেশদ্বাৰৰ বাবে অলপ ঠাই বাদ দি প্ৰতি মিটাৰত 20 টকা হাৰত বাকীখিনিত কাঁইটিয়া তাঁৰৰ জেওঁৰা দিবলৈ

লগা খৰচ কিমান হ'ব উলিওৱা।



চিত্ৰ 12.7

সমাধান ঃ উদ্যানখনৰ কালি উলিয়াবলৈ, আমি পাওঁ,

$2s$ = 50 মি. + 80 মি. + 120 মি. = 250 মি.

অৰ্থাৎ s = 125 মি.

এতিয়া, $s - a$ = (125 – 120) মি. = 5 মি.

$s - b$ = (125 – 80) মি. = 45 মি.

$s - c$ = (125 – 50) মি. = 75 মি.

সেয়ে, উদ্যানখনৰ কালি $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ বৰ্গ মি.

$= 375\sqrt{15}$ মি.^{2}।

আকৌ, উদ্যানৰ পৰিসীমা AB + BC + CA = 250 মি.

সেয়ে, জেওঁৰা দিয়াৰ বাবে লগা তাঁৰৰ দৈৰ্ঘ্য

= 250 মি. – 3 মি. (প্ৰবেশদ্বাৰৰ বাবে এৰা)

= 247 মি.

গতিকে জেওঁৰাৰ খৰচ = 247 × 20 টকা = 4940 টকা

উদাহৰণ 3 ঃ ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ মাটি এটুকুৰাৰ বাহুকেইটা 3:5:7 অনুপাতত আছে। ইয়াৰ পৰিসীমা 300 মি.। ইয়াৰ কালি উলিওৱা।

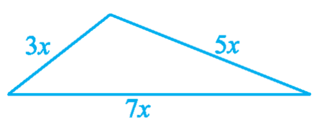
সমাধান ঃ ধৰা বাহুকেইটা মিটাৰত ক্ৰমে $3x$, $5x$ আৰু $7x$ (চিত্ৰ 12.8 চোৱা)।

তেন্তে আমি জানোঁ যে, ত্ৰিভুজটোৰ পৰিসীমা,

$3x + 5x + 7x = 300$

সেয়ে, $15x = 300$, যাৰ পৰা $x = 20$।

গতিকে ত্ৰিভুজটোৰ বাহুবোৰ 3 × 20 মি. 5 × 20 মি. আৰু 7 × 20 মি. অৰ্থাৎ 60 মি., 100 মি. আৰু 140 মি.।



চিত্ৰ 12.8

এতিয়া তোমালোকে কালি উলিয়াব পাৰিবানে?

[হিৰ'ণৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি]?

আমি পাওঁ,

$$s = \frac{60+100+140}{2} \text{ মি.} = 150 \text{ মি.}$$

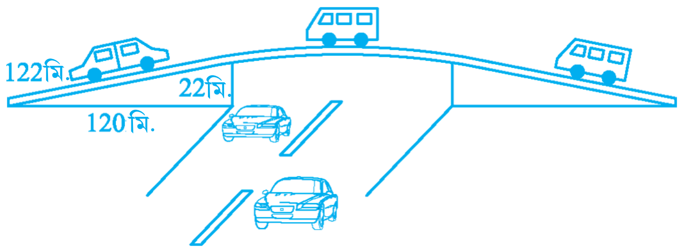
আৰু কালি হ'ব, $\sqrt{150 \times (150-60)(150-100)(150-140)}$ বৰ্গ মিটাৰ

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ মি^{2} $= 1500\sqrt{3}$ মি^{2}

অনুশীলনী 12.1

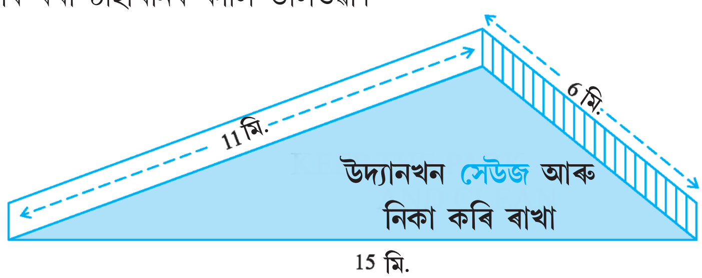
1. "আগত বিদ্যালয় আছে" বুলি লিখা থকা যানবাহনৰ প্ৰতি সংকেত ফলক এখন সমবাহু ত্ৰিভুজ আকাৰৰ যাৰ বাহুৰ দীঘ 'a'। হিৰ'ণৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি সংকেত ফলকখনৰ কালি উলিওৱা। যদি ইয়াৰ পৰিসীমা 180 চে.মি., সংকেত ফলকখনৰ কালি কিমান হ'ব?

2. এখন উৰণীয়া সেতুৰ ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ দাঁতিৰ বেৰবোৰ বিজ্ঞাপন প্ৰচাৰৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে। প্ৰতিখন বেৰৰ দাঁতিকেইটা 122 মি., 22 মি. আৰু 120 মি. (চিত্ৰ 12.9 চোৱা)। বিজ্ঞাপনৰ পৰা প্ৰতিবছৰে উপাৰ্জন হয় প্ৰতি বৰ্গমিটাৰত 5000 টকা। এটা কোম্পানীয়ে ইয়াৰ এখন বেৰ 3 মাহৰ বাবে ভাড়া ল'লে। কোম্পানীটোৱে কিমান ভাড়া পৰিশোধ কৰিছিল?



চিত্ৰ 12.9

3. এখন উদ্যানত এখন চোঁচৰা সেতু (slide) আছে। ইয়াৰ দাঁতিৰ বেৰ এখনত "উদ্যানখন সেউজ আৰু নিকা কৰি ৰাখা"— এই বাৰ্তাটোৰ সৈতে ৰং বোলাই ৰঙীন কৰি থোৱা আছে। (চিত্ৰ 12.10 চোৱা)। যদি বেৰখনৰ দাঁতিকেইটা 15 মি., 11 মি. আৰু 6 মি., তেন্তে ৰঙীন কৰি ৰখা ঠাইখিনিৰ কালি উলিওৱা।



চিত্ৰ 12.10

4. এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহু 18 চে.মি. আৰু 10 চে.মি. আৰু পৰিসীমা 42 চে.মি.। ত্ৰিভুজৰ কালি উলিওৱা।

5. এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুকেইটা 12:17:25 অনুপাতত আছে; আৰু ইয়াৰ পৰিসীমা 540 চে.মি. ইয়াৰ কালি উলিওৱা।

6. সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ এটাৰ পৰিসীমা 30 চে.মি. আৰু সমান বাহু দুটাৰ প্ৰত্যেকেই 12 চে.মি.। ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিওৱা।

7. এটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যাৰ পৰিসীমা 24 চে.মি.।

8. এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ অতিভুজৰ মাপ 13 চে.মি. আৰু এটা বাহুৰ মাপ 5 চে.মি. ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

12.3 চতুৰ্ভুজৰ কালি নিৰ্ণয়ত হিৰ'ণৰ সূত্ৰৰ প্ৰয়োগ (Application of Heron's Formula in Finding Areas of Quadrilaterals) ঃ

ধৰা খেতিয়ক এজনৰ মাটি এটুকুৰা চহাবলগীয়া আছে। তেওঁ এই উদ্দেশ্যে চহোৱা বৰ্গ মিটাৰৰ ওপৰত হাজিৰা ধৰি কেইজনমান শ্ৰমিক নিয়োগ কৰিলে। তেওঁ এইটো কিদৰে কৰিব? বেছি সময়তে পথাৰবোৰ চতুৰ্ভুজ আকৃতিত থাকে। আমি চতুৰ্ভুজটো ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ ভাগত ভাগ কৰিব লাগিব আৰু পিছত ত্ৰিভুজৰ কালিৰ বাবে সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব। এই সমস্যাটোলৈ চাওঁ আঁহা।

উদাহৰণ 4 ঃ কমলাই ঘেঁহু ৰোৱা ত্ৰিভুজাকৃতিৰ খেতিপথাৰ এখনৰ কাষবোৰ 240 মি., 200 মি. আৰু 360 মি.। এই পথাৰখনৰ লগতে লাগি থকা আইন এখন ত্ৰিভুজাকৃতিৰ পথাৰৰ কাষবোৰ 240 মি., 320 মি., 400 মি. য'ত তেওঁ আলু আৰু পিয়াঁজ ৰুব (চিত্ৰ 12.11 চোৱা)। তেওঁ পথাৰখনৰ দীৰ্ঘতম দাঁতিটোৰ মধ্যবিন্দুক বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুটোৰ লগত লগ লগাই পথাৰখনক দুটা ভাগত বিভক্ত কৰিলে আৰু ইয়াৰ এটা ভাগত আলু আৰু আনটো ভাগত পিয়াঁজ ৰুলে। ঘেঁহু, আলু আৰু পিয়াঁজৰ বাবে তেওঁ কিমান মাটিকালি (হেক্টৰত) ব্যৱহাৰ কৰিলে?

(1 হেক্টৰ = 10,000 বৰ্গ মিটাৰ)

সমাধান ঃ ধৰা ঘেঁহু ৰোৱা পথাৰখন ABC। ধৰা ACD এখন পথাৰ যাক AD ৰ মধ্যবিন্দু E আৰু C লগ লগাই দুভাগত ভাগ কৰা হৈছে। ABC ত্ৰিভুজৰ কালিৰ ক্ষেত্ৰত আমি পাওঁ,

$a = 200$ মি., $b = 240$ মি., $c = 360$ মি.

সেয়ে, $s = \dfrac{200+240+360}{2}$ মি. = 400 মি.

গতিকে ঘেহুঁ ৰোৱা অংশৰ কালি,

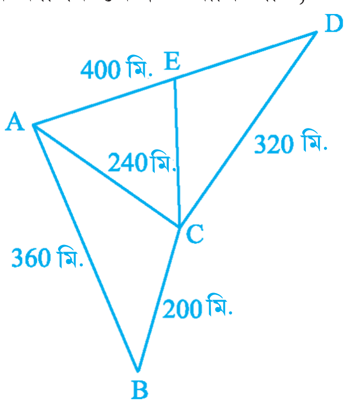
$= \sqrt{400 \times (400-200)(400-240)(400-360)}$ মি.^{2}

$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40}$ মি^{2}

$= 16000\sqrt{2}$ মি^{2}

$= 1.6\sqrt{2}$ হেক্টৰ

$= 2.26$ হেক্টৰ (প্ৰায়)



চিত্ৰ 12.11

এতিয়া আমি ACD ত্ৰিভুজৰ কালি নিৰ্ণয় কৰোঁ আহাঁ।

ইয়াত, আমি পাও,

$$s = \frac{240+320+400}{2} \text{ মি.} = 480 \text{ মি.}$$

গতিকে ΔACD ৰ কালি

$$= \sqrt{480 \times (480-240)\,(480-320)\,(480-400)} \text{ মি.}^2$$

$$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80} \text{ মি}^2$$

$= 38400$ মি^{2} $= 3.84$ হেক্টৰ

আমি লক্ষ্য কৰিছোঁ যে AD ৰ মধ্যবিন্দু E ক C ৰ সৈতে সংযুক্ত কৰা ৰেখাখণ্ডটোৱে ACD ত্ৰিভুজটোক দুটা সমান কালিৰ অংশত ভাগ কৰিছে। ইয়াৰ কাৰণ তুমি দিব পাৰিবানে? প্ৰকৃততে সিহঁতৰ AE আৰু AD ভূমি দুটা সমান, আৰু নক'লেও হ'ব, সিহঁতৰ উচ্চতা একে। সেয়ে, আলু ৰোৱা অংশৰ কালি = পিয়াঁজ ৰোৱা অংশৰ কালি

= (3.84 ÷ 2) হেক্টৰ = 1.92 হেক্টৰ।

উদাহৰণ 5 ঃ এখন বিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে পৰিষ্কাৰ পৰিচ্ছন্নতাৰ প্ৰচাৰ অভিযানৰ বাবে এটা সমাবেশৰ আয়োজন কৰিলে। গলিয়ে গলিয়ে তেওঁলোকে দুটা দল হৈ আগবাঢ়িল। এটা দলে AB, BC আৰু CA ৰে আৰু আনটো দলে AC, CD আৰু DA পথেৰে খোজকাঢ়ি গ'ল (চিত্ৰ 12.12 চোৱা)। পিছত তেওঁলোকে নিজৰ নিজৰ পথৰ ভিতৰৰ এলেকা পৰিষ্কাৰ কৰিলে। যদি AB = 9 মি., BC = 40 মি., CD = 15 মি., DA = 28 মি., আৰু $\angle B = 90^{o}$, কোনটো দলে বেছি অঞ্চল পৰিষ্কাৰ কৰিলে আৰু কিমান বেছি কৰিলে? ছাত্ৰছাত্ৰীবোৰে পৰিষ্কাৰ কৰা (পথৰ প্ৰস্থতা উপেক্ষা কৰি) অঞ্চলৰ মুঠ কালি উলিওৱা।

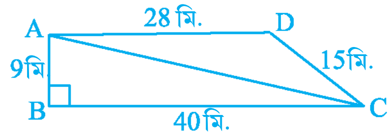
সমাধান ঃ যিহেতু AB = 9 মি. আৰু BC = 40 মি., $\angle B = 90^{o}$ আমি পাওঁ,

$$AC = \sqrt{9^2+40^2} \text{ মি.}$$

$$= \sqrt{81+1600} \text{ মি.}$$

$$= \sqrt{1681} \text{ মি.}$$

$= 41$ মি.



চিত্ৰ 12.12

গতিকে, প্ৰথমটো দলে ABC ত্ৰিভুজৰ কালিৰ সমান পৰিষ্কাৰ কৰিব লাগিব, যিটো ত্ৰিভুজ সমকোণী।

ΔABC ৰ কালি = ½ × ভূমি × উন্নতি

= ½ × 40 × 9 = 180 মি.^{2}

দ্বিতীয় দলটোৱে ACD ত্ৰিভুজটোৰ কালিৰ সমান পৰিষ্কাৰ কৰিব লাগিব, যিটো এটা বিষমবাহু ত্ৰিভুজ যাৰ বাহুবোৰ 41 মি., 15 মি. আৰু 28 মি.।

ইয়াত, $s = \frac{41+15+28}{2}$ মি. = 42 মি.

গতিকে, ΔACD ৰ কালি $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{42(42-41)(42-15)(42-28)}$ মি.^{2}

$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14}$ মি^{2}

$= \sqrt{14 \times 3 \times 3 \times 9 \times 14}$ মি^{2}

$= 14 \times 3 \times 3$ মি^{2} = 126 মি^{2}।

গতিকে প্ৰথমটো দলে 180 মি^{2} পৰিষ্কাৰ কৰে আৰু ই দ্বিতীয়টো দলে পৰিষ্কাৰ কৰাতকৈ (180–126) বৰ্গ মি. অৰ্থাৎ 54 বৰ্গ মিটাৰ বেছি।

আটাইবোৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে পৰিষ্কাৰ কৰা মুঠ কালিৰ পৰিমাণ = (180 + 126) মি^{2} = 306 বৰ্গ মিটাৰ।

উদাহৰণ 6 ঃ সাবিত্ৰীৰ এটুকুৰা ৰম্বাচ আকৃতিৰ মাটি আছে (চিত্ৰ 12.13 চোৱা)। তেওঁ তেওঁৰ এজনী জী আৰু এজন পুত্ৰক মাটি টুকুৰাত কাম কৰি বিভিন্ন শস্যৰ উৎপাদন কৰিবলৈ দিব খুজিলে। তেওঁ মাটি টুকুৰাক দুটা সমান অংশত ভাগ কৰি দিলে। যদি মাটি টুকুৰাৰ পৰিসীমা 400 মিটাৰ আৰু কৰ্ণ এডালৰ দীঘ 160 মিটাৰ, সিহঁতৰ প্ৰত্যেকে শস্য উৎপাদনৰ বাবে কিমানকৈ মাটিকালি পাব?

সমাধান ঃ ধৰা মাটি টুকুৰা ABCD।

পৰিসীমা = 400 মি.

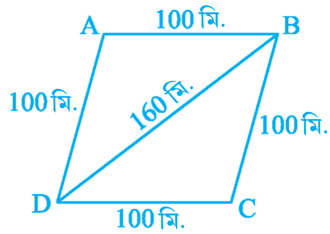
গতিকে প্ৰতি বাহু = 400 মি. ÷ 4 = 100 মি.

অৰ্থাৎ AB = AD = 100 মি.।

ধৰা কৰ্ণ BD = 160 মি.। তেন্তে

ΔABD ৰ অৰ্দ্ধ-পৰিসীমা পোৱা যাব—

$s = \frac{100+100+160}{2}$ মি. = 180 মি.



চিত্ৰ 12.13

গতিকে ΔABD ৰ কালি $= \sqrt{180(180-100)(180-100)(180-160)}$ মি.^{2}

$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20}$ মি^{2}

$= \sqrt{20 \times 9 \times 80 \times 80 \times 20}$ মি^{2}

$= 20 \times 80 \times 3$ মি^{2} = 4800 মি^{2}।

এতেকে, সিহঁতৰ প্ৰতিজনে 4800 বৰ্গ মিটাৰৰ কালি একোটাকৈ পাব।

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method)ঃ

$CE \perp BD$ টানা (চিত্ৰ 12.14 চোৱা)।

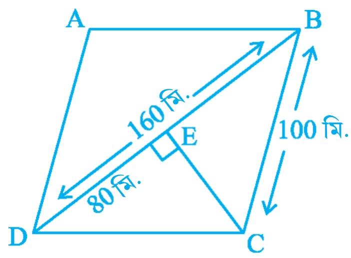
যিহেতু $BD = 160$ মি. আমি পাওঁ,

$DE = 160$ মি. $\div 2 = 80$ মি.

আৰু $DE^2 + CE^2 = DC^2$

ইয়াৰ পৰা, $CE = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

$= \sqrt{100^2 - 80^2}$ মি. $= 60$ মি.

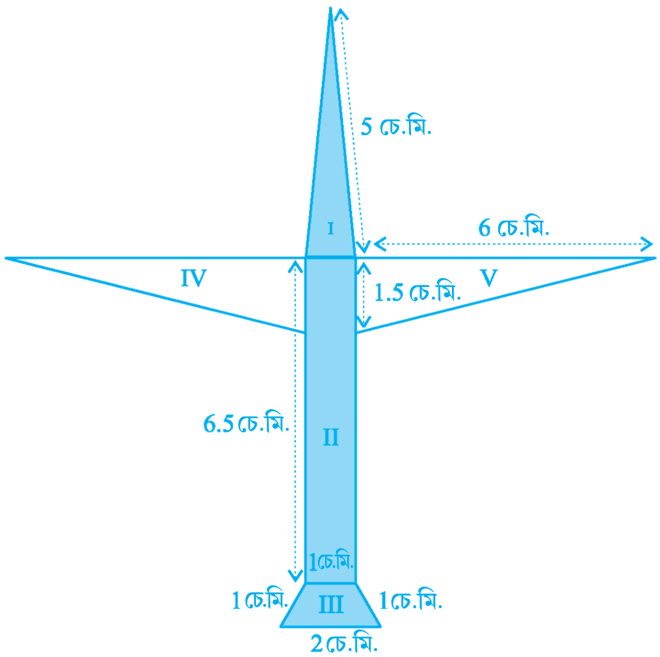


চিত্ৰ 12.14

গতিকে ΔBCD ৰ কালি $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60$ মি.^{2} = 4800 বৰ্গ মিটাৰ

অনুশীলনী 12.2

1. চতুৰ্ভুজ আকৃতিৰ এখন উদ্যানৰ ABCD ৰ $\angle C = 90^o$, AB = 9 মি., BC = 12 মি., CD = 5 মি. আৰু AD = 8 মি.। ই কিমান মাটিকালি আগুৰি আছে?
2. এটা চতুৰ্ভুজ ABCD ৰ AB = 3 চে.মি., BC = 4 চে.মি., CD = 4 চে.মি., DA = 5 চে.মি. আৰু AC = 5 চে.মি.। ইয়াৰ কালি উলিওৱা।
3. চিত্ৰ 12.15 অত দেখুৱাৰ দৰে ৰাধাই ৰঙীন কাকতেৰে এৰোপ্লেনৰ এটা চিত্ৰ তৈয়াৰ কৰিলে। তেওঁ ব্যৱহাৰ কৰা কাকতৰ মুঠ কালি উলিওৱা।



চিত্ৰ 12.15

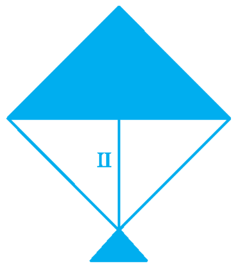
4. এটা ত্ৰিভুজ আৰু এটা সামান্তৰিকৰ ভূমি একে আৰু কালিও একে। যদি ত্ৰিভুজটোৰ বাহুকেইটা 26 চে.মি., 28 চে.মি., আৰু 30 চে.মি., আৰু সামান্তৰিকটো 28 চে.মি. ভূমিৰ ওপৰত অৱস্থিত তেন্তে সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

5. এখন ৰম্বাচ আকৃতিৰ পথাৰত 18 জনী গাই গৰুৱে খাবৰ কাৰণে সেউজীয়া ঘাঁহ আছে। যদি ৰম্বাচটোৰ প্ৰতিটো বাহুৱেই 30 মি. আৰু ইয়াৰ দীৰ্ঘতম কৰ্ণটো 48 মি., তেন্তে প্ৰতিজনী গাইগৰুৱে ঘাঁহনিখনৰ মুঠ কালিৰ অংশ কিমানকৈ পাব?

6. দুটা বেলেগ ৰঙৰ ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ 10 টা কাপোৰৰ টুকুৰা সী এটা ছাতি তৈয়াৰ কৰা হৈছে। (চিত্ৰ 12.16 চোৱা)। প্ৰতিটো কাপোৰৰ টুকুৰাৰ জোখ 20 চে.মি., 50 চে.মি. আৰু 50 চে.মি.। ছাতিটোৰ বাবে প্ৰতিটো ৰঙৰ কাপোৰ কিমানকৈ লাগিছে?

7. বৰ্গ আকৃতিৰ এখন চিলাৰ কৰ্ণ 32 চে.মি. আৰু ইয়াৰ লগত 8 চে.মি. ভূমি আৰু 6 চে.মি. জোখৰ দুটা বাহুৰে এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ সংযুক্ত কৰা আছে। যদি চিলাখনক (চিত্ৰ 12.17)ত দেখুৱাৰ ধৰণেৰে তিনিটা বিভিন্ন ৰঙ দি তৈয়াৰ কৰা হয়, তেন্তে প্ৰতিটো ৰঙৰে কিমানকৈ কাকত ইয়াত ব্যৱহাৰ হ'ব?

চিত্ৰ 12.16



চিত্ৰ 12.17

8. এখন মজিয়াত থকা এটা ফুলৰ চানেকী 16 খন ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ টাইলেৰে গঠিত। প্ৰতিটো ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ 9 চে.মি., 28 চে.মি. আৰু 35 চে.মি. (চিত্ৰ 12.18 চোৱা) প্ৰতি বৰ্গ চেণ্টিমিটাৰত 50 পইচা হাৰত টাইলবোৰ পালিচ কৰিবলৈ খৰছ কিমান পৰিব উলিওৱা।

চিত্ৰ 12.18

9. ট্ৰেপিজিয়াম আকৃতিৰ এখন পথাৰৰ সমান্তৰাল বাহুবোৰ 25 মি. আৰু 10 মি.। অ-সমান্তৰাল বাহু দুটা 14 মি. আৰু 13 মি.। পথাৰখনৰ কালি উলিওৱা।

12.4 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ মূলকথাকেইটা অধ্যয়ন কৰিলা—

1. a, b আৰু c বাহু থকা ত্ৰিভুজ এটাৰ কালি নিৰ্ণয়ৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হিৰ'ণৰ সূত্ৰটো হ'ল—

ত্ৰিভুজৰ কালি $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

য'ত $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

2. বাহুবোৰ আৰু এটা কৰ্ণ দিয়া থাকিলে, চতুৰ্ভুজ এটাক দুটা ত্ৰিভুজত ভাগ কৰি আৰু হিৰ'ণৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি ইয়াৰ কালি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

K7Q4Z9

ত্ৰয়োদশ অধ্যায়

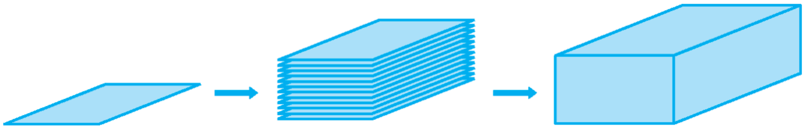
পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন (Surface Area and Volumes)

13.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

আমি যিফালেই চাওঁ, সাধাৰণতে গোটা বস্তুবিলাকেই আমাৰ চকুত পৰে। আমি এতিয়ালৈকে কৰি অহা অধ্যয়নবিলাকত টোকাবহী নাইবা ব্লেক্ ব'ৰ্ডত সহজে অংকন কৰিব পৰা চিত্ৰবিলাকহে পাই আহিছোঁ। এনে চিত্ৰবোৰেই হৈছে সমতলীয় বা সামতলিক চিত্ৰ। আয়ত, বৰ্গ আৰু বৃত্তবোৰনো কি, সিহঁতৰ পৰিসীমা আৰু কালি বুলিলে কি বুজায় আৰু সেইবোৰ কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি তাক ইতিমধ্যে আমি জানি আহিছোঁ। আগৰ শ্ৰেণীবিলাকতে আমি এইবোৰ শিকিছোঁ। আমি যদি একে আকাৰ আৰু একে জোখৰ এনে এক সমতলীয় ক্ষেত্ৰৰ বহুতো টুকুৰা কাৰ্ড ব'ৰ্ডৰ পাতৰপৰা কাটি উলিয়াই উলম্বভাৱে ঠাক ঠাক কৰি থওঁ, তেন্তে ই দেখাত আকৰ্ষণীয় হৈ পৰিব। এই পদ্ধতিৰে একোটা আয়তীয় ঘনক, একোটা চুঙা আদিৰ দৰে গোটা আকাৰ কিছুমান আমি পাম। আগৰ শ্ৰেণীবিলাকত আয়তীয় ঘনক, ঘনক আৰু চুঙাৰ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন নিৰ্ণয় কৰিবলৈও শিকি আহিছা। আমি এতিয়া আয়তীয় ঘনক আৰু চুঙাৰ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন নিৰ্ণয়ৰ বিষয়ে বিশদভাৱে শিকিম আৰু এই অধ্যয়নক শংকু আৰু গোলকৰ নিচিনা আন কিছুমান গোটা বস্তুলৈও সম্প্ৰসাৰিত কৰিম।

13.2 আয়তীয় ঘনক আৰু ঘনকৰ পৃষ্ঠকালি (Surface area of a Cuboid and a Cube) ঃ

একে জোখৰ কাগজৰ এনেক খিলা পাতৰ ঠাক একোটা মন কৰিছানে? ই দেখাত বাৰু কেনে হ'ব? চিত্ৰ 13.1অত তুমি দেখাৰ দৰেই ই হ'বনে?



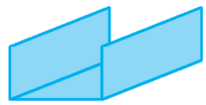
চিত্ৰ ঃ 13.1

এই ঠাকটোৰে এটা আয়তীয় ঘনকৰ সৃষ্টি কৰিব। এই আয়তীয় ঘনকটো ঢাকিবলৈ (বা মেৰাবলৈ) তোমাক বাৰু কিমান মুগা ৰঙৰ কাগজ (brown paper) লাগিব? এইটোকে আমি চাওঁ আহা—

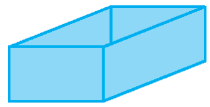
ঠাকটোৰ তলিখন ঢাকিবলৈ প্ৰথমে আমাক আয়তীয় টুকুৰা এটা লাগিব যিটো দেখাত চিত্ৰ 13.2 (a)ৰ দৰে হ'ব।

(a)

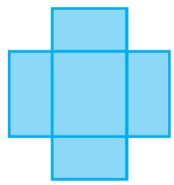
তাৰ পাছত কাষ দুটা ঢাকিবলৈ আমাক দীঘলীয়া টুকুৰা দুটা লাগিব। এতিয়া ই দেখাত চিত্ৰ 13.2 (b)ৰ দৰে হ'ব।


(b)

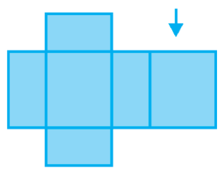
সন্মুখৰ আৰু পাছফালৰ কাষ দুটা ঢাকিবলৈ এতিয়া লাগিব ভিন্ন জোখৰ দুটা আয়তীয় টুকুৰা আৰু ইয়াৰ সৈতে আকাৰটো চিত্ৰ 13.2(c)ত দেখুৱাৰ দৰে হৈ পৰিব।


(c)

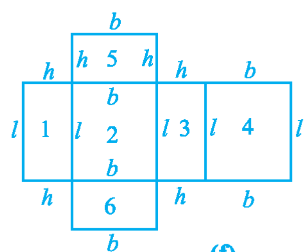
ওপৰৰ আকাৰটো মেলি দিলে চিত্ৰ 13.2 (d)ত দেখুৱাৰ দৰে হ'ব।


(d)

শেষত ঠাকটোৰ ওপৰৰ ফালটো ঢাকিবলৈ, তলিখন ঢাকিবলৈ লোৱা আয়তীয় টুকুৰাটোৰ সৈতে একেবাৰে একে আন এটা টুকুৰা লাগিব যিটোক ওপৰৰ চিত্ৰটোৰ সোঁফালে লগাই দিলে দেখাত চিত্ৰ 13.2(e)ৰ দৰে হৈ পৰিব।


(e)

সেয়েহে আয়তীয় ঘনকটোৰ সমগ্ৰ বাহিৰৰ পৃষ্ঠ ঢাকিবলৈ আমি ছয়টা টুকুৰা ব্যৱহাৰ কৰিব লগা হ'ল।



(f)

চিত্ৰ ঃ 13.2

ইয়াৰপৰা দেখা গ'ল যে, আয়তীয় ঘনক এটাৰ বহিৰৰ ফালটো ছয়টা আয়ত (প্ৰকৃতাৰ্থত আয়তীয় ঘনকটোৰ আয়তীয় পৃষ্ঠ)ৰে গঠিত যাৰ মুঠ কালি আয়ত ছয়টাৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থক বেলেগে বেলেগে পূৰণ কৰি যোগ কৰিলে পোৱা যায়।

আয়তীয় ঘনকটোৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতাক ক্ৰমে l, b আৰু hৰে সূচিত কৰিলে চিত্ৰ 13.2(e)ৰ আকাৰটো চিত্ৰ 13.2(f)অত দেখুৱাৰ দৰে হ'ব।

সেয়েহে, আয়ত ছয়টাৰ কালিৰ যোগফল হ'ব—

আয়ত-1ৰ কালি $= (l \times h)$

$+$

আয়ত-2ৰ কালি $= (l \times b)$

$+$

আয়ত-3ৰ কালি $= (l \times h)$

$+$

আয়ত-4ৰ কালি $= (l \times b)$

$+$

আয়ত-5ৰ কালি $= (b \times h)$

$+$

আয়ত-6ৰ কালি $= (b \times h)$

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2(lb + bh + hl)$

ইয়াৰপৰা পাওঁ যে—

এটা আয়তীয় ঘনকৰ পৃষ্ঠকালি = $2(lb + bh + hl)$
Surface Area of a Cuboid = $2(lb + bh + hl)$

য'ত l, b আৰু h আয়তীয় ঘনকটোৰ ক্ৰমে দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা।

টোকা ঃ কালিৰ একককক বৰ্গ একক বুলি লোৱা হয় কাৰণ একক দৈৰ্ঘ্যৰ বাহুবিশিষ্ট বৰ্গৰে সম্পূৰ্ণ কৰিহে কোনো এক বিস্তৃত অঞ্চলৰ জোখ আমি লওঁ।

উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি এটা আয়তীয় ঘনকৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা ক্ৰমে 15 চে.মি., 10 চে.মি. আৰু 20 চে.মি. হয়, তেন্তে ইয়াৰ পৃষ্ঠকালি হ'ব—

$2[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)]$ বৰ্গ চে.মি.

$= 2(150 + 200 + 300)$ বৰ্গ চে.মি.

$= 2 \times 650$ বৰ্গ চে.মি.

$= 1300$ বৰ্গ চে.মি.

মনত পেলোৱাচোন যে এটা আয়তীয় ঘনকৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা আটাইকেইটা সমান

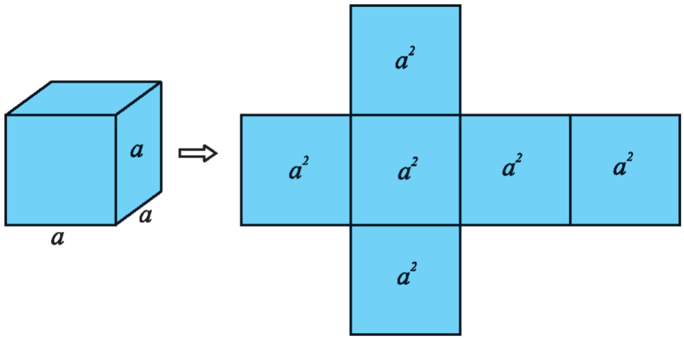
হ'লে ইয়াক এটা ঘনক বোলে। ঘনকটোৰ প্ৰতিটো কাষেই a হ'লে, ঘনকটোৰ পৃষ্ঠকালি হ'ব—

$2(a \times a + a \times a + a \times a)$ অৰ্থাৎ $6a^2$ (চিত্ৰ 13.3 চোৱা)।

ইয়াৰপৰা পালো যে—

এটা ঘনকৰ পৃষ্ঠকালি = $6a^2$
Surface Area of a Cube = $6a^2$

য'ত a ঘনকটোৰ প্ৰতিটো কাষৰ দীঘ।



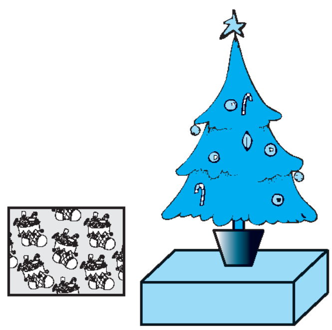
চিত্ৰ ঃ 13.3

ধৰা, এটা আয়তীয় ঘনকৰ তলিৰ আৰু ওপৰৰ পৃষ্ঠ দুখন বাদ দি আমি কেৱল বাকী চাৰিখন পৃষ্ঠৰহে কালি উলিয়াইছোঁ। এনে ক্ষেত্ৰত, এই চাৰিখন পৃষ্ঠৰ কালিক আয়তীয় ঘনকটোৰ পাৰ্শ্বপৃষ্ঠকালি বুলি কোৱা হয়। সেয়েহে দীঘ l, প্ৰস্থ b আৰু উচ্চতা h যুক্ত এটা আয়তীয় ঘনকৰ পাৰ্শ্বপৃষ্ঠকালি হ'ব $2lh + 2bh$ বা $2(l + b)h$। সেইদৰে, a বাহুযুক্ত ঘনক এটাৰ পাৰ্শ্বপৃষ্ঠকালি হ'ব $4a^2$।

ওপৰৰ কথাখিনি লক্ষ্য ৰাখি কেতিয়াবা এটা আয়তীয় ঘনকৰ (বা ঘনকৰ) পৃষ্ঠকালিক মুঠ পৃষ্ঠকালি বুলি উল্লেখ কৰা হয়।

আমি এতিয়া কিছু উদাহৰণ সমাধান কৰোঁ আঁহা।

উদাহৰণ 1 ঃ মেৰীয়ে তাইৰ খ্ৰীষ্টমাচ্ বৃক্ষজোপা ছাণ্টা ক্লজৰ চিত্ৰৰে সৈতে ৰঙীণ কাগজেৰে মেৰিওৱা এটা কাঠৰ বাকচৰ ওপৰত ৰাখি সজাবলৈ মনস্থ কৰিলে (চিত্ৰ 13.4 চোৱা)। ইয়াৰ বাবে প্ৰকৃততে তেওঁ কিমান কাগজ কিনিব লাগিব সেইটো জনাটো জৰুৰী হৈ পৰিল। বাকচটোৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা ক্ৰমে 80 চে.মি., 40 চে.মি. আৰু 20 চে.মি. হ'লে 40 চে.মি. বাহু বিশিষ্ট বৰ্গাকাৰ কাগজৰ পাত কেইখিলা তেওঁক লাগিব?



চিত্ৰ ঃ 13.4

সমাধান ঃ মেৰীয়ে যিহেতু বাকচটোৰ বাহিৰৰ পৃষ্ঠ কেইটাত কাগজ লগাব বিচাৰিছে, তেওঁক লগা মুঠ কাগজৰ পৰিমাণ

আয়তীয় ঘনক আকৃতিৰ বাকচটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালিৰ সমান হ'ব। বাকচটোৰ জোখবিলাক হৈছে—

দীঘ = 80 চে.মি., প্ৰস্থ = 40 চে.মি., উচ্চতা = 20 চে.মি.

বাকচটোৰ পৃষ্ঠকালি = $2(lb + bh + hl)$

= 2[(80 × 40) + (40 × 20) + (20 × 80)] বৰ্গ চে.মি.

= 2[3200 + 800 + 1600] বৰ্গ চে.মি.

= 2 × 5600 বৰ্গ চে.মি.

= 11200 বৰ্গ চে.মি.

প্ৰতিখিলা কাগজৰ কালি = 40 × 40 বৰ্গ চে.মি.

= 1600 বৰ্গ চে.মি.

গতিকে প্ৰয়োজনীয় কাগজৰ পাতৰ সংখ্যা = $\dfrac{\text{বাকচটোৰ পৃষ্ঠকালি}}{\text{এখিলা কাগজৰ কালি}}$

$= \dfrac{11200}{1600} = 7$

সেয়েহে তেওঁক 7 খিলা কাগজ লাগিব।

উদাহৰণ 2 ঃ ৰহিমে তেওঁৰ ঘৰৰ কাৰণে বাহিৰৰ প্ৰতিটো কাষৰ দীঘ 1.5 মি. হোৱাকৈ ঢাকনিৰে সৈতে এটা ঘনক আকৃতিৰ পানীৰ টেংকি সাজিলে। তেওঁ টেংকিটোৰ তলিখন (ভূমিতল) বাদ দি বাকী বাহিৰৰ পৃষ্ঠত 25 চে.মি. বাহুবিশিষ্টি বৰ্গাকাৰ টাইল লগালে (চিত্ৰ 13.5 চোৱা)। প্ৰতি ডজন টাইলৰ দাম 360 টকা হ'লে, টাইল লগাওঁতে তেওঁৰ মুঠ খৰচ কিমান হ'ল?

সমাধান ঃ ৰহিমে যিহেতু টেংকিটোৰ পাঁচখন বাহিৰৰ পৃষ্ঠত টাইল লগাইছে, সেয়েহে তেওঁক লগা টাইলৰ সংখ্যা উলিয়াবলৈ টেংকিটোৰ পৃষ্ঠকালি জানিবলগীয়া হ'ল।

ঘনক আকৃতিৰ টেঙ্কিটোৰ প্ৰতিটো কাষৰ দীঘ = 1.5 মি. = 150 চে.মি. (= a)

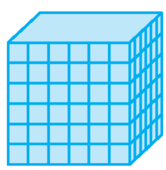
গতিকে টেংকিটোৰ টাইল লগাবলগীয়া পৃষ্ঠকালি = 5 × 150 × 150 বৰ্গ চে.মি.

প্ৰতি টুকুৰা বৰ্গাকাৰ টাইলৰ কালি = বাহু × বাহু = 25 × 25 বৰ্গ চে.মি.

সেয়েহে প্ৰয়োজনীয় হোৱা টাইলৰ সংখ্যা = $\dfrac{\text{বাকচটোৰ পৃষ্ঠকালি}}{\text{প্ৰতি টুকুৰা টাইলৰ কালি}}$

$= \dfrac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25}$

$= 180$



চিত্ৰ ঃ 13.5

এক ডজন অৰ্থাৎ 12 টুকুৰা টাইলৰ দাম = 360 টকা

গতিকে 1 টুকুৰা টাইলৰ দাম = $\frac{360}{12}$ টকা = 30 টকা

সেয়েহে, 180 টুকুৰা টাইলৰ দাম = 180 × 30 টকা = 5400 টকা

অনুশীলনী 13.1

1. 1.5 মি. দৈৰ্ঘ্য, 1.25 মি. প্ৰস্থ আৰু 65 চে.মি. গভীৰতাৰ এটা প্লাষ্টিকৰ বাকচ সাজিব লাগে। ইয়াৰ উপৰিভাগ খোলা। প্লাষ্টিকৰ পাতৰ বেধ (বা স্থূলতা) টোক উপেক্ষা কৰি তলৰ কথাকেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) বাকচটো সাজিবলৈ লগা প্লাষ্টিকৰ পাতৰ কালি।

(ii) প্ৰতি বৰ্গ মিটৰত 20 টকাকৈ, প্ৰয়োজন হোৱা প্লাষ্টিকৰ পাতৰ মূল্য।

2. এটা কোঠাৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা ক্ৰমে 5 মি., 4 মি. আৰু 3 মি.। প্ৰতি বৰ্গ মিটাৰত 7.50 টকাকৈ কোঠাটোৰ বেৰ আৰু চিলিঙত চূণ লগোৱাৰ খৰচ নিৰ্ণয় কৰা।

3. এটা আয়তীয় কোঠালি (হল ঘৰ)ৰ মজিয়াৰ পৰিসীমা 250 মি.। যদি প্ৰতি বৰ্গ মিটাৰত 10 টকাকৈ ইয়াৰ চাৰি বেৰত ৰং লগোৱাৰ খৰচ 15000 টকা হয়, তেন্তে কোঠালিটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা। [**ইংগিত ঃ** চাৰিখন বেৰৰ কালি = পাৰ্শ্বিয় পৃষ্ঠকালি]

4. কোনো এটা পাত্ৰত থকা ৰংখিনি 9.375 বৰ্গ মিটাৰ কালিৰ ঠাই এটুকুৰা ৰং কৰাৰ বাবে পৰ্যাপ্ত। 22.5 চে.মি. × 10 চে.মি. × 7.5 চে.মি. জোখৰ কিমান টুকুৰা ইটা এইখিনিৰে ৰং কৰিব পৰা যাব?

5. এটা ঘনক আকৃতিৰ বাকচৰ প্ৰতিটো কাষৰ দীঘ 10 চে.মি. আৰু আন এটা আয়তীয় ঘনক আকৃতিৰ বাকচৰ দীঘ 12.5 চে.মি., প্ৰস্থ 10 চে.মি. আৰু উচ্চতা 8 চে.মি.।

(i) কোনটো বাকচৰ পাৰ্শ্ব পৃষ্ঠকালি বেছি আৰু কিমান বেছি?

(ii) কোনটো বাকচৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি কম আৰু কিমান কম?

6. ঘৰৰ ভিতৰত ৰাখিব পৰা এটা গ্ৰীণ হাউছ (সেউজ-গৃহ অৰ্থাৎ কাঁচেৰে নিৰ্মিত সৰু গছ ৰুব পৰা ঘৰ) তাৰ তলিৰে সৈতে টেপৰদ্বাৰা সংযুক্ত কাঁচৰ পাতেৰে তৈয়াৰী। ইয়াৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা ক্ৰমে 30 চে.মি., 25 চে.মি. আৰু 25 চে.মি.।

(i) ইয়াত ব্যৱহৃত কাঁচৰ পাতৰ মুঠ কালি কিমান?

(ii) ইয়াৰ মুঠ 12 টা দাঁতি (বা প্ৰান্ত)ত লগোৱা টে'পৰ দীঘ কিমান?

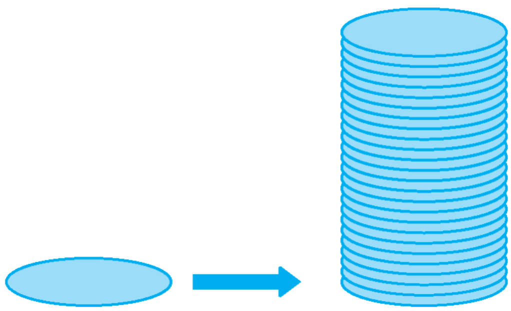
7. 'শান্তি ছুইটছ ষ্টল' নামৰ দোকানখনে তেওঁলোকৰ মিঠাইবিলাক পেকেট কৰিবলৈ লগা কাৰ্ডব'ৰ্ডৰ কিছু বাকচ সাজিবলৈ এটা অৰ্ডাৰ উলিয়ালে। দুবিধ বাকচৰ ডাঙৰ বিধৰ প্ৰতিটোৰ জোখ 25 চে.মি. × 20 চে.মি. × 5 চে.মি. আৰু সৰু বিধৰ প্ৰতিটোৰ জোখ 15 চে.মি. × 12 চে.মি. × 5 চে.মি.। ইখনৰ লগত সিখন জোৰা লগাবৰ বাবে বাকচবিলাকৰ মুঠ

পৃষ্ঠকালিৰ 5% আৰু অধিক কাৰ্ডব'ৰ্ডৰ প্ৰয়োজন হ'ল। কাৰ্ডব'ৰ্ডৰ প্ৰতি 1000 বৰ্গ চেণ্টিমিটাৰৰ দাম 4 টকা হ'লে, প্ৰতিবিধৰে 250 টাকৈ বাকচ সাজিবৰ বাবে লগা কাৰ্ড ব'ৰ্ডৰ দাম কিমান হ'ল?

8. পাৰবীনে তেওঁৰ মটৰ গাড়ীখন থ'বলৈ চাৰিওটা ফাল আৰু উপৰিভাগ ত্ৰিপালেৰে ঢকাকৈ এটা বাকচ আকৃতিৰ গাঁথনি অস্থায়ীভাৱে সাজিবলৈ মনস্থ কৰিলে যাৰ সন্মুখৰ ফালৰ ত্ৰিপালখন প্ৰয়োজনত পকাই ওপৰলৈ তুলি থ'ব পাৰি। 2.5 মি. উচ্চতাৰ আৰু ভূমিৰ জোখ 4 মি. × 3 মি. হোৱা এই গাঁঠনিটোত কিমান ত্ৰিপাল লাগিব যদিহে দুখন ত্ৰিপাল চিলাই কৰা কাষকেইটা অতি ঠেক বুলি উপেক্ষা কৰা হয়?

13.3 লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙাৰ পৃষ্ঠকালি (Surface Area of a Right Circular Cylinder) ঃ

আগতে আয়তাকাৰ কাগজৰ পাত ঠাক ঠাককৈ জপাৰ দৰে, আমি যদি কিছুমান সমান জোখৰ বৃত্তাকাৰ কাগজৰ পাত এটা ঠাকত সজাঁও, আমি বাৰু কি পাম (চিত্ৰ 13.6 চোৱা)?



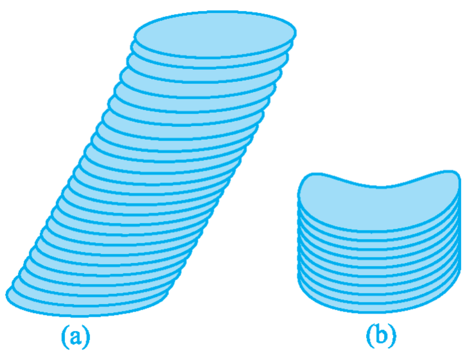
চিত্ৰ ঃ 13.6

যদিহে আমি ঠাকটো উলম্ব দিশত সজাও, আমি পোৱা বস্তুটো হ'ব এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা যিহেতু ভূমিৰ সৈতে ই সমকোণ কৰে আৰু ইয়াৰ ভূমি বৃত্তাকাৰ। কোনবোৰনো লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা নহয় আমি চাওঁ আহা।

চিত্ৰ 13.7 (a)ত তোমালোকে এটা চুঙা দেখিছা যিটো নিশ্চয়কৈ বৃত্তাকাৰ কিন্তু ভূমিৰ সৈতে ই সমকোণ কৰা নাই। সেয়েহে আমি ইয়াক লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা বুলি অভিহিত কৰিব নোৱাৰোঁ।

অৱশ্যে চিত্ৰ 13.7 (b)ত দেখুৱাৰ দৰে আমাৰ চুঙাৰ ভূমি যদি বৃত্তাকাৰ নহয়, তেতিয়াও আমি ইয়াক লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা বুলি ক'ব নোৱাৰোঁ।

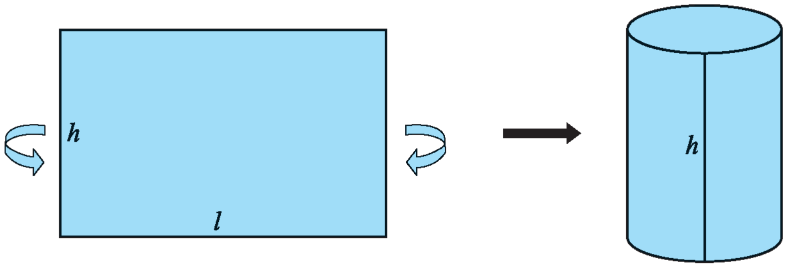
টোকা ঃ ইয়াত আমি কেৱল লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙাৰ



চিত্ৰ ঃ 13.7

কথাহে আলোচনা কৰিম। সেয়েহে অন্য ধৰণেৰে উল্লেখ নাথাকিলে চুঙা শব্দটোৰে আমি কেৱল লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙাহে বুজিম।

এতিয়া, যদিহে এটা চুঙা ৰঙীণ কাগজেৰে মেৰিয়াব লাগে, নূন্যতম পৰিমাণৰ কাগজেৰে আমি কামটো কি দৰে সমাধা কৰিম? প্ৰথমতে চিত্ৰ 13.8ত দেখুৱাৰ দৰে এখন আয়তীয় কাগজৰ পাত লোৱা যাৰ দীঘ চুঙাটোৰ গাত মেৰিয়াবলৈ যথেষ্ট আৰু প্ৰস্থ চুঙাটোৰ উচ্চতাৰ সমান।



চিত্ৰ ঃ 13.8

কাগজৰ পাতখিলাৰ কালিয়ে আমাক চুঙাটোৰ বক্ৰতলৰ কালিৰ পৰিমাণ দিব। মন কৰা যে কাগজখিলাৰ দীঘ বৃত্তাকাৰ ভূমিৰ পৰিধিৰ সমান যিটো আকৌ $2\pi r$ৰ সমান।

সেয়েহে, চুঙাটোৰ বক্ৰতলৰ কালি = আয়তাকাৰ কাগজখিলাৰ কালি = দীঘ × প্ৰস্থ

= চুঙাটোৰ ভূমিৰ পৰিধি × h

= $2\pi r \times h$

গতিকে,

এটা চুঙাৰ বক্ৰতলৰ কালি = $2\pi rh$
Curved Surface Area of a Cylinder = $2\pi rh$

য'ত r চুঙাটোৰ ভূমি-ব্যাসাৰ্ধ আৰু h চুঙাটোৰ উচ্চতা।

মন্তব্য ঃ এটা চুঙাৰ ক্ষেত্ৰত, অন্য ধৰণেৰে উল্লেখ কৰা নাথাকিলে, 'চুঙা এটাৰ ব্যাসাৰ্ধ' বুলিলে 'চুঙাটোৰ ভূমি-ব্যাসাৰ্ধ' বুজাব।

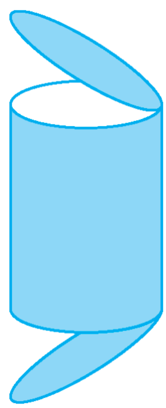
যদিহে চুঙাটোৰ ওপৰ আৰু তলৰ ফাল দুটাও কাগজেৰে মেৰিয়াব লাগে, তেতিয়া আমাক দুটা বৃত্ত (প্ৰকৃততে বৃত্তাকাৰ অংশ) লাগিব যাৰ প্ৰতিটোৰে ব্যাসাৰ্ধ r আৰু সেইসূত্ৰে কালি πr^2 হ'ব। (চিত্ৰ 13.9 চোৱা) ইয়াৰপৰা আমি পালো যে—

চুঙাটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$

সেয়েহে,

এটা চুঙাৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $2\pi r(r + h)$
Total Surface Area of a Cylinder = $2\pi r(r + h)$

য'ত h চুঙাটোৰ উচ্চতা আৰু r ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ।



চিত্ৰ ঃ 13.9

মন্তব্য ঃ প্ৰথম অধ্যায়ৰপৰা তুমি স্মৰণ কৰিব পাৰা যে π এটা অপৰিমেয়

সংখ্যা। গতিকে πৰ মান এটা অবিৰত অপুনৰাবৰ্ত্তিত দশমিক সংখ্যা। কিন্তু গণনাত ব্যৱহাৰ কৰোঁতে πৰ আসন্ন মান আমি $\frac{22}{7}$ বা 3.14 বুলি ধৰি লওঁ।

উদাহৰণ 3 ঃ সাৱিত্ৰীয়ে তেওঁৰ বিজ্ঞান বিষয়ৰ এটা প্ৰ'জেক্ট হিচাপে এটা চুঙাকৃতিৰ কেলিড'স্ক'প (নানা ৰঙী নক্সা দেখুৱা যন্ত্ৰ)ৰ আৰ্হি সাজিব লগা হ'ল। ইয়াৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ বাবে তেওঁ চাৰ্ট পেপাৰ (নক্সা আঁকা কাকত) ব্যৱহাৰ কৰিব খুজিলে (চিত্ৰ 13.10 চোৱা)। কেলিড'স্ক'পটোৰ দীঘ 25 চে.মি. আৰু ব্যাসাৰ্ধ 3.5 চে.মি. হ'লে, তেওঁক লগা চাৰ্ট পেপাৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। তুমি $\pi = \frac{22}{7}$ ধৰিব পাৰা।

সমাধান ঃ চুঙাকৃতিৰ কেলিড'স্ক'পৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ (r) = 3.5 চে.মি.।

কেলিড'স্ক'পটোৰ উচ্চতা (দীঘ) = (h) = 25 চে.মি.।

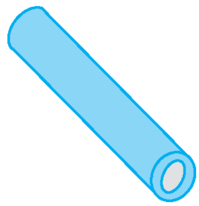
আৱশ্যক হোৱা চাৰ্ট পেপাৰৰ কালি

= কেলিড'স্ক'পটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি

= $2\pi rh$

= $2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25$ বৰ্গ চে.মি.

= 550 বৰ্গ চে.মি.



চিত্ৰ ঃ 13.10

অনুশীলনী 13.2

আনভাৱে দিয়া নাথাকিলে $\pi = \frac{22}{7}$ বুলি ধৰিবা।

1. 14 চে.মি. উচ্চতাৰ লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা এটাৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি 88 বৰ্গ চে.মি.। চুঙাটোৰ ভূমিৰ ব্যাস নিৰ্ণয় কৰা।

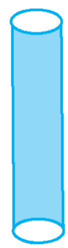
2. এখন ধাতুপাতৰপৰা 1 মি. উচ্চতাৰ আৰু ভূমি-ব্যাস 140 চে.মি. হোৱাকৈ এটা বন্ধ চুঙাকৃতিৰ টেংকি তৈয়াৰ কৰিব লাগে। ইয়াৰ বাবে কিমান বৰ্গ মিটাৰ ধাতুপাত লাগিব?

3. ধাতুৰ পাইপ এডালৰ দীঘ 77 চে.মি.। ইয়াৰ কোনো এক প্ৰস্থচ্ছেদৰ অন্তঃ ব্যাস 4 চে.মি. আৰু বহিঃ ব্যাস 4.4 চে.মি. (চিত্ৰ 13.11 চোৱা)। এতিয়া তলৰ কথাকেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) ভিতৰৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি।

(ii) বাহিৰৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি।

(iii) মুঠ পৃষ্ঠকালি।



চিত্ৰ ঃ 13.11

4. এটা ৰোলাৰৰ ব্যাস 84 চে.মি. আৰু দীঘ 120 চে.মি.। এখন খেল পথাৰ সমান কৰিবলৈ ইয়াৰ ওপৰৰে এবাৰ পাৰ হওঁতে ৰোলাৰটোক 500 সম্পূৰ্ণ পাকৰ প্ৰয়োজন হয়। খেল পথাৰখনৰ কালি বৰ্গ মিটৰত উলিওৱা।

5. এটা চুঙাকৃতিৰ স্তম্ভৰ ব্যাস 50 চে.মি. আৰু ইয়াৰ উচ্চতা 3.5 মি.। প্ৰতি বৰ্গ মিটাৰত 12.50 টকাকৈ স্তম্ভটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠত ৰং দিয়াৰ খৰচ নিৰ্ণয় কৰা।

6. লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা এটাৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি 4.4 বৰ্গ মিটাৰ। যদি চুঙাটোৰ ভূমি-ব্যাসাৰ্ধ 0.7 মিটাৰ হয়, তেন্তে ইয়াৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

7. এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা আকৃতিৰ নাদৰ ভিতৰফালৰ ব্যাস 3.5 মি. আৰু ইয়াৰ গভীৰতা 10 মি.। এতিয়া তলত দিয়াকেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) ইয়াৰ ভিতৰফালৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি।

(ii) প্ৰতি বৰ্গ মিটাৰত 40 টকাকৈ এই বক্ৰ পৃষ্ঠত প্লাষ্টাৰ লগোৱা খৰচৰ পৰিমাণ।

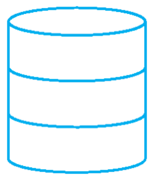
8. গৰম পানীৰ সহায়ত তাপ বিকিৰণ কৰা পদ্ধতি এটাত 28 মি. দীঘল আৰু 5 চে.মি. ব্যাসৰ এডাল চুঙাকৃতিৰ পাইপ লগোৱা আছে। পদ্ধতিটোত তাপ বিকিৰণ কৰা মুঠ পৃষ্ঠভাগৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

9. নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) 4.2 মি. ব্যাস আৰু 4.5 মি. উচ্চতাযুক্ত বন্ধ চুঙাকৃতিৰ পেট্ৰ'ল সংৰক্ষণ কৰা টেংকি এটাৰ পাৰ্শ্ব বা বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি।

(ii) টেংকিটো সাজোতে প্ৰকৃততে ব্যৱহাৰ কৰা মুঠ তীখাৰ যদি $\frac{1}{12}$ অংশ পেলনি যায়, তেন্তে প্ৰকৃততে ব্যৱহাৰ কৰা তীখাৰ পৰিমাণ কিমান?

10. চিত্ৰ 13.12অত তোমালোকে এটা লেম্পৰ আচ্ছাদনৰ গাঁথনি দেখিছা। এই গাঁথনিটোত সজোৱা ৰঙীণ কাপোৰ লগাব লাগে। গাঁথনিটোৰ ভূমি-ব্যাস 20 চে.মি. আৰু উচ্চতা 30 চে.মি.। ইয়াৰ উপৰিভাগ আৰু তলিখনত ভাঁজ লগাবৰ বাবে কাপোৰৰ 2.5 চে.মি.ৰ দাঁতি এটা ৰখাটো প্ৰয়োজনীয়। গাঁথনিটোত লগাবলৈ লগা কাপোৰৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।



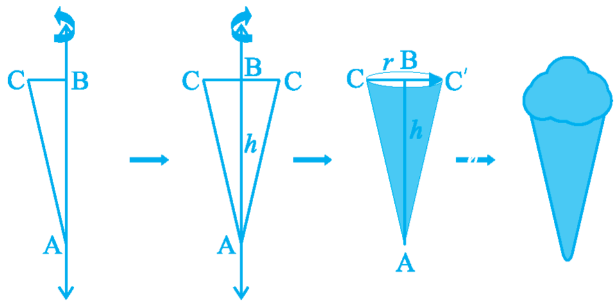
চিত্ৰ ঃ 13.12

11. এখন বিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক কাৰ্ডব'ৰ্ড ব্যৱহাৰ কৰি ভূমিযুক্ত চুঙাকৃতিৰ পেন হোল্ডাৰ তৈয়াৰ কৰা আৰু সজোৱা এটা প্ৰতিযোগিতাত অংশ গ্ৰহণ কৰিবলৈ কোৱা হ'ল। প্ৰতিটো পেন হোল্ডাৰৰ ব্যাসাৰ্ধ 3 চে.মি. আৰু উচ্চতা 10.5 চে.মি. ৰাখিবলৈ কোৱা হ'ল। ইয়াৰ বাবে লগা কাৰ্ড ব'ৰ্ডবিলাক বিদ্যালয়ৰ ফালৰপৰা যোগান দিব। প্ৰতিযোগীৰ সংখ্যা 35 হ'লে, প্ৰতিযোগিতাৰ বাবে কিমান কাৰ্ড ব'ৰ্ড কিনিব লাগিব?

13.4 লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ পৃষ্ঠকালি (Surface Area of Right Circular Cone) ঃ

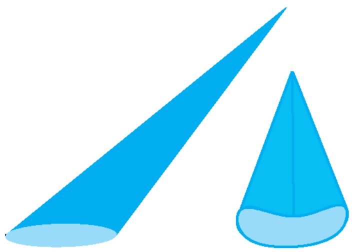
এতিয়ালৈকে আমি সৰ্বসম আকাৰ কিছুমান ঠাক কৰি গোটা বস্তু পাইছিলোঁ। প্ৰসংগক্ৰমে, এনেদৰে পোৱা আকাৰবিলাকক প্ৰিজম্ বোলা হয়। এতিয়া আমি আন এবিধ গোটা আকাৰ লক্ষ্য কৰোঁ যিবিলাক কিন্তু প্ৰিজম্ নহয়। (এনে প্ৰকাৰৰ গোটা আকাৰক পিৰামিড্ বোলা হয়)। এইবিলাক আকাৰ কেনেকৈ পাব পাৰি চাওঁ আহা।

কাৰ্য ঃ ডাঠ কাগজৰ পৰা ∠B সমকোণ হোৱাকৈ ABC ত্ৰিভুজটো কাটি উলিওৱা। সমকোণৰ এটা বাহুত, ধৰা ABত, এডাল দীঘল আৰু ডাঠ তাঁৰ আঠাৰ দ্বাৰা লগাই লোৱা (চিত্ৰ 13.13(a) চোৱা)। এতিয়া তাঁৰডালৰ দুই মূৰ হাতেৰে ধৰি ত্ৰিভুজটো তাঁৰডালৰ চাৰিওফালে কেইপাকমান ঘূৰোৱা। কি দেখিছা? ত্ৰিভুজটোৱে তাঁৰডালৰ চাৰিওফালে ঘূৰি উৎপন্ন কৰা আকাৰটো ধৰিব পাৰিছানে [চিত্ৰ 13.13 (b) চোৱা]? এনে আকাৰৰ আধাৰ এটাত দ'ম কৰি থোৱা আইচ-ক্ৰীম্ খোৱা কথাটো ই বাৰু তোমাৰ মনলৈ আনিছেনে [চিত্ৰ 13.13 (c) আৰু (d) চোৱা]?



চিত্ৰ ঃ 13.13

এই আকাৰটোক লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকু বোলা হয়। চিত্ৰ 13.13(c)ত দেখা লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুটোৰ A বিন্দুটোক শীৰ্ষবিন্দু, ABক উচ্চতা, BCক ব্যাসাৰ্ধ আৰু ACক ইয়াৰ নতি উচ্চতা বোলে। ইয়াত B বিন্দুটো হ'ল শংকুটোৰ বৃত্তাকাৰ ভূমিৰ কেন্দ্ৰ। সাধাৰণতে শংকু এটাৰ উচ্চতা, ব্যাসাৰ্ধ আৰু নতি উচ্চতাক ক্ৰমে h, r আৰু l ৰে সূচোৱা হয়। আমি আকৌ এবাৰ চাওঁ আহাঁ কোনবোৰ শংকুক লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকু বুলিব পৰা নাযায়। এইয়া, তুমি পালাই দেখোন (চিত্ৰ 13.14 চোৱা)!



চিত্ৰ ঃ 13.14

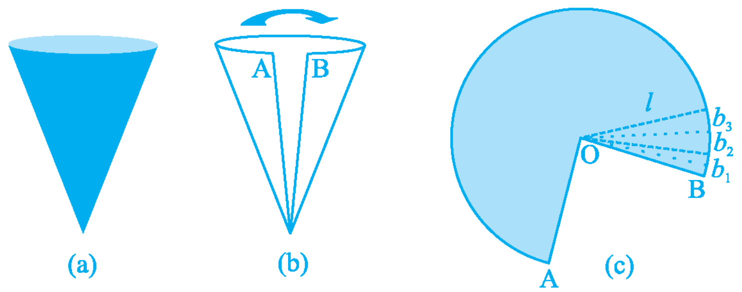
ইয়াত দেখা আকাৰ দুটা লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকু নহয়, কিয়নো (a)ত শীৰ্ষবিন্দু আৰু ভূমিৰ কেন্দ্ৰ সংযোগী ৰেখাখণ্ডই ভূমিৰ সৈতে সমকোণ কৰা নাই আৰু (b)ত ভূমি বৃত্তাকাৰ নহয়।

চুঙাৰ ক্ষেত্ৰত উল্লেখ কৰাৰ দৰেই, আমি যিহেতু কেৱল লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ কথাহে আলোচনা

কৰিম, মনত ৰাখিবা যে এই অধ্যায়ত পোৱা 'শংকু' শব্দটোৰে আমি 'লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকু'কহে বুজাম।

কাৰ্য ঃ (i) কাগজৰ কাষ ওপৰা-উপৰি নকৰাকৈ নিখুঁটভাৱে তৈয়াৰ কৰা এটা শংকুক ইয়াৰ কাযেৰে পোনে পোনে কাটি লৈ তাক খুলি দিলে শংকুটোৰ পৃষ্ঠই উৎপন্ন কৰা কাগজৰ আকাৰটো দেখিবলৈ পাবা (চিত্ৰ 13.15 চোৱা)। (যি ৰেখাখণ্ডৰে তুমি শংকুটো কাটিছা সিয়েই শংকুটোৰ নতি উচ্চতা অৰ্থাৎ l)। এই আকাৰটো এটা ঘূৰ্ণীয়া কে'কৰ অংশ যেন দেখা যাব।

(ii) মূৰ দুটাক A আৰু B ৰে নিৰ্দেশ কৰা কাষ দুটা লগ লগালে, তুমি দেখিবা যে চিত্ৰ 13.15 (c)ৰ বক্ৰ অংশটোৰে শংকুটোৰ বৃত্তাকাৰ ভূমি গঠন কৰিব।



চিত্ৰ ঃ 13.15

(iii) চিত্ৰ 13.15 (c)ত দেখুওৱা কাগজখিলাক যদি O বিন্দুৰপৰা টনা ৰেখাখণ্ডৰে শ শ সৰু টুকুৰাত কাটি লোৱা, প্ৰতিটো কাটি লোৱা অংশই প্ৰায় একোটা ত্ৰিভুজৰ সৃষ্টি কৰিব যাৰ উচ্চতা শংকুটোৰ নতি উচ্চতা l।

(iv) এতিয়া, প্ৰতিটো ত্ৰিভুজৰ কালি = $\frac{1}{2}$ × প্ৰতিটো ত্ৰিভুজৰ ভূমি × l.

গতিকে, কাগজৰ আটাইবিলাক টুকুৰাৰ কালি

= আটাইবিলাক ত্ৰিভুজৰ কালিৰ সমষ্টি

$$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + ...$$

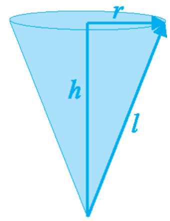
$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + ...)$$

= $\frac{1}{2}$ × l × চিত্ৰ 13.15(c)ৰ সম্পূৰ্ণ বক্ৰসীমা

(যিহেতু $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ য়ে চিত্ৰটোৰ বক্ৰ অংশটো নিৰ্দেশ কৰে।)

কিন্তু এই বক্ৰ অংশটোৱেই হৈছে শংকুটোৰ ভূমিৰ পৰিসীমা আৰু শংকুটোৰ ভূমিৰ পৰিধি = $2\pi r$, য'ত r শংকুটোৰ ভূমি-ব্যাসাৰ্ধ। সেয়েহে

এটা শংকুৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি = $\frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$
Curved Surface Area of a Cone = $\frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$



চিত্ৰ ঃ 13.16

য'ত r ইয়াৰ ভূমি-ব্যাসাৰ্ধ আৰু l ইয়াৰ নতি উচ্চতা।

মন কৰা যে, $l^2 = r^2 + h^2$ (চিত্ৰ 13.16ত দেখিছা) যিটো পাইথাগোৰাছৰ সূত্ৰৰ পৰা পাব পাৰি। ইয়াত h হৈছে শংকুটোৰ উচ্চতা।

গতিকে, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

এতিয়া, শংকুটোৰ ভূমিৰ ফালটো যদি বন্ধ কৰিব লাগে, তেতিয়া r ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটুকুৰা বৃত্তাকাৰ কাগজ লাগিব যাৰ কালি πr^2।

গতিকে,

শংকু এটাৰ মুঠ পৃষ্ঠ কালি = $\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$
Total Surface Area of a Cone = $\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$

উদাহৰণ 4 ঃ এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ বক্ৰ পৃষ্ঠ কালি নিৰ্ণয় কৰা যাৰ নতি উচ্চতা 10 চে.মি. আৰু ভূমি-ব্যাসাৰ্ধ 7 চে.মি.।

সমাধান ঃ বক্ৰ পৃষ্ঠ কালি = πrl

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10$ চে.মি.^{2}

$= 220$ বৰ্গ চে.মি.

উদাহৰণ 5 ঃ এটা শংকুৰ উচ্চতা 16 চে.মি. আৰু ইয়াৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ 12 চে.মি.। শংকুটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি আৰু মুঠ পৃষ্ঠ কালি নিৰ্ণয় কৰা। ($\pi = 3.14$ ধৰিবা)।

সমাধান ঃ ইয়াত, $h = 16$ চে.মি. আৰু $r = 12$ চে.মি.

গতিকে, $l^2 = h^2 + r^2$ৰ পৰা আমি পাওঁ

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ চে.মি. = 20 চে.মি.

গতিকে, বক্ৰ পৃষ্ঠকালি = πrl

$= 3.14 \times 12 \times 20$ চে.মি.^{2}

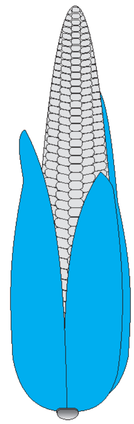
$= 753.6$ চে.মি.^{2}

আকৌ, মুঠ পৃষ্ঠকালি = $\pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)$ চে.মি.^{2}

$= (753.6 + 452.16)$ চে.মি.^{2}

$= 1205.76$ চে.মি.^{2}



চিত্ৰ ঃ 13.17

উদাহৰণ 6 ঃ দেখাত প্ৰায় এটা শংকুৰ নিচিনা (চিত্ৰ 13.17 চোৱা) এটা গোম ধানৰ (বা মাকৈৰ) ডিলাৰ বহল তলিখনৰ ব্যাসাৰ্ধ 2.1 চে.মি. আৰু ইয়াৰ দীঘ (উচ্চতা) 20 চে.মি.। যদি ইয়াৰ পৃষ্ঠভাগৰ প্ৰতি বৰ্গ চেণ্টিমিটাৰত গড়ে চাৰিটাকৈ গোম ধানৰ গুটি (বা বীজ) থাকে, গোটেই ডিলাটোতে কিমান গুটি (বা বীজ) থাকিব নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু গোম ধানৰ গুটিবোৰ (বা বীজ) ডিলাটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠাংশতহে থাকিব, গতিকে গোম ধানৰ গুটিৰ মুঠ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি ডিলাটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি জানিব লাগিব। প্ৰশ্নত যিহেতু শংকুটোৰ উচ্চতা দিয়া আছে, আমি এতিয়া ইয়াৰ নতি উচ্চতা উলিয়াই ল'ব লাগিব।

ইয়াত, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ চে.মি.

$= \sqrt{404.41}$ চে.মি.

$= 20.11$ চে.মি.

গতিকে, ডিলাটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠ কালি $= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ চে.মি.^{2}

$= 132.726$ চে.মি.^{2}

$= 132.73$ চে.মি.^{2} (প্ৰায়)

পৃষ্ঠৰ 1 বৰ্গ চে.মি. স্থানত থকা গুটিৰ সংখ্যা = 4

গতিকে, ডিলাটোৰ সমগ্ৰ বক্ৰপৃষ্ঠত থকা গুটিৰ সংখ্যা $= 132.73 \times 4$

$= 530.92$

$= 531$ (প্ৰায়)

সেয়েহে, গোম-ধানৰ ডিলাটোত প্ৰায় 531 টা গুটি থাকিব।

অনুশীলনী 13.3

অন্য ধৰণেৰে দিয়া নাথাকিলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধৰিবা।

1. এটা শংকুৰ ভূমিৰ ব্যাস 10.5 চে.মি. আৰু ইয়াৰ নতি উচ্চতা 10 চে.মি.। শংকুটোৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

2. এটা শংকুৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা, যদি ইয়াৰ নতি উচ্চতা 21 মি. আৰু ভূমিৰ ব্যাস 24 মি. হয়।

3. এটা শংকুৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি 308 চে.মি.^{2} আৰু ইয়াৰ নতি উচ্চতা 14 চে.মি.। শংকুটোৰ
(i) ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ আৰু (ii) মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

4. এটা শংকু আকৃতিৰ তম্বু 10 মি. ওখ আৰু ইয়াৰ ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ 24 মি.। এতিয়া তলৰ কথাকেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ
(i) তম্বুটোৰ নতি উচ্চতা।
(ii) প্ৰতি বৰ্গমিটাৰত 70 টকাকৈ তম্বুটো নিৰ্মাণত ব্যৱহৃত কেন্‌ভাচ্ (এবিধ বৰ ডাঠ কাপোৰ)ৰ দাম।

5. 8 মি. উচ্চতাৰ আৰু 6 মি. ভূমি ব্যসাৰ্দ্ধৰ শংকু আকৃতিৰ তম্বু এটা নিৰ্মাণ কৰিবলৈ 3 মি. বহল ত্ৰিপাল কিমান দীঘৰ প্ৰয়োজন হ'ব? ধৰি লোৱা যে দাঁতিবোৰ চিলাই কৰোতে আৰু কটা-মেলা কৰোতে লোকচান হোৱা অতিৰিক্ত ত্ৰিপালৰ পৰিমাণ 20 চে.মি.। ($\pi = 3.14$ ধৰিবা)

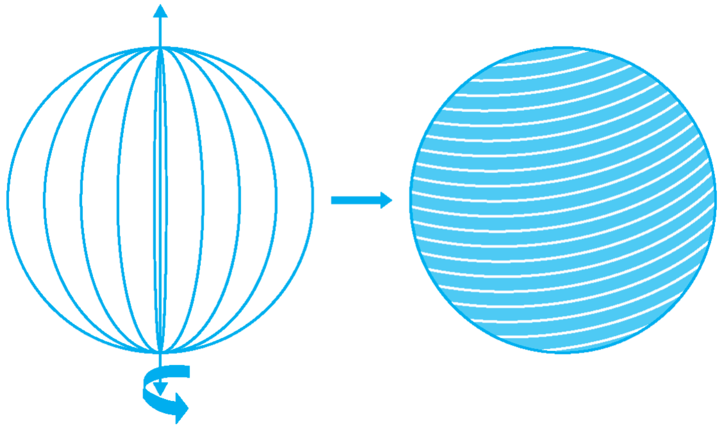
6. এটা শংকু আকৃতিৰ সমাধিৰ নতি উচ্চতা আৰু ভূমিৰ ব্যাস ক্ৰমে 25 মি. আৰু 14 মি.। প্ৰতি 100 বৰ্গ মিটাৰত 210 টকাকৈ ইয়াৰ বক্ৰ পৃষ্ঠত চুণ সনা খৰচ নিৰ্ণয় কৰা।

7. এজন কৌতুক অভিনেতাৰ টুপীটো এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ আকাৰৰ যাৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ 7 চে.মি. আৰু উচ্চতা 24 চে.মি.। এনে 10 টা টুপী সাজিবলৈ লগা কাপোৰ (বা কাগজ)ৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

8. পুনৰ ব্যৱহাৰোপযোগী কৰি লোৱা কাৰ্ড ব'ৰ্ডেৰে তৈয়াৰী 50 টা ফোঁপোলা শংকুৰ সহায়ত এটা বাছ আস্থান পথৰ আন অংশৰপৰা পৰিবেষ্টিত কৰি ৰখা হৈছে। প্ৰতিটো শংকুৰ ভূমিৰ ব্যাস 40 চে.মি. আৰু উচ্চতা 1 মি.। যদি প্ৰতিটো শংকুৰে বাহিৰৰ ফালটো ৰং কৰিব লাগে আৰু ৰং দিয়াৰ খৰচ প্ৰতি বৰ্গ মিটাৰত 12 টকা হয়, তেন্তে আটাইকেইটা শংকু ৰং কৰোতে কিমান খৰচ পৰিব?
($\pi = 3.14$ আৰু $\sqrt{1.04} = 1.02$ বুলি ধৰিবা।)

13.5 এটা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি (Surface Area of a Sphere) ঃ

গোলক নো কি? ই বৃত্তৰ সৈতে একে নে? কাগজত বৃত্ত এটা আঁকিব পাৰিবানে? তুমি নিশ্চয় পাৰিবা, কাৰণ এটা বৃত্ত হৈছে এক সমতলীয় আৱদ্ধ আকাৰ যাৰ প্ৰতিটো বিন্দুৱেই বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ বুলি কোৱা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটোৰ পৰা এক স্থিৰ দূৰত্ব (যাক ব্যসাৰ্দ্ধ বোলা হয়)ত অৱস্থান কৰে। এতিয়া তুমি যদি বৃত্তাকাৰ ডিস্ক এখনৰ যিকোনো এডাল ব্যাসৰ ওপৰত এডাল তাঁৰ আঠাৰে সংযুক্ত কৰা আৰু আগৰ অনুচ্ছেদত ত্ৰিভুজটো ঘূৰোৱাৰ দৰে তাঁৰডালৰ চাৰিওফালে ডিস্কখন ঘূৰোৱা, তুমি এটা নতুন গোটা আকাৰ দেখিবলৈ পাবা (চিত্ৰ 13.18 চোৱা)। ই দেখিবলৈ কিহৰ নিচিনা? এটা বলৰ দৰে হয়নে? হয়, ইয়াকে এটা গোলক বোলা হয়।



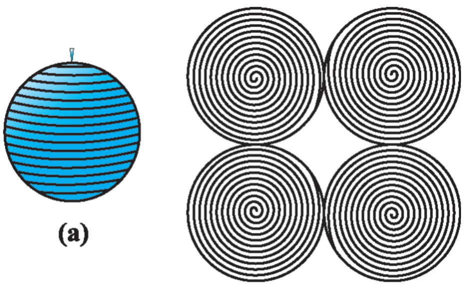
চিত্ৰ ঃ 13.18

তুমি অনুমান কৰিব পাৰিছানে ঘূৰি ঘূৰি গোলকটো গঠন কৰোতে বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰটো কি হৈ পৰে? স্বাভাৱিকতে ই গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ হৈ পৰে। গতিকে, গোলক হৈছে এটা ত্ৰিমাত্ৰিক আকাৰ (গোটা আকাৰ) যিটো এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰপৰা এক স্থিৰ দূৰত্বত থকা বিন্দুবিলাকেৰে গঠিত, নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটো ইয়াৰ কেন্দ্ৰ আৰু স্থিৰ দূৰত্বটো ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ।

টোকা ঃ এটা গোলক বল এটাৰ উপৰিভাগৰ নিচিনা। এটা গোটা আকাৰৰ উপৰিভাগ এটা গোলক হ'লে ইয়াক এটা *গোটা গোলক* (*solid sphere*) বোলে।

কাৰ্য ঃ তুমি কেতিয়াবা লাটুমৰ সৈতে খেলিছানে নাইবা আন কোনোবাই খেলা দেখিছানে? লাটুমটোৰ চাৰিওফালে এডাল জৰী কেনেকৈ পকোৱা থাকে তুমি নিশ্চিয় জানা। এতিয়া, এটা ৰবৰৰ বল লওঁ আৰু ইয়াৰ ভিতৰলৈ এটা গজাল সুমুৱাই দিওঁ আহা। গজালটোক আশ্ৰয় কৰি বলটোৰ উপৰিভাগত এডাল জৰী মেৰিয়াওঁ। তুমি যেতিয়া আহি আহি বলটোৰ পূৰ্ণতাপ্ৰাপ্ত (fullest) অংশটো পাবাহি তাতে কেইটামান পিন লগাই জৰীডালক যথাস্থানত ৰাখা আৰু বলটোৰ বাকী অংশত জৰীডাল পকাই গৈ থাকা যেতিয়ালৈকে বলটো সম্পূৰ্ণৰূপে ঢাক খাই নপৰে [চিত্ৰ 13.19(a) চোৱা]। জৰীডালৰ আৰম্ভণি বিন্দুটো আৰু পকাই শেষ হোৱা স্থানৰ বিন্দুটো চিহ্নিত কৰা আৰু ধীৰে ধীৰে বলটোৰ পৃষ্ঠভাগৰপৰা জৰীডাল খুলি পেলোৱা।

এতিয়া বলটোৰ ব্যাস নিৰ্ণয় কৰিবলৈ শিক্ষকৰ সহায় লোৱা আৰু ইয়াৰপৰা সহজেই বলটোৰ ব্যাসাৰ্ধ পাবা। ইয়াৰ পাছত এখিলা কাগজত বলটোৰ ব্যাসাৰ্ধৰ চাৰিটা বৃত্ত আকাঁ। বলটোত পকাওঁতে লগা জৰীডালৰ অংশটোৰে এটা এটাকৈ বৃত্তকেইটাৰ ক্ষেত্ৰবিলাক পকাই গৈ থাকা [চিত্ৰ 13.19(b) চোৱা]।



চিত্ৰ ঃ 13.19

এইবোৰ কৰি তুমি কি পালা?

গোলকটোৰ পৃষ্ঠকালি সম্পূৰ্ণৰূপে ঢাকি দিব পৰা জৰীডাল, গোলকটোৰ সমান ব্যাসাৰ্ধৰ চাৰিটা বৃত্তক্ষেত্ৰ সম্পূৰ্ণৰূপে পূৰ কৰাত ব্যৱহৃত হ'ল।

তেনেহ'লে ই নো কি বুজালে? ই ইংগিত দিলে যে r ব্যাসাৰ্ধযুক্ত এটা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি

= r ব্যাসাৰ্ধযুক্ত বৃত্ত এটাৰ কালিৰ 4 গুণ

= $4 \times (\pi r^2)$

সেয়েহে,

এটা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি = $4\pi r^2$
Surface Area of a Sphere = $4\pi r^2$

য'ত r হ'ল গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ।

গোলক এটাৰ পৃষ্ঠভাগত কিমানখন তল দেখিছা? ইয়াত কেৱল এখনেই তল আছে যিখন বক্ৰাকাৰ। এতিয়া, এটা গোটা গোলক লৈ ইয়াৰ ঠিক 'সোঁমাজেৰে' দুভাগ কৰোঁ যাতে এখন সমতল ইয়াৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যায়। গোলকটোৰ অৱস্থা এতিয়া কি হ'ল?

চিত্ৰ ঃ 13.20

হয়, ই দুটা সমান ভাগত বিভক্ত হ'ল (চিত্ৰ 13.20)! প্ৰতিটো অৰ্ধাংশকে কি বোলা হ'ব? ইয়াক এটা *অৰ্ধগোলক* (*hemisphere*) বোলে। ('hemi' মানে আধা)। এটা অৰ্ধগোলকৰ উপৰিভাগ কি হ'ব? ইয়াৰ তল কেইখন? দুখন, এখন বক্ৰতল আৰু আনখন সমতল (ভূমি)। এটা অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি গোলকটোৰ পৃষ্ঠকালিৰ আধা আৰু ই হ'ব $4\pi r^2$ৰ $\frac{1}{2}$ ।

সেয়েহে,

এটা অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি = $2\pi r^2$
Curved Surface Area of a Hemisphere = $2\pi r^2$

য'ত r হ'ল অৰ্ধগোলক উৎপন্ন কৰা গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ। এতিয়া দুয়োখন তল ধৰিলে অৰ্ধগোলক এটাৰ পৃষ্ঠকালি হ'ব $2\pi r^2 + \pi r^2$

গতিকে,

এটা অৰ্ধগোলকৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $3\pi r^2$
Total Surface Area of a Hemisphere = $3\pi r^2$

উদাহৰণ 7 ঃ 7 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ গোলক এটাৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ 7 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ গোলক এটাৰ পৃষ্ঠকালি

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ চে.মি.}^2 = 616 \text{ চে.মি.}^2$$

উদাহৰণ 8 ঃ 21 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধযুক্ত অৰ্ধগোলক এটাৰ (i) বক্ৰ পৃষ্ঠকালি (ii) মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ (i) 21 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰপৃষ্ঠ কালি

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ চে.মি.}^2 = 2772 \text{ চে.মি.}^2$$

(ii) অৰ্ধগোলকটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ চে.মি.}^2 = 4158 \text{ চে.মি.}^2$$

উদাহৰণ 9 ঃ চাৰ্কাছৰ মটৰ চাইকেল চালক জনে বিভিন্ন কলা-কৌশল প্ৰদৰ্শন কৰা ফোঁপোলা গোলক এটাৰ ব্যাস 7 মি.। মটৰ চাইকেল চালকজনে চাইকেলখন চলাবলৈ পোৱা ঠাইৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ গোলকটোৰ ব্যাস 7 মি.। গতিকে ব্যাসাৰ্ধ হ'ব 3.5 মি.। গতিকে মটৰ চাইকেল চলাবলৈ পোৱা ঠাইৰ কালি হ'ব গোলকটোৰ পৃষ্ঠকালি যিটো হ'ব—

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ মি.}^2$$

$$= 154 \text{ মি.}^2$$

উদাহৰণ 10 ঃ এটা অট্টালিকাৰ অৰ্দ্ধগোলাকাৰ গম্বুজটো ৰং কৰিব লাগে (চিত্ৰ 13.21 চোৱা)। গম্বুজটোৰ ভূমিৰ পৰিধি 17.6 মি. হ'লে, ইয়াক ৰং কৰাৰ খৰচ নিৰ্ণয় কৰা, যদি প্ৰতি 100 চে.মি.^{2}ত ৰং কৰাৰ খৰচ 5 টকা হয়।

সমাধান ঃ গম্বুজটোৰ ঘূৰণীয়া তলখনহে যিহেতু ৰং কৰিব লাগে, গতিকে কিমান ঠাই ৰং কৰিব লাগিব উলিয়াবলৈ আমি অৰ্ধগোলকটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি জানিব লাগিব। এতিয়া, গম্বুজটোৰ ভূমিৰ পৰিধি 17.6 মি.। গতিকে $17.6 = 2\pi r$.

তেতিয়া হ'লে গম্বুজটোৰ ব্যাসাৰ্ধ $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ মি.

$$= 2.8 \text{ মি.}$$

গম্বুজটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ মি.^{2}

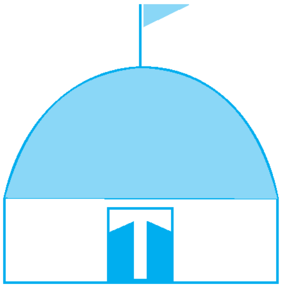
$= 49.28$ মি.^{2}

এতিয়া, 100 চে.মি.^{2} ৰং কৰাৰ খৰচ = 5 টকা

গতিকে, 1 মি.^{2} ৰং কৰাৰ খৰচ = 500 টকা

সেয়েহে, গম্বুজটো ৰং কৰাৰ খৰচ = 500 টকা × 49.28

= 24640 টকা

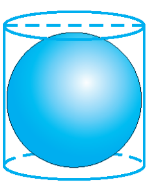


চিত্ৰ ঃ 13.21

অনুশীলনী 13.4

অন্য ধৰণেৰে দিয়া নাথাকিলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধৰিবা।

1. তলৰ ব্যাসাৰ্ধৰ গোলক এটাৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা ঃ
   (i) 10.5 চে.মি. (ii) 5.6 চে.মি. (iii) 14 চে.মি.
2. তলৰ ব্যাসৰ গোলক এটাৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা ঃ
   (i) 14 চে.মি. (ii) 21 চে.মি. (iii) 3.5 মি.
3. 10 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ অৰ্ধগোলক এটাৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা। ($\pi = 3.14$ ধৰিবা)
4. বতাহ ভৰালে গেলাকাৰ বেলুন এটাৰ ব্যাসাৰ্ধ 7 চে.মি.ৰ পৰা 14 চে.মি.লৈ বাঢ়ি যায়। দুয়োটা অৱস্থাতে থাকোতে বেলুনটোৰ পৃষ্ঠকালিৰ অনুপাত উলিওৱা।
5. পিতলেৰে নিৰ্মিত অৰ্দ্ধগোলাকাৰ বাটি এটাৰ অন্তঃ ব্যাস 10.5 চে.মি.। প্ৰতি 100 বৰ্গ চে.মি.ত 16 টকা হিচাপে বাটিটোৰ ভিতৰৰ ফালটোত টিনৰ আৱৰণ লগোৱাৰ খৰচ নিৰ্ণয় কৰা।
6. এটা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি 154 চে.মি.^{2} হ'লে, ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।
7. চন্দ্ৰৰ ব্যাস পৃথিৱীৰ ব্যাসৰ প্ৰায় এক চতুৰ্থাংশ। দুয়োটাৰে পৃষ্ঠকালিৰ অনুপাত উলিওৱা।
8. এটা অৰ্ধগোলকীয় পাত্ৰ 0.25 চে.মি. ডাঠ তীখাৰে তৈয়াৰী। পাত্ৰটোৰ অন্তঃ ব্যাসাৰ্ধ 5 চে.মি.। পাত্ৰটোৰ বাহিৰফালৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।
9. এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙাৰ ভিতৰত r ব্যাসাৰ্ধৰ গোলক এটা কোনোমতেহে সোমাব পাৰে (চিত্ৰ 13.22 চোৱা)। এতিয়া তলৰকেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ
   (i) গোলকটোৰ পৃষ্ঠকলি,
   (ii) চুঙাটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি,
   (iii) ওপৰৰ (i) আৰু (ii)ত পোৱা কালিৰ অনুপাত।



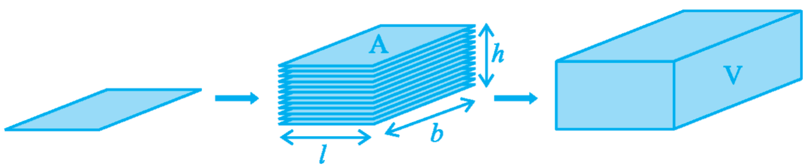
চিত্ৰ ঃ 13.22

13.6 আয়তীয় ঘনকৰ আয়তন (Volume of a Cuboid) ঃ

কিছুমান আকাৰ (বস্তু)ৰ আয়তন কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে শিকি আহিছা। স্মৰণ কৰা যে গোটা বস্তুবিলাকে ত্ৰিমাত্ৰিক ঠাই আগুৰি থাকে। এই আগুৰা ঠাইকে বস্তুটোৰ আয়তন বোলে।

টোকা ঃ যদি এটা বস্তু গোটা হয়, তেতিয়া এনে বস্তুৱে আগুৰা ঠাইখিনি জুখিব পাৰি আৰু ইয়াকে বস্তুটোৰ আয়তন বোলা হয়। আনহাতে, যদি বস্তুটো ফোপোলা হয়, তেতিয়া ভিতৰভাগ খালী থাকে আৰু এই খালী ঠাই বায়ু বা কোনো জুলীয়া পদাৰ্থৰে পূৰ কৰিব পাৰি আৰু পূৰ কৰা বস্তুখিনিয়ে পাত্ৰটোৰ আকাৰ ধাৰণ কৰে। এই ক্ষেত্ৰত, ভিতৰৰ খালী ঠাই পূৰ কৰা পদাৰ্থখিনিৰ আয়তনক পাত্ৰটোৰ ধাৰকত্ব বোলে। চমুকৈ ক'বলৈ গ'লে, এটা বস্তুৰ আয়তন হৈছে ই আগুৰি থকা ঠাইৰ পৰিমাণ আৰু এটা বস্তুৰ ধাৰকত্ব হৈছে ইয়াৰ ভিতৰভাগত ধৰা পদাৰ্থৰ আয়তন। গতিকে, ওপৰৰ দুয়োটাৰে জোখৰ একক হৈছে ঘন একক।

সেয়েহে, আমি এটা আয়তীয় ঘনকৰ আয়তনৰ কথা ক'বলৈ যাওঁতে আমি আয়তীয় ঘনকটোৱে আগুৰা ঠাইৰ পৰিমাণৰ কথা বিবেচনা কৰিম। তাৰোপৰি, কালি নাইবা আয়তনক এটা অঞ্চলৰ পৰিমাণ হিচাপে জোখা হয়। গতিকে, শুদ্ধকৈ ক'বলৈ হ'লে, আমি এটা বৃত্তাকাৰ অঞ্চলৰ কালি উলিয়াওঁ, বা আয়তীয় ঘনক আকাৰৰ অঞ্চলৰ আয়তন উলিয়াওঁ, নাইবা গোলাকাৰ অঞ্চল এটাৰ আয়তন উলিয়াওঁ, ইত্যাদি। কিন্তু সৰলীকৰণৰ বাবে আমি কওঁ বৃত্তৰ কালি, আয়তীয় ঘনক নতুবা গোলকৰ আয়তন, ইত্যাদি যদিও এইবিলাকে সিহঁতৰ সীমাটোহে নিৰ্দেশ কৰে।



চিত্ৰ ঃ 13.23

চিত্ৰ 13.23 মন কৰা। ধৰা আমি কৈছো যে প্ৰতিটো আয়তৰ কালি A, আয়তবোৰ ঠাক কৰি পোৱা উচ্চতা h আৰু আয়তীয় ঘনকটোৰ আয়তন V। V, A আৰু hৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো ক'ব পাৰিবানে ?

প্ৰতিটো আয়তে আগুৰা সমতলীয় অংশৰ কালি × উচ্চতা

= আয়তীয় ঘনকটোৱে আগুৰা ঠাইৰ পৰিমাণ

গতিকে, আমি পালো যে, $A \times h = V$

অৰ্থাৎ,

আয়তীয় ঘনক এটাৰ আয়তন = ভূমিৰ কালি × উচ্চতা = দীঘ × প্ৰস্থ × উচ্চতা
Volume of a Cuboid = base area × height = length × breadth × height

নাইবা, $V = l \times b \times h$, য'ত l, b আৰু h ক্ৰমে আয়তীয় ঘনকটোৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা।

টোকা ঃ আমি যেতিয়া কোনো এক ত্ৰিমাত্ৰিক ঠাইৰ পৰিমাণ অৰ্থাৎ গোটা বস্তু এটাই আগুৰা ঠাইৰ পৰিমাণ জুখি উলিয়াওঁ, আমি এই ঠাইত প্ৰকৃততে ধৰা একক দৈৰ্ঘ্যৰ বাহু বিশিষ্ট ঘনকৰ সংখ্যা গণনা কৰিহে কামটো সম্পন্ন কৰোঁ। সেয়েহে, আয়তন জোখা এককটো এটা ঘন একক।

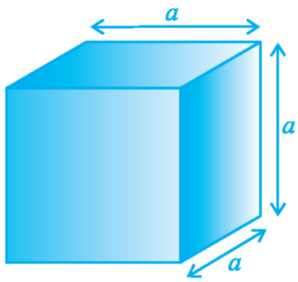
আকৌ, **ঘনক এটাৰ আয়তন = বাহু × বাহু × বাহু = a^3**
Volume of a Cube = edge × edge × edge = a^3

য'ত a ঘনকটোৰ এটা বাহুৰ দীঘ (চিত্ৰ 13.24 চোৱা)।

গতিকে, যদি ঘনক এটাৰ বাহুৰ দীঘ 12 চে.মি.,

তেন্তে ঘনকটোৰ আয়তন = 12 × 12 × 12 চে.মি.^{3}

= 1728 চে.মি.^{3}



চিত্ৰ ঃ 13.24

স্মৰণ কৰা যে এই সূত্ৰকেইটা তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত শিকিছা। এতিয়া এই সূত্ৰকেইটাৰ প্ৰয়োগ দেখুৱাই কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আহা ঃ

উদাহৰণ 11 ঃ এটুকুৰা মুকলি ঠাইত 10 মি. দীঘৰ এখন বেৰ (প্ৰাচীৰ) দিব লগা আছিল। বেৰখনৰ উচ্চতা 4 মি. আৰু ই 24 চে.মি. ডাঠ। যদি 24 চে.মি. × 12 চে.মি. × 8 চে.মি. জোখৰ ইটাৰে বেৰখন সাজিব লাগে, তেন্তে বেৰখনৰ বাবে কিমান ইটা লাগিব?

সমাধান ঃ ইয়াৰ সকলোবোৰ ইটাৰে সৈতে বেৰখনে আগুৰা ঠাইৰ আকাৰ এটা আয়তীয় ঘনকৰ দৰে হোৱাৰ বাবে আমি বেৰখনৰ আয়তন জানিব লাগিব।

ইয়াত, দীঘ = 10 মি. = 1000 চে.মি.

বেধ = 24 চে.মি.

উচ্চতা = 4 মি. = 400 চে.মি.

গতিকে, বেৰখনৰ আয়তন = দীঘ × বেধ × উচ্চতা

= 1000 × 24 × 400 চে.মি.^{3}

আকৌ, ইটাৰ প্ৰতিটুকুৰাই এক আয়তীয় ঘনক যাৰ দীঘ = 24 চে.মি., প্ৰস্থ = 12 চে.মি. আৰু উচ্চতা = 8 চে.মি.।

গতিকে, প্ৰতিটুকুৰা ইটাৰ আয়তন = দীঘ × প্ৰস্থ × উচ্চতা

= 24 × 12 × 8 চে.মি.^{3}

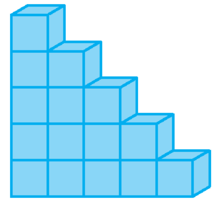
সেয়েহে, বেৰৰ বাবে লগা ইটাৰ সংখ্যা = $\dfrac{\text{বেৰখনৰ আয়তন}}{\text{এটা ইটাৰ আয়তন}}$

$= \dfrac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8}$

= 4166.6

গতিকে বেৰখন নিৰ্মাণ কৰিবলৈ 4167 টুকুৰা ইটা লাগিব।

উদাহৰণ 12 ঃ এটি শিশুৱে ঘনক আকাৰৰ আৰ্হি নিৰ্মাণ কৰিব পৰা সামগ্ৰী (building blocks)ৰে চিত্ৰ 13.25ত দেখুৱাৰ নিচিনা এটা গাঁথনি সাজিলে। প্ৰতিটো ঘনকৰ বাহুৰ দীঘ 3 চে.মি. হ'লে, শিশুটিয়ে সজা গাঁথনিটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ ঃ 13.25

সমাধান ঃ প্ৰতিটো ঘনকৰ আয়তন = বাহু × বাহু × বাহু

= $3 \times 3 \times 3$ চে.মি.^{3} = 27 চে.মি.^{3}

গাঁথনিটোত থকা ঘনকৰ সংখ্যা = 15

গতিকে, গাঁথনিটোৰ আয়তন = 27×15 চে.মি.^{3}

= 405 চে.মি.^{3}

অনুশীলনী 13.5

1. এটা জুইশলা বাকচৰ জোখ 4 চে.মি. × 2.5 চে.মি. × 1.5 চে.মি.। এনে 12 টা বাকচ থকা পেকেট এটাৰ আয়তন কিমান?
2. এটা আয়তীয় ঘনক আকাৰৰ পানীৰ টেংকিৰ দীঘ 6 মি., প্ৰস্থ 5 মি. আৰু গভীৰতা 4.5 মি.। টেঙ্কিটোত কিমান লিটাৰ পানী ধৰিব? (1 m^3 = 1000 লিটাৰ)
3. এটা আয়তীয় ঘনক আকাৰৰ পাত্ৰৰ দীঘ 10 মি. আৰু প্ৰস্থ 8 মি.। 380 ঘন মিটাৰ জুলীয়া পদাৰ্থ ধৰিবলৈ পাত্ৰটোৰ উচ্চতা কিমান হ'ব লাগিব?
4. 8 মি. দীঘ, 6 মি. প্ৰস্থ আৰু 3 মি. গভীৰ এটা আয়তীয় ঘনক আকাৰৰ গাঁত খান্দিবলৈ কিমান খৰচ পৰিব নিৰ্ণয় কৰা যদিহে প্ৰতি ঘন মিটাৰ খান্দোতে 30 টকা লাগে।
5. এটা আয়তীয় ঘনক আকাৰৰ টেঙ্কিত 50000 লিটাৰ পানী ধৰে। ইয়াৰ দীঘ আৰু গভীৰতা ক্ৰমে 2.5 মি. আৰু 10 মি. হ'লে প্ৰস্থ নিৰ্ণয় কৰা।
6. 4000 জনসংখ্যাৰ এখন গাঁৱত প্ৰতিদিনত জনমূৰি 150 লিটাৰকৈ পানীৰ আৱশ্যক। গাঁওখনত 20 মি. × 15 মি. × 6 মি. জোখৰ এটা টেঙ্কি আছে। এবাৰ ভৰ্তি হোৱা টেংকিটোৰ পানীৰে কিমান দিন চলাব পৰা যাব?
7. এটা গুদাম ঘৰৰ জোখ 40 মি. × 25 মি. × 10 মি.। প্ৰতিটোৰ জোখ 1.5 মি. × 1.25 মি. × 0.5 মি. হোৱা কাঠৰ সজা এই গুদাম ঘৰত সৰ্বাধিক কিমানটা থ'ব পৰা যাব নিৰ্ণয় কৰা।
8. 12 চে.মি. বাহু বিশিষ্ট এটা গোটা ঘনক কাটি সমান আয়তনৰ আঠটা ঘনক পোৱা গ'ল। নতুনকৈ পোৱা ঘনক এটাৰ বাহুৰ জোখ কিমান হ'ব? ইয়াৰ উপৰিও, ডাঙৰ ঘনকটো আৰু সৰু ঘনক এটাৰ পৃষ্ঠকালিৰ অনুপাত উলিওৱা।
9. 3 মি. গভীৰ আৰু 40 মি. বহল নদী এখন ঘণ্টাত 2 কি.মি. বেগেৰে সাগৰলৈ বৈ গৈছে। এক মিনিটত কিমান পানী গৈ সাগৰত পৰিব?

13.7 চুঙাৰ আয়তন (Volume of a Cylinder) ঃ

একে আকাৰৰ আয়তৰ দ্বাৰা এটা আয়তীয় ঘনক গঠন কৰাৰ নিচিনাকৈয়ে একে আকাৰৰ বৃত্তৰ দ্বাৰা এটা লম্ব বৃত্তীয় চুঙা গঠন কৰা আমি পাই আহিছোঁ। গতিকে, আয়তীয় ঘনকৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰয়োগ কৰা একে যুক্তিৰেই এটা চুঙাৰ আয়তন আমি এনেদৰে পাব পাৰোঁ ঃ

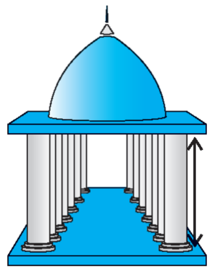
ভূমিৰ কালি × উচ্চতা = বৃত্তাকাৰ ভূমিৰ কালি × উচ্চতা = $\pi r^2 h$

সেয়েহে, **চুঙা এটাৰ আয়তন = $\pi r^2 h$ (Volume of a Cylinder = $\pi r^2 h$)**

য'ত r চুঙাটোৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ আৰু h ইয়াৰ উচ্চতা।

উদাহৰণ 13 ঃ এটা মন্দিৰৰ স্তম্ভবিলাক চুঙাৰ আকৃতিৰ (চিত্ৰ 13.26 চোৱা)। যদি প্ৰতিটো স্তম্ভৰ 20 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্তাকাৰ ভূমি থাকে আৰু প্ৰতিটোৰে উচ্চতা 10 মি., তেন্তে এনেকুৱা 14 টা স্তম্ভ নিৰ্মাণ কৰিবলৈ কিমান শিল, বালি আৰু চিমেণ্টৰ মিশ্ৰণ লাগিব?

সমাধান ঃ যিহেতু স্তম্ভবিলাকে আগুৰি থকা ঠাইখিনি মিশ্ৰণটোৰে পূৰাব লাগিব, আমি জানিব লগা বস্তুটো হ'ল চুঙা আকৃতিৰ স্তম্ভবিলাকৰ আয়তন।



চিত্ৰ ঃ 13.26

এটা চুঙাৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ = 20 চে.মি.

ইয়াৰ উচ্চতা = 10 মি. = 1000 চে.মি.

গতিকে, প্ৰতিটো চুঙাৰ আয়তন = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ চে.মি.}^3$$

$$= \frac{8800000}{7} \text{ চে.মি.}^3$$

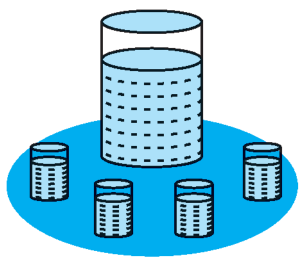
$$= \frac{8.8}{7} \text{ মি.}^3 \text{ (যিহেতু } 1000000 \text{ চে.মি.}^3 = 1 \text{ মি.}^3\text{)}$$

সেয়েহে, 14 টা স্তম্ভৰ আয়তন = প্ৰতিটো চুঙাৰ আয়তন × 14

$$= \frac{8.8}{7} \times 14 \text{ মি.}^3 = 17.6 \text{ মি.}^3$$

গতিকে, 14 টা স্তম্ভৰ বাবে 17.6 মি.^{3} মিশ্ৰণ লাগিব।

উদাহৰণ 14 ঃ এখন ৰমজান মেলাত থকা খাদ্য-বস্তুৰ বিপনী এখনৰ দোকানীজনে 15 চে.মি. ভূমি ব্যাসাৰ্ধৰ ডাঙৰ চুঙা আকৃতিৰ পাত্ৰ এটাৰ 32 চে.মি. উচ্চতালৈ কমলাৰ ৰসেৰে পূৰ্ণ কৰি ৰাখিছে। এই ৰসখিনি 3 চে.মি. ভূমি ব্যাসাৰ্ধৰ চুঙা আকৃতিৰ গিলাচত 8 চে.মি. উচ্চতালৈ ঢালি লৈ (চিত্ৰ 13.27 চোৱা) প্ৰতি গিলাচত 3 টকাকৈ বিক্ৰী কৰিছে। পাত্ৰটোৰ আটাইখিনি ৰস বিক্ৰী কৰি দোকানীজনে কিমান টকা পাব?



চিত্ৰ ঃ 13.27

সমাধান ঃ পাত্ৰটোত থকা ৰসৰ আয়তন = চুঙা আকৃতিৰ পাত্ৰটোৰ আয়তন

$= \pi R^2 H$

(য'ত R আৰু H পাত্ৰটোৰ ক্ৰমে ব্যাসাৰ্ধ আৰু উচ্চতা

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32$ চে.মি.^{3}

সেইদৰে, প্ৰতিটো গিলাচত থকা ৰসৰ আয়তন = $\pi r^2 h$

(য'ত r আৰু h এটা গিলাচৰ ক্ৰমে ব্যাসাৰ্ধ আৰু উচ্চতা)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8$ চে.মি.^{3}

গতিকে, বিক্ৰী হোৱা মুঠ গিলাচৰ সংখ্যা = $\dfrac{\text{পাত্ৰটোৰ আয়তন}}{\text{প্ৰতিটো গিলাচৰ আয়তন}}$

$= \dfrac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$

$= 100$

গতিকে, দোকানীজনে পোৱা ধনৰ পৰিমাণ = 3 টকা × 100

= 300 টকা।

অনুশীলনী 13.6

অন্য ধৰণেৰে উল্লেখ নকৰিলে $\pi = \dfrac{22}{7}$ ধৰিবা।

1. এটা চুঙাৰ আকৃতিৰ পাত্ৰৰ ভূমিৰ পৰিধি 132 চে.মি. আৰু ইয়াৰ উচ্চতা 25 চে.মি.। পাত্ৰটোত কিমান লিটাৰ পানী ধৰিব? (1000 চে.মি.^{3} = 1 লিটাৰ)

2. চুঙা আকৃতিৰ কাঠৰ পাইপ এটাৰ অন্তঃ ব্যাস 24 চে.মি. আৰু বহিঃ ব্যাস 28 চে.মি.। পাইপটোৰ দীঘ 35 চে.মি.। পাইপটোৰ ভৰ (পদাৰ্থৰ পৰিমাণ) নিৰ্ণয় কৰা, যদি 1 চে.মি.^{3} কাঠৰ ভৰ 0.6 গ্ৰাম হয়।

3. এটা নৰম পানীয় দুই ধৰণৰ আধাৰত পোৱা যায়—

(i) এটা টিনৰ টেমাত যাৰ আয়তীয় ভূমিৰ দীঘ 5 চে.মি. আৰু প্ৰস্থ 4 চে.মি. আৰু উচ্চতা 15 চে.মি. আৰু

(ii) এটা প্লাষ্টিকৰ চুঙাত যাৰ বৃত্তাকাৰ ভূমিৰ ব্যাস 7 চে.মি. আৰু উচ্চতা 10 চে.মি.। কোনটো আধাৰৰ ধাৰকত্ব বেছি আৰু কিমান বেছি?

4. যদি এটা চুঙাৰ পাৰ্শ্ব পৃষ্ঠকালি 94.2 চে.মি.^{2} আৰু ইয়াৰ উচ্চতা 5 চে.মি., তেন্তে (i) ইয়াৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ আৰু (ii) ইয়াৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা (π = 3.14 বুলি ধৰিবা)।

5. 10 মি. গভীৰতাৰ চুঙা আকৃতিৰ পাত্ৰ এটাৰ অন্তৰ ভাগৰ বক্ৰ পৃষ্ঠ ৰং কৰোতে খৰচ হয় 2200 টকা। ৰং কৰাৰ খৰচ প্ৰতি মি.^{2} অত 20 টকা হয়, তেন্তে তলৰকেইটা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) পাত্ৰটোৰ অন্তৰভাগৰ বক্ৰপৃষ্ঠ কালি,

(ii) ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ,

(iii) পাত্ৰটোৰ ধাৰকত্ব।

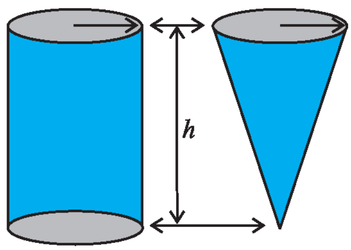
6. 1 মি. উচ্চতা বিশিষ্ট বন্ধ চুঙা আকাৰৰ পাত্ৰ এটাৰ ধাৰকত্ব 15.4 লিটাৰ। এইটো সাজিবলৈ কিমান বৰ্গ মিটাৰ ধাতুৰ পাত লাগিব?

7. এডাল কাঠ পেঞ্চিল, ভিতৰত গ্ৰেফাইটৰ গোটা চুঙা এটা ভৰোৱা এটা কাঠৰ চুঙাৰে গঠিত। পেঞ্চিলডালৰ ব্যাস 7 মি.মি. আৰু গ্ৰেফাইটৰ ব্যাস 1 মি.মি.। পেঞ্চিলডালৰ দীঘ 14 চে.মি. হ'লে, ইয়াত লগা কাঠ আৰু গ্ৰেফাইটৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।

8. হস্পিতালত থকা এজন ৰোগীক প্ৰতিদিনে 7 চে.মি. ব্যাসৰ চুঙা আকৃতিৰ বাতি এটাত চুৰুহা (চুপ্) খাবলৈ দিয়া হয়। বাতিটোৰ 4 চে.মি. উচ্চতালৈ যদি চুৰুহা ভৰোৱা হয়, 250 জন ৰোগীৰ বাবে এদিনত হস্পিতালখনে কিমান চুৰুহাৰ যোগান ধৰিব লাগিব?

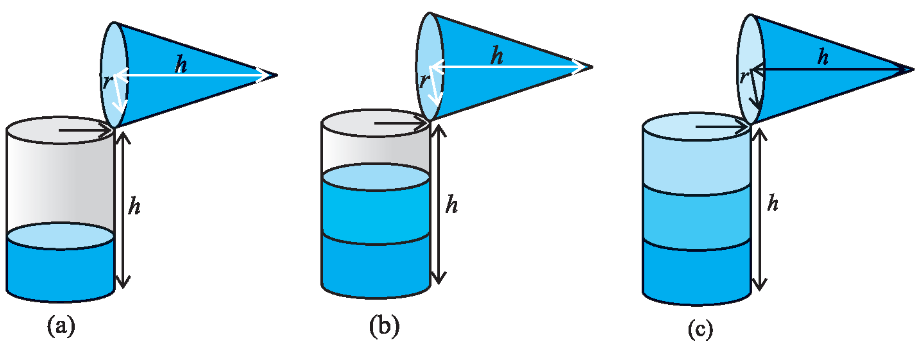
13.8 লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ আয়তন (Volume of a Right Circular Cone) ঃ

চিত্ৰ 13.28 অত একে ভূমি ব্যাসাৰ্ধ আৰু একে উন্নতিৰ এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙা আৰু এটা লম্ব বৃত্তকাৰ শংকু লক্ষ্য কৰিছানে?



চিত্ৰ ঃ 13.28

কাৰ্য ঃ একে ভূমি ব্যাসাৰ্ধ আৰু একে উচ্চতাৰ এটা ফোপোলা চুঙা আৰু এটা ফোপোলা শংকু সাজিবলৈ চেষ্টা কৰি চোৱা (চিত্ৰ 13.28 চোৱা)। তাৰ পাছত আমি এটা পৰীক্ষা কৰিম যাৰদ্বাৰা এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ আয়তন কি হ'ব পাৰে কাৰ্যক্ষেত্ৰত আমি দেখা পাম।



চিত্ৰ ঃ 13.29

তেনেহ'লে, আমি এনেদৰে আৰম্ভ কৰোঁ আহা।

শংকুটো এবাৰ বালিৰে ওপচকৈ ভৰোৱা আৰু চুঙাটোত বালিখিনি ঢালি দিয়া। আমি দেখিম যে ই চুঙাটোৰ এটা অংশহে পূৰ কৰিব [চিত্ৰ 13.29(a) চোৱা]।

আকৌ এবাৰ শংকুটো বালিৰে ওপচকৈ ভৰাই চুঙাটোত ঢালিলে আমি দেখিম যে এতিয়াও চুঙাটো সম্পূৰ্ণকৈ পূৰ হোৱা নাই [চিত্ৰ 13.29(b) চোৱা]।

তৃতীয়বাৰৰ বাবে শংকুটো বালিৰে ওপচকৈ ভৰাই চুঙাটোত ঢালিলে চুঙাটো ওপচকৈ পূৰ হোৱা আমি লক্ষ্য কৰিব পাৰিম [চিত্ৰ 13.29(c) চোৱা]।

ইয়াৰপৰা আমি বিনাদ্বিধাই এটা সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰো যে একে ভূমি ব্যাসাৰ্ধ আৰু একে উচ্চতাৰ শংকু এটাৰ আয়তনৰ তিনিগুণ চুঙা এটাৰ আয়তনৰ সমান, যিটোৱে আকৌ বুজায় যে শংকুটোৰ আয়তন চুঙাটোৰ আয়তনৰ এক তৃতীয়াংশ।

গতিকে, **শংকু এটাৰ আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (Volume of a Cone = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$)**

য'ত r শংকুটোৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ আৰু h ইয়াৰ উচ্চতা।

উদাহৰণ 15 ঃ এটা শংকুৰ উচ্চতা আৰু নতি উচ্চতা ক্ৰমে 21 চে.মি. আৰু 28 চে.মি.। শংকুটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $l^2 = r^2 + h^2$ৰ পৰা আমি পাওঁ—

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ চে.মি.}$$

$$= 7\sqrt{7} \text{ চে.মি.}$$

গতিকে শংকুটোৰ আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ চে.মি.}^3$$

$$= 7546 \text{ চে.মি.}^3$$

উদাহৰণ 16 ঃ ধৰিত্ৰীৰ 551 মি.^{2} কালিৰ এটুকুৰা কেন্‌ভাচ্ (ডাঠ কাপোৰ) আছে। 7 মি. ভূমি ব্যাসাৰ্ধৰ এটা শংকু আকৃতিৰ তম্বু তৈয়াৰ কৰাত তেওঁ এই টুকুৰাটো ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ লৈছে। তম্বুটোৰ দাঁতিবোৰ চিলাই কৰোতে আৰু কটা-মেলা কৰোতে লোকচান হোৱা কেন্‌ভাচ্‌ৰ পৰিমাণ প্ৰায় 1 মি.^{2} বুলি ধৰি ল'লে, ইয়াৰে তৈয়াৰ কৰিব পৰা তম্বুটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু, কেন্‌ভাচ্ টুকুৰাৰ কালি 551 মি.^{2} আৰু লোকচান হোৱা অংশৰ কালি 1 মি.^{2},

গতিকে তম্বুটোৰ বাবে থকা কেন্‌ভাচ্‌ৰ কালি = (551 – 1) মি.^{2} = 550 মি.^{2}। এতিয়া, তম্বুটোৰ পৃষ্ঠকালি = 550 মি.^{2} আৰু তম্বুটোৰ থাকিব লগা ভূমি ব্যাসাৰ্ধ = 7 মি.।

মন কৰিবা যে, এটা তম্বুৰ কেৱল বক্ৰ পৃষ্ঠহে থাকে (তম্বুৰ মজিয়াখন কেন্‌ভাচ্‌ৰ নাথাকে)।

গতিকে, তম্বুটোৰ বক্ৰ পৃষ্ঠৰ কালি = 550 মি.^{2}

অৰ্থাৎ, $\pi rl = 550$

বা, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

বা, $l = \frac{550}{22}$ মি. = 25 মি.

এতিয়া, $l^2 = r^2 + h^2$

গতিকে $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}$ মি.

$= \sqrt{625 - 49}$ মি.

$= \sqrt{576}$ মি.

= 24 মি.

সেয়েহে, শংকু আকাৰৰ তম্বুটোৰ আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ মি.^{2}

= 1232 মি.^{2}

অনুশীলনী 13.7

অন্য ধৰণেৰে উল্লেখ নকৰিলে $\pi = \frac{22}{7}$ ধৰিবা।

1. এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা, যদিহে ইয়াৰ

(i) ব্যাসাৰ্ধ 6 চে.মি., উচ্চতা 7 চে.মি.

(ii) ব্যাসাৰ্ধ 3.5 চে.মি., উচ্চতা 12 চে.মি.

2. এটা শংকু আকাৰৰ পাত্ৰৰ ধাৰকত্ব লিটাৰত নিৰ্ণয় কৰা, যদিহে ইয়াৰ

(i) ব্যাসাৰ্ধ 7 চে.মি., নতি উচ্চতা 25 চে.মি.

(ii) উচ্চতা 12 চে.মি., নতি উচ্চতা 13 চে.মি.

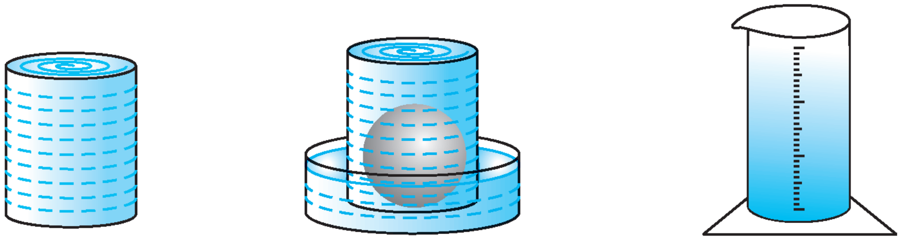
3. এটা শংকুৰ উচ্চতা 15 চে.মি.। যদি ইয়াৰ আয়তন 1570 চে.মি.^{3} হয়, ইয়াৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা। (π = 3.14 ধৰিবা)

4. 9 চে.মি. উচ্চতাৰ লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকু এটাৰ আয়তন 48π চে.মি.^{3} হ'লে, ইয়াৰ ভূমিৰ ব্যাস নিৰ্ণয় কৰা।
5. এটা শংকু আকাৰৰ গাঁতৰ উপৰিভাগৰ ব্যাস 3.5 মি. আৰু ইয়াৰ গভীৰতা 12 মি.। ইয়াৰ ধাৰকত্ব কিলোলিটাৰত কিমান হ'ব?
6. এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ আয়তন 9856 চে.মি.^{3}। ভূমিৰ ব্যাস 28 চে.মি. হ'লে, তলৰবোৰ নিৰ্ণয় কৰা ঃ
   (i) শংকুটোৰ উচ্চতা
   (ii) শংকুটোৰ নতি উচ্চতা
   (iii) শংকুটোৰ বক্র পৃষ্ঠকালি।
7. 5 চে.মি., 12 চে.মি. আৰু 13 চে.মি. বাহু বিশিষ্ট এটা সমকোণী ত্রিভুজ ABCক 12 চে.মি. বাহুটোৰ সাপেক্ষে ঘূৰোৱা হ'ল। এনে কৰোতে উৎপন্ন হোৱা গোটা আকাৰটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।
8. প্ৰশ্ন নং 7অত উল্লেখ কৰা ABC ত্রিভুজটো 5 চে.মি. বাহুটোৰ সাপেক্ষে ঘূৰালে ই উৎপন্ন কৰা গোটা আকাৰটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা। প্ৰশ্ন নং 7 আৰু 8অত পোৱা গোটা আকাৰ দুটাৰ আয়তনৰ অনুপাতো লগতে নিৰ্ণয় কৰিবা।
9. এটা ঘেহুঁৰ দ'মৰ আকাৰটো এটা শংকুৰ নিচিনা যাৰ ব্যাস 10.5 মি. আৰু উচ্চতা 3 মি.। দ'মটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা। বৰষুণৰপৰা ৰক্ষা কৰিবলৈ এই দ'মটো কেন্‌ভাচ্‌ৰে ঢাকিব লাগে। ইয়াৰ বাবে লগা নূন্যতম কেন্‌ভাচ্‌ৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

13.9 গোলকৰ আয়তন (Volume of Sphere) ঃ

এটা গোলকৰ আয়তন জুখিবলৈ কি দৰে আগবাঢ়িব পাৰি চাওঁ আহাঁ। প্ৰথমতে, বিভিন্ন ব্যাসাৰ্ধৰ দুটা বা তিনিটা গোলক লোৱা আৰু এনে এটা ডাঙৰ পাত্ৰ লোৱা যাৰ ভিতৰত গোলককেইটা এটা এটাকৈ বেলেগে বেলেগে সোমাব পাৰে। এটা ডাঙৰ চৰিয়াও লোৱা যাৰ ভিতৰত ওপৰত কোৱা পাত্ৰটো সুমুৱাব পাৰি। তাৰ পাছত পাত্ৰটো ওপচ্ হোৱাকৈ পানীৰে পূৰ কৰা [চিত্ৰ 13.30(a) চোৱা]।

এতিয়া, অতি সাৱধানেৰে এটা গোলক পাত্ৰটোৰ ভিতৰত ৰাখা। কিছু পানী পাত্ৰটোৰ পৰা চৰিয়াটোত বাগৰি পৰিব [চিত্ৰ 13.30(b) চোৱা]। জুলীয়া পদাৰ্থ জুখিব পৰা চুঙা (অৰ্থাৎ দাগ কটা চুঙা আকৃতিৰ ঘট (jar) এটাত চৰিয়াটোৰ পানীখিনি সাৱধানেৰে ঢালা আৰু বাগৰি পৰা এই পানীখিনিৰ জোখ লোৱা [চিত্ৰ 13.30(c) চোৱা]। ধৰা, পাত্ৰৰ পানীত ডুবাই দিয়া গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ r (গোলকটোৰ ব্যাস জুখি ইয়াৰ পৰা ব্যাসাৰ্ধ উলিয়াব পাৰিবা) তাৰ পাছত $\frac{4}{3}\pi r^3$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। এই মানটো বাগৰিপৰা পানীখিনিৰ আয়তনৰ জোখৰ সৈতে প্ৰায় একে পাইছানে?



চিত্ৰ ঃ 13.30

এইমাত্ৰ সম্পন্ন কৰা প্ৰক্ৰিয়াটোৰ পুনৰাবৃত্তি আন এটা গোলক লৈ কৰি চোৱা। এইটো গোলকৰ ব্যাসাৰ্ধ R উলিয়াই $\frac{4}{3}\pi R^3$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। আকৌ এবাৰ দেখিবা যে এই মানটো গোলকটোৱে অপসাৰিত কৰা (বাগৰি পৰা) পানীখিনিৰ আয়তনৰ জোখৰ সমান। ই আমাক কি কয়? আমি জানোঁ যে গোলকটোৰ আয়তন ই অপসাৰিত কৰা পানীৰ আয়তনৰ জোখৰ সমান। বেলেগ বেলেগ ব্যাসাৰ্ধৰ গোলক লৈ এই পৰীক্ষাটো বাৰে বাৰে কৰিলে, আমি একেটা ফলকে পাই থাকিম, অৰ্থাৎ এটা গোলকৰ আয়তন ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধৰ ঘনফলৰ $\frac{4}{3}\pi$ গুণ। ইয়াৰপৰা আমি এটা ধাৰণা কৰিব পাৰোঁ যে—

গোলক এটাৰ আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$ (Volume of a Sphere = $\frac{4}{3}\pi r^3$)

য'ত r হ'ল গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ।

পাচলৈ ওপৰৰ শ্ৰেণীবিলাকত ইয়াক প্ৰমাণ কৰিবও পাৰি। কিন্তু, এইটো পৰ্যায়ত আমি ইয়াকে সত্য বুলি ধৰিম।

যিহেতু এটা অৰ্ধগোলক এটা গোলকৰ আধা, তুমি অনুমান কৰিব পাৰিছানে এটা অৰ্ধগোলকৰ আয়তন কি হ'ব? হয়, ই $\frac{4}{3}\pi r^3$ৰ $\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{3}\pi r^3$।

সেয়েহে, **এটা অৰ্ধগোলকৰ আয়তন = $\frac{2}{3}\pi r^3$ (Volume of a Hemisphere = $\frac{2}{3}\pi r^3$)**

য'ত r অৰ্ধগোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ।

এই সূত্ৰকেইটাৰ প্ৰয়োগ ব্যাখ্যা কৰা কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আহা।

উদাহৰণ 17 ঃ 11.2 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ গোলক এটাৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ নিৰ্ণেয় আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2$ চে.মি.^{3} = 5887.32 চে.মি.^{3}

উদাহৰণ 18 ঃ এটা শ্বট্-পুট্ 4.9 চে.মি. ব্যাসাৰ্ধৰ ধাতবীয় গোলক। যদি ধাতুটোৰ ঘনত্ব প্ৰতি ঘন চে.মি.ত 7.8 গ্ৰাম হয়, শ্বট্-পুট্‌টোৰ ভৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু শ্বট্-পুট্‌টো ধাতুৰে নিৰ্মিত এটা ঘনক আৰু ইয়াৰ ভৰ, আয়তন আৰু ঘনত্বৰ পূৰণফলৰ সমান, গতিকে আমি গোলকটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

এতিয়া, গোলকটোৰ আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9$ চে.মি.^{3}

= 493 চে.মি.^{3} (প্ৰায়)

দিয়া আছে,

এক ঘন চে.মি.^{3} ধাতুৰ ভৰ = 7.8 গ্ৰাম

গতিকে, শ্বট্-পুট্‌টোৰ ভৰ = 7.8 × 493 গ্ৰাম

= 3845.44 গ্ৰাম

= 3.85 কিলোগ্ৰাম (প্ৰায়)

উদাহৰণ 19 ঃ এটা অৰ্ধগোলাকাৰ বাটিৰ ব্যাসাৰ্ধ 3.5 চে.মি.। ইয়াত ধৰা পানীৰ আয়তন কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ বাটিটোত ধৰা পানীৰ আয়তন $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$ চে.মি.^{3}

= 89.8 চে.মি.^{3}

অনুশীলনী 13.8

অন্য প্ৰকাৰেৰে উল্লেখ নাথাকিলে $\pi = \frac{22}{7}$ ধৰিবা।

1. এটা গোলকৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা যাৰ ব্যাসাৰ্ধ হৈছে

(i) 7 চে.মি. (ii) 0.63 মি.

2. এটা গোটা গোলক আকৃতিৰ বলে অপসাৰিত কৰা পানীৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া ইয়াৰ ব্যাস হ'ব

(i) 28 চে.মি. (ii) 0.21 মি.

3. ধাতুৰে নিৰ্মিত বল এটাৰ ব্যাস 4.2 চে.মি.। যদি ধাতুবিধৰ ঘনত্ব প্ৰতি চে.মি.^{3} অত 8.9 গ্ৰাম, তেন্তে বলটোৰ ভৰ কিমান?

4. চন্দ্ৰটোৰ ব্যাস, পৃথিৱীৰ ব্যাসৰ প্ৰায় এক-চতুৰ্থাংশ। পৃথিৱীৰ আয়তনৰ কিমান অংশ চন্দ্ৰটোৰ আয়তনৰ সমান হ'ব?

5. 10.5 চে.মি. ব্যাসযুক্ত এটা অৰ্ধগোলাকাৰ বাটিত কিমান লিটাৰ গাখীৰ ধৰিব?

6. এটা অৰ্ধগোলাকাৰ টেংকি 1 চে.মি. ডাঠ লোৰ পাতেৰে তৈয়াৰী। যদি ভিতৰভাগৰ ব্যাসাৰ্ধ 1 মি., তেন্তে টেংকিটো সাজিবলৈ লগা লোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।

7. 154 চে.মি.^{2} পৃষ্ঠকালিৰ এটা গোলকৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।

8. এটা অট্টালিকাৰ গম্বুজটো অৰ্ধগোলাকাৰ। ইয়াৰ ভিতৰভাগত 498.96 টকা খৰচ কৰি চূণ লগোৱা হ'ল। যদি প্ৰতি বৰ্গমিটাৰত চূণ লগোৱাৰ খৰচ 2.00 টকা হয়, তেন্তে তলৰকেইটা নিৰ্ণয় কৰা

(i) গম্বুজটোৰ ভিতৰভাগৰ পৃষ্ঠকালি

(ii) গম্বুজটোৰ ভিতৰৰ বায়ুৰ আয়তন

9. প্ৰতিটোৰে ব্যাসাৰ্ধ r আৰু পৃষ্ঠকালি S থকা সাতাইশটা গোটা লোৰ গোলক গলাই আন এটা গোলক পোৱা গ'ল যাৰ পৃষ্ঠকালি S' এতিয়া নিৰ্ণয় কৰা

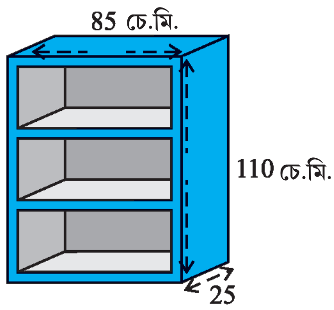
(i) নতুন গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ r'

(ii) S আৰু S'ৰ অনুপাত।

10. ঔষধৰ কেপচুল্ (ঔষধ থোৱা আধাৰ) এটাৰ আকাৰ এটা গোলকৰ দৰে যাৰ ব্যাস 3.5 মি.মি.। এই কেপচুল্‌টোত থ'বলৈ কিমান ঔষধ (মি.মি.^{3} অত) লাগিব?

অনুশীলনী 13.9 (ঐচ্ছিক (Optional))*

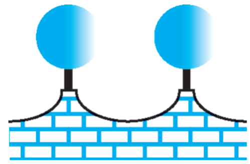
1. কাঠেৰে নিৰ্মিত এটা কিতাপৰ ছেল্‌ফৰ বাহিৰফালৰ জোখ এনে ধৰণৰ— উচ্চতা = 110 চে.মি., গভীৰতা = 25 চে.মি., প্ৰস্থ = 85 চে.মি. (চিত্ৰ 13.31 চোৱা)। সকলো ঠাইতে কাঠৰ তক্তাৰ গাঢ়তা (ডাঠ) 5 চে.মি.। বাহিৰৰ তলকেইখন মসৃণ (পলিছ) আৰু ভিতৰৰ তলকেইখন ৰং কৰিব লাগে। যদি মসৃণ কৰাৰ খৰচ প্ৰতি চে.মি.^{2}অত 20 পইচা আৰু ৰং কৰা খৰচ প্ৰতি চে.মি.^{2}অত 10 পইচা হয়, তেনেহ'লে ছেল্‌ফটোৰ তলকেইখন মসৃণ আৰু ৰং কৰাৰ মুঠ খৰচ কিমান হ'ব উলিওৱা।



চিত্ৰ ঃ 13.31

* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নল'বা।

2. এটা ঘৰৰ চৌহদৰ সন্মুখৰ বেৰখন সৰু অৱলম্বনৰ ওপৰত স্থাপন কৰা 21 চে.মি. ব্যাসৰ কাঠৰ গোলক কিছুমানৰদ্বাৰা সজোৱা হৈছে (চিত্ৰ 13.32 চোৱা)। এই উদ্দেশ্যে ব্যৱহাৰ কৰা আঠটা এনে গোলকত ৰূপালী ৰং কৰিব লাগে। গোলক স্থাপন কৰা প্ৰতিটো অৱলম্বনেই একোটা চুঙা যাৰ ব্যাসাৰ্ধ 1.5 চে.মি. আৰু উচ্চতা 7 চে.মি. আৰু ইহঁতক ক'লা ৰং লগাব লাগে। যদি ৰূপালী ৰং কৰাৰ খৰচ প্ৰতি চে.মি.^{2}অত 25 পইচা আৰু ক'লা ৰং লগোৱাৰ খৰচ প্ৰতি চে.মি.^{2}অত 5 পইচা, তেন্তে ইয়াৰ বাবে লগা ৰঙৰ দাম নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ ঃ 13.32

3. এটা গোলকৰ ব্যাস 25% কমোৱা হ'ল। শতকৰা কি হাৰত ইয়াৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি কমি যাব?

13.10 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে শিকা কথাকেইটা হ'ল—

1. এটা আয়তীয় ঘনকৰ পৃষ্ঠকালি = $2\ (lb + bh + hl)$
2. এটা ঘনকৰ পৃষ্ঠকালি = $6a^2$
3. এটা চুঙাৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি = $2\pi rh$
4. এটা চুঙাৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $2\pi r(r + h)$
5. এটা শংকুৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি = πrl
6. এটা লম্ব বৃত্তাকাৰ চুঙাৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $\pi rl + \pi r^2$ বা $\pi r(l + r)$
7. r ব্যাসাৰ্ধৰ এটা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি = $4\pi r^2$
8. এটা অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি = $2\pi r^2$
9. এটা অৰ্ধগোলকৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $3\pi r^2$
10. এটা আয়তীয় ঘনকৰ আয়তন = $l \times b \times h$
11. এটা ঘনকৰ আয়তন = a^3
12. এটা চুঙাৰ আয়তন = $\pi r^2 h$
13. এটা শংকুৰ আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
14. r ব্যাসাৰ্ধৰ এটা গোলকৰ আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$
15. অৰ্ধগোলক এটাৰ আয়তন = $\frac{2}{3}\pi r^3$

(ইয়াত, l, b, h, a, r, আদি বৰ্ণবোৰ প্ৰসংগক্ৰমে সিহঁতৰ গতানুগতিক অৰ্থতে ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে।)

Y2S6E7

চতুৰ্দশ সংখ্যা

পৰিসংখ্যা (Statistics)

14.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

বিভিন্ন সংঘটন, সংখ্যা, তালিকা লেখ ইত্যাদিৰ আকাৰত প্ৰতিদিনে আমি বহুতো সম্ভেদ লাভ কৰোহঁক। বাতৰিকাকত, টেলিভিছন, আলোচনী আৰু যোগাযোগৰ অন্যান্য মাধ্যমেৰে আমি এইবোৰ লাভ কৰো। এইবোৰ জড়িত হ'ব পাৰে ক্ৰিকেটৰ বেটিং অথবা বলিঙৰ গড়, একোটা কোম্পানীৰ মুনাফা, মহানগৰসমূহৰ তাপমাত্ৰা, পঞ্চবাৰ্ষিক পৰিকল্পনাৰ বিভিন্ন খণ্ডত খৰচৰ পৰিমাণ, নিৰ্বাচনৰ ফলাফল ইত্যাদিৰ লগত। নিৰ্দিষ্ট উদ্দেশ্যেৰে সাংখ্যিক অথবা আন যিকোনো ৰূপত সংগ্ৰহ কৰা এই সংঘটন বা সংখ্যাবোৰকে কোৱা হয় তথ্য (data)। তথ্য অৰ্থাৎ 'ডাটা' (Data) হ'ল লেটিন ভাষাৰ শব্দ 'ডাটাম' (datum)ৰ বহুবচন ৰূপ। অৱশ্যে তথ্য শব্দটো তোমালোকৰ বাবে নতুন হৈ থকা নাই। পূৰ্বৰ শ্ৰেণীসমূহত তোমালোকে তথ্য আৰু এইবোৰৰ ব্যৱহাৰ সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰি আহিছা।

আমাৰ পৃথিৱীখন ক্ৰমে অধিক আৰু অধিক পৰিমাণে সম্ভেদমুখী হৈ পৰিছে। আমাৰ জীৱনৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে এক প্ৰকাৰৰ নাইবা অন্য প্ৰকাৰৰ তথ্যৰ ব্যৱহাৰ হৈয়ে থাকে। সেয়েহে এই তথ্যৰ পৰা অৰ্থপূৰ্ণ সম্ভেদ বিচাৰি উলিওৱাটো আমাৰ বাবে জৰুৰী হৈ পৰিছে। পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান নামৰ গণিতৰ এক শাখাত তথ্যৰ পৰা অৰ্থপূৰ্ণ সম্ভেদ বিচাৰি উলিওৱা পদ্ধতি সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰা হয়।

'(ৰাজনৈতিক) ৰাষ্ট্ৰ' (Political state) বুজোৱা লেটিন ভাষাৰ শব্দ 'status'ৰ পৰাই statistics অৰ্থাৎ 'পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান' শব্দৰ উদ্ভৱ হোৱা যেন ধাৰণা হয়। আৰম্ভণিতে, পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান আছিল ৰাষ্ট্ৰৰ বাবে ব্যৱহাৰ্য জনগণৰ জীৱন ধাৰাৰ বিভিন্ন দিশৰ ওপৰত আহৰিত তথ্যৰ সাধাৰণ সংগ্ৰহ। কালক্ৰমে, ইয়াৰ পৰিসৰ বৃদ্ধি হ'বলৈ ধৰে আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান কেৱল তথ্য সংগ্ৰহ আৰু ইয়াৰ উপস্থাপনতে আৱদ্ধ নাথাকি উক্ত তথ্যৰ ব্যাখ্যা আৰু সিদ্ধান্ত গ্ৰহণৰ সৈতেও নিজকে যুক্ত কৰিবলৈ ধৰে। পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ কাম হ'ল তথ্যৰ সংগ্ৰহ, সংগঠন, বিশ্লেষণ আৰু সেইবোৰৰ তাৎপৰ্য নিৰ্ণয়কৰণ। বেলেগ বেলেগ প্ৰসংগত 'পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান' শব্দই বেলেগ

বেলেগ অৰ্থ বহন কৰে। নিম্নোক্ত বাক্যসমূহ লক্ষ্য কৰা যাওঁক—

1. 'ভাৰতৰ শৈক্ষিক পৰিসংখ্যা'ৰ শেহতীয়া কপিটো মই পাব পাৰোনে?
2. মই 'পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান' অধ্যয়ন কৰিব বিচৰাৰ কাৰণ, দৈনন্দিন জীৱনত ইয়াৰ ব্যৱহাৰ হয়।

প্ৰথমটো বাক্যত Statistics অৰ্থাৎ পৰিসংখ্যা শব্দটো বহুবচন অৰ্থত বিশেষকৈ সাংখিক তথ্য বুজাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে। এইবোৰে ভাৰতবৰ্ষৰ শৈক্ষিক অনুষ্ঠানৰ সংখ্যা, বিভিন্ন ৰাজ্যসমূহৰ সাক্ষৰতাৰ হাৰ, ইত্যাদি সামৰি ল'ব পাৰে। দ্বিতীয় বাক্যত 'পৰিসংখ্যা' শব্দটো একবচনৰ বিশেষ্য পদ হিচাপে ব্যৱহৃত হৈছে যাৰ অৰ্থ হ'ল— ই এনে এক বিষয় যাৰ সহায়ত তথ্যৰ সংগ্ৰহ, উপস্থাপন আৰু বিশ্লেষণৰ লগতে এইবোৰৰ পৰা অৰ্থপূৰ্ণ সিদ্ধান্ত গ্ৰহণ কৰা হয়।

এই অধ্যায়ত, তথ্য সম্পৰ্কে এই আটাইবোৰ দিশৰ ওপৰত আলোকপাত কৰা হ'ব।

14.2 তথ্য সংগ্ৰহ (Collection of Data) ঃ

পৰৱৰ্তী কাৰ্যটো সম্পাদনৰ দ্বাৰা তথ্য আহৰণ বিষয়ক এটা অনুশীলনীৰে আৰম্ভ কৰা যাওক।

কাৰ্য 1 ঃ তোমাৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক চাৰিটা দলত ভাগ কৰা। প্ৰতিটো দলকে নিম্নোক্ত ধৰণৰ তথ্যসমূহৰ একোটাকৈ সংগ্ৰহ কৰাৰ দায়িত্ব অৰ্পন কৰা।

(i) তোমাৰ শ্ৰেণীৰ 20 গৰাকী ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ উচ্চতা

(ii) এমাহৰ বাবে প্ৰতিদিনে তোমাৰ শ্ৰেণীত অনুপস্থিতিৰ সংখ্যা।

(iii) তোমাৰ সহপাঠীসকলৰ পৰিয়ালবোৰৰ সদস্য সংখ্যা।

(iv) তোমাৰ বিদ্যালয়ৰ নাইবা ইয়াৰ চৌপাশে থকা 15 জোপা উদ্ভিদৰ উচ্চতা।

ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে আহৰণ কৰা তথ্যবোৰ আমি পৰীক্ষা কৰি চাওঁহক। প্ৰতিটো দলে তেওঁলোকৰ তথ্যসমূহ কিদৰে সংগ্ৰহ কৰিছিল?

(i) তথ্য আহৰণৰ বাবে তেওঁলোকে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিগৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰী, প্ৰতিটো পৰিয়াল অথবা প্ৰতিগৰাকী ব্যক্তিৰ সৈতে যোগাযোগ কৰিছিল নে?

(ii) বিদ্যালয়ত উপলব্ধ নথি-পত্ৰৰ দৰে কিছুমান উৎসৰ পৰা তেওঁলোকে তথ্যসমূহ লাভ কৰিছিল নেকি?

প্ৰথম ক্ষেত্ৰত, যেতিয়া অনুসন্ধানকাৰীগৰাকীয়ে মনত এটা নিৰ্দিষ্ট লক্ষ্য লৈ নিজে তথ্যবোৰ আহৰণ কৰে তেনেবোৰ তথ্যক কোৱা হয় প্ৰাথমিক বা মুখ্য তথ্য (primary data)।

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত, যেতিয়া তথ্যবোৰ ইতিমধ্যে সংৰক্ষিত কৰি থোৱা কোনো উৎসৰ পৰা সংগ্ৰহ কৰা হয়, তেনেবোৰ তথ্যক কোৱা হয় দ্বিতীয় শ্ৰেণীৰ বা গৌণ তথ্য (secondary data)। এনেধৰণৰ তথ্যসমূহ যিহেতু অন্য কোনো ব্যক্তিৰ দ্বাৰা অন্য পটভূমিত সংগ্ৰহ কৰা হৈছিল গতিকে সেইবোৰ ব্যৱহাৰ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত উৎসৰ নিৰ্ভৰযোগ্যতা সম্পৰ্কে ভালদৰে সুনিশ্চিত হৈ লোৱাটো আৱশ্যকীয়।

এতিয়া, তোমালোকে নিশ্চয় তথ্য কিদৰে সংগ্ৰহ কৰিব লাগে আৰু প্ৰাথমিক আৰু দ্বিতীয় শ্ৰেণীৰ তথ্যৰ পাৰ্থক্য কি, সেয়া বুজিব পাৰিছা।

অনুশীলনী 14.1

1. তোমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ পৰা পাব পৰা তথ্যৰ পাঁচটা উদাহৰণ আগবঢ়োৱা।
2. ওপৰৰ প্ৰশ্ন-1ত উল্লেখ কৰা তথ্যসমূহক প্ৰাথমিক আৰু দ্বিতীয় শ্ৰেণীৰ তথ্য হিচাপে ভাগ কৰা।

14.3 তথ্যৰ উপস্থাপন (Presentation of Data) ঃ

তথ্য সংগ্ৰহৰ পৰ্যায়টো সম্পন্ন হোৱাৰ লগে লগে অনুসন্ধানকাৰীয়ে সেইবোৰ এক বিশেষ ৰূপত উপস্থাপন কৰাৰ উপায় নিৰ্বাচন কৰিব লাগে যি অৰ্থপূৰ্ণ, সহজে বোধগম্য আৰু যাৰ প্ৰধান বৈশিষ্ট্যসমূহ চকু ফুৰোৱাৰ লগে লগে পৰিস্ফুট হয়। কিছুমান উদাহৰণৰ জৰিয়তে তথ্য উপস্থাপনৰ বিভিন্ন পদ্ধতিৰ কথা আমি স্মৰণ কৰোহক।

উদাহৰণ 1 ঃ 10 গৰাকী ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে গণিতৰ পৰীক্ষাত লাভ কৰা নম্বৰসমূহ নিম্নোক্ত ধৰণৰ—

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

এই ৰূপত তথ্যসমূহক অবিন্যস্ত তথ্য (raw data) বোলা হয়।

এই ৰূপত নিৰীক্ষণ কৰি সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন নম্বৰবোৰ বিচাৰি উলিয়াব পাৰিনে?

সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন নম্বৰ দুটা বিচাৰি উলিয়াওতে তোমাৰ কিছু সময় লাগিল নেকি? যদি নম্বৰসমূহ ঊৰ্ধ্ব নাইবা অধঃ ক্ৰমত সজাই লোৱা হয় তেন্তে সময় কম, নালাগিবনে? গতিকে নম্বৰসমূহ আমি ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজাই লওঁহক, যেনে—

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

এতিয়া, আমি স্পষ্টভাৱে দেখা পাওঁ যে সৰ্বনিম্ন নম্বৰ 25 আৰু সৰ্বোচ্চ নম্বৰ 95।

সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান দুটাৰ পাৰ্থক্যটোক তথ্যৰাজিৰ পৰিসৰ (range) বোলা হয়। গতিকে, এই ক্ষেত্ৰত পৰিসৰ হ'ল $95 - 25 = 70$।

ঊৰ্ধ্ব বা অধঃক্ৰমত তথ্যৰ উপস্থাপন কেতিয়াবা অধিক সময়-নিৰ্ভৰ হ'ব পাৰে, বিশেষকৈ যেতিয়া নিম্নোক্ত উদাহৰণটোৰ নিচিনাকৈ সংশ্লিষ্ট পৰীক্ষাটোৰ পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা বৃহৎ আকাৰৰ হয়।

উদাহৰণ 2 ঃ এখন বিদ্যালয়ৰ নৱম শ্ৰেণীৰ 30 গৰাকী বিদ্যাৰ্থীয়ে লাভ কৰা নম্বৰসমূহ (100ৰ ভিতৰত) এনেধৰণৰ—

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

স্মৰণ কৰা যে কোনো এটা নিৰ্দিষ্ট নম্বৰ লাভ কৰা বিদ্যাৰ্থীৰ সংখ্যাটোক এই নম্বৰৰ বাৰংবাৰতা (*frequency*) বোলা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, 4 গৰাকী বিদ্যাৰ্থীয়ে 70 নম্বৰকৈ পাইছে। গতিকে 70 নম্বৰটোৰ বাৰংবাৰতা 4। অধিক সহজে বুজিবৰ বাবে আমি তথ্যখিনি নিম্নোক্ত ধৰণে এখন তালিকাত সজাওহঁক—

তালিকা 14.1

নম্বৰ	বিদ্যাৰ্থীৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ বাৰংবাৰতা)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
মুঠ	**30**

তালিকা 14.1ক কোৱা হয় অশ্ৰেণীভুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা (Ungrouped frequency distribution table) নাইবা সৰলভাৱে, বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা (Frequency distribution table) মন কৰা যে পৰৱৰ্তী উদাহৰণৰ দৰে এই তালিকাসমূহ প্ৰস্তুত কৰোতে দাগচিহ্নবো (tally marks) ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ বন মহোৎসৱ উপলক্ষে 100 খন বিদ্যালয়ৰ প্ৰতিখনতে 100 জোপাকৈ গছপুলি ৰোপণ কৰা হৈছিল। এমাহৰ পিছত বাচি উঠা গছপুলিবোৰৰ হিচাপ এনে ধৰণে পোৱা গ'ল—

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

পঢ়ুৱৈয়ে যাতে সহজে বুজিব পাৰে তাৰ বাবে এনে বৃহৎ পৰিমাণৰ তথ্যক উপস্থাপন কৰিবলৈ হ'লে ইয়াক 20-29, 30-39, . . ., 90-99 আদি শ্ৰেণীত সংকুচিত কৰি লব লাগে (যিহেতু তথ্যবোৰ 23 পৰা 98 লৈ সিঁচৰিত হৈ আছে)। এই ভাগবোৰক কোৱা হয় শ্ৰেণী (class) বা শ্ৰেণী অন্তৰাল (class-interval) আৰু সিঁহতৰ আকাৰক কোৱা হয় শ্ৰেণী আকাৰ (class-size) বা শ্ৰেণী প্ৰস্থ (class width) যাৰ মান এই ক্ষেত্ৰত 10। এই শ্ৰেণীসমূহৰ প্ৰত্যেকৰ ক্ষেত্ৰত নিম্নতম মানটোক কোৱা হয় নিম্ন শ্ৰেণী সীমা (lower class limit) আৰু উচ্চতম মানটোক কোৱা হয় উচ্চ শ্ৰেণী সীমা (upper class limit)। উদাহৰণ স্বৰূপে, 20-29 শ্ৰেণীটোৰ ক্ষেত্ৰত নিম্ন শ্ৰেণী সীমা 20 আৰু উচ্চ শ্ৰেণী সীমা 29।

আকৌ, মন কৰা যে দাগ চিহ্নৰ ব্যৱহাৰেৰে ওপৰোক্ত তথ্যখিনিক নিম্নোক্ত ধৰণে তালিকাৰ ৰূপত সংকুচিত কৰি উপস্থাপন কৰিব পাৰি।

তালিকা 14.2

বাছি উঠা গছপুলিৰ সংখ্যা	দাগচিহ্ন	বিদ্যালয়ৰ সংখ্যা (বাৰংবাৰতা)
20 - 29	III	3
30 - 39	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
40 - 49	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
50 - 59	~~IIII~~ III	8
60 - 69	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
70 - 79	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
80 - 89	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	23
90 - 99	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
মুঠ		**100**

এই ৰূপত উপস্থাপন কৰিলে তথ্যসমূহ সৰলীকৃত আৰু সংকুচিত হৈ পৰে; লগতে ই চকুৰ পচাৰতে তথ্যবোৰৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ বৈশিষ্ট্যসমূহ বুজাত সহায়ক হৈ পৰে। ইয়াক কোৱা হয় শ্ৰেণীভুক্ত বা বৰ্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা (grouped frequency distribution table)। ইয়াৰ পৰা আমি সহজে বুজিব পাৰো যে 50% বা ততোধিক গছপুলি 8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71 খন বিদ্যালয়ত বাচি উঠিছিল।

আমি লক্ষ্য কৰিছো যে তালিকাখনৰ শ্ৰেণীসমূহ পৰস্পৰ ওপৰা-উপৰি নোহোৱা অৰ্থাৎ পৰস্পৰ অসংলগ্ন (non-overlapping)। মন কৰা যে আমি কম প্ৰস্থৰ অধিক শ্ৰেণী নাইবা বেছি প্ৰস্থৰ কম সংখ্যক শ্ৰেণীও ল'ব পাৰিলোহেঁতেন! যেনে অন্তৰলবোৰ 22-26, 27-31,.... ইত্যাদি ধৰণে ল'ব পৰা গ'লহেঁতেন! গতিকে, শ্ৰেণীসমূহ অসংলগ্ন হোৱাৰ বাহিৰে এই ক্ষেত্ৰত অন্য কোনো ধৰা বন্ধা নিয়ম নাই।

উদাহৰণ 4 ঃ এটা শ্ৰেণীৰ 38 গৰাকী ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ ওজন বুজোৱা নিম্নোক্ত বাৰংবাৰতা তালিকাখন বিবেচনা কৰোঁ আঁহা—

তালিকা 14.3

ওজন (কিঃ গ্ৰাঃত)	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
31 - 35	9
36 - 40	5
41 - 45	14
46 - 50	3
51 - 55	1
56 - 60	2
61 - 65	2
66 - 70	1
71 - 75	1
মুঠ	**38**

এতিয়া যদি 35.5 কিঃ গ্ৰাঃ আৰু 40.5 কিঃ গ্ৰাঃ ওজনৰ দুগৰাকী নতুন ছাত্ৰ/ছাত্ৰী শ্ৰেণীটোত চামিল হয় তেন্তে কোন অন্তৰালত তেওঁলোকক অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব লাগিব? আমি 35 বা 40ত শেষ হোৱা অন্তৰালত তেওঁলোকক অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব নোৱাৰো নাইবা পৰৱৰ্তী অন্তৰালবোৰতো অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব নোৱাৰো। ইয়াৰ কাৰণ হ'ল— দুটা ওচৰা ওচৰি অন্তৰালৰ উচ্চসীমা আৰু নিম্নসীমাৰ মাজত খালী ঠাই ৰখা আছে। গতিকে আমি অন্তৰালবোৰক এনেভাৱে ভাগ কৰিব লাগিব যাতে ওচৰা ওচৰি অন্তৰালৰ উচ্চসীমা আৰু নিম্নসীমা একে হয়। ইয়াৰ বাবে আমি এটা অন্তৰাল বা শ্ৰেণীৰ উচ্চসীমা আৰু পৰৱৰ্তী অন্তৰাল বা শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমাৰ পাৰ্থক্য নিৰ্ণয় কৰোঁহক। তাৰ পিছত প্ৰতিটো উচ্চসীমাৰ লগত এই পাৰ্থক্যৰ আধা যোগ দিওঁ আৰু প্ৰতিটো নিম্নসীমাৰপৰা সেই একে পৰিমাণ বাদ দিওঁ।

উদাহৰণ স্বৰূপে— 31–35 আৰু 36–40 শ্ৰেণী দুটা বিবেচনা কৰা হ'ল।

36–40 শ্ৰেণীটোৰ নিম্নসীমা 36

31–35 শ্ৰেণীটোৰ উচ্চসীমা 35

পাৰ্থক্য = 36 – 35 = 1

গতিকে, পাৰ্থক্যৰ আধা = $\frac{1}{2}$ = 0.5

সেয়েহে, 31–35ৰ পৰা প্ৰাপ্ত নতুন শ্ৰেণী অন্তৰালটো হ'ল (31 – 0.5)–(35 + 0.5) অৰ্থাৎ 30.5–35.5

সদৃশধৰণে, 36–40ৰ পৰা প্ৰাপ্ত নতুন শ্ৰেণী অন্তৰালটো হ'ল (36 – 0.5)–(40 + 0.5) অৰ্থাৎ 35.5–40.5

একে পদ্ধতিৰে আগবাঢ়িলে প্ৰাপ্ত অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী অন্তৰালসমূহ এনেধৰণৰ হ'ব—

30.5–35.5, 35.5–40.5, 40.5–45.5, 45.5–50.5 50.5–55.5,
55.5–60.5, 60.5–65.5, 65.5–70.5, 70.5–75.5

এতিয়া শ্ৰেণীটোত অন্তৰ্ভুক্ত হোৱা নতুন ছাত্ৰ/ছাত্ৰী দুগৰাকীৰ ওজনসমূহ আমি সন্নিৱিষ্ট কৰিব পাৰোহঁক। কিন্তু, এইখিনিতে অন্য এক সমস্যাই দেখা দিয়ে কাৰণ 35.5 মানটো 30.5–35.5 আৰু 35.5–40.5 দুয়োটা শ্ৰেণী অন্তৰালতে বিৰাজ কৰিছে। তোমাৰ মতে, কোনটো শ্ৰেণী অন্তৰালত এই ওজন অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব লাগিব?

যদি উভয় অন্তৰালতে ইয়াক বিবেচনা কৰা হয় তেন্তে গণনাত ই দুবাৰ বিবেচিত হ'ব।

প্ৰচলিত প্ৰথা অনুসৰি, 35.5 মানটো আমি 35.5–40.5 শ্ৰেণী অন্তৰালতহে গণ্য কৰিম, 30.5–35.5 অত নহয়। সদৃশভাৱে 40.5 মানটো 40.5 - 45.5অত গণ্য কৰা হ'ব, 35.5 - 40.5অত নহয়।

গতিকে, 35.5 কিঃ গ্ৰাঃ আৰু 40.5 কিঃ গ্ৰাঃ পৰিমাণৰ নতুন ওজন দুটা ক্ৰমে 35.5–40.5 আৰু 40.5–45.5 শ্ৰেণী অন্তৰাল দুটাত সন্নিৱিষ্ট হ'ব। এতিয়া এইবোৰ গৃহীত ধাৰণা সাপেক্ষে নতুন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাখন নিম্নোক্ত ধৰণৰ হ'ব—

তালিকা 14.4

ওজন (কিঃগ্ৰাঃত)	ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
30.5-35.5	9
35.5-40.5	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
60.5-65.5	2
65.5-70.5	1
70.5-75.5	1
মুঠ	**40**

এতিয়া কাৰ্য-1অত তুমি সংগ্ৰহ কৰা তথ্যসমূহলৈ আমি ঘূৰি যাওহঁক। এইবাৰ তোমাক এই তথ্যবোৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনত উপস্থাপন কৰিবলৈ কোৱা হ'ল।

কাৰ্য 2 ঃ চাৰিওটা দলকে একে ৰাখি তোমালোকৰ তথ্যবোৰক বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকালৈ সলনি কৰা। তথ্যৰ প্ৰকৃতি, পৰিসৰৰ কথা মনত ৰাখি যথোপযুক্ত শ্ৰেণী আকাৰেৰে সুবিধাজনকভাৱে শ্ৰেণীসমূহ বাছনি কৰা।

অনুশীলনী 14.2

1. অষ্টম শ্ৰেণীৰ 30 গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ তেজৰ গ্ৰুপ নিম্নোক্ত ধৰণে লিপিবদ্ধ কৰা হ'ল—

A,	B,	O,	O,	AB,	O,	A,	O,	B,	A,
O,	B,	A,	O,	O,	A,	AB,	O,	A,	A,
O,	O,	AB,	B,	A,	O,	B,	A,	B,	O

বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাৰ ৰূপত তথ্যখিনিক প্ৰদৰ্শণ কৰা। ছাত্ৰ/ছাত্ৰীসকলৰ ভিতৰত তেজৰ গ্ৰুপ আটাইতকৈ সাধাৰণ (সঘনাই উপলব্ধ) আৰু কোনটো আটাইতকৈ দুষ্প্ৰাপ্য?

2. 40 গৰাকী অভিযন্তাৰ বাসস্থানৰ পৰা তেওঁলোকৰ কৰ্মস্থানৰ দূৰত্ব (কিঃ মিঃত) নিম্নোক্ত ধৰণে পোৱা গ'ল।

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

ওপৰোক্ত তথ্যৰ বাবে এখন শ্ৰেণীভুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰা যাৰ শ্ৰেণী প্ৰস্থৰ আকাৰ 5 আৰু প্ৰথম শ্ৰেণী আন্তৰালটো হ'ল 0–5 (5 অন্তৰ্ভুক্ত নহয়)। এই তালিকাকৃতিৰ উপস্থাপনৰপৰা কি মূল বৈশিষ্ট্য তোমাৰ চকুত পৰিছে?

3. কোনো এখন মহানগৰৰ 30 দিনীয়া এটা মাহৰ আপেক্ষিক আৰ্দ্ৰতাৰ পৰিমাণ (শতাংশত) আছিল এনেধৰণৰ—

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) শ্ৰেণী অন্তৰাল 84–86, 86–88, ইত্যাদি ধৰণে লৈ এখন শ্ৰেণীভুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰা।

(ii) এই তথ্যখিনিয়ে কোন মাহ বা ঋতুৰ নিৰ্দেশ কৰে বুলি ভাবা?

(iii) তথ্যখিনিৰ বিস্তাৰ অৰ্থাৎ পৰিসৰ কি?

4. আসন্ন চেণ্টি-মিটাৰত 50 গৰাকী ছাত্ৰৰ উচ্চতা তলত উল্লেখ কৰা ধৰণে পোৱা গ'ল—

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

(i) 160–165, 165–170, ইত্যাদি শ্ৰেণী অন্তৰাল লৈ ওপৰোক্ত তথ্যখিনিক এখন শ্ৰেণীভুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত সজোৱা।

(ii) তালিকাৰপৰা তেওঁলোকৰ উচ্চতা সম্পৰ্কে কেনে ধৰণৰ সিদ্ধান্তত উপনীত হ'বা?

5. এখন মহানগৰৰ প্ৰতি PPM(parts per million) বায়ুত ছালফাৰ ডায়'ক্সাইডৰ গাঢ়তা জুখিবৰ বাবে এক অধ্যয়ন চলোৱা হৈছিল। 30 দিনৰ অধ্যয়নত লাভ কৰা তথ্যসমূহ আছিল এনেধৰণৰ—

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) 0.00–0.04, 0.04–0.08, এনেধৰনে শ্ৰেণী অন্তৰাল লৈ এই তথ্যৰাজিৰ পৰা এখন শ্ৰেণীভুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰি উলিওৱা।

(ii) কিমান দিন ছালফাৰ ডায়'ক্সাইডৰ গাঢ়তা 0.11 PPMতকৈ বেছি আছিল?

6. তিনিটা মুদ্ৰা একে সময়তে 30 বাৰ টছ কৰা হ'ল। প্ৰতি বাৰতে উঠা মুণ্ডৰ সংখ্যা নিম্নোক্ত ধৰণে লিপিবদ্ধ কৰা হ'ল।

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

ওপৰোক্ত তথ্যৰ বাবে এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰা।

7. তলত πৰ মান 50 দশমিক স্থানলৈ উলিয়াই দেখুওৱা হৈছে—

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) দশমিক বিন্দুৰ পিছত বহা 0ৰ পৰা 9লৈ অংকবোৰৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ এখন প্ৰস্তুত কৰি উলিওৱা।

(ii) সৰ্বাধিক আৰু সৰ্বনিম্ন বাৰ প্ৰাপ্ত হোৱা অংক দুটা নিৰ্ণয় কৰা।

8. 30 জন শিশুৱে আগৰ সপ্তাহত দূৰদৰ্শনৰ কাৰ্যসূচী কিমান ঘণ্টাকৈ চাইছিল সেই সম্পৰ্কীয় তথ্যসমূহ তলত দিয়া ধৰণে পোৱা গ'ল—

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) শ্ৰেণী প্ৰস্থ 5 আৰু এটা শ্ৰেণী অন্তৰাল 5–10 ধৰি এই তথ্যৰপৰা এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰা।

(ii) সপ্তাহটোত 15 ঘণ্টা বা তাতোকৈ অধিক সময় টিভি চোৱা শিশুৰ সংখ্যা কিমান আছিল?

9. এটা কোম্পানীয়ে এক বিশেষ ধৰণৰ গাড়ীৰ বেটাৰী প্ৰস্তুত কৰে। এনে ধৰণৰ 40 টা বেটাৰীৰ আয়ুকাল (বছৰৰ হিচাপত) নিম্নোক্ত ধৰণে লিপিবদ্ধ কৰা হৈছে।

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

0.5 আকাৰৰ শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ আৰু প্ৰথম শ্ৰেণী 2–2.5 লৈ তথ্যসমূহৰপৰা এখন বৰ্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰা।

14.4 তথ্যৰ লৈখিক উপস্থাপনা (Graphical Representation of Data)

তালিকাৰদ্বাৰা তথ্যৰ উপস্থাপনা সম্পৰ্কে ইতিমধ্যে আলোচনা আগবঢ়োৱা হ'ল। এতিয়া আমি তথ্যৰ অন্য এক উপস্থাপন পদ্ধতি অৰ্থাৎ লৈখিক উপস্থাপন পদ্ধতিৰ প্ৰতি মনোনিৱেশ কৰিম। যথোপযুক্তভাৱেই কোৱা হয় যে একোখন ছবি সহস্ৰ শব্দতকৈও অধিক উপযোগী। সচৰাচৰ, লেখৰ মাধ্যমত গাইগুটিয়া বিষয়সমূহৰ তুলনাক আটাইতকৈ ভালদৰে প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰি। তেতিয়া প্ৰকৃত তথ্যবোৰতকৈ এই ধৰণৰ প্ৰদৰ্শন বেছি ভালদৰে বোধগম্য হয়। এই অনুচ্ছেদত আমি নিম্নোক্ত ধৰণৰ লৈখিক প্ৰদৰ্শন অধ্যয়ন কৰিম।

(A) দণ্ডলেখ (Bar graph)

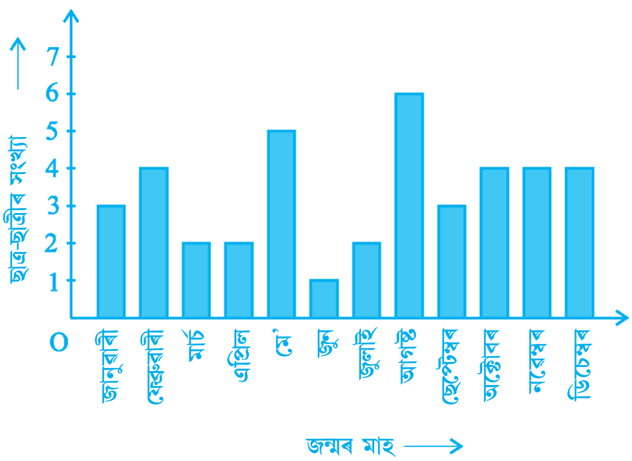
(B) সমান আৰু অসমান প্ৰস্থৰ স্তম্ভলেখ (Histograms of uniform width and of varying widths)

(C) বাৰংবাৰতা বহুভুজ (Frequency polygons)

(A) দণ্ডলেখ (Bar Graphs)

ইতিমধ্যে আগৰ শ্ৰেণীতে তোমালোকে দণ্ডলেখৰ বিষয়ে শিকিছা আৰু অংকনো কৰিছা। ইয়াত আমি অধিক আনুষ্ঠানিকভাৱে সেইবোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। স্মৰণ কৰা যে দণ্ডলেখ হ'ল ছৱিৰ মাধ্যমত তথ্যৰ প্ৰকাশ আৰু সচৰাচৰ কোনো চলক নিৰ্দেশ কৰা এডাল অক্ষত (যেনে x-অক্ষ) সমান অন্তৰালত একে প্ৰস্থযুক্ত দণ্ড কিছুমানৰদ্বাৰা ইয়াক প্ৰকাশ কৰা হয়। চলকটোৰ মানবোৰ প্ৰদৰ্শন কৰা হয় আন এডাল অক্ষত (যেনে y-অক্ষ) আৰু দণ্ডৰ উচ্চতা নিৰ্ভৰ কৰে চলকটোৰ মানৰ ওপৰত।

উদাহৰণ 5 ঃ নৱম শ্ৰেণীৰ কোনো এটা শাখাৰ 40 গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীক তেওঁলোকৰ জন্ম মাহৰ বিষয়ে সোধা হৈছিল আৰু সেই অনুসাৰে পোৱা তথ্যসমূহৰপৰা নিম্নোক্ত লেখটো প্ৰস্তুত কৰা হৈছিল।



চিত্ৰ 14.1

ওপৰৰ দণ্ডলেখটো মন কৰা আৰু তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) নৱেম্বৰ মাহত কেইগৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ জন্ম হৈছিল?

(ii) কোন মাহত সৰ্বোচ্চ সংখ্যক ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ জন্ম হৈছিল?

সমাধান ঃ মন কৰা যে ইয়াত চলক হ'ল 'জন্মমাহ' আৰু চলকৰ মান হ'ল 'জন্ম লাভ কৰা ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ সংখ্যা'।

(i) 4 গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ নৱেম্বৰ মাহত জন্ম হৈছিল।

(ii) সৰ্বোচ্চ সংখ্যক ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ জন্ম হৈছিল আগষ্ট মাহত।

এতিয়া আমি পৰৱৰ্তী উদাহৰণৰ সহায়ত দণ্ডলেখ কিদৰে তৈয়াৰ কৰা হয় মনত পেলাই চাওঁহক।

উদাহৰণ 6 ঃ মাহিলি 20,000 টকা আয়ৰ এটা পৰিয়ালৰ বিভিন্ন শিতানত মাহেকীয়া খৰচৰ হিচাপ তলত দিয়া ধৰণে দেখুওৱা হৈছে ঃ

তালিকা 14.5

শিতান	খৰচ (হেজাৰ টকাত)
গেলামাল	4
ভাড়া	5
ল'ৰা ছোৱালীৰ শিক্ষা	5
ঔষধ	2
ইন্ধন	2
আমোদ-প্ৰমোদ	1
অন্যান্য	1

ওপৰোক্ত তথ্যৰাজিৰ বাবে দণ্ডলেখ এটা অংকন কৰা।

সমাধান ঃ পৰৱৰ্তী ঢাপসমূহৰ মাজেৰে এই তথ্যৰাজিৰপৰা আমি এটা দণ্ডলেখ অংকন কৰিম। মন কৰা যে দ্বিতীয় স্তম্ভত বৰ্ণিত একক হ'ল হেজাৰ টকা। গতিকে গেলামালৰ খৰচ 4 মানে বুজিব লাগিব 4000 টকা।

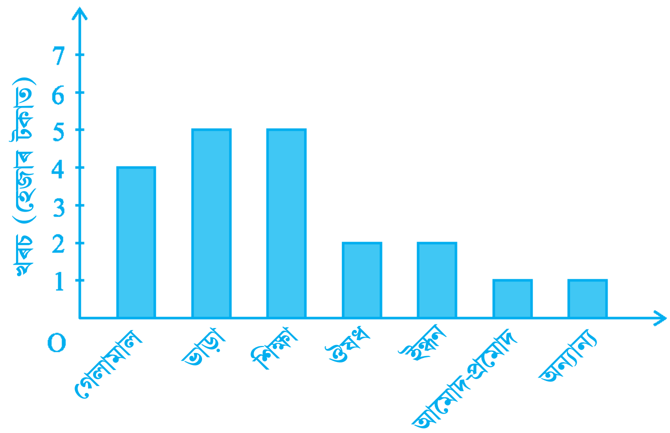
1. আনুভূমিক অক্ষ ৰেখাত যিকোনো একক ধৰি শিতানসমূহ (চলক) নিৰ্দেশ কৰিম কাৰণ দণ্ডৰ প্ৰস্থ ইয়াত গুৰুত্বপূৰ্ণ নহয়। কিন্তু স্পষ্টতাৰ বাবে আটাইবোৰ দণ্ডৰ প্ৰস্থ সমান আৰু সিহঁতৰ মাজৰ পাৰস্পৰিক অন্তৰ আমি ৰাখিম। একোটা শিতানক এক এককৰদ্বাৰা নিৰ্দেশ কৰা হওঁক।

2. খৰচৰ পৰিমাণক আমি উলম্ব অক্ষত নিৰ্দেশ কৰিমহক। যিহেতু সৰ্বোচ্চ খৰচৰ পৰিমাণ 5000 টকা গতিকে, 1 একক = 1000 টকা ল'ব পৰা যায়।

3. প্ৰথম শিতান অৰ্থাৎ গেলামালক নিৰ্দেশ কৰিবলৈ আমি এটা আয়তাকাৰৰ দণ্ড ল'ব পাৰোঁ যাৰ প্ৰস্থ 1 একক আৰু উচ্চতা 4 একক।

4. সদৃশ ধৰণে, আনবোৰ শিতানক নিৰ্দেশ কৰিব পাৰি যাতে প্ৰতিবোৰ ওচৰা ওচৰি দণ্ডৰ মাজত 1 এককৈ অন্তৰ থাকে।

দণ্ডলেখটো চিত্ৰ 14.2ত আঁকি দেখুওৱা হ'ল।



চিত্ৰ 14.2

ইয়াৰ তথ্যৰাজিৰ আপেক্ষিক বৈশিষ্টসমূহ তোমালোকে চকুৰ পচাৰতে অতি সহজে বুজিব পাৰিবা। উদাহৰণস্বৰূপে শিক্ষাৰ শিতানত খৰচ চিকিৎসাৰ দুগুণতকৈ অধিক বুলি বুজিব পাৰি। সেয়েহে কোনো কোনো ক্ষেত্ৰত শ্ৰেণীভুক্ত তালিকাতকৈ ই অধিক উন্নত ৰূপত তথ্যক প্ৰকাশ কৰে।

কাৰ্য - 1ৰ একেবোৰ দলেই আগবঢ়োৱা তথ্যখিনিকে লৈ এইবাৰ এই তথ্যখিনিক উপযুক্ত দণ্ডলেখৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

এতিয়া আমি চাওঁহক— কিদৰে অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী অন্তৰালৰ কাৰণে বাৰংবাৰতা তালিকাক লেখৰদ্বাৰা প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

(B) স্তম্ভলেখ (Histogram)

স্তম্ভলেখ দণ্ডলেখৰ নিচিনাই এক উপস্থাপন, কিন্তু ইয়াক অবিচ্ছিন্ন অন্তৰালৰ ক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, কোনো এটা শ্ৰেণীৰ 36 গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ ওজন বুজোৱা বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা-14.6 খন বিবেচনা কৰা।

তালিকা 14.6

ওজন (কিঃ গ্ৰাঃত)	ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
30.5–35.5	9
35.5–40.5	6
40.5–45.5	15
45.5–50.5	3
50.5–55.5	1
55.5–60.5	2
মুঠ	**36**

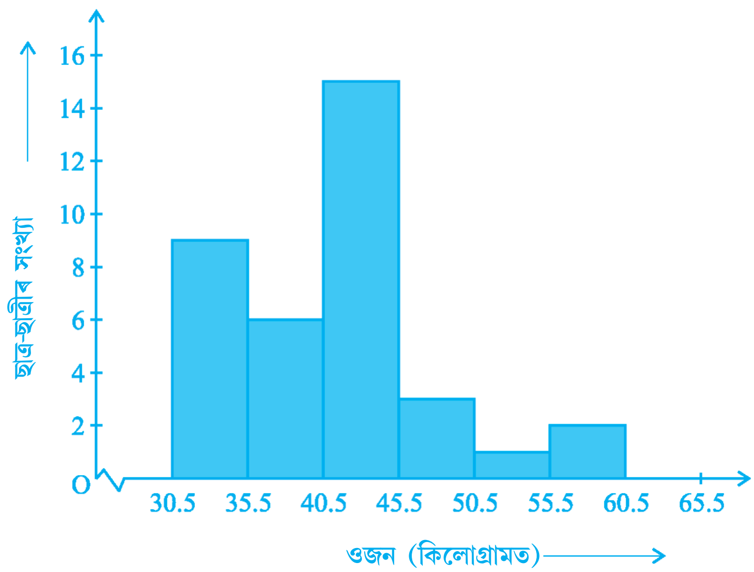
প্ৰদত্ত তথ্যখিনিক আমি নিম্নোক্তভাৱে লেখত প্ৰকাশ কৰোহঁক—

(i) কোনো উপযুক্ত মাপনী (scale) ব্যৱহাৰ কৰি আনুভূমিক অক্ষত ওজনৰ মানবোৰ নিৰ্দেশ কৰোহঁক। মাপনী হিচাপে আমি 1 চে.মি. = 5 কিঃ গ্ৰাঃ লব পাৰো। আকৌ প্ৰথম শ্ৰেণী অন্তৰালটো যিহেতু 0ৰ পৰিৱৰ্তে 30.5ৰ পৰা আৰম্ভ হৈছে গতিকে এই কথাটো লেখত বুজাবলৈ আমি লেখৰ অক্ষডালত এটা ভাঁজ বা ফাঁক ৰাখিব পাৰোঁ।

(ii) কোনো উপযুক্ত মাপনী ব্যৱহাৰ কৰি ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ সংখ্যা (বাৰংবাৰতা)ক আমি উলম্ব অক্ষত নিৰ্দেশ কৰোঁহক। যিহেতু সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা 15, গতিকে মাপনী নিৰ্ণয়ৰ সময়ত সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতাক লেখত প্ৰকাশ কৰিব পৰা বিষয়টোৰ প্ৰতি মনোযোগ দিব লাগিব।

(iii) এতিয়া আমি কিছুমান আয়ত নাইবা আয়তাকাৰ দণ্ড আকোঁহক যিবিলাকৰ প্ৰস্থ শ্ৰেণী আকাৰৰ সমান আৰু দীঘ অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাৰংবাৰতাৰ সমান। উদাহৰণস্বৰূপে 30.5–35.5 শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাবে আয়তৰ প্ৰস্থ 1 চে.মি. আৰু দীঘ 4.5 চে.মি.।

(iv) এইদৰে, চিত্ৰ 14.3ত দেখুৱা ধৰণে আমি লেখটো পাম।



চিত্ৰ 14.3

মন কৰা যে ওচৰা ওচৰি আয়তসমূহৰ মাজত যিহেতু কেনো ফাঁক নাই, গতিকে প্ৰাপ্ত লেখটো এটা গোটা চিত্ৰৰ দৰেই হৈছে। ইয়াকে কোৱা হয় স্তম্ভলেখ (*histogram*) আৰু ই হ'ল অবিচ্ছিন্ন অন্তৰালযুক্ত বৰ্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ লৈখিক নিদৰ্শন। আকৌ, দণ্ডলেখৰ বিপৰীতে ইয়াৰ অংকনত দণ্ডৰ প্ৰস্থই চকুত লগা ভূমিকা পালন কৰে।

দৰাচলতে এই ক্ষেত্ৰত ঠিয় আয়তবোৰৰ কালিবোৰ অনুৰূপ বাৰংবাৰতাৰ সমানুপাতিক।

অৱশ্যে যিহেতু আটাইবোৰ আয়তৰ প্ৰস্থ সমান, সিহঁতৰ দীঘসমূহ অনুৰূপ বাৰংবাৰতাৰ সমানুপাতিক, সেইবাবেই ওপৰৰ (iii)ত উল্লেখ কৰা ধৰণে দীঘবোৰ লোৱা হৈছে।

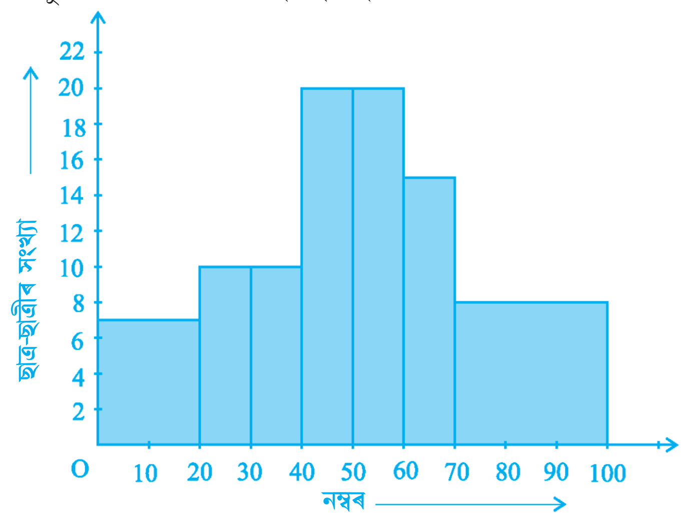
এতিয়া ওপৰত উল্লেখ কৰাতকৈ ব্যতিক্ৰম এটা পৰিস্থিতি বিবেচনা কৰা যাওঁক।

উদাহৰণ 7 ঃ এজন শিক্ষকে 100 নম্বৰৰ গণিতৰ পৰীক্ষাৰ জৰিয়তে ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ দুটা দলৰ পাৰদৰ্শিতা বিশ্লেষণ কৰি চাব বিচাৰিলে। তেওঁলোকৰ পাৰদৰ্শিতালৈ চাই তেখেতে দেখিলে যে অল্পসংখ্যক ছাত্ৰ/ছাত্ৰীয়ে 20ৰ তলত আৰু অল্পসংখ্যক ছাত্ৰ/ছাত্ৰীয়ে 70 বা ততোধিক নম্বৰ লাভ কৰিছে। গতিকে তেখেতে নম্বৰসমূহক কিছুমান অসমান শ্ৰেণী অন্তৰাল যেনে 0–20, 20–30, . . ., 60–70, 70–100 আদিত বিতৰণ কৰিবলৈ সিদ্ধান্ত ল'লে আৰু নিম্নোক্ত তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰিলে—

তালিকা 14.7

নম্বৰ	ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70–ওপৰত	8
সৰ্বমুঠ	**90**

চিত্ৰ 14.4ত দেখুওৱা ধৰণে এগৰাকী ছাত্ৰই এই তালিকাখনৰ পৰা এটা স্তম্ভলেখ প্ৰস্তুত কৰি উলিয়ালে।



চিত্ৰ 14.4

এই লৈখিক নিদৰ্শনটো ভালদৰে পৰীক্ষা কৰা। ই তথ্যৰাজিক শুদ্ধভাৱে প্ৰতিনিধিত্ব কৰিছে বুলি তুমি ভাবানে? নহয়, এই লেখটোৱে বৰং, এক বিভ্ৰান্তিকৰ ছবিহে দাঙি ধৰিছে। যিদৰে আমি পূৰ্বতে উল্লেখ কৰি আহিছোঁ, স্তম্ভলেখত আয়তবোৰৰ কালিসমূহ বাৰংবাৰতাৰ সৈতে সমানুপাতিক। আগতে এই সমস্যাটো উদ্ভৱ হোৱা নাছিল কাৰণ, আয়তসমূহৰ প্ৰস্থ আছিল পৰস্পৰ সমান। কিন্তু ইয়াত, আয়তৰ প্ৰস্থসমূহ যিহেতু বেলেগ বেলেগ, গতিকে ওপৰৰ স্তম্ভলেখটোৱে শুদ্ধ ছবি দাঙি ধৰিব পৰা নাই। উদাহৰণ স্বৰূপে, ই 60–70 তকৈ 70–100 অন্তৰালত বাৰংবাৰতা বেছি দেখুৱাইছে যিটো সত্য নহয়।

গতিকে, আয়তসমূহৰ দীঘ নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত আমি কিছু সংশোধনী আৰোপ কৰিব লাগিব যাতে সিহঁতৰ কালিসমূহ অনুৰূপ বাৰংবাৰতাৰ সৈতে সমানুপাতী হয়। এই ক্ষেত্ৰত অনুসৰণ কৰিবলগীয়া পৰ্যায়সমূহ তলত উল্লেখ কৰা ধৰণৰ—

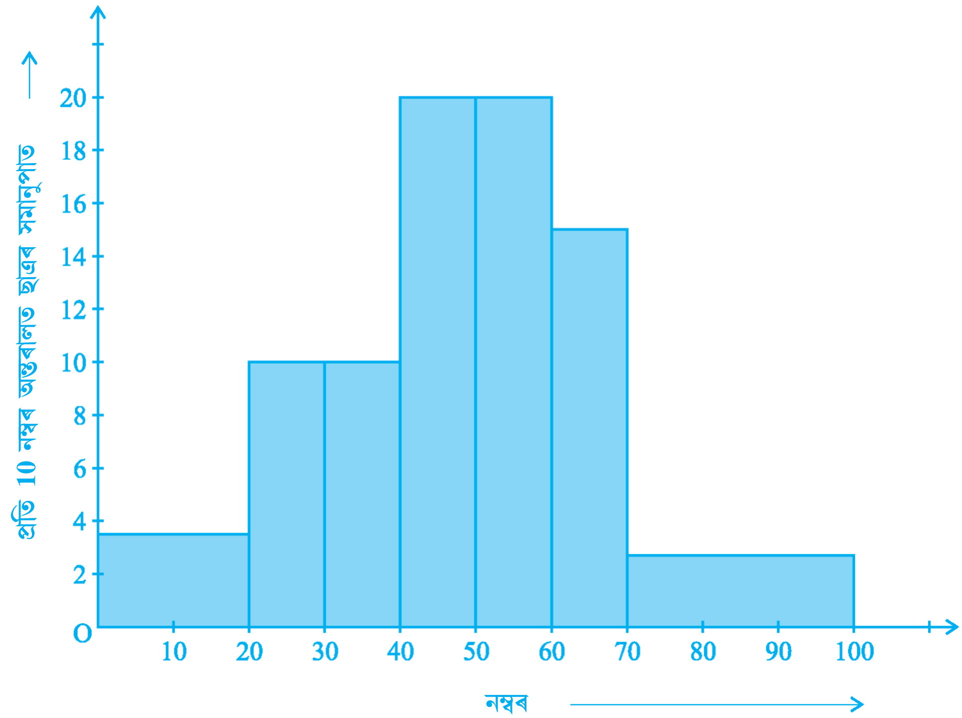
1. এটা শ্ৰেণী অন্তৰাল লোৱা যাৰ শ্ৰেণী প্ৰস্থ সৰ্বনিম্ন। পূৰ্বৱৰ্তী উদাহৰণটোত সৰ্বনিম্ন আকাৰযুক্ত শ্ৰেণী অন্তৰালটোৰ আকাৰ 10।
2. ইয়াৰ পাছত আয়তসমূহৰ দীঘবোৰ এনেভাৱে সংশোধন কৰিব লাগিব যাতে সেইবোৰ শ্ৰেণী আকাৰ 10ৰ সমানুপাতী হয়।

উদাহৰণ হিচাপে, যেতিয়া শ্ৰেণী অন্তৰালৰ আকাৰ 20 আছিল, আয়তৰ দীঘ আছিল 7 গতিকে শ্ৰেণী অন্তৰলাৰ আকাৰ 10 হ'লে আয়তৰ দীঘ হ'ব $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$। অন্যবোৰৰ ক্ষেত্ৰতো এনেধৰণে আগবাঢ়িলে, আমি পৰৱৰ্তী তালিকাখন পাম—

তালিকা 14.8

নম্বৰ	বাৰংবাৰতা	শ্ৰেণী প্ৰস্থ	আয়তৰ দৈৰ্ঘ্য
0–20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50–60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

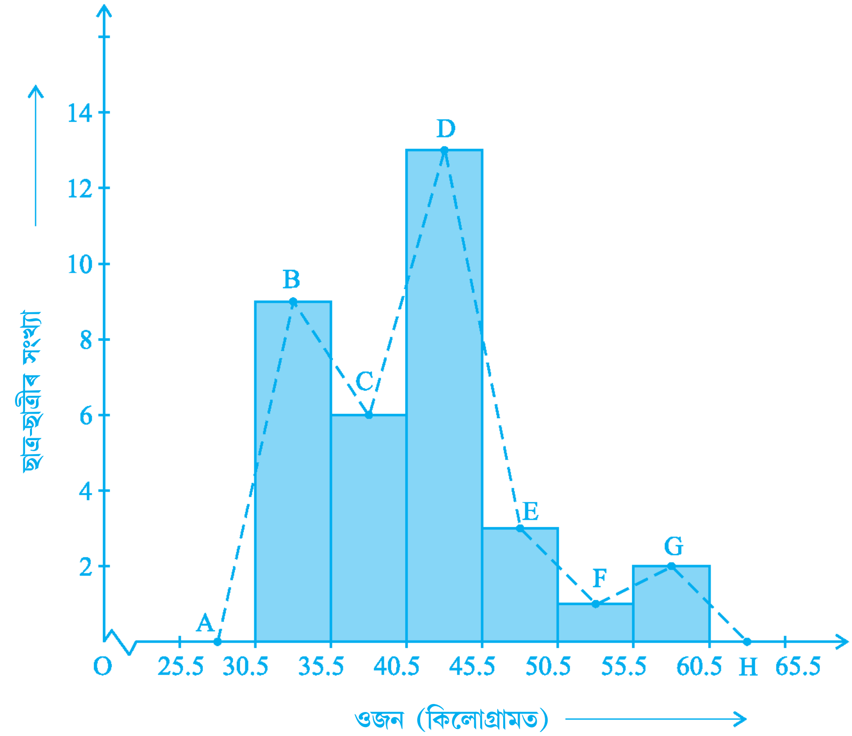
যিহেতু প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে 10 নম্বৰৰ অন্তৰালত এই দীঘবোৰ নিৰ্ণয় কৰা হৈছে সেয়েহে এই দীঘবোৰক আমি 'প্ৰতি 10 নম্বৰ অন্তৰালত ছাত্ৰৰ সমানুপাত' আখ্যা দিব পাৰোঁ। গতিকে অসমান শ্ৰেণী অন্তৰালত শুদ্ধ স্তম্ভলেখ চিত্ৰ 14.5ৰ ধৰণে আগবঢ়াব পাৰি।



চিত্ৰ 14.5

(C) বাৰংবাৰতা বহুভূজ (Frequency Polygon)

পৰিমাণবাচক তথ্য আৰু ইয়াৰ বাৰংবাৰতাক উপস্থাপন কৰাৰ আৰু আন এক দৃশ্যমান পদ্ধতি আছে ই হ'ল এক বহুভূজ। আমি কি বুজাব বিচাৰিছোঁ সেইটো জানিবলৈ চিত্ৰ 14.3ত দেখুওৱা স্তম্ভলেখটো বিবেচনা কৰা। এই স্তম্ভলেখটোৰ সন্নিহিত আয়তবোৰৰ ওপৰৰ পিনে থকা বাহুবোৰৰ মধ্যবিন্দুবিলাক একাদিক্ৰমে ৰেখাখণ্ডৰদ্বাৰা সংযোগ কৰা হ'ল। এই মধ্যবিন্দুবোৰক B, C, D, E, F আৰু G বিন্দুৰে সূচোৱা হওঁক। ৰেখাখণ্ডৰে সংযোগ কৰিলে আমি BCDEFG চিত্ৰটো পাম (চিত্ৰ 14.6)। বহুভুজটো সম্পূৰ্ণ কৰাৰ বাবে আমি ধৰি ল'ম যে 30.5–35.5 শ্ৰেণী অন্তৰালৰ আগত এটা আৰু 55.5–60.5ৰ পাছত আন এটা শ্ৰেণী অন্তৰাল আছে যাৰ বাৰংবাৰতা শূন্য। ধৰা হ'ল এই শ্ৰেণী অন্তৰাল দুটাৰ মধ্যবিন্দু দুটা ক্ৰমে A আৰু H। তেতিয়া, চিত্ৰ 14.3ত দেখুওৱা তথ্যখিনিৰ অনুৰূপ বাৰংবাৰতা বহুভুজটো হ'ব ABCDEFGH। ইয়াক চিত্ৰ 14.6ত প্ৰদৰ্শন কৰা হ'ল।



চিত্ৰ 14.6

যদিও, সৰ্বনিম্ন শ্ৰেণী অন্তৰালৰ আগত আৰু সৰ্বোচ্চ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ পিছত কোনো শ্ৰেণী অন্তৰাল নাথাকে, তথাপি শূন্য বাৰংবাৰতাযুক্ত দুটা শ্ৰেণী অন্তৰাল সংযোজন কৰাৰ ফলত বাৰংবাৰতা বহুভুজটোৰ কালি আৰু স্তম্ভলেখটোৰ কালি একেই হৈ পৰে। কিয় এনে হয়? (ইংগিত ঃ সৰ্বসম ত্ৰিভুজৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰা)।

এতিয়া প্ৰশ্ন হ'ল— যেতিয়া প্ৰথম শ্ৰেণী-অন্তৰালৰ আগত কোনো শ্ৰেণী নাথাকে তেতিয়া কিদৰে বহুভুজটো সম্পূৰ্ণ কৰা হ'ব? এনেধৰণৰ এক পৰিস্থিতিৰ কথা বিবেচনা কৰা যাওঁক।

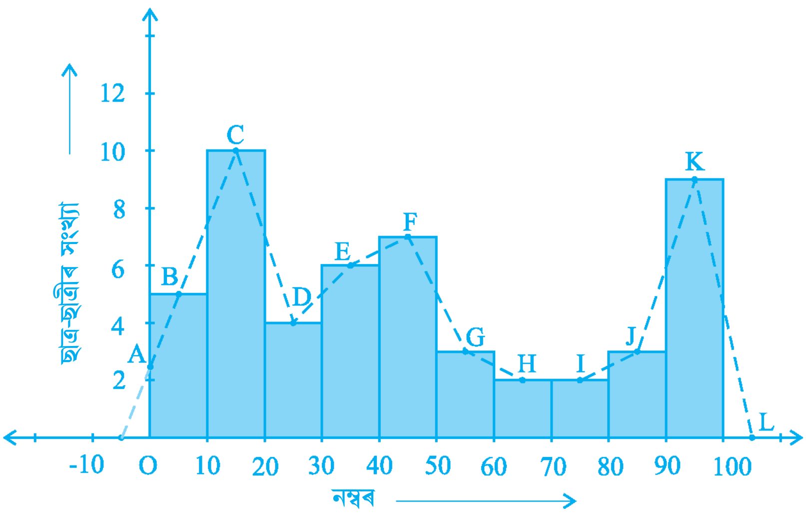
উদাহৰণ 8 ঃ কোনো পৰীক্ষাত এটা শ্ৰেণীৰ 51 গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীয়ে তালিকা 14.9ত দিয়া 100ৰ ভিতৰত লাভ কৰা নম্বৰসমূহ বিবেচনা কৰা—

তালিকা 14.9

নম্বৰ	ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
মুঠ	**51**

এই বাৰংবাৰতা বিভাজন তলিকাখনৰ অনুৰূপ বাৰংবাৰতা বহুভুজটো অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে তথ্যখিনিৰপৰা আমি এটা স্তম্ভলেখ অংকন কৰোঁ আৰু আয়তসমূহৰ ওপৰৰ বাহুবোৰৰ মধ্যবিন্দুবোৰক যথাক্ৰমে B, C, D, E, F, G, H, I, J, Kৰে চিহ্নিত কৰোহঁক। ইয়াত প্ৰথম শ্ৰেণী অন্তৰালটো 0–10; গতিকে 0–10 শ্ৰেণীটোৰ পূৰ্ব শ্ৰেণীটো পাবলৈ আমি আনুভূমিক অক্ষডালক ঋণাত্মক দিশত বঢ়াই দিওঁ আৰু কাল্পনিক শ্ৰেণী অন্তৰাল (–10)–0ৰ মধ্যবিন্দুটো উলিয়াই লওঁ। প্ৰথম বিন্দু Bক আমি আনুভূমিক অক্ষৰ ঋণাত্মক দিশত থকা শূন্য বাৰংবাৰতাযুক্ত



চিত্ৰ 14.7

শ্ৰেণী অন্তৰালৰ মধ্যবিন্দুৰ সৈতে সংযোগ কৰোঁহক। এই ৰেখাখণ্ডই উলম্ব অক্ষক যি বিন্দুত কাটে, সেই বিন্দুটোক Aৰে চিহ্নিত কৰা হ'ল। প্ৰদত্ত তথ্যৰ অন্তিম শ্ৰেণী অন্তৰালটোৰ পিছৰ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ মধ্যবিন্দুক Lৰ দ্বাৰা চিহ্নিত কৰা হ'ল। তেতিয়া OABCDEFGHIJKLয়েই হ'ল বাৰংবাৰতা বহুভুজ যিটোক চিত্ৰ 14.7অত আঁকি দেখুওৱা হৈছে।

স্তম্ভলেখ আঁকি নোলোৱাকৈ স্বাধীনভাৱেও বাৰংবাৰতা বহুভুজ আঁকিব পাৰি। ইয়াৰ বাবে আমি তথ্যত ব্যৱহাৰ হোৱা শ্ৰেণী অন্তৰালসমূহৰ মধ্যবিন্দুবোৰ পাব লাগিব। এই মধ্যবিন্দুবোৰকে কোৱা হয় শ্ৰেণী অন্তৰালসমূহৰ শ্ৰেণী-চিহ্ন (class-marks)।

কোনো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণী-চিহ্ন নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি শ্ৰেণীটোৰ নিম্নসীমা আৰু উচ্চসীমাৰ সমষ্টি উলিয়াই 2ৰে ভাগ কৰোঁ। এনেদৰে,

$$\text{শ্ৰেণী চিহ্ন} = \frac{\text{উচ্চসীমা} + \text{নিম্নসীমা}}{2}$$

এটি উদাহৰণ লোৱা যাওঁক।

উদাহৰণ 9 ঃ কোনো এখন নগৰৰ জীৱন ধাৰণৰ ব্যয় সূচকৰ ওপৰত চলোৱা এক অধ্যয়নৰ সাপ্তাহিক পৰ্যবেক্ষণৰ তথ্যসমূহ নিম্নোক্ত তালিকাত দিয়া ধৰণে পোৱা গ'ল।

সাৰণী 14.10

জীৱন ধাৰণৰ ব্যয় সূচক	সপ্তাহৰ সংখ্যা
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
মুঠ	**52**

স্তম্ভলেখ অংকন নকৰাকৈ তথ্যৰাজিৰপৰা এটা বাৰংবাৰতা বহুভুজ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু স্তম্ভলেখৰ সহায় নোলোৱাকৈ এটা বাৰংবাৰতা বহুভুজ আঁকিব বিচৰা হৈছে গতিকে প্ৰদত্ত শ্ৰেণীসমূহ যেনে 140–150, 150–160,.... আদিৰ শ্ৰেণী চিহ্নবোৰ উলিয়াই ল'ব লাগিব। 140–150 শ্ৰেণীটোৰ ক্ষেত্ৰত উচ্চসীমা = 150 আৰু নিম্নসীমা = 140

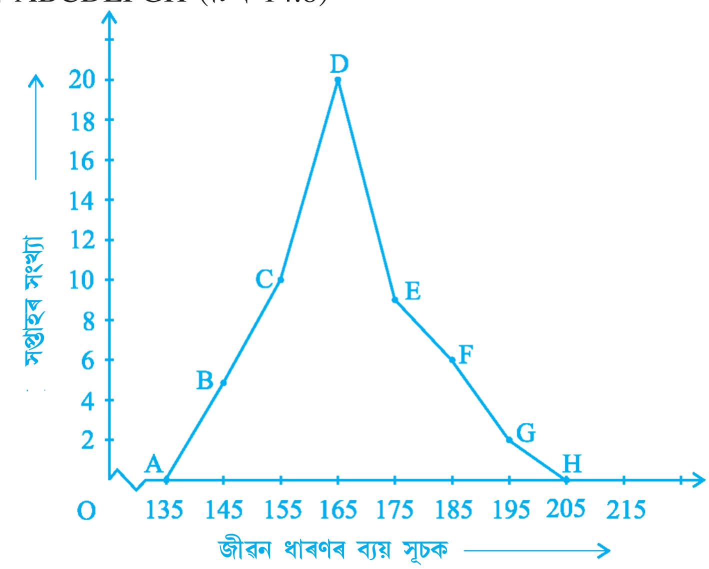
$$\text{গতিকে শ্ৰেণী চিহ্ন} = \frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145$$

একে নিয়মেৰে আমি অন্যান্য শ্ৰেণীসমূহৰো শ্ৰেণী-চিহ্ন উলিয়াই লওঁহক। গতিকে, এনেদৰে পোৱা নতুন তালিকা নিম্নোক্তধৰণৰ হ'ব।

তালিকা 14.11

শ্ৰেণী	শ্ৰেণী-চিহ্ন	বাৰংবাৰতা
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
মুঠ		**52**

এতিয়া আনুভূমিক অক্ষত শ্ৰেণী-চিহ্নসমূহ আৰু উলম্ব অক্ষত অনুৰূপ বাৰংবাৰতাবোৰ বহুৱাই আমি B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) আৰু G(195, 2) বিন্দুবোৰ বহুৱাব পাৰোঁ আৰু সেইবোৰক একাদিক্ৰমে ৰেখাখণ্ডৰে সংলগ্ন কৰি বাৰংবাৰতা বহুভুজটো আঁকিব পাৰোঁ। আমি এইটো পাহৰা উচিত নহ'ব যে নিম্নতম শ্ৰেণী 140–150ৰ ঠিক পূৰ্বৰ শূন্য বাৰংবাৰতা সূচোৱা শ্ৰেণীটোৰ শ্ৰেণী-চিহ্ন অৰ্থাৎ A(135, 0) আৰু G(195, 2)ৰ ঠিক পিছৰ H (205, 0) বিন্দুকো বহুভুজটোৰ সৈতে সংলগ্ন কৰিব লাগিব। গতিকে উপলব্ধ বাৰংবাৰতা বহুভুজটো হ'ব ABCDEFGH (চিত্ৰ 14.8)



চিত্ৰ 14.8

বাৰংবাৰতা বহুভুজ ব্যৱহাৰ কৰা হয় যেতিয়া তথ্য অবিচ্ছিন্ন আৰু পৰিমাণত বৃহৎ হয়। একে প্ৰকৃতিৰ দুবিধ ভিন্ন তথ্যৰ তুলনা কৰাৰ ক্ষেত্ৰত ই বৰ কাৰ্যকৰী হয়। উদাহৰণস্বৰূপে যেতিয়া একে শ্ৰেণীৰ দুটা বেলেগ বেলেগ অংশৰ পাৰদৰ্শিতাৰ তুলনা কৰিবলগীয়া হয়।

অনুশীলনী 14.3

1. বিশ্বৰ সকলোতে 15–44 (বছৰ) বয়সৰ মহিলাৰ মাজত অসুস্থতা আৰু মৃত্যুৰ কাৰণ বিচাৰি কোনো এটা সংগঠনে এক জৰীপ চলাইছিল আৰু নিম্নোক্ত তথ্যসমূহ (% ত) লাভ কৰিছিল

ক্ৰমিক নং	কাৰণ	মহিলাৰ মৃত্যুৰ হাৰ (%)
1.	প্ৰসৱকালীন স্বাস্থ্যৰ অৱস্থা (Reproductive health condition)	31.8
2.	স্নায়বিক মনোবিকাৰগ্ৰস্ত অৱস্থা (Neuropsychiatric conditions)	25.4
3.	আঘাতৰ সমস্যা (Injuries)	12.4
4.	হৃদযন্ত্ৰ সম্পৰ্কীয় অৱস্থা (Cardiovascular conditions)	4.3
5.	শ্বাস-প্ৰশ্বাস সম্পৰ্কীয় অৱস্থা (Respiratory conditions)	4.1
6.	অন্যান্য কাৰণসমূহ (Other causes)	22.0

(i) ওপৰোক্ত তথ্যখিনিক লৈখিকভাৱে উপস্থাপন কৰা।

(ii) সমগ্ৰ বিশ্বত মহিলাৰ অসুস্থ স্বাস্থ্য আৰু মৃত্যুৰ ক্ষেত্ৰত কোনটো অৱস্থাক প্ৰধান কাৰণ হিচাপে গণ্য কৰা হয়?

(iii) তোমাৰ শিক্ষকৰ সহায়ত (ii)ত প্ৰধান কাৰণৰূপে উল্লেখিত কাৰণসমূহৰ ভিতৰত প্ৰধান ভূমিকা লোৱা দুটা কাৰণ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা।

2. ভাৰতীয় সমাজৰ বিভিন্ন স্তৰৰ মাজত প্ৰতি হাজাৰ ল'ৰাৰ বিপৰতে ছোৱালীৰ সংখ্যা (আসন্ন দহকত) নিম্নোক্ত ধৰণৰ—

স্তৰ	প্ৰতি হেজাৰ ল'ৰাৰ বিপৰীতে ছোৱালীৰ সংখ্যা
অনুসূচিত জাতি (SC)	940
অনুসূচিত জনজাতি (ST)	970
SC/ST নোহোৱা	920
পিছপৰা জিলা	950
পিছ নপৰা জিলা	920
গ্ৰাম্য	930
নগৰীয়া	910

(i) উপৰোক্ত তথ্যক দণ্ড লেখৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰা।

(ii) লেখটোৰপৰা কি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰি শ্ৰেণী কোঠাত অলোচনা কৰা।

3. কোনো ৰাজ্য বিধান সভাৰ নিৰ্বাচনত বিভিন্ন ৰাজ্যলৈ দলসমূহে লাভ কৰা আসনৰ সংখ্যাসমূহ তলত উল্লেখ কৰা হ'ল।

ৰজনৈতিক দল	A	B	C	D	E	F
জয়ী আসনৰ সংখ্যা	75	55	37	29	10	37

(i) নিৰ্বাচনৰ ফলাফলসমূহ দণ্ডলেখৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰা।

(ii) কোনটো ৰাজনৈতিক দলে সৰ্বোচ্চ সংখ্যক আসনত বিজয়ী হৈছিল?

4. এডাল গছৰ 40 টা পাতৰ দীঘ আসন্ন মিলিমিটাৰলৈ জুখি উলিওৱা হ'ল আৰু প্ৰাপ্ত তথ্যসমূহক নিম্নোক্ত তালিকাত উল্লেখ কৰা হ'ল।

দীঘ (মিলিমিটাৰত)	পাতৰ সংখ্যা
118–126	3
127–135	5
136–144	9
145–153	12
154–162	5
163–171	4
172–180	2

(i) প্ৰদত্ত তথ্যখিনিৰে এটা স্তম্ভলেখ অংকন কৰা। (ইংগিত ঃ প্ৰথমে শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ অবিচ্ছিন্ন ৰূপত প্ৰকাশ কৰা)।

(ii) একেখিনি তথ্যৰ বাবে অন্য কিবা উপযুক্ত লৈখিক উপস্থাপন আছেনে?

(iii) সৰ্বোচ্চ সংখ্যক পাতৰ দীঘ 153 মিঃমিঃ বুলি মন্তব্য আগবঢ়োৱা কথাটো শুদ্ধ হ'বনে? কিয়?

5. নিম্নোক্ত তালিকাখনে 400 টা নিয়ন লেম্পৰ আয়ুকাল দেখুৱাইছে ঃ

আয়ুকাল (ঘণ্টাত)	লেম্পৰ সংখ্যা
300–400	14
400–500	56
500–600	60
600–700	86
700–800	74
800–900	62
900–1000	48

(i) প্ৰদত্ত তথ্যখিনিক স্তম্ভলেখৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰা।

(ii) 700 ঘণ্টাতকৈ অধিক আয়ুকালৰ লেম্পৰ সংখ্যা কিমান?

6. নিম্নোক্ত তালিকাখনত প্ৰাপ্ত নম্বৰৰ ভিত্তিত দুটা শাখাৰ ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ বিতৰণ উল্লেখ কৰা আছে—

A-শাখা		**B-শাখা**	
নম্বৰ	**বাৰংবাৰতা**	**নম্বৰ**	**বাৰংবাৰতা**
0–10	3	0–10	5
10–20	9	10–20	19
20–30	17	20–30	15
30–40	12	30–40	10
40–50	9	40–50	1

একেটা লেখতে উভয় শাখাৰ ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ নম্বৰসমূহ দুটা বাৰংবাৰতা বহুভুজৰদ্বাৰা উপস্থাপন কৰি দেখুওৱা। বহুভুজ দুটাৰপৰা শাখা দুটাৰ পাৰদৰ্শিতাৰ তুলনা কৰা।

7. এখন ক্ৰিকেট খেলত দুটা দল A আৰু Bয়ে প্ৰথম 60 টা বলত লাভ কৰা ৰাণসংখ্যাবোৰ তলত উল্লেখ কৰা হ'ল ঃ

বলৰ সংখ্যা	**দল A**	**দল B**
1–6	2	5
7–12	1	6
13–18	8	2
19–24	9	10
25–30	4	5
31–36	5	6
37–42	6	3
43–48	10	4
49–54	6	8
55–60	2	10

একেটা লেখতে দুটা বাৰংবাৰতা বহুভুজ আঁকি উভয় দলৰ তথ্যসমূহ প্ৰকাশ কৰা।
(ইংগিত ঃ প্ৰথমতে শ্ৰেণী অন্তৰালসমূহ অবিচ্ছিন্ন ৰূপত সজাই লোৱা)

8. এখন প্ৰমোদ কাননত ক্ৰীড়াৰত বিভিন্ন পৰ্যায়ৰ বয়সৰ শিশুৰ সংখ্যাৰ ওপৰত চলোৱা যাদৃচ্ছিক জৰীপ এটাৰ তথ্যসমূহ আছিল নিম্নোক্ত ধৰণৰ—

বয়স (বছৰৰ হিচাপত)	শিশুৰ সংখ্যা
1–2	5
2–3	3
3–5	6
5–7	12
7–10	9
10–15	10
15–17	4

ওপৰোক্ত তথ্যক প্ৰকাশ কৰাকৈ এটা স্তম্ভলেখ আকাঁ।

9. এখন স্থানীয় টেলিফোন ডাইৰেক্টৰীৰপৰা যাদৃচ্চিকভাৱে 100 টা উপাধি বাছনি কৰা হ'ল আৰু এই উপাধিবোৰত ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰসমূহৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন তলত দিয়া ধৰণে পোৱা গ'ল—

আখৰৰ সংখ্যা	উপাধিৰ সংখ্যা
1–4	6
4–6	30
6–8	44
8–12	16
12–20	4

(i) প্ৰদত্ত তথ্যখিনিক প্ৰতিফলিত কৰাকৈ এটা স্তম্ভলেখ আঁকা।

(ii) সৰ্বাধিক সংখ্যাৰ উপাধি থকা শ্ৰেণী অন্তৰালটো উল্লেখ কৰা।

14.5 কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ (Measures of Central Tendency)

এই অধ্যায়ৰ প্ৰথমফালে আমি বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা, দণ্ডলেখ, স্তম্ভলেখ আৰু বাৰংবাৰতা বহুভুজ আদি বিভিন্ন ৰূপত তথ্যক উপস্থাপন কৰি আহিছো। এতিয়া প্ৰশ্ন হয়— তথ্যক 'বুজি পাবলৈ' তাৰ আটাইখিনিকে অধ্যয়ন কৰাৰ সদায় প্ৰয়োজন আছেনে, নতুবা তথ্যৰ কিছুমান প্ৰতিনিধিত্বকাৰী মান বিবেচনা কৰিও ইয়াৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ দিশবোৰ বুজিব পাৰি? কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তি (প্ৰৱণতা)ৰ মাপ নাইবা গড় মান ব্যৱহাৰ কৰিও তথ্য সম্পৰ্কে বহু কথা জানিব পাৰি।

এটা পৰিস্থিতি কল্পনা কৰা য'ত দুগৰাকী বিদ্যাৰ্থী মেৰী আৰু হৰিয়ে তেওঁলোকৰ পৰীক্ষাৰ মূল্যাংকিত উত্তৰবহীবোৰ ঘূৰাই পোৱা বুলি কোৱা হৈছে। পৰীক্ষাটোত প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ বাবে 10 নম্বৰকৈ মুঠ 5 টা প্ৰশ্ন আছিল। তেওঁলোকে লাভ কৰা নম্বৰবোৰ এনে ধৰণৰ—

প্ৰশ্ন নং	1	2	3	4	5
মেৰীৰ প্ৰাপ্ত নম্বৰ	10	8	9	8	7
হৰিৰ প্ৰাপ্ত নম্বৰ	4	7	10	10	10

প্ৰশ্নোত্তৰ বহীবোৰ ওভতাই পোৱাৰ পিছত উভয়ে দেখিলে যে তেওঁলোকে লাভ কৰা গড় নম্বৰসমূহ নিম্নোক্ত ধৰণৰ হৈছে—

$$\text{মেৰীৰ নম্বৰৰ গড়} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$\text{হৰিৰ নম্বৰৰ গড়} = \frac{41}{5} = 8.2$$

যিহেতু হৰিৰ গড় নম্বৰতকৈ মেৰীৰ গড় নম্বৰ অধিক, গতিকে মেৰীয়ে হৰিতকৈ অধিক পাৰদৰ্শিতা দেখুওৱা বুলি দাবী কৰিলে, কিন্তু হৰিয়ে এই দাবী মানিবলৈ সন্মত নহ'ল। তেওঁ উভয়ৰে নম্বৰসমূহ উৰ্দ্ধক্ৰমত সজালে আৰু দুয়োটা ক্ৰমৰপৰা তলত উল্লেখ কৰা ধৰণে মধ্যমানবোৰ উলিয়ালে।

মেৰীৰ নম্বৰ	7	8	(8)	9	10
হৰিৰ নম্বৰ	4	7	(10)	10	10

হৰিয়ে ক'লে যে যিহেতু তেওঁৰ নম্বৰসমূহৰ একেবাৰে সোঁমাজৰ নম্বৰটো 10 যিটো মেৰীয়ে লাভ কৰা অনুৰূপ নম্বৰ 8তকৈ অধিক গতিকে উন্নতৰ পাৰদৰ্শিতাৰ বাবে তেওঁহে মান্যতা পাব লাগে।

কিন্তু এনে যুক্তিত মেৰী পতিয়ন নগ'ল। মেৰীক সৈমান কৰিবলৈ হৰিয়ে তেতিয়া আন এটা কৌশল ৰচনা কৰিলে। তেওঁ ক'লে যে 10 নম্বৰটো তেওঁ মেৰীতকৈ অধিকবাৰ (3 বাৰ) লাভ কৰিছে, য'ত মেৰীয়ে মাত্ৰ এবাৰহে 10 নম্বৰ পাইছে। গতিকে তেওঁৰ পাৰদৰ্শিতা উন্নতৰ।

এতিয়া হৰি আৰু মেৰীৰ মাজৰ বিবাদ নিষ্পত্তি কৰিবলৈ তেওঁলোক দুজনে নিজৰ নিজৰ যুক্তি সাব্যস্ত কৰাৰ বাবে অনুসৰণ কৰা পদ্ধতি তিনিটা চালি জাৰি চোৱা যাওঁক।

প্ৰথম ক্ষেত্ৰত মেৰীয়ে লাভ কৰা গড় মানটো হ'ল, মাধ্য (mean)। হৰিয়ে আত্মপক্ষ সমৰ্থনত ব্যৱহাৰ কৰা সোঁমাজৰ মানটো হ'ল মধ্যমা (median)। হৰিয়ে দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰা কেবাবাৰো লাভ কৰা নম্বৰটো হ'ল বহুলক (mode)।

এতিয়া প্ৰথমে মাধ্যৰ ধাৰণাটো কিছু বিতংভাৱে চোৱা যাওঁক।

কোনো নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক পৰ্যবেক্ষণৰ মাধ্য (বা গড়) হ'ল অটাইবোৰ পৰ্যবেক্ষণৰ সমষ্টিক পৰ্যবেক্ষণৰ মুঠ সংখ্যাৰে কৰা ভাগফল। ইয়াক $\bar{x}$ প্ৰতিকেৰে সূচোৱা হয় আৰু 'x বাৰ' (ইংৰাজী 'bar' শব্দৰ অসমীয়া উচ্চাৰণ) বুলি পঢ়া হয়।

এটি উদাহৰণ লোৱা যাওক—

উদাহৰণ 10 ঃ 5 গৰাকী ব্যক্তিক তেওঁলোকৰ সম্প্ৰদায়ৰ বাবে ৰাজহুৱা কামত এসপ্তাহত খৰচ কৰা সময়ৰ বিষয়ে সোধা হৈছিল। তেওঁলোকে যথাক্ৰমে 10, 7, 13, 20 আৰু 15 ঘণ্টা বুলি জনাইছিল। সপ্তাহত তেওঁলোকে ৰাজহুৱা কামত আত্মনিয়োগ কৰা সময়ৰ মাধ্য (বা গড়) উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি ইতিমধ্যে পূৰ্বৰ শ্ৰেণীতে অলোচনা কৰি আহিছোঁ যে কোনো নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক পৰ্যবেক্ষণৰ মাধ্য হ'ল— $\dfrac{\text{আটাইবোৰ পৰ্যবেক্ষণৰ সমষ্টি}}{\text{মুঠ পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা}}$

মাধ্য নিৰ্ণয়ৰ কামটো সৰলীকৰণ কৰাৰ বাবে আমি i-তম পৰ্যবেক্ষণটো বুজাবলৈ এটা চলক x_i ব্যৱহাৰ কৰোঁহক। এইটো ক্ষেত্ৰত i-ৰ মানবোৰ হ'ব 1ৰ পৰা 5লৈ। গতিকে আমাৰ প্ৰথম পৰ্যবেক্ষণ হ'ল x_1, দ্বিতীয় পৰ্যবেক্ষণ x_2, আৰু এনেদৰে শেষৰটো হ'ল x_5। আকৌ $x_1 = 10$ ৰ অৰ্থ হ'ল— প্ৰথম পৰ্যবেক্ষণ x_1 যাৰ মান 10। একেদৰে, $x_2 = 7$, $x_3 = 13$, $x_4 = 20$ আৰু $x_5 = 15$।

$$\text{সেইবাবে, মাধ্য } \bar{x} = \frac{\text{আটাইবোৰ পৰ্যবেক্ষণৰ সমষ্টি}}{\text{মুঠ পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10+7+13+20+15}{5}$$

$$= \frac{65}{5}$$

$$= 13$$

গতিকে, সপ্তাহত ৰাজহুৱা কামত ব্যক্তি 5 গৰাকীয়ে আত্মনিয়োগ কৰা সময়ৰ মাধ্য 13 ঘণ্টা।

এতিয়া, সামাজিক কামত 30 গৰাকী ব্যক্তিয়ে খৰচ কৰা সময়ৰ মাধ্য উলিয়াবলৈ $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ লিখি থকাটো এক বিৰক্তিকৰ ব্যাখ্যা হ'ব। আমি সমষ্টি বুজাবৰ বাবে গ্ৰীক চিহ্ন Σ (Sigma আখৰৰ বাবে) ব্যৱহাৰ কৰোঁ। $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ লিখাৰ পৰিৱৰ্তে আমি লিখো $\sum_{i=1}^{30} x_i$, যাক পঢ়া হয় x_i ৰ সমষ্টি বুলি, য'ত i ৰ মান 1ৰ পৰা 30 লৈ সলনি হয়।

গতিকে, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$

সেইদৰে, n সংখ্যক পৰ্যবেক্ষণৰ বাবে—

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

উদাহৰণ 11 ঃ উদাহৰণ-2ত উল্লেখ কৰা কোনো এখন বিদ্যালয়ৰ নৱম শ্ৰেণীৰ 30 গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ মূল্যাংকসমূহৰ মাধ্য উলিওৱা।

সমাধান ঃ ইয়াত, $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{30}}{30}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30} = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70$$
$$+ 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40$$
$$+ 92 + 40 + 50 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88$$
$$= 1779$$

গতিকে, $\overline{x} = \dfrac{1779}{30} = 59.3$

পদ্ধতিটো সময় সাপেক্ষে (সময় লগা) নহয়নে? আমি ইয়াক সৰলীকৰণ কৰিব নোৱাৰোনে? মন কৰা যে এই তথ্যসমূহৰ বাবে আমি এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰি আহিছোঁ (তালিকা 14.1 দ্ৰষ্টব্য)।

তালিকাখনৰ পৰা আমি পাওঁ যে 1জন ছাত্ৰই 10 নম্বৰ, 1জনে 20 নম্বৰ, 3জনে 36 নম্বৰ, 4জনে 40 নম্বৰ, 3জনে 50 নম্বৰ, 2জনে 56 নম্বৰ, 4জনে 60 নম্বৰ, 4জনে 70 নম্বৰ, 1জনে 72 নম্বৰ, 1জনে 80 নম্বৰ, 2জনে 88 নম্বৰ, 3জনে 92 নম্বৰ আৰু 1জনে 95 নম্বৰ পাইছে।

গতিকে, মুঠ প্ৰাপ্ত নম্বৰ $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50)$
$+ (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72)$
$+ (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$
$= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_{13}x_{13},$

য'ত f_i হ'ল 14.1 তালিকাত i-তম প্ৰৱিষ্টিৰ (entry) বাৰংবাৰতা

থোৰতে, ইয়াক আমি লিখো $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$

গতিকে মুঠ প্ৰাপ্ত নম্বৰ = $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95$

$= 1779$

এতিয়া মুঠ পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা = $\sum_{i=1}^{13} f_i$

$= f_1 + f_2 + \ldots + f_{13}$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1$

$= 30$

গতিকে, মাধ্য $\overline{x}$ = $\dfrac{\text{আটাইবোৰ পৰ্যবেক্ষণৰ সমষ্টি}}{\text{মুঠ পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা}}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i}$$

$$= \frac{1779}{30}$$

$$= 59.3$$

তালিকা 14.1ৰ পৰিৱৰ্তিত ৰূপৰ এই পদ্ধতিটোক নিম্নোক্ত তালিকাৰ ধৰণে প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰি—

তালিকা 14.12

নম্বৰ (x_i)	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা (f_i)	f_ix_i
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_ix_i = 1779$

এনেদৰে, অবৰ্গীকৃত (অশ্ৰেণীভুক্ত) বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰিব পৰা সূত্ৰটো হ'ল—

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

যিয়ে আমাৰ মাধ্যৰ মান দিয়ে।

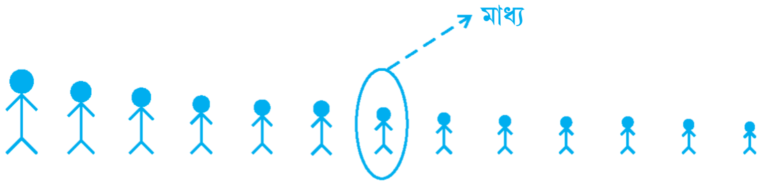
এতিয়া হৰি আৰু মেৰীৰ যুক্তি ভিত্তিক বিবাদৰ প্ৰসংগলৈ আমি পুনৰ উভতি যাওঁহক আৰু একেবাৰে সোঁমাজৰ মূল্যাংকটো উলিয়াই উন্নততৰ পাৰদৰ্শিতা দেখুওৱা বুলি হৰিয়ে দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত আগবঢ়োৱা যুক্তিখিনি গমি চোৱা যাওঁক। ইতিমধ্যে উল্লেখ কৰাৰ দৰে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ এই জোখক মধ্যমা আখ্যা দিয়া হয়।

মধ্যমা হ'ল নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক পৰ্যবেক্ষণৰ এনে এটা মান যিয়ে ইয়াক (পৰ্যবেক্ষণসমূহক) ঠিক দুই অংশত সমানে ভাগ কৰে। গতিকে, যেতিয়া অবৰ্গীকৃত তথ্যক উৰ্ধ্বক্ৰম (বা অধঃক্ৰম)ত সজোৱা হয়, তেতিয়া ইয়াৰ মধ্যমাক নিম্নোক্ত ধৰণে গণনা কৰি উলিওৱা হয়—

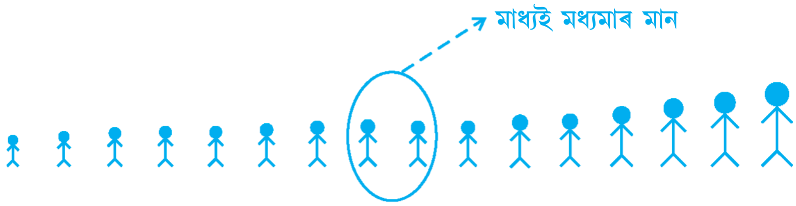
(i) পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা (n) অযুগ্ম হ'লে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পৰ্যবেক্ষণটোৱে হ'ব মধ্যমাৰ মান।

উদাহৰণ স্বৰূপে যদি n = 13, তেতিয়া $\frac{13+1}{2}$ = 7 ম পৰ্যবেক্ষণটোৱে হ'ল মধ্যমাৰ মান (চিত্ৰ 14.9 (i) দ্ৰষ্টব্য)

(ii) পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা (n) যুগ্ম হ'লে, $\left(\frac{n}{2}\right)$তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পৰ্যবেক্ষণ দুটাৰ মাধ্যই (mean) হ'ব মধ্যমাৰ মান। উদাহৰণস্বৰূপে, n = 16ৰ ক্ষেত্ৰত $\frac{16}{2}$ = 8 ম আৰু $\frac{16}{2}$ + 1 = 9ম পৰ্যবেক্ষণৰ মাধ্যই হ'ব মধ্যমাৰ মান (চিত্ৰ 14.9 (ii) দ্ৰষ্টব্য)।



(i)



(ii)

চিত্ৰ 14.9

কিছুমান উদাহৰণৰ জৰিয়তে এই কথাখিনি ব্যাখ্যা কৰোঁহক!

উদাহৰণ 12 ঃ এটা শ্ৰেণীৰ 9 গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ উচ্চতা (চে.মি.ত) নিম্নোক্ত ধৰণে দিয়া আছে—

155 160 145 149 150 147 152 144 148

তথ্যখিনিৰ মধ্যমা উলিওৱা।

সমাধান ঃ সৰ্বপ্ৰথমে তথ্যখিনি ঊৰ্দ্ধক্ৰমত সজোৱা হ'ল যেনে—

144 145 147 148 149 150 152 155 160

যিহেতু ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ সংখ্যা, 9 এক অযুগ্ম সংখ্যা গতিকে, $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2}$ = 5ম ছাত্ৰ/ছাত্ৰী গৰাকীৰ উচ্চতা উলিয়াই আমি তথ্যখিনিৰ মধ্যমা পাব পাৰোঁ আৰু ইয়াত মধ্যমা হ'ল 5ম গৰাকী ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ উচ্চতা অৰ্থাৎ 149 চে.মি.।

উদাহৰণ 13 ঃ এলানি খেলত এটা 'কাবাদী' দলে অৰ্জন কৰা পইণ্টসমূহ হ'ল এনেধৰণৰ—

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

দলটোৱে লাভ কৰা পইণ্টৰ মধ্যমা উলিওৱা।

সমাধান ঃ দলটোৱে অৰ্জন কৰা পইণ্টসমূহক ঊৰ্দ্ধক্ৰমত সজাই আমি পাওঁ—

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48.

ইয়াত মুঠ পদৰ সংখ্যা 16; গতিকে মধ্যপদ দুটা যেনে—

$\frac{16}{2}$ = 8ম পদ আৰু $\frac{16}{2} + 1$ = 9মপদ

গতিকে, কাবাডী দলটোৱে অৰ্জন কৰা মধ্যমা পইণ্ট হ'ল 12

হৰি আৰু মেৰীৰ অমীমাংসিত বিবাদৰ প্ৰসংগলৈ আমি আকৌ ঘূৰি যাওঁহক। গড় উলিয়াবলৈ হৰিয়ে ব্যৱহাৰ কৰা তৃতীয় জোখটো হ'ল 'বহুলক' (*mode*)।

বহুলক হ'ল কোনো নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক পৰ্যবেক্ষণৰ সেইটো মান, যিটো আটাইতকৈ বেছি সঘনাই আৱিৰ্ভাৱ হয়। অৰ্থাৎ, সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা যুক্ত পৰ্যবেক্ষণটোকে বহুলক আখ্যা দিয়া হয়।

পূৰ্বপ্ৰস্তুত (*ready made*) সাজ-পোছাক আৰু জোতা প্ৰস্তুত কাৰক উদ্যোগসমূহে কেন্দ্ৰীয় প্ৰৱণতাৰ এই মাপটো বহুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰে। বহুলকৰ জ্ঞান ব্যৱহাৰ কৰি এই উদ্যোগসমূহে সিদ্ধান্ত লয় কোন আকাৰৰ সামগ্ৰীৰ উৎপাদন সৰহ সংখ্যাত কৰিব লাগিব।

এটা উদাহৰণৰ সহায়ত আমি ইয়াৰ ব্যাখ্যা আগবঢ়াম।

উদাহৰণ 14 ঃ 20 জন ছাত্ৰই লাভ কৰা নিম্নোক্ত নম্বৰ (10ৰ ভিতৰত) সমূহৰ বহুলক উলিওৱা ঃ

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

সমাধান ঃ এই তথ্যখিনিক আমি নিম্নোক্ত ৰূপত সজাই লওঁহক—

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

ইয়াত আটাইতকৈ সঘনাই আৱিৰ্ভাৱ হোৱা সংখ্যাটো হ'ল 9 (মুঠ 4 বাৰ)। গতিকে তথ্যৰাজিৰ বহুলক 9।

উদাহৰণ 15 ঃ এটা কাৰখানাৰ সৰু গোট এটাৰ কথা বিবেচনা কৰা, য'ত চাকৰিয়ালৰ সংখ্যা 5 জন; এজন পৰিচালক আৰু 4 জন বনুৱা। বনুৱা কেইজনৰ প্ৰতিজনে মাহিলি 5,000 টকাকৈ আৰু পৰিচালকজনে 15,000 টকাকৈ দৰমহা পায়। কাৰখানাৰ এই গোটটোৰ দৰ্মহাৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ মাধ্য = $\dfrac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \dfrac{35000}{5} = 7000$

গতিকে গড় দৰমহা 7000 টকা (প্ৰতি মাহে)। মধ্যমা উলিয়াবলৈ, দৰমহাবোৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজাই লোৱা হওক, যেনে—

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

যিহেতু কাৰখানাটোত চাকৰিয়ালৰ সংখ্যা 5, গতিকে $\dfrac{5+1}{2}$ = 3য় পৰ্যবেক্ষণেই হ'ল মধ্যমাৰ মান। অৰ্থাৎ মধ্যমা 5000 টকা (প্ৰতি মাহে)।

দৰমহাৰ বহুলক উলিয়াবৰ বাবে আমি লক্ষ্য কৰো যে প্ৰদত্ত তথ্যৰ ভিতৰত 5000 য়ে সৰ্বাধিকবাৰ আৱিৰ্ভাৱ হৈছে। গতিকে দৰমহাৰ বহুলক হ'ল 5000 টকা (মাহিলি)।

এতিয়া উপৰোক্ত উদাহৰণত প্ৰদত্ত তথ্যৰাজিৰ বাবে কেন্দ্ৰীয় প্ৰৱণতাৰ মাপবোৰৰ তুলনা কৰা। তোমালোকে বুজিব পাৰিছা যে গড় দৰমহা 7000 টকাই ব্যক্তিগতভাৱে তেওঁলোকৰ কোনো এজনৰ দৰমহাক আনকি আসন্নভাৱেও প্ৰতিফলিত নকৰে। আনহাতে, মধ্যমা আৰু বহুলক মান দুটাই তথ্যখিনিক কাৰ্যকৰীভাৱে প্ৰতিনিধিত্ব কৰিছে।

অতি বৃহৎ বা অতি ক্ষুদ্ৰ ধৰণৰ চূড়ান্ত মানসমূহে তথ্যৰ মাধ্যত প্ৰভাৱ পেলায়। এইটো হ'ল মাধ্যৰ দুৰ্বলতাসমূহৰ অন্যতম। গতিকে, কেনো তথ্যৰ কিছুমান পৰ্যবেক্ষণে যদি বেছিভাগ পৰ্যবেক্ষণৰ পৰা বহু বেছি দূৰৈত অৱস্থান কৰে (যেনে 1,7,8, 9, 9) তেন্তে এনে তথ্যৰ বাবে মাধ্য উপযুক্ত প্ৰতিনিধিত্বকাৰী মান নহয়। যিহেতু তথ্যত থকা চূড়ান্ত মানসমূহে মধ্যমা আৰু বহুলকক প্ৰভাৱিত কৰিব নোৱাৰে, গতিকে তেনেক্ষেত্ৰত সিহঁতেহে গড়ৰ সঠিক অনুমান আগবঢ়াব পাৰে।

হৰি আৰু মেৰীৰ পৰিস্থিতিটোলৈ অকৌ আমি ঘূৰি যাওহঁক আৰু কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ তিনিটাৰ তুলনা কৰি চাওহঁক—

কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ	হৰি	মেৰী
মাধ্য	8.2	8.4
মধ্যমা	10	8
বহুলক	10	8

উক্ত তুলনাই সিদ্ধান্তত উপনীত হ'বলৈ আমাক সহায় কৰিছে এইবুলি যে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ এই মাপবোৰ কোন ছাত্ৰ বা ছাত্ৰী অধিক পাৰদৰ্শী সেই বিষয়ে সিদ্ধান্ত আগবঢ়োৱাৰ বাবে পৰ্যাপ্ত নহয়। এনে মতামত দিবলৈ আমাক আৰু অধিক তথ্যৰ আৱশ্যক যিবোৰৰ বিষয়ে তোমালোকে উচ্চতৰ শ্ৰেণীত জানিব পাৰিবা।

অনুশীলনী 14.4

1. 10 খন এলানি খেলত এটা দলে লাভ কৰা গোলৰ সংখ্যা আছিল এনেধৰণৰ—
2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3
এই গোলসমূহৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

2. গণিতৰ পৰীক্ষা এটাত 15 গৰাকী ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে লাভ কৰা নম্বৰসমূহ (100 ৰ ভিতৰত) আছিল এনেধৰণৰ—
41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60
তথ্যখিনিৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক উলিওৱা।

3. নিম্নোক্ত তথ্যসমূহ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজোৱা আছে। যদি তথ্যখিনিৰ মধ্যমা 63 হয়, xৰ মান উলিওৱা—
29, 32, 48, 50, x, $x + 2$, 72, 78, 84, 95

4. 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 এই তথ্যৰাজিৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

5. নিম্নোক্ত তালিকাৰপৰা এটা কাৰখানাৰ 60 জন বনুৱাৰ দৰমহাৰ মাধ্য উলিওৱাঃ

দৰমহা (টকাত)	বনুৱাৰ সংখ্যা
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
মুঠ	**60**

6. এটা উদাহৰণ দিয়া য'ত—
(i) কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ বাবে মাধ্যই উপযুক্ত মাপ হিচাপে পৰিগণিত হয়।
(ii) কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ বাবে মাধ্য নহয়, মধ্যমাহে উত্তম মাপ হিচাপে পৰিগণিত হয়।

14.6 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে নিম্নোক্ত বিষয়সমূহৰ বিষয়ে জানিব পাৰিলা ঃ

1. নির্দিষ্ট উদ্দেশ্যৰে সংগ্ৰহ কৰা যিকোনো সংঘটনা বা বিষয়কে তথ্য আখ্যা দিয়া হয়।
2. পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান হ'ল তথ্যৰ উপস্থাপন, বিশ্লেষণ আৰু ব্যাখ্যাৰ সৈতে জড়িত অধ্যয়নৰ ক্ষেত্ৰ।
3. তথ্যক লৈখিকভাৱে দণ্ডলেখ, স্তম্ভলেখ আৰু বাৰংবাৰতা বহুভুজৰ ৰূপত কেনেকৈ প্রদর্শন কৰিব পাৰি।
4. অবর্গীকৃত বা অশ্ৰেণীভুক্ত তথ্যৰ বাবে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ তিনিধৰণৰ মাপ হ'ল—

(i) মাধ্য ঃ পর্যবেক্ষণৰ আটাইবোৰ মানৰ সমষ্টিক মুঠ পর্যবেক্ষণৰ সংখ্যাৰে ভাগ কৰি মাধ্য পাব পাৰি। ইয়াক $\overline{x}$ ৰে বুজোৱা হয়।

গতিকে, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

অবর্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে এই মান হ'ল

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(ii) মধ্যমা ঃ পর্যবেক্ষণৰ একেবাৰে মাজৰ মানটোৱেই হ'ল মধ্যমা।

n অযুগ্ম সংখ্যা হ'লে মধ্যমা $= \dfrac{n+1}{2}$ তম পর্যবেক্ষণৰ মান।

n যুগ্ম সংখ্যা হ'লে, মধ্যমা $= \left(\dfrac{n}{2}\right)$তম আৰু $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মান দুটাৰ মাধ্য।

(iii) বহুলক ঃ পর্যবেক্ষণৰ যিটো মানক আটাইতকৈ বেছি সঘনাই পোৱা যায় তাকেই বহুলক আখ্যা দিয়া হয়।

F4Z6T9

পঞ্চদশ অধ্যায়

সম্ভাৱিতা (Probability)

এইটো বাস্তৱিকতে প্ৰণিধানযোগ্য কথা যে ভাগ্যৰ খেলেৰে আৰম্ভ হোৱা বিজ্ঞানৰ ধাৰা এটি মানৱ প্ৰজ্ঞাৰ আটাইতকৈ গুৰুত্বপূৰ্ণ পৰ্যায়লৈ উন্নীত হৈছে

—পিয়েৰ ছাইমন লাপ্লাছ

15.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

দৈনন্দিন জীৱনত আমাৰ এনেধৰণৰ কিছুমান কথা-বতৰাৰ সৈতে সংযোগ ঘটে, যেনে—

(1) আজি **সম্ভৱতঃ** বৰষুণ হ'ব।

(2) তেওঁ পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ হ'ব, এই কথাত মোৰ **সন্দেহ** আছে।

(3) **খুব সম্ভৱ,** কবিতাই বছৰেকীয়া পৰীক্ষাত প্ৰথম স্থান পাব।

(4) ডিজেলৰ মূল্য বৃদ্ধি হোৱাৰ যথেষ্ট **সম্ভাৱনা** আছে।

(5) আজিৰ খেলত ভাৰতে টছত (Toss) জিকাৰ 50-50 **সম্ভাৱনা** আছে।

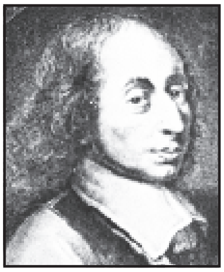
ওপৰোক্ত বাক্যবোৰত ব্যৱহৃত হোৱা 'সম্ভৱতঃ', 'সন্দেহ', 'খুব সম্ভৱ', 'সম্ভাৱনা' ইত্যাদি শব্দবোৰত 'অনিশ্চয়তা'ৰ এক উপাদান নিহিত হৈ আছে। উদাহৰণস্বৰূপে, (1) অত, 'সম্ভৱত' বৰষুণ হ'ব' কথাটোৱে বুজাইছে যে আজি বৰষুণ হ'ব পাৰে বা নহ'বও পাৰে। আজিৰ বৰষুণ সম্পৰ্কে আগবঢ়োৱা আমাৰ ভৱিষ্যৎ বাণী অতীতৰ অভিজ্ঞতাৰ ভেটিত প্ৰতিষ্ঠিত যেতিয়া এনেধৰণৰ সদৃশ বাতাবৰণত বৰষুণ হৈছিল। (2) ৰ পৰা (5) লৈ উল্লিখিত অন্যান্য ক্ষেত্ৰতো সদৃশ ধৰণৰ আগজাননী বা ভৱিষ্যৎ বাণী কৰা হৈছে।

'সম্ভৱত' আদি শব্দবোৰত থকা অনিশ্চয়তাখিনি বহু ক্ষেত্ৰত 'সম্ভাৱিতা'ৰদ্বাৰা সাংখ্যিকভাৱে জুখিব পাৰি।

যদিও জুৱা খেলৰপৰাই সম্ভাৱিতাৰ জন্ম হৈছিল, অন্যান্য ক্ষেত্ৰতো যেনে— ভৌতিক বিজ্ঞান, বাণিজ্য, জীৱবিজ্ঞান, চিকিৎসা বিজ্ঞান, বতৰ বিজ্ঞান আদিতো ইয়াৰ ব্যাপকভাৱে ব্যৱহাৰ হয়।

15.2 সম্ভাৱিতা— এক পৰীক্ষামূলক অধ্যয়ন বা অভিগমন (Probability – an Experimental Approach)

আগৰ শ্ৰেণীসমূহত তোমালোকে মুদ্ৰাৰ টছ, পাশাগুটি (Die) দলিওৱা আদি পৰীক্ষা কাৰ্য সম্পাদন কৰি আৰু সেইবোৰৰ **ফলাফলসমূহ** অনুধাৱন কৰাৰ জৰিয়তে সম্ভাৱিতাৰ কিছু আভাস পাইছিলা। এতিয়া, কোনো পৰীক্ষা কাৰ্যৰ এটা বিশেষ **ফলাফল** প্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱনা কিদৰে জুখিব লাগে সেই বিষয়ে শিকিব পাৰিবা।



ব্লেইচ পাস্কেল (1623–1662)

পিয়েৰ ডি ফাৰ্মাৰ (1601–1665)

সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাই বিকাশ লাভ কৰিছিল বৰ আচৰিত ধৰণে। 1654 খ্ৰীষ্টাব্দত চেভেলিয়েৰ ডি মেৰে নামৰ জুৱাৰী এজনে 17শ শতিকাৰ বিখ্যাত ফৰাচী দাৰ্শনিক আৰু গণিতজ্ঞ ব্লেইচ পাস্কেলক পাশাখেলৰ কেইটামান বিশেষ সমস্যা সম্পৰ্কত লগ ধৰিছিল। এই সমস্যাসমূহক লৈ পাস্কেল বৰ আগ্ৰহী হৈ উঠিছিল। তেওঁ সেইবোৰ ভালদৰে অধ্যয়ন কৰিছিল আৰু আন এগৰাকী ফৰাচী দেশীয় গণিতজ্ঞ পিয়েৰ ডি ফাৰ্মাৰ সৈতে আলোচনা কৰিছিল। পাস্কেল আৰু ফাৰ্মা উভয়ে স্বতন্ত্ৰীয়ভাৱে এই সমস্যাবোৰৰ সমাধান উলিয়াইছিল। এই কাৰ্যসমূহেই আছিল সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ আৰম্ভণি।

বিষয়টোৰ ওপৰত প্ৰথম কিতাপখন লিখিছিল ইটালীয় গণিতজ্ঞ জে কাৰ্ডনে (1501–1576)। 1663 চনত প্ৰকাশিত এই কিতাপখনৰ নাম আছিল ‘Book on Games of Chance’ (Liber de Ludo Aleae)। এই প্ৰসংগত গণিতজ্ঞ জে বাৰ্ণুলি (1654–1705), পি. লাপ্লাচ (1749–1827), এ. এ. মাৰ্কফ (1856–1922) আৰু এ. এন. কল্মʼগোৰোভে (1903–)ও উল্লেখনীয় অৱদান আগবঢ়াইছিল।

কাৰ্য- 1 ঃ (i) মুদ্ৰা এটা লৈ 10 বাৰ টছ কৰাঁ আৰু মুণ্ড (Head) আৰু পুচ্ছ (Tail) প্ৰাপ্ত হোৱা সংখ্যা দুটা টুকি ৰাখা। নিম্নোক্ত তালিকাৰ আৰ্হিত তোমাৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহ লিপিবদ্ধ কৰাঁ।

তালিকা 15.1

মুদ্ৰাটোৰ টছৰ সংখ্যা	মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱা সংখ্যা	পুচ্ছপ্ৰাপ্ত হোৱা সংখ্যা
10	—	—

নিম্নোক্ত ভগ্নাংশ দুটাৰ মানবোৰ লিখা ঃ

$$\frac{\text{মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱা সংখ্যা}}{\text{মুদ্ৰাটোৰ মুঠ টছৰ সংখ্যা}} \quad \text{আৰু} \quad \frac{\text{পুচ্ছপ্ৰাপ্ত হোৱা সংখ্যা}}{\text{মুদ্ৰাটোৰ মুঠ টছৰ সংখ্যা}}$$

(ii) মুদ্ৰাটো 20 বাৰ টছ কৰা আৰু ওপৰত উল্লেখ কৰা ধৰণে তোমাৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহ লিপিবদ্ধ কৰা। এই পৰ্যবেক্ষণসমূহৰ বাবে ওপৰত প্ৰদত্ত ভগ্নাংশ দুটাৰ মান আকৌ উলিওৱা।

(iii) টছৰ সংখ্যা বৃদ্ধি কৰি মুণ্ড আৰু পুচ্ছৰ সংখ্যাবোৰ টুকি লৈ একেটা পৰীক্ষাকাৰ্য বাৰে বাৰে সম্পন্ন কৰা। লগতে, অনুৰূপ ভগ্নাংশবোৰৰ মানবোৰ লিখি যোৱা।

তোমালোকে দেখিবা যে টছৰ সংখ্যা যিমানে ডাঙৰ হ'ব, ভগ্নাংশ দুটাৰ মানবোৰো সিমানে 0.5 ৰ কাষ চাপিব। অধিকতৰ টছৰ ক্ষেত্ৰত কি হয় সেইটো লিপিবদ্ধ কৰিবলৈ নিম্নোক্তভাৱে দলীয় ভিত্তিত এই কাৰ্য সম্পন্ন কৰিব পাৰি।

কাৰ্য-2 ঃ শ্ৰেণীৰ আটাইখিনি ছাত্ৰ-ছাত্ৰীকে 2 বা 3 জনীয়া দলত বিভক্ত কৰা। প্ৰতিটো দলৰ এজনক 15 বাৰকৈ টছ কৰিবলৈ দিয়া। প্ৰত্যেক দলৰ আন এজনক মুণ্ড আৰু পুচ্ছৰ সংখ্যাবোৰ টুকিবলৈ কোৱা। [মনত ৰাখিবা যাতে সকলো দলতে একে মানৰ মুদ্ৰাহে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। আটাইবোৰ দলেই একেটা মুদ্ৰাকে টছ কৰিছে বুলিয়েই ধৰি লোৱা হ'ব]

এতিয়া, ব্লেকবোৰ্ডত তালিকা 15.2 ৰ লেখীয়াকৈ এখন তালিকা প্ৰস্তুত কৰা। প্ৰথমে, দল-1 য়ে তেওঁলোকৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহ লিপিবদ্ধ কৰিব আৰু অনুৰূপ ভগ্নাংশবোৰ গণনা কৰি উলিয়াব. তাৰ পিছত দল-2 য়ে তেওঁলোকৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহ লিপিবদ্ধ কৰিব; লগতে তেওঁলোকে দল-1 আৰু নিজৰ একত্ৰিত তথ্যৰ বাবেহে ভগ্নাংশ দুটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰি উলিয়াব আৰু এনেদৰে পৰৱৰ্তী দলসমূহেও আগবাঢ়িব। [আমি এনে ভগ্নাংশবোৰক সঞ্চয়ী ভগ্নাংশ (cumulative fractions) আখ্যা দিব পাৰোঁহক।] এটা শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে আগবঢ়োৱা পৰ্যবেক্ষণৰ ভিত্তিত আমি প্ৰথম তিনিটা শাৰী লক্ষ্য কৰিছোঁহক।

তালিকা 15.2

দল (1)	মুণ্ডৰ সংখ্যা (2)	পুচ্ছৰ সংখ্যা (3)	$\frac{\text{সঞ্চয়ী মুণ্ডৰ সংখ্যা}}{\text{মুদ্ৰাটোৰ টছৰ মুঠ সংখ্যা}}$ (4)	$\frac{\text{সঞ্চয়ী পুচ্ছৰ সংখ্যা}}{\text{মুদ্ৰাটোৰ টছৰ মুঠ সংখ্যা}}$ (5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	⋮	⋮	⋮	⋮

তালিকাখনত কি লক্ষ্য কৰিছা? তোমালোকে দেখিছা যে মুদ্ৰাটোৰ টছৰ সংখ্যা বৃদ্ধি হোৱাৰ লগে লগে স্তম্ভ (4) আৰু (5) ৰ ভগ্নাংশ দুটাৰ মানবোৰ 0.5 ৰ ক্ৰমান্বয়ে অধিক ওচৰ চাপে।

কাৰ্য-3 ঃ (i) এটি পাশাগুটি* (die) 20 বাৰ ওপৰলৈ দলিয়াই চোৱা আৰু 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6 প্ৰাপ্ত হোৱা সংখ্যাবোৰ টুকি ৰাখা। তালিকা 15.3 ত প্ৰদৰ্শন কৰা ধৰণে এখন তালিকা তৈয়াৰ কৰি তোমাৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহ লিপিবদ্ধ কৰা।

তালিকা 15.3

পাশাটো দলিওৱাৰ মুঠ সংখ্যা	পাশাটোৰ এই মুখবোৰ প্ৰাপ্ত হোৱাৰ সংখ্যা					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
20						

নিম্নোক্ত ভগ্নাংশবোৰৰ মান উলিওৱা ঃ

$$\frac{\text{1 প্ৰাপ্ত হোৱা মুঠ সংখ্যা}}{\text{পাশাটোৰ মুঠ দলিৰ সংখ্যা}}$$

$$\frac{\text{2 প্ৰাপ্ত হোৱা মুঠ সংখ্যা}}{\text{পাশাটোৰ মুঠ দলিৰ সংখ্যা}}$$

....

$$\frac{\text{6 প্ৰাপ্ত হোৱা মুঠ সংখ্যা}}{\text{পাশাটোৰ মুঠ দলিৰ সংখ্যা}}$$

(ii) এতিয়া পাশাগুটিটো 40 বাৰ দলিয়াই চোৱা। পৰ্যবেক্ষণসমূহ লিপিবদ্ধ কৰা আৰু (i) ত কৰা ধৰণে ভগ্নাংশবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

পাশাগুটিটোৰ দলিৰ সংখ্যা বৃদ্ধি হোৱাৰ লগে লগে তোমালোকে দেখিবা যে (i) আৰু (ii)ত নিৰ্ণয় কৰা প্ৰতিটো ভগ্নাংশৰ মান $\frac{1}{6}$ ৰ নিচেই কাষ চাপে।

এইটো প্ৰত্যক্ষ কৰাৰ বাবে কাৰ্য-2 ত কৰাৰ দৰে তোমালোকে দলীয়ভাৱে কামটো সম্পন্ন কৰিব পাৰা। তোমালোকৰ শ্ৰেণীৰ আটাইবোৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীক ক্ষুদ্ৰ দলত বিভক্ত কৰা। প্ৰতিটো দলৰ এজনকৈ ছাত্ৰই পাশাগুটিটোক 10 বাৰ দলিয়াই চাব। পৰ্যবেক্ষণসমূহ টুকি ৰাখিব আৰু সঞ্চয়ী

* এটি পাশাগুটি হ'ল ছয়খন ফাল বা মুখ (Face) থকা এটা সুষম ঘনক যাৰ প্ৰতিটো ফালত 1 ৰ পৰা 6 লৈ সংখ্যাবোৰক এটাকৈ চিহ্নিত কৰা থাকে। কেতিয়াবা, সংখ্যাৰ পৰিৱৰ্তে বিন্দুও থাকে।

ভগ্নাংশৰ (Cumulative fractions) মান গণনা কৰিব।

তালিকা 15.4 ত 1 সংখ্যাটোৰ বাবে ভগ্নাংশৰ মান উল্লেখ কৰি থ'ব পাৰি। এই তালিকাখনকে আনকেইটা সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত পোৱা ভগ্নাংশৰ মানসমূহো লিখি ৰখাৰ বাবে বিস্তৃত কৰিব পাৰি নাইবা আনকেইটা সংখ্যাৰ বাবে একেধৰণৰ আন তালিকাও গঠন কৰিব পৰা যায়।

তালিকা 15.4

দল (1)	এটা দলত পাশাগুটিটোৰ মুঠ দলিৰ সংখ্যাৰ (2)	$\frac{\text{1 প্ৰাপ্ত হোৱা মুঠ সংখ্যা}}{\text{পাশাগুটিটোৰ মুঠ দলিৰ সংখ্যা}}$ (3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

আটাইবোৰ দলত ব্যৱহাৰ হোৱা পাশাগুটিবোৰ দেখাত বা আকাৰত একেই হোৱা বাঞ্ছনীয়। সেই ক্ষেত্ৰতহে আটাইবোৰ পাশাগুটিৰ দলি একেটা পাশাগুটিৰ দলি হিচাপে গণ্য কৰা হ'ব।

এই তালিকাসমূহত কি লক্ষ্য কৰিছা?

তোমালোকে দেখিবা যে দলিৰ সংখ্যা যিমানে বাঢ়ে (3) নং স্তম্ভৰ ভগ্নাংশবোৰৰ মান সিমানে $\frac{1}{6}$ৰ কাষ চাপে।

কাৰ্য 4 ঃ (i) দুটা মুদ্ৰা একেলগে 10 বাৰ টছ কৰা আৰু নিম্নোক্ত তালিকাৰ আৰ্হিত তোমাৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহ লিপিবদ্ধ কৰা।

তালিকা 15.5

মুদ্ৰা দুটাৰ টছৰ সংখ্যা	মুণ্ড উপলব্ধ নোহোৱা সংখ্যা	1টা মুণ্ড উপলব্ধ হোৱা সংখ্যা	2টা মুণ্ড উপলব্ধ হোৱা সংখ্যা
10	—	—	—

এতিয়া তলৰ ভগ্নাংশবোৰ লিখি উলিওৱা

$$A = \frac{\text{কোনো মুণ্ডপ্ৰাপ্ত নোহোৱা সংখ্যা}}{\text{মুদ্ৰা দুটাৰ মুঠ টছৰ সংখ্যা}}$$

$$B = \frac{\text{1 টা মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱাৰ মুঠ সংখ্যা}}{\text{মুদ্ৰা দুটাৰ মুঠ টছৰ সংখ্যা}}$$

$$C = \frac{\text{2 টা মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱাৰ মুঠ সংখ্যা}}{\text{মুদ্ৰা দুটাৰ মুঠ টছৰ সংখ্যা}}$$

এই ভগ্নাংশবোৰৰ মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

এতিয়া (কাৰ্য 2ৰ লেখীয়াকৈ) টছৰ সংখ্যা বঢ়াই যোৱা। তোমালোকে দেখিবা যে টছৰ সংখ্যা যিমানে বঢ়োৱা হয় A, B আৰু C ৰ মানবোৰ ক্ৰমে 0.25, 0.5 আৰু 0.25ৰ বেছি কাষ চাপি আহিব।

কাৰ্য-1ত উল্লেখ কৰা প্ৰতিটো টছকে 'প্ৰচেষ্টা' (trial) আখ্যা দিয়া হয়। সদৃশ ধৰণে, কাৰ্য-3 ত পাশাগুটিৰ প্ৰতিটো দলিয়েই একোটা প্ৰচেষ্টা আৰু কাৰ্য-4 ত দুটা মুদ্ৰাৰ একেলগে কৰা প্ৰতিটো টছেই একোটা প্ৰচেষ্টা।

গতিকে, 'প্ৰচেষ্টা' হ'ল এক ধৰণৰ কাৰ্য যাৰ পৰা একক বা বহু ফল (outcomes) প্ৰাপ্ত হয়। কাৰ্য-1ত সম্ভাব্য ফলবোৰ আছিল মুণ্ড (Head) আৰু পুচ্ছ (Tail); আনহাতে, কাৰ্য-3 ত সম্ভাব্য ফলবোৰ আছিল 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6।

কাৰ্য-1 ত কোনো নিৰ্দিষ্ট দলিত মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱা কথাটো হ'ল এটা ঘটনা (Event) যাৰ ফল হৈছে মুণ্ডৰ প্ৰাপ্তি। সদৃশভাৱে, পুচ্ছপ্ৰাপ্ত হোৱাটোও এটা ঘটনা যাৰ ফল হ'ল পুচ্ছৰ প্ৰাপ্তি। কাৰ্য-2 ত এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা যেনে 1 পোৱাটো এটা ঘটনা যাৰ ফল হ'ল 1 ৰ প্ৰাপ্তি।

যদি আমাৰ পৰীক্ষাটোত এটা যুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ বাবে পাশাগুটি এটা দলিয়াই চোৱা হয় তেন্তে ঘটনাটোত তিনিটা ফল যেনে 2, 4 আৰু 6 জড়িত থাকিব।

গতিকে, এটা পৰীক্ষাৰ ক্ষেত্ৰত এটা ঘটনা হ'ল পৰীক্ষাটোৰ কিছুমান ফলৰ সমষ্টি। দশম শ্ৰেণীত ঘটনাৰ অধিক বিধিসন্মত সংজ্ঞা সম্পৰ্কে পঢ়িবলৈ পাবা।

তেন্তে কাৰ্য-4 ত ঘটনা কোনবোৰ তোমালোকে ক'ব পাৰিবানে?

এই পটভূমিত এতিয়া আমি সম্ভাৱিতা মানে কি সেই কথাটো বিচাৰ কৰি চাওঁহক। প্ৰত্যক্ষভাৱে আমি যাক আমাৰ প্ৰচেষ্টাৰ ফল বুলি গণ্য কৰো তাৰে ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি আমি পৰীক্ষামূলক (Experimental) বা (Empirical) সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰো।

ধৰা হওক মুঠ প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা n। কোনো ঘটনা E সংঘটিত হোৱাৰ বাবে ব্যৱহাৰিক সম্ভাৱিতা P(E) ৰ মান এনেদৰে দিয়া হয়—

$$P(E) = \frac{\text{প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা যিবোৰত ঘটনাটো ঘটিছে}}{\text{মুঠ প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা}}$$

এই অধ্যায়ত আমি ব্যৱহাৰিক সম্ভাৱিতাৰ মান উলিয়াম যদিও, সুবিধাৰ বাবে ইয়াক 'সম্ভাৱিতা' বুলিহে লিখিম।

কেইটামান উদাহৰণ লোৱা যাওঁক।

আৰম্ভ কৰাৰ আগতে আমি কাৰ্য-2 আৰু তালিকা 15.2 লৈ ঘূৰি যাওঁহক। এই তালিকাখনৰ স্তম্ভ-4 ত গণনা কৰি উলিওৱা ভগ্নাংশটো কি? ই মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱাৰ বাবে ব্যৱহাৰিক সম্ভাৱিতাৰ বাহিৰে আন একো নহয়। লক্ষ্য কৰা যে প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা আৰু এই প্ৰচেষ্টাবোৰত মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱা সংখ্যাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি এই সম্ভাৱিতাৰ মান সলনি হৈ আছে। সদৃশভাৱে তালিকা 15.2 ৰ স্তম্ভ-5 ত পুচ্ছ প্ৰাপ্তিৰ ব্যৱহাৰিক সম্ভাৱিতাৰ মান পোৱা গৈছে। প্ৰথমে এই মান হৈছে $\frac{12}{15}$, তাৰ পিছত এই মান $\frac{2}{3}$, তাৰ পিছত $\frac{28}{45}$,..... ইত্যাদি।

গতিকে, ব্যৱহাৰিক সম্ভাৱিতাৰ মান-প্ৰচেষ্টা কিমানবাৰ চলোৱা হয় আৰু এই প্ৰচেষ্টাসমূহত বিচৰা ফলটো কিমানবাৰ সংঘটিত হয় তাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।

কাৰ্য 5 ঃ অধিক অগ্ৰসৰ হোৱাৰ পূৰ্বে, কাৰ্য- 3 ত প্ৰস্তুত কৰা তালিকাকেইখনলৈ মন কৰা। এটা পাশাগুটি কোনো নিৰ্দিষ্ট সংখ্যকবাৰ দলিয়াই চাওঁতে 3 প্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ উলিওৱা। লগতে, প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা বঢ়োৱাৰ লগে লগে এই মান কি ধৰণে সলনি হৈছে তাকো দেখুওৱা।

এতিয়া আমি আন কিছুমান উদাহৰণ বিবেচনা কৰি চাওঁহক।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা মুদ্ৰা 1000 বাৰ টছ কৰাত নিম্নোক্ত ধৰণে বাৰংবাৰতাবোৰ পোৱা গ'ল—

মুণ্ড ঃ 455, তুচ্ছ ঃ 545

প্ৰতি ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতা গণনা কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু মুদ্ৰাটো 1000 বাৰ টছ কৰা হৈছে গতিকে মুঠ প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা 1000। মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনাক E আৰু পুচ্ছ প্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনাক F ৰে সূচোৱা হওক। তেতিয়া E সংঘটিত হোৱাৰ সংখ্যা অৰ্থাৎ মুণ্ড প্ৰাপ্ত হোৱাৰ সংখ্যা হ'ল 455.

$$\text{গতিকে, E ৰ সম্ভাৱিতা} = \frac{\text{মুণ্ডৰ সংখ্যা}}{\text{প্ৰচেষ্টাৰ মুঠ সংখ্যা}}$$

$$\text{অৰ্থাৎ } P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

$$\text{সদৃশ ধৰণে, পুচ্ছ প্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিতা} = \frac{\text{পুচ্ছৰ সংখ্যা}}{\text{প্ৰচেষ্টাৰ মুঠ সংখ্যা}}$$

অৰ্থাৎ $P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$

ওপৰোক্ত উদাহৰণটোত মন কৰা যে

$P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1,$

আৰু ইয়াত প্ৰতিটো প্ৰচেষ্টাৰ সম্ভাব্য ফল মাত্ৰ দুটা E আৰু F।

উদাহৰণ 2 ঃ একেলগে দুটা মুদ্ৰা 500 বাৰ টছ কৰা হ'ল আৰু আমি নিম্নোক্ত ধৰণে ফলবোৰ পালোঁ ঃ

দুটা মুণ্ড ঃ 105 বাৰ

এটা মুণ্ড ঃ 275 বাৰ

এটাও মুণ্ড প্ৰাপ্ত নহ'ল ঃ 120 বাৰ

এই প্ৰতিটো ঘটনা সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ উলিওৱা।

সমাধান ঃ দুটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হোৱা, এটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হোৱা আৰু কোনো মুণ্ড প্ৰাপ্ত নোহোৱা ঘটনাকেইটাক ক্ৰমে E_1, E_2 আৰু E_3 ৰে সূচোৱা হওঁক। গতিকে—

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

মন কৰা যে ইয়াত, $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$। লগতে E_1, E_2 আৰু E_3 য়ে যিকোনো প্ৰচেষ্টাৰ আটাইবোৰ সম্ভাব্য ফলকে সামৰি লৈছে।

উদাহৰণ 3 ঃ পাশাগুটি এটা 1000 বাৰ দলিয়াই চোৱা হ'ল আৰু 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6 ফলসমূহৰ বাৰংবাৰতাবোৰ তলৰ তালিকাখনত উল্লেখ কৰা হ'ল—

তালিকা 15.6

ফল	1	2	3	4	5	6
বাৰংবাৰতা	179	150	157	149	175	190

প্ৰতিটো ফল প্ৰাপ্তিৰ বাবে সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

সমাধান ঃ কোনো ফল i প্ৰাপ্তৰ ঘটনাক E_i ৰে সূচোৱা হ'ল য'ত

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

ফল 1 ৰ সম্ভাৱিতা = $P(E_1) = \dfrac{\text{1 ৰ বাৰংবাৰতা}}{\text{পাশাগুটিটোৰ মুঠ দলিৰ সংখ্যা}}$

$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

সদৃশভাৱে, $P(E_2) = \dfrac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \dfrac{157}{1000} = 0.157$,

$P(E_4) = \dfrac{149}{1000} = 0.149$, $P(E_5) = \dfrac{175}{1000} = 0.175$

আৰু $P(E_6) = \dfrac{190}{1000} = 0.19$

লক্ষ্য কৰা যে $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$

আকৌ, মন কৰা যে

(i) প্ৰতিটো ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা 0 আৰু 1 ৰ মাজত থাকে।

(ii) আটাইবোৰ সম্ভাৱিতাৰ সমষ্টি 1ৰ সমান।

(iii) E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 আৰু E_6 য়ে যিকোনো প্ৰচেষ্টাৰ আটাইবোৰ সম্ভাব্য ফলকে সামৰি লয়।

উদাহৰণ 4 ঃ এখন 'টেলিফোন ডাইৰেক্তৰি'ৰ এটা পৃষ্ঠাত 200 টা টেলিফোন নম্বৰ আছে। তালিকা 15.7 ত সেই নম্বসমূহৰ একক স্থানৰ অংকৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন (উদাহৰণস্বৰূপে 25828573 নম্বৰটোৰ একক স্থানৰ অংকটো হ'ল 3) দিয়া হৈছে ঃ

তালিকা 15.7

অংক	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
বাৰংবাৰতা	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

পৃষ্ঠাত দৃষ্টি নিক্ষেপ নকৰাকৈ পেঞ্চিলৰ আগটো এই সংখ্যাবোৰৰ কোনোবা এটাত ৰখা হ'ল অৰ্থাৎ সংখ্যাটো যাদৃচ্ছিকভাৱে (at random) বাছনি কৰা হ'ল। ইয়াৰ একক স্থানৰ অংকটো 6 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ একক স্থানৰ অংকটো 6 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা

$$= \frac{\text{6 বাৰংবাৰতা}}{\text{নিৰ্বাচিত টেলিফোন নম্বৰৰ মুঠ সংখ্যা}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

তোমালোকে সংখ্যাবোৰৰ একক স্থানত আন আন অংকবোৰ প্ৰাপ্ত হোৱাৰ ব্যৱহাৰিক সম্ভাৱিতা সদৃশভাৱে উলিয়াব পাৰা।

উদাহৰণ 5 ঃ এটা বতৰ কেন্দ্ৰৰ তথ্যৰপৰা দেখা যায় যে অবিৰতভাৱে বিগত 250 দিনৰ বতৰৰ আগজাননীৰ ভিতৰত 175 বাৰ শুদ্ধ আছিল।

(i) কোনো এক নিৰ্দিষ্ট দিনত এই আগজাননী শুদ্ধ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

(ii) কোনো এক নিৰ্দিষ্ট দিনত ই শুদ্ধ নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ তথ্য সংগ্ৰহ কৰা মুঠ দিনৰ সংখ্যা হ'ল = 250

(i) P(নিৰ্দিষ্ট দিন এটাত আগজাননী শুদ্ধ হৈছে)

$$= \frac{\text{আগজাননী শুদ্ধ হোৱা মুঠ দিনৰ সংখ্যা}}{\text{তথ্য সংগ্ৰহৰ মুঠ দিনৰ সংখ্যা}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) আগজাননী শুদ্ধ নোহোৱা মুঠ দিনৰ সংখ্যা হ'ল 250 – 175 = 75

গতিকে, P(নিৰ্দিষ্ট দিনত আগজাননী শুদ্ধ হোৱা নাই) $= \frac{75}{250} = 0.3$

লক্ষ্য কৰা—

P(নিৰ্দিষ্ট দিনত আগজাননী শুদ্ধ হৈছে) + P(নিৰ্দিষ্ট দিনত আগজাননী অশুদ্ধ হৈছে)
= 0.7 + 0.3 = 1

উদাহৰণ 6 ঃ এটা টায়াৰ উৎপাদনকাৰী কোম্পানীয়ে টায়াৰসমূহ সলনি কৰিবলগীয়া হোৱাৰ আগলৈকে সেইবোৰে অতিক্ৰম কৰা দূৰত্বৰ তথ্য সংৰক্ষণ কৰে। নিম্নোক্ত তালিকাত 1000 টা এনেধৰণৰ তথ্য প্ৰদৰ্শন কৰা হৈছে।

তালিকা 15.8

দূৰত্ব (কিঃমিঃত)	4000তকৈ কম	4000ৰ পৰা 9000 লৈ	9001ৰ পৰা 14000 লৈ	14000 তকৈ অধিক
বাৰংবাৰতা	20	210	325	445

তুমি যদি এই কোম্পানীৰ এটা টায়াৰ কিনা, সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাতে—

(i) 4000 কিঃ মিঃ অতিক্ৰম কৰাৰ আগতেই ইয়াক সলাবলগীয়া হয়।

(ii) ই 9000 কিঃমিঃতকৈ অধিক অতিক্ৰম কৰে।

(iii) 4000 কিঃমিঃৰ পৰা 14000 কিঃমিঃৰ ভিতৰত কোনো দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰোতেই ইয়াক সলাবলগীয়া হয়।

সমাধান ঃ (i) প্ৰচেষ্টাৰ মুঠ সংখ্যা = 1000

4000 কিঃমিঃ অতিক্ৰম কৰাৰ আগতে সলনি কৰিবলগীয়া হোৱা টায়াৰৰ বাৰংবাৰতা 20

গতিকে, P(টায়াৰটো 4000 কিঃমিঃ অতিক্ৰম কৰাৰ আগতে সলনি হ'ব) = $= \frac{20}{1000} = 0.02$

(ii) 9000 কিঃমিঃতকৈ অধিক অতিক্ৰম কৰা টায়াৰৰ বাৰংবাৰতা হ'ল $325 + 445 = 770$

গতিকে, P(টায়াৰটো 9000 কিঃমিঃতকৈ অধিক চলিব) = $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) 4000 কিঃমিঃ আৰু 14000 কিঃমিঃৰ মাজত সলনি হোৱা টায়াৰৰ বাৰংবাৰতা হ'ল $210 + 325 = 535$

গতিকে, P(4000 কিঃমিঃ আৰু 14000 কিঃমিঃৰ মাজত টায়াৰটো সলনি হ'ব) $= \frac{535}{1000} = 0.535$

উদাহৰণ 7 ঃ মাহিলি গোট পৰীক্ষাত এগৰাকী ছাত্ৰই লাভ কৰা নম্বৰৰ শতকৰা হিচাপ তলত উল্লেখ কৰা হৈছে ঃ

তালিকা 15.9

গোট পৰীক্ষা	I	II	III	IV	V
প্ৰাপ্ত নম্বৰৰ শতাংশ	69	71	73	68	74

এই তথ্যৰ ভিত্তিত এটা গোট পৰীক্ষাত ছাত্ৰগৰাকীয়ে 70% তকৈ অধিক নম্বৰ লাভ কৰাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

সমাধান ঃ গোট পৰীক্ষাৰ মুঠ সংখ্যা 5

70% তকৈ অধিক নম্বৰ লাভ কৰা গোট পৰীক্ষাৰ সংখ্যা হ'ল 3

গতিকে, P(70% তকৈ অধিক নম্বৰ লাভ কৰে) = $\frac{3}{5} = 0.6$

উদাহৰণ 8 ঃ বয়সৰ সৈতে দুৰ্ঘটনাৰ কোনো প্ৰকাৰৰ সম্পৰ্ক আছে নেকি সেইটো নিৰ্ণয় কৰাৰ উদ্দেশ্যে এটা বীমা কোম্পানীয়ে কোনো এখন নগৰৰ 2000 জন গাড়ীচালকক যাদৃচ্ছিকভাৱে (ব্যক্তি নিৰপেক্ষভাৱে) বাছনি কৰিছিল। প্ৰাপ্ত তথ্যসমূহ তলৰ তালিকাত দিয়া হ'ল—

তালিকা 15.10

গাড়ীচালকৰ বয়স (বছৰৰ হিচাপত)	এবছৰত হোৱা দুৰ্ঘটনাৰ সংখ্যা				
	0	**1**	**2**	**3**	**3ৰ অধিক**
18 - 29	440	160	110	61	35
30 - 50	505	125	60	22	18
50ৰ অধিক	360	45	35	15	9

নগৰখনৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা এজন গাড়ীচালকৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ ঘটনাবোৰৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা ঃ

(i) গাড়ীচালকজনৰ বয়স 18 ৰ পৰা 29 বছৰৰ ভিতৰত আৰু তেওঁ এবছৰত ঠিক 3 টা দুৰ্ঘটনা ঘটাইছে।

(ii) গাড়ীচালকজনৰ বয়স 30 ৰ পৰা 50 বছৰৰ ভিতৰত আৰু তেওঁ এবছৰত এটা বা ততোধিক দুৰ্ঘটনা ঘটাইছে।

(iii) গাড়ীচালকজনে এবছৰত কোনো দুৰ্ঘটনা সংঘটিত কৰা নাই।

সমাধান ঃ গাড়ীচালকৰ মুঠ সংখ্যা = 2000

(i) বয়স 18 ৰ পৰা 29 বছৰৰ মাজত থকা আৰু বছৰত ঠিক 3 টা দুৰ্ঘটনা ঘটোৱা গাড়ীচালকৰ সংখ্যা 61 জন।

গতিকে, P(গাড়ীচালকজনৰ বয়স 18ৰ পৰা 29 বছৰৰ মাজত আৰু তেওঁ এবছৰত ঠিক 3 টা দুৰ্ঘটনা কৰিছে) $= \frac{61}{2000} = 0.0305 = 0.031$

(ii) বয়স 30ৰ পৰা 50 বছৰৰ মাজত আৰু এবছৰত এটা বা ততোধিক দুৰ্ঘটনা সংঘটিত কৰা গাড়ীচালকৰ সংখ্যা $= 125 + 60 + 22 + 18 = 225$

গতিকে, P(গাড়ীচালকৰ বয়স 30 ৰ পৰা 50 বছৰৰ মাজত আছে আৰু তেওঁ বছৰত এটা বা ততোধিক দুৰ্ঘটনা ঘটাইছে)

$$= \frac{225}{2000} = 0.1125 = 0.113$$

(iii) এবছৰত কোনো দুৰ্ঘটনা নঘটোৱা গাড়ীচালকৰ সংখ্যা $= 440 + 505 + 360 = 1305$

গতিকে, P(গাড়ীচালকজনে কোনো দুৰ্ঘটনা সংঘটিত কৰা নাই) $= \frac{1305}{2000} = 0.653$

উদাহৰণ 9 ঃ (তালিকা 14.3, উদাহৰণ 4, অধ্যায় 14)ত সন্নিবিষ্ট বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাখন বিবেচনা কৰা য'ত এটা শ্ৰেণীৰ 38 জন ছাত্ৰৰ ওজন দিয়া আছে।

(i) শ্ৰেণীটোৰ এজন ছাত্ৰৰ ওজন 46-50 কিঃগ্ৰাঃৰ অন্তৰালটোত থকাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

(ii) এই প্ৰসংগত দুটা ঘটনাৰ উল্লেখ কৰা যাৰ এটাৰ সম্ভাৱিতা 0 আৰু আনটোৰ সম্ভাৱিতা 1ৰ সমান হয়।

সমাধান ঃ (i) মুঠ ছাত্ৰৰ সংখ্যা 38 আৰু ওজন 46 - 50 কিঃগ্ৰাঃ অন্তৰালত থকা ছাত্ৰৰ সংখ্যা 3।

গতিকে, P(ছাত্ৰজনৰ ওজন 46 - 50 কিঃগ্ৰাঃ অন্তৰালত আছে) = $\frac{3}{38} = 0.079$

(ii) উদাহৰণস্বৰূপে, এজন ছাত্ৰৰ ওজন 30 কিঃগ্ৰাঃ হোৱা ঘটনাটো বিবেচনা কৰা। যিহেতু কোনো ছাত্ৰৰে এনে ওজন নাই, গতিকে এই ঘটনা সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0। সদৃশভাৱে, এজন ছাত্ৰৰ ওজন 30 কিঃগ্ৰাঃতকৈ অধিক হোৱা ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{38}{38} = 1$।

উদাহৰণ 10 ঃ 5 বস্তা বীজৰ প্ৰতিটোৰেপৰা 50 টাকৈ বীজ যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হৈছিল আৰু গজালি ওলোৱাৰ উপযোগী মানবিশিষ্ট পৰিৱেশত ৰখা হৈছিল। 20 দিনৰ অন্তত প্ৰতিটো থূপতে গজালি ওলোৱা বীজবোৰ গণনা কৰা হৈছিল আৰু তলত দেখুওৱা ধৰণে তথ্যভুক্ত কৰা হৈছিল—

তালিকা 15.11

বস্তা	1	2	3	4	5
গজালি ওলোৱা বীজৰ সংখ্যা	40	48	42	39	41

তলত দিয়াৰ দৰে বীজৰ গজালি ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা—

(i) এটা বস্তাত 40 টাতকৈ অধিক।

(ii) এটা বস্তাত 49 টা।

(iii) এটা বস্তাত 35 টাতকৈ অধিক।

সমাধান ঃ

(i) 50 টাৰ ভিতৰত 40 তকৈ অধিক সংখ্যক বীজৰ গজালি ওলোৱা বস্তাৰ সংখ্যা হ'ল 3টা।

গতিকে, P(এটা বস্তাত 40 তকৈ অধিক বীজৰ গজালি ওলায় = $\frac{3}{5} = 0.6$

(ii) 49 টাকৈ বীজৰ গজালি ওলোৱা বস্তাৰ সংখ্যা = 0

গতিকে, P(এটা বস্তাত 49 টা বীজৰ গজালি ওলায়) = $\frac{0}{5} = 0$

(iii) 35 তকৈ অধিক বীজৰ গজালি ওলোৱা বস্তাৰ সংখ্যা = 5

গতিকে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিতা = $\frac{5}{5} = 1$

মন্তব্য ঃ পূৰ্বৱৰ্তী আটাইবোৰ উদাহৰণতে তোমালোকে নিশ্চয় মন কৰিছা যে এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা 0 ৰ পৰা 1লৈ যিকোনো ভগ্নাংশ হ'ব পাৰে।

অনুশীলনী 15.1

1. এখন ক্ৰিকেট খেলত এগৰাকী মহিলা ক্ৰিকেটাৰে 30 টা বলৰ ভিতৰত 6 টা বাউণ্ডেৰী কোবায়। তেওঁ বাউণ্ডেৰী নোকোবোৱাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

2. 2 টাকৈ সন্তান থকা 1500 টা পৰিয়াল যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হৈছিল আৰু নিম্নোক্ত তথ্যসমূহ লিপিবদ্ধ কৰা হৈছিল—

এটা পৰিয়ালত ছোৱালীৰ সংখ্যা	2	1	0
পৰিয়ালৰ সংখ্যা	475	814	211

যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা এটা পৰিয়ালৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাব
(i) 2 জনী ছোৱালী থাকে (ii) 1 জনী ছোৱালী থাকে (iii) কোনো ছোৱালী নাথাকে।
লগতে, এই সম্ভাৱিতাবোৰৰ সমষ্টি 1 হয়নে পৰীক্ষা কৰি চোৱা।

3. অধ্যায়-14 অনুচ্ছেদ 14.4, উদাহৰণ 5 দ্ৰষ্টব্য। শ্ৰেণীটোৰ এজন ছাত্ৰৰ আগষ্ট মাহত জন্ম হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

4. তিনিটা মুদ্ৰা 200 বাৰ একেলগে টছ্ কৰা হ'ল আৰু বিভিন্ন ফলৰ বাৰংবাৰতাসমূহ নিম্নোক্ত ধৰণে পোৱা গ'ল—

ফল	3টা মুণ্ড	2টা মুণ্ড	1টা মুণ্ড	মুণ্ড নাই
বাৰংবাৰতা	23	72	77	28

যদি মুদ্ৰা তিনিটা একেলগে আকৌ টছ্ কৰা হয়, তেন্তে 2 মুণ্ড প্ৰাপ্ত হোৱাৰ বাবে সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

5. কোনো সংস্থাই যাদৃচ্ছিকভাৱে 2400 টা পৰিয়াল বাছনি কৰিছিল আৰু এটা পৰিয়ালত থকা গাড়ীৰ সংখ্যাৰ সৈতে পৰিয়ালটোৰ আয়ৰ কিবা সম্পৰ্ক আছে নেকি নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে জৰীপ চলাইছিল। প্ৰাপ্ত তথ্যসমূহ নিম্নোক্ত তালিকাত উল্লেখ কৰা হ'ল ঃ

মাহিলি আয় (টকাত)	পৰিয়ালে প্ৰতি গাড়ীৰ সংখ্যা			
	0	**1**	**2**	**2ৰ অধিক**
7000তকৈ কম	10	160	25	0
7,000 – 10,000	0	305	27	2
10,000 – 13,000	1	535	29	1
13,000 – 16,000	2	469	59	25
16,000 বা ততোধিক	1	579	82	88

ধৰা হ'ল, পৰিয়াল এটা বাছনি কৰা হৈছে।

সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যে বাছনিকৃত পৰিয়ালটোৰ

(i) মাহিলি 10,000 – 13,000 টকাৰ ভিতৰত উপাৰ্জন আৰু 2 খনহে গাড়ী আছে।

(ii) মাহিলি উপাৰ্জন 16,000 টকা বা ততোধিক আৰু 1 খনহে গাড়ী আছে।

(iii) মাহিলি উপাৰ্জন 7,000 তকৈ কম আৰু কোনো গাড়ী নাই।

(iv) মাহিলি উপাৰ্জন 13,000 – 16,000 টকাৰ ভিতৰত আৰু 2 খনতকৈ অধিক গাড়ী আছে।

(v) 1 খনতকৈ অধিক গাড়ী নাই।

6. তালিকা 14.7, অধ্যায় 14 দ্ৰষ্টব্য।

(i) গণিতৰ পৰীক্ষাত এজন ছাত্ৰই 20% তকৈ কম নম্বৰ পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) এজন ছাত্ৰই 60 অথবা তাতকৈ অধিক নম্বৰ লাভ কৰাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

7. পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান বিষয়টোৰ সম্পৰ্কে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ মনোভাৱ জনাৰ উদ্দেশ্যে 200 গৰাকী ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ মাজত এটা জৰীপ চলোৱা হৈছিল। প্ৰাপ্ত তথ্যসমূহ নিম্নোক্ত তালিকাত উল্লেখ কৰা হ'ল।

মনোভাৱ	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
প্ৰিয়	135
অপ্ৰিয়	65

যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা এজন ছাত্ৰ বা ছাত্ৰীৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিতা উলিওৱা যাতে

(i) তেওঁ পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান ভাল পায় (ii) তেওঁ ইয়াক ভাল নাপায়।

8. অনুশীলনী 14.2, প্ৰশ্ন 2 দ্ৰষ্টব্য। ব্যৱহাৰিক সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাতে এগৰাকী অভিযন্তাই

(i) নিজৰ কৰ্মস্থলীৰপৰা 7 কিঃমিঃতকৈ কম দূৰত্ব ঠাইত বাস কৰে।

(ii) নিজৰ কৰ্মস্থলীৰপৰা 7 কিঃমিঃ বা তাতোকৈ বেছি দূৰত্বৰ ঠাইত বাস কৰে।

(iii) নিজৰ কৰ্মস্থলীৰপৰা $\frac{1}{2}$ কিঃমিঃৰ ভিতৰত বাস কৰে।

9. **কাৰ্য ঃ** তোমালোকৰ বিদ্যালয়ৰ সন্মুখেৰে এক নিৰ্দিষ্ট সময় অন্তৰালত পাৰ হৈ যোৱা দুচকীয়া, তিনিচকীয়া আৰু চাৰিচকীয়া যানৰ বাৰংবাৰতা টুকি ৰাখা। তুমি লক্ষ্য কৰা মুঠ যানসমূহৰ ভিতৰত যিকোনো এখন যান দুই চকীয়া হোৱাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

10. **কাৰ্য ঃ** তোমাৰ শ্ৰেণীৰ আটাইবোৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীকে এটা 3 অংকীয়া সংখ্যা লিখিবলৈ দিয়া। কোঠাটোৰ এগৰাকী ছাত্ৰ বা ছাত্ৰীক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা। তেওঁ লিখা সংখ্যাটো 3 ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান? মনত ৰাখিবা যে এটা সংখ্যা 3 ৰে বিভাজ্য হয় যদি ইয়াৰ অংক কেইটাৰ সমষ্টিটো 3 ৰে বিভাজ্য হয়।

11. প্ৰত্যেকতে 5 কিঃগ্ৰাঃ বুলি চিহ্নিত কৰা গম আটাৰ এঘাৰটা মোনাত প্ৰকৃততে আটাৰ ওজন (কিঃগ্ৰাঃত) আছিল নিম্নোক্ত ধৰণৰ—

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

এই মোনাবোৰৰপৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা কোনোবা এটা মোনাত 5 কিঃগ্ৰাঃতকৈ বেছি আটা থকাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

12. অনুশীলনী 14.2, প্ৰশ্ন-5 অত কোনো এখন মহানগৰীৰ 30 দিন ধৰি প্ৰতি PPM (parts per million) বায়ুত ছালফাৰ ডাই-অক্সাইডৰ গাঢ়তা সম্বন্ধীয় এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰিবলৈ তোমালোকক কোৱা হৈছিল। এই তালিকাৰ সহায়ত উক্ত দিনবোৰৰ যিকোনো এটাত ছালফাৰ ডাই-অক্সাইডৰ গাঢ়তা 0.12 - 0.16 অন্তৰালত থকাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

13. অনুশীলনী 14.2, প্ৰশ্ন-1 অত তোমালোকক এটা শ্ৰেণীৰ 30 গৰাকী ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ তেজৰ গ্ৰুপ সম্বন্ধীয় এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰিবলৈ কোৱা হৈছিল। এই তালিকাখনৰ সহায়ত এই শ্ৰেণীটোৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা এগৰাকী ছাত্ৰ বা ছাত্ৰীৰ তেজৰ গ্ৰুপ AB হোৱাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

15.3 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে নিম্নোক্ত বিষয়সমূহ অধ্যয়ন কৰিলা ঃ

1. কোনো পৰীক্ষাৰ ক্ষেত্ৰত এটা ঘটনা হ'ল পৰীক্ষাটোৰ কিছুমান ফল (outcome)ৰ সংগ্ৰহ বা সমষ্টি।

2. এটা ঘটনা E ৰ ক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰিক (Empirical) বা পৰীক্ষামূলক (Experimental) সম্ভাৱিতা P(E) ৰ বৰ্ণনা দিয়া হয় এনেদৰে—

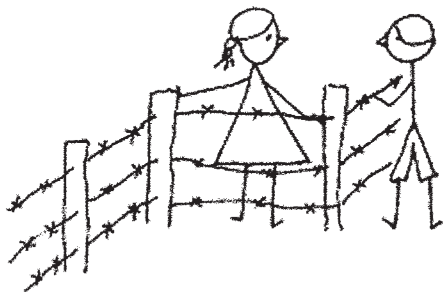
$$P(E) = \frac{\text{প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা যিবোৰত E সংঘটিত হৈছে}}{\text{মুঠ প্ৰচেষ্টাৰ সংখ্যা}}$$

3. এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা 0 আৰু 1 ৰ মাজত (0 আৰু 1 সমন্বিতে) থাকে।

পৰিশিষ্ট-1

গণিতত প্ৰমাণ (Proofs in Mathematics)

A1.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ



ধৰি লোৱা হওক, তোমালোকৰ পৰিয়ালৰ এটুকুৰা মাটি আছে আৰু এই মাটি টুকুৰাৰ চৌপাশে কোনো ধৰণৰ বেৰা নাই। কোনোবা এদিন তোমালোকৰ চুবুৰীয়াজনে তেওঁৰ মাটি টুকুৰা বেৰা দি আগুৰিবলৈ ঠিক কৰিলে। তেওঁ মাটি টুকুৰা বেৰা দি আগুৰাৰ পিছত তোমালোকে লক্ষ্য কৰিলা যে তোমালোকৰ পৰিয়ালৰ মাটিৰ এটা অংশ তেওঁ বেৰাৰ অন্তৰ্ভূক্ত কৰি লৈছে। তেওঁ যে তোমালোকৰ মাটি বেদখল কৰাৰ চেষ্টা কৰিছে সেই কথাটো তেওঁক কিদৰে প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাবা? প্ৰথম পদক্ষেপ হিচাপে সীমাৰ ক্ষেত্ৰত থকা মতভেদ আঁতৰোৱাৰ বাবে তুমি হয়তো গাঁৱৰ জ্যেষ্ঠ লোকসকলৰ সহায় বিচাৰিব পাৰা। কিন্তু ধৰা হওঁক, জ্যেষ্ঠসকলৰ মাজত এই ক্ষেত্ৰত ঐক্যমত সম্ভৱ নহ'ল। কিছুমানৰ মতে তোমালোক শুদ্ধ আৰু আন কিছুমানৰ মতে তোমালোকৰ চুবুৰীয়াহে শুদ্ধ। তোমালোকৰ কৰণীয় কি হ'ব? তোমালোকৰ মাটিৰ সীমাৰ দাবীটো আটাইৰে গ্ৰহণযোগ্য হোৱাকৈ উপায় এটা বিচাৰি উলিওৱাটোৱেই হ'ব তোমালোকৰ বাবে একমাত্ৰ বিকল্প। উদাহৰণ স্বৰূপে, চৰকাৰৰ দ্বাৰা অনুমোদিত তোমালোকৰ গাঁৱৰ এখন জৰীপ মানচিত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিব পৰা যায়, প্ৰয়োজন সাপেক্ষে আইনৰ, আদালতৰ সহায় ল'বও পাৰি, যাতে এইটো প্ৰমাণ কৰিব পৰা যায় যে তোমালোক শুদ্ধ আৰু তোমালোকৰ চুবুৰীয়াগৰাকী অশুদ্ধ।

অন্য এক পৰিস্থিতি আমি লক্ষ্য কৰি চাওঁহক। ধৰি লোৱা, তোমাৰ মাৰাই তোমালোকৰ ঘৰৰ 2005 চনৰ আগষ্ট মাহৰ বাবে বিদ্যুৎ মাছুলৰ বিলখন পৰিশোধ কৰিছে। যি হওক, 2005 চনৰ

ছেপ্তেম্বৰ মাহৰ বিলত দেখুওৱা হৈছে যে তোমালোকৰ আগষ্ট মাহৰ বিলখন পৰিশোধ কৰা হোৱা নাই। বিদ্যুৎ বিভাগৰ দাবীটো কেনেকৈ তুমি নস্যাৎ কৰিবা? ইয়াৰ বাবে তুমি আগষ্ট মাহৰ বিল পৰিশোধৰ ৰছিদখন বিভাগীয় কাৰ্যালয়ত দেখুৱাব লাগিব।

এইমাত্ৰ তুমি কিছুমান উদাহৰণ প্ৰত্যক্ষ কৰিলা য'ত দেখা গৈছে যে আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত প্ৰায়ে কিছুমান উক্তি বা দাবীক সত্য বা অসত্য বুলি প্ৰমাণ কৰি দিবলগীয়া হয়। যি হওক, বহুতো উক্তিক আকৌ প্ৰমাণ কৰিবলগীয়া বিষয় বুলি নভৱাকৈও আমি গ্ৰহণ কৰোঁহঁক। কিন্তু গণিতত আমি কোনো উক্তিক (কিছুমান স্বীকাৰ্যৰ বাহিৰে) সঁচা বা মিছা বুলি গ্ৰহণ কৰো তেতিয়াহে, যেতিয়া গণিতৰ যুক্তি (Logic) অনুসাৰে ই সেইধৰণে প্ৰমাণিত হয়।

প্ৰকৃততে, গণিতত প্ৰমাণৰ ধাৰাটো বহু হাজাৰ বছৰ ধৰি চলি আছে আৰু গণিতৰ যিকোনো শাখাতে সেইবোৰে কেন্দ্ৰীয় ভূমিকা পালন কৰি আহিছে। গ্ৰীক দাৰ্শনিক তথা গণিতজ্ঞ থেলকেই প্ৰথমটো জ্ঞাত প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা ব্যক্তিজন বুলি বিশ্বাস কৰা হয়। মেছ'প'টেমিয়া, ইজিপ্ত, চীনদেশ আৰু ভাৰতবৰ্ষৰ দৰে বহু প্ৰাচীন সভ্যতাত গাণিতিক কৰ্মকাণ্ডই কেন্দ্ৰীয় ভূমিকা গ্ৰহণ কৰিলেও আজিকালি আমি কৰাৰ দৰে সেইবোৰত গাণিতিক প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰাৰ কোনো পৰিস্কাৰ সাক্ষ্য পোৱা নাযায়।

এই অধ্যায়ত উক্তি কি, গণিতত কি ধৰণৰ যুক্তি জড়িত থাকে আৰু এটা গাণিতিক প্ৰমাণত কি থাকে, এনেধৰণৰ বিষয়সমূহৰ ওপৰত আলোকপাত কৰা হ'ব।

A1.2 গাণিতিকভাৱে গ্ৰহণীয় উক্তি (Mathematically Acceptable Statements) ঃ

এই অনুচ্ছেদত আমি গাণিতিকভাৱে গ্ৰহণীয় উক্তিৰ অৰ্থ বাখ্যা কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিমহঁক। এটা 'উক্তি' হ'ল এনে এটা বাক্য যিয়ে কোনো ধৰণৰ আদেশ নাইবা আৱেগ, অনুভূতি আদি ভাৱ প্ৰকাশ নকৰে। অৱশ্যে, লগতে প্ৰশ্নসূচক বাক্যসমূহকো উক্তি হিচাপে ধৰা নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে—

'তোমাৰ চুলিৰ বৰণ কি?' এটা উক্তি নহয়, ই এটা প্ৰশ্ন।

'অনুগ্ৰহ কৰি যোৱা আৰু মোৰ বাবে অলপ পানী আনা' ই এটা অনুৰোধ নাইবা এটা আদেশ; উক্তি নহয়।

'কেনে বিস্ময়কৰ সূৰ্যাস্ত!' এটা আৱেগ বা অনুভূতি সূচক মন্তব্য; উক্তি নহয়।

যি কি নহওক, 'তোমাৰ চুলিৰ বৰণ ক'লা' এটা উক্তি।

সাধাৰণতে, উক্তিসমূহ তলত উল্লেখ কৰা যিকোনো এক ধৰণৰ হ'ব পাৰে—

- সদায় সত্য
- সদায় অসত্য
- দ্ব্যৰ্থবোধক

'দ্ব্যৰ্থবোধক' কথাটোৰ কিছু ব্যাখ্যাৰ প্ৰয়োজন আছে। দুই ধৰণৰ পৰিস্থিতিৰ বাবে এটা উক্তি

দ্ব্যৰ্থবোধক হ'ব পাৰে। প্ৰথম পৰিস্থিতিটো হ'ল যেতিয়া আমি নিশ্চিত হ'ব নোৱাৰো যে উক্তিটো সদায় সঁচা নে সদায় মিছা। উদাহৰণ স্বৰূপে, 'কাইলৈ বৃহস্পতিবাৰ' এই উক্তিটো দ্ব্যৰ্থবোধক, কাৰণ উক্তিটো সঁচা বা মিছা জানিবলৈ পৰ্যাপ্ত প্ৰাসংগিক তথ্য নাই।

দ্ব্যৰ্থবোধক উৎপত্তিৰ দ্বিতীয় পৰিস্থিতিটো হ'ল— যেতিয়া উক্তিটো ধাৰণা বা ভাবৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল হয় অৰ্থাৎ যেতিয়া কিছুমান মানুহৰ বাবে ই সঁচা আৰু আন কিছুমানৰ বাবে মিছা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, 'কুকুৰবোৰ বুধিয়ক' উক্তিটো দ্ব্যৰ্থক কিয়নো কিছুমান মানুহে বিশ্বাস কৰে যে ই সঁচা আৰু আন কিছুমানে এনেধৰণে বিশ্বাস নকৰে।

উদাহৰণ 1 ঃ নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ কোন শ্ৰেণীত পৰে— সদায় সঁচা, সদায় মিছা নে দ্ব্যৰ্থবোধক? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

(i) এক সপ্তাহত 8 দিন থাকে।

(ii) ইয়াত বৰষুণ হৈ আছে।

(iii) বেলি পশ্চিমত অস্ত যায়।

(iv) গৌৰী এজনী মৰমীয়াল ছোৱালী।

(v) দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম।

(vi) দুটা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম।

সমাধান ঃ

(i) উক্তিটো সদায় মিছা, যিহেতু এসপ্তাহত 7 দিনহে থাকে।

(ii) উক্তিটো দ্ব্যৰ্থবোধক, কিয়নো 'ইয়াত' শব্দটোৱে কি ঠাঁৰি উল্লেখ কৰিছে সেইটো স্পষ্ট নহয়।

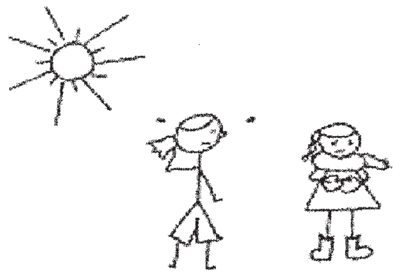
(iii) উক্তিটো চিৰসত্য। আমি য'তেই নাথাকো কিয় বেলি পশ্চিমত অস্ত যায়।

(iv) উক্তিটো দ্ব্যৰ্থবোধক, যিহেতু ই ধাৰাণাভিত্তিক— কাৰোবাৰ বাবে গৌৰী দয়ালু হ'লেও আনৰ বাবে নহ'বও পাৰে।

(v) উক্তিটো সদায় মিছা। দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণফল সদায় অযুগ্ম।

(vi) উক্তিটো সদায় সঁচা। যি হওক, ইয়াক সঁচা বুলি প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ আমি কিছু কাম কৰিব লাগিব। A1.4 অনুচ্ছেদত ইয়াৰ প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা হ'ব।

ইতিপূৰ্বে উল্লেখ কৰি অহাৰ দৰে, আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত আমি উক্তিবোৰৰ বৈধতাৰ (validity) প্ৰতি খুব বেছি সতৰ্ক নাথাকো। উদাহৰণ স্বৰূপে ধৰি লোৱা, তোমাৰ বন্ধুৱে তোমাক কলে যে কেৰালাৰ মনন্তাবডীত জুলাই মাহৰ প্ৰত্যেক দিনতে বৰষুণ দিয়ে। সমস্ত প্ৰকাৰৰ সম্ভাৱিতা সত্বেও তুমি হয়তো তোমাৰ বন্ধু গৰাকীৰ কথা বিশ্বাস কৰিবা, যদিও জুলাই মাহত এদিন বা দুদিন হয়তো বৰষুণ দিয়া নাছিল। উকীল নহলে তুমি তেওঁৰ সৈতে যুক্তিৰ অৱতাৰণা নিশ্চয় নকৰিবা।



আন এক উদাহৰণ স্বৰূপে, আমি সততে নিজৰ মাজত 'আজি বৰ গৰম' জাতীয় উক্তিবোৰ বিবেচনা কৰো। এনে জাতীয় উক্তিবোৰ আমি সহজেই গ্ৰহণ কৰোহক কাৰণ, এই উক্তিবোৰ দ্ব্যৰ্থক হ'লেও প্ৰসংগটো আমাৰ জনা আছে। 'আজি বৰ গৰম' উক্তিটোৱে বেলেগ বেলেগ মানুহৰ মনত বেলেগ বেলেগ ধাৰণা বা অনুভূতিৰ সঞ্চাৰ কৰিব পাৰে কিয়নো কুমাওন অঞ্চলৰ এগৰাকী ব্যক্তিৰ বাবে যিটো বৰ গৰম, চেন্নাই অঞ্চলৰ এগৰাকী ব্যক্তিৰ বাবে সেয়া গৰম নহবও পাৰে।

কিন্তু গাণিতিক উক্তি এটা দ্ব্যৰ্থবোধক হ'ব নোৱাৰে। গণিতত উক্তি এটা গ্ৰহণীয় (Acceptable) বা বৈধ (valid) হয়, যদিহে ই সঁচা নাইবা মিছা হয়। উক্তি এটাক আমি সঁচা বুলি কওঁ যদি ই সদায় সঁচা হয় অন্যথা ইয়াক এটা মিছা উক্তি আখ্যা দিয়া হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে, $5 + 2 = 7$ সদায় সঁচা, গতিকে $5 + 2 = 7$ এটা সঁচা উক্তি আৰু $5 + 3 = 7$ এটা মিছা উক্তি।

উদাহৰণ 2 ঃ নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ সঁচা নে মিছা কোৱা ঃ

(i) ত্ৰিভুজ এটাৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি 180°

(ii) 1 তকৈ ডাঙৰ প্ৰতিটো অযুগ্ম সংখ্যাই মৌলিক।

(iii) যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $4x + x = 5x$।

(iv) প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $2x > x$।

(v) প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq x$।

(vi) এটা চতুৰ্ভূজৰ আটাইবোৰ বাহু সমান হ'লে, ই এটা বৰ্গ হয়।

সমাধান ঃ

(i) এই উক্তিটো সত্য; ষষ্ঠ অধ্যায়ত তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিছা।

(ii) এই উক্তিটো অসত্য; উদাহৰণস্বৰূপে 9 এটা মৌলিক সংখ্যা নহয়।

(iii) এই উক্তিটো সত্য।

(iv) এই উক্তিটো অসত্য। উদাহৰণস্বৰূপে, $2 \times (-1) = -2$ আৰু $-2, -1$ তকৈ ডাঙৰ নহয়।

(v) এই উক্তিটো অসত্য। উদাহৰণস্বৰূপে, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ আৰু $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ তকৈ ডাঙৰ নহয়।

(vi) এই উক্তিটো অসত্য। কিয়নো ৰম্বাচৰ প্ৰত্যেকটো বাহু সমান যদিও ই বৰ্গ হোৱাটো আৱশ্যক নহয়।

তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছা যে গণিতৰ মতে এটা উক্তি সঁচা নহয় বুলি সাব্যস্ত কৰিবলৈ হলে আমি এটা ক্ষেত্ৰ বা উদাহৰণ বিচাৰি উলিয়াব লাগিব য'ত উক্তিটো প্ৰযোজ্য নহয়। গতিকে

(ii)ত, যিহেতু 9 সংখ্যাটো মৌলিক নহয়, এই উদাহৰণটোৱে দেখুৱায় যে '1 তকৈ ডাঙৰ প্রত্যেক অযুগ্ম সংখ্যাই মৌলিক' উক্তিটো সত্য নহয়। যি উদাহৰণে কোনো এটা উক্তিৰ বিৰোধিতা কৰে তেনে উদাহৰণক বিপৰীত বা বিৰোধী উদাহৰণ (Counter Example) আখ্যা দিয়া হয়। A1.5 অনুচ্ছেদত কিছু বহলভাৱে আমি বিৰোধী উদাহৰণ সম্পর্কে আলোচনা কৰিম।

তোমালোকে হয়তো মন কৰিছাহঁক যে যদিও (iv), (v) আৰু (vi) উক্তিকেইটা মিছা, তথাপি সত্যতা প্রতিপন্ন কৰিবলৈ কিছুমান চৰ্ত আৰোপ কৰি ইহঁতক পুনৰ লিখিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ উপযুক্ত চৰ্ত আৰোপ কৰি নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ পুনৰ লিখা যাতে সেইবোৰ সঁচা হয়—

(i) প্রত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $2x > x$।

(ii) প্রত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq x$।

(iii) কোনো এটা সংখ্যাক সেই সংখাটোৰে ভাগ কৰিলে সদায় 1 পোৱা যায়।

(iv) বৃত্তৰ কোনো এটা বিন্দুত এডাল জ্যাই উৎপন্ন কৰা কোণটো 90°।

(v) যদি চতুৰ্ভূজ এটাৰ সকলো বাহু সমান হয়, তেন্তে ই এটা বৰ্গ।

সমাধান ঃ

(i) যদি $x > 0$, তেন্তে $2x > x$।

(ii) যদি $x \leq 0$ বা $x \geq 1$, তেন্তে $x^2 \geq x$।

(iii) যদি তুমি অশূণ্য কোনো সংখ্যাক সেই সংখাটোৰে হৰণ কৰা তেন্তে সদায় 1 পাবা।

(iv) বৃত্তৰ ব্যাসে বৃত্তটোৰ কোনো বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণটো 90°ৰ সমান।

(v) যদি কোনো চতুৰ্ভূজৰ সকলো বাহু আৰু সকলো অন্তঃ কোণ সমান তেন্তে ই এটা বৰ্গ।

অনুশীলনী A1.1

1. নিম্নোক্ত উক্তিবোৰ কোন প্রকাৰৰ কোৱা— চিৰসত্য, চিৰ অসত্য নে দ্ব্যৰ্থবোধক? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰা—

(i) এবছৰত তেৰটা মাহ থাকে।

(ii) দেৱালী এটা শুক্রবাৰে অনুষ্ঠিত হয়।

(iii) মাগাদীৰ তাপমান 26°।

(iv) পৃথিৱীৰ 1টা চন্দ্ৰ আছে।

(v) কুকুৰবোৰে উৰিব পাৰে।

(vi) ফেব্রুৱাৰী মাহত দিনৰ সংখ্যা মাত্ৰ 28।

2. নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ সঁচা নে মিছা কোৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি আগবঢ়োৱা।

(i) চতুৰ্ভূজৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি 350°।

(ii) যিকেনো বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq 0$।

(iii) এটা ৰম্বাচ এটা সামন্তৰিকো হয়।

(iv) দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টি এটা যুগ্ম সংখ্যা।

(v) দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টি এটা অযুগ্ম সংখ্যা।

3. যথাযথ চৰ্ত আৰোপ কৰি নিম্নোক্ত উক্তিবোৰ নতুনকৈ লিখি উলিওৱা যাতে সেইবোৰ সত্য হয়—

(i) সকলো মৌলিক সংখ্যাই অযুগ্ম।

(ii) এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুগুণ সদায় যুগ্ম।

(iii) যিকোনো সংখ্যা xৰ বাবে, $3x + 1 > 4$।

(iv) যিকেনো সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq 0$।

(v) প্ৰত্যেক ত্ৰিভুজতে মধ্যমা বা মাধ্যিকী একোডাল কোণ একোটাৰ সমদ্বিখণ্ডকো।

A1.3 নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি (Deductive Reasoning) ঃ

দ্ব্যৰ্থহীন উক্তিৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা প্ৰধান যুক্তিসন্মত ব্যৱস্থাটোৱেই (Main Logical Tool) হ'ল নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি। নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতিটো ভালদৰে বুজিবলৈ এটা সাঁথৰ লোৱা আৰু ইয়াক সমাধান কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা।

তোমাক চাৰিখন কাৰ্ড দিয়া হ'ল। প্ৰতিখন কাৰ্ডৰ এপিঠিত এটা সংখ্যা আৰু আনপিঠিত একোটা আখৰ লিখা আছে।

A	V	6	5

ধৰি লোৱা, তোমাক কোৱা হ'ল যে কাৰ্ডকেইখনে তলৰ নিয়মটো মানি চলে ঃ

'যদি কাৰ্ড এখনৰ এপিঠিত এটা যুগ্ম সংখ্যা থাকে তেন্তে আন পিঠিত এটা স্বৰবৰ্ণ থাকিব।'

নিয়মটোৰ সত্যতা নিৰূপন কৰিবলৈ আটাইতকৈ কম কিমানখন কাৰ্ড ওলোটাই চাব লাগিব?

অৱশ্যে আটাইকেইখন কাৰ্ডকে ওলোটাই চাই সত্যতা নিৰূপন কৰাৰ ব্যৱস্থা তোমাৰ বাবে খোলা আছে। কিন্তু থকাতকৈ কম সংখ্যক কাৰ্ড ওলোটাই চালেও তোমাৰ কামটো হ'বনে?

মন কৰা যে, উক্তিটোৰ মতে এপিঠিত এটা যুগ্ম সংখ্যা থকা কাৰ্ড এখনৰ আনপিঠিত এটা স্বৰবৰ্ণ থাকে। উক্তিটোৱে এইটো কোৱা নাই যে এপিঠিত স্বৰবৰ্ণ থকা কাৰ্ড এখনৰ আন পিঠিত যুগ্ম সংখ্যা থাকিবই লাগিব। তেনেকুৱা হবও পাৰে বা নহবও পাৰে। নিয়মটোত এইটোও কোৱা হোৱা নাই যে এপিঠিত এটা অযুগ্ম সংখ্যা থকা কাৰ্ড এখনৰ আনটো পিঠিত এটা ব্যঞ্জনবৰ্ণ থাকিবই লাগিব। তেনেকুৱা হ'বও পাৰে বা নহ'বও পাৰে।

তেনেহ'লে আমি 'A' কাৰ্ডখন ওলোটাই চাব লাগিব নেকি? নালাগে! কাৰ্ডখনৰ আনটো পিঠিত যুগ্ম বা অযুগ্ম সংখ্যা যিয়েই নাথাকক, নিয়মটো প্ৰযোজ্য হৈয়েই থাকিব।

'5' কাৰ্ডখনৰ ক্ষেত্ৰত কি হ'ব? এই কাৰ্ডখনো ওলোটাই চোৱাৰ কোনো আৱশ্যকতা নাই, কাৰণ, আনটো পিঠিত স্বৰবৰ্ণ অথবা ব্যঞ্জনবৰ্ণ যিয়েই নাথাকক, নিয়মটো প্ৰযোজ্য হৈয়ে থাকিব।

কিন্তু 'V' আৰু '6' কাৰ্ড দুখন ওলোটাই চোৱাৰ প্ৰয়োজন আছে। যদি 'V' কাৰ্ডখনৰ আনটো পিঠিত এটা যুগ্ম সংখ্যা থাকে তেন্তে নিয়মটো ভংগ হৈছে বুলি স্পষ্টভাৱে ওলাই পৰিব। সদৃশ ধৰণে, যদি '6' কাৰ্ডখনৰ আনটো পিঠিত এটা ব্যঞ্জনবৰ্ণ থাকে তেন্তে নিয়মটো ভংগ হ'ব।

সাঁথৰটো সমাধানৰ অৰ্থে আমি যি বিচাৰধাৰা বা যুক্তিৰ অৱতাৰণা কৰিলোহঁক তাকেই কোৱা হয় নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি। ইয়াক নিগমনাত্মক কোৱা হয় কাৰণ যুক্তি প্ৰয়োগেৰে পূৰ্বস্বীকৃত কোনো উক্তিৰ পৰা আমি এক সিদ্ধান্ত বা উক্তিত উপনীত হওঁ। উদাহৰণ স্বৰূপে, ওপৰোক্ত সাঁথৰটোত, এলানি যুক্তি তৰ্কৰ প্ৰয়োগৰ দ্বাৰা আমি এই সিদ্ধান্তত উপনীত হৈছিলো যে আমি কেৱল 'V' আৰু '6' কাড দুখনহে ওলোটাই চাব লাগিব।

নিগমনাত্মক পদ্ধতিয়ে কোনো নিৰ্দিষ্ট উক্তিৰ সত্যতা প্ৰতিপন্নৰ সিদ্ধান্ত গ্ৰহণতো আমাক সহায় কৰে কাৰণ ই ইতিমধ্যে সঁচা বুলি জানিব পৰা এটা বহল ভিত্তিক সাধাৰণ উক্তিৰ এক বিশেষ ৰূপহে মাথোন। উদাহৰণ স্বৰূপে, দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল সদায় অযুগ্ম হয় বুলি প্ৰমাণিত হোৱাৰ লগে লগে আমি 70001×134563 গুণফলটো অযুগ্ম বুলি থিতাতে মন্তব্য বা সিদ্ধান্ত আগবঢ়াব পাৰো কিয়নো 70001 আৰু 134563 সংখ্যা দুটা অযুগ্ম।

শ শ বছৰ ধৰি নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি মানুহৰ চিন্তা জগতৰ অংশ হৈ আহিছে আৰু আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ সকলোতে ই ব্যৱহৃত হৈছে। উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰি লোৱা, পৰৱৰ্তী উক্তি দুটা সত্য—

'ছোলাৰিছ ফুল (Flower Solaris) ফুলে, কেৱল যদি আগদিনাৰ সৰ্বোচ্চ উত্তাপ 28°C তকৈ বেছি হয়।' আৰু '2005 চনৰ 15 ছেপ্তেম্বৰ তাৰিখে ইমেজিনাৰী ভেলীত (Imaginary Valley) ছোলাৰিছ ফুল ফুলিছিল।' তেতিয়া নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি খটুৱাই আমি এই সিদ্ধান্তত উপনীত হওঁ যে 2005 চনৰ 14 ছেপ্তেম্বৰ তাৰিখে ইমেজিনাৰী ভেলীত সৰ্বোচ্চ তাপমান 28°C তকৈ অধিক আছিল।

দুৰ্ভাগ্যজনক কথা যে আমি আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত সদায় শুদ্ধ বিচাৰ পদ্ধতিৰ ব্যৱহাৰ নকৰো। ভুল বিচাৰ পদ্ধতিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি আমি প্ৰায়েই অনেক সিদ্ধান্তত উপনীত হওঁ। উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি কোনোবা এদিন তোমাৰ বান্ধৱীজনীয়ে তোমাক দেখি নাহাঁহিলে তেন্তে তুমি হয়তো ভাবিবা যে তেওঁ তোমাক খং কৰি আছে। যদিও এই কথাটো সঁচা হ'ব পাৰে যে, 'যদি তেওঁ মোৰ ওপৰত নাৰাজ (ক্ৰুদ্ধ) হয় তেন্তে মোলৈ চাই নাহাঁহিব', তথাপি এইটোও সঁচা হ'ব পাৰে যে 'যদি তেওঁৰ সাংঘাতিক মূৰ বিষাইছে, তেন্তে তেওঁ মোক দেখিলেও নাহাঁহিব।'

তোমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত উপনীত হোৱা কিছুমান সিদ্ধান্ত বৈধ (valid) নে ভ্ৰান্ত বিচাৰৰ ওপৰত প্ৰতিস্থিত হৈছে পৰীক্ষা কৰি নোচোৱা কিয়?

অনুশীলনী-A1.2

1. নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতিৰে নিম্নোক্ত প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া—

(i) মানুহবোৰ স্তন্যপায়ী প্ৰাণী (Mammal)। সকলো স্তন্যপায়ী প্ৰাণী মেৰুদণ্ডী (Vertebrates)। এই দুটা উক্তিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি মানুহৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্ত ল'বা?

(ii) এণ্টনি এজন নাপিত। দীনেশে তেওঁৰ চুলি কটালে। তুমি এই সিদ্ধান্তত উপনীত হ'বা নেকি যে এণ্টনিয়েই দীনেশৰ চুলি কাটিছে?

(iii) মংগল গ্ৰহৰ অধিবাসী সকলৰ ৰঙা জিভা থাকে। গুলাগ (Gulag) এজন মংগল গ্ৰহৰ অধিবাসী। এই দুটা উক্তিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি তুমি গুলাগৰ বিষয়ে কি মন্তব্য দিবা?

(iv) কোনো এটা নিৰ্দিষ্ট দিনত চাৰি ঘণ্টাতকৈ অধিক সময় বৰষুণ পৰিলে তাৰ ঠিক পিছৰ দিনা নাওৱাবোৰ পৰিস্কাৰ কৰিবলগীয়া হয়। আজি ছয় ঘণ্টা ধৰি বৰষুণ পৰিছে। কাইলৈ নাওৱাবোৰৰ অৱস্থা কি হ'ব সেই সম্পৰ্কে তুমি কি মন্তব্য আগবঢ়াবা?

(v) নিম্নোক্ত ব্যঙ্গ চিত্ৰটোত গৰুজনীৰ বিচাৰ পদ্ধতিত কি বিভ্ৰান্তি আছে?

2. আৰু এবাৰ তোমাক চাৰিখন কাৰ্ড দিয়া হ'ল। প্ৰত্যেক কাৰ্ডৰে এপিঠিত এটা সংখ্যা আৰু আনটো পিঠিত একোটা অক্ষৰ ছপোৱা আছে। নিম্নোক্ত নিয়মটো প্ৰযোজ্য হয়নে প্ৰত্যায়ন কৰিবলৈ মাত্ৰ কেনে দুখন কাৰ্ড ওলোটাই চাব লাগিব?

'যদি কাৰ্ড এখনৰ এপিঠিত ব্যঞ্জনবৰ্ণ থাকে তেন্তে আনটো পিঠিত এটা অযুগ্ম সংখ্যা থাকে।'

B	3	U	8

A1.4 উপপাদ্য, অনুমান আৰু স্বীকাৰ্য (Theorems,Conjectures and Axioms) ঃ

এই পৰ্যন্ত আমি উক্তি সম্পৰ্কে আৰু সেইবোৰৰ বৈধতা কিদৰে পৰীক্ষা কৰা হয় সেই বিষয়ে আলোচনা কৰিলোহঁক। এই অনুচ্ছেদত তোমালোকে গণিতক ধীৰে ধীৰে গঢ়ি তোলা তিনিবিধ ভিন্ন প্ৰকাৰৰ উক্তিৰ বৈশিষ্ট্য সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিব পাৰিবা যি কেইটা হ'ল উপপাদ্য, অনুমান আৰু স্বীকাৰ্য।

ইতিমধ্যে তোমালোকে বহুতো উপপাদ্য পাই আহিছা। তেন্তে উপপাদ্য কি? এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা প্ৰতিষ্ঠিত (প্ৰমাণিত) হৈছে তাকেই উপপাদ্য বোলা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, A1.5 অনুচ্ছেদত গম পাবা যে নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ একোটা উপপাদ্য।

উপপাদ্য A1.1 ঃ এটা ত্ৰিভুজৰ অন্তঃ কোণ কেইটাৰ সমষ্টি 180°।

উপপাদ্য A1.2 ঃ দুটা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফল এটা যুগ্ম সংখ্যা।

উপপাদ্য A1.3 ঃ যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফলটো 16 ৰে বিভাজ্য হয়।

অনুমান (Conjecture) হ'ল এটা উক্তি যাক আমাৰ গাণিতিক বোধশক্তি (Understanding) আৰু অভিজ্ঞতা অৰ্থাৎ আমাৰ গাণিতিক সহজাত উপলব্ধিৰ (Mathematical Intuition) জৰিয়তে সঁচা বুলি বিশ্বাস কৰো। অনুমান এটা সঁচাও হ'ব পাৰে নাইবা মিছাও হ'ব পাৰে। যদি আমি ইয়াৰ প্ৰমাণ আগবঢ়াব পাৰো তেন্তে ই এটা উপপাদ্য হ'ব। গণিতজ্ঞসকলে বিশেষ ধৰণৰ চানেকী বা আৰ্হি চাই আৰু মেধাপ্ৰসুত গাণিতিক চিন্তাৰে একোটা অনুমান কৰি লয়। কেইটামান বিশেষ ধৰণৰ চানেকী বা আৰ্হিৰ প্ৰতি আমি নজৰ দিওঁহক আৰু চাওঁহক কি ধৰণৰ বুদ্ধিদীপ্ত অনুমানত উপনীত হ'ব পৰা যায়।

উদাহৰণ 4 ঃ যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা বিবেচনা কৰা আৰু সেইবোৰ যোগ কৰা যেনে—

$2 + 4 + 6 = 12,\ 4 + 6 + 8 = 18,\ 6 + 8 + 10 = 24,\ 8 + 10 + 12 = 30,$
$20 + 22 + 24 = 66$

এই যোগফলসমূহত কোনো বিশেষ ধৰণৰ চানেকী লক্ষ্য কৰিছানে? সেইবোৰৰ সম্পৰ্কত তুমি কি অনুমান কৰিব পাৰিছা?

সমাধান ঃ এটা অনুমান হ'ব পাৰে এনে ধৰণৰ—

(i) ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা তিনিটাৰ সমষ্টিটো এটা যুগ্ম সংখ্যা।

আন এটা হ'ব পাৰে এনেধৰণৰ—

(ii) তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টিটো 6 ৰে বিভাজ্য হয়।

উদাহৰণ 5 ঃ পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ (Pascal's Triangle) নামৰ নিম্নোক্ত সংখ্যাৰ চানেকীটো বিবেচনা কৰা।

শাৰী		সংখ্যাবোৰৰ সমষ্টি
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7 -	---	- -
8 -	---	- -

শাৰী 7 আৰু 8ত সংখ্যাসমূহৰ সমষ্টিটো সম্পৰ্কে কি অনুমান কৰিবা? 21তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি কি হ'ব? তুমি এটা চানেকী দেখিছানে? nতম শাৰীত সংখ্যাবোৰৰ সমষ্টিৰ বাবে এটা সূত্ৰ অনুমান কৰা।

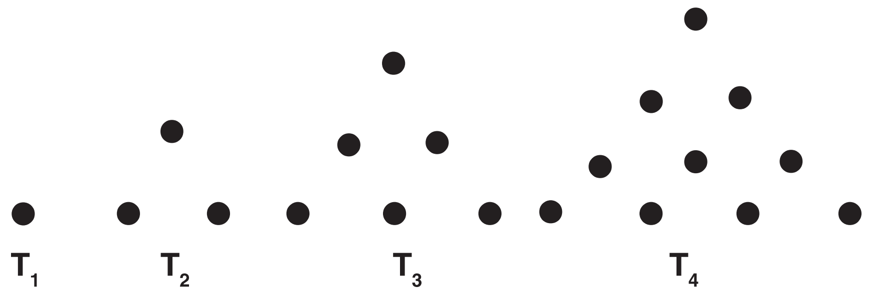
সমাধান ঃ 7তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2^{20}$

nতম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2^{n-1}$

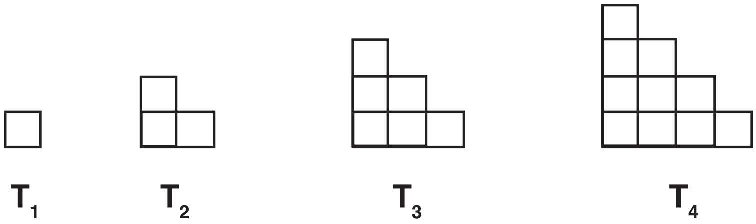
উদাহৰণ 6 ঃ তথাকথিত ত্ৰিভুজীয় সংখাবোৰ (T_n) বিবেচনা কৰা—



চিত্ৰ A1.1

ইয়াত বিন্দুবোৰ এনেভাৱে সজোৱা আছে যে সেইবোৰে একোটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰে। ইয়াত $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, ইত্যাদি। T_5 কিমান হ'ব অনুমান কৰিব পাৰানে? T_6 কি হ'ব? T_n ৰ মান কি হ'ব? T_n সম্পৰ্কে এটা অনুমান আগবঢ়োৱা।

নিম্নোক্ত ধৰণে পুনৰ সজোৱা চিত্ৰকেইটা তোমাৰ বাবে সহায়ক হ'ব পাৰে।



চিত্ৰ A1.2

সমাধান ঃ $T_5 = 1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5\times6}{2}$

$T_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21 = \frac{6\times7}{2}$

$T_n = \frac{n\times(n+1)}{2}$

মুকলি হৈ থকা (অৰ্থাৎ সঁচা বা মিছা বুলি প্ৰমাণিত নোহোৱাকৈ থকা) অনুমানৰ এটা উপযুক্ত দৃষ্টান্ত হ'ল গোল্ডবাখৰ অনুমান (Goldbach Conjecture), যিটো গণিতজ্ঞ খ্ৰীষ্টিয়ান গোল্ডবাখৰ (1690-1764) নামেৰে নামাংকিত কৰা হৈছে। এই অনুমানটোৰ মতে, '4তকৈ ডাঙৰ যিকোনো অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যাকে দুটা অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।' হয়তো তোমালোকৰ মাজৰে কোনোবাই এদিন এই অনুমানটো সঁচা নাইবা মিছা বুলি প্ৰমাণ কৰিবা আৰু আৰু বৰ বিখ্যাত হৈ উঠিবা!

তোমালোকৰ কিজানি আচৰিতেই লাগিছে এই বুলি যে গণিতত আমি যি যি পাওঁ সেই আটাইবোৰকে প্ৰমাণ কৰাৰ আৰশ্যকতা আছে নে? যদি নাই, কিয় নাই?

প্ৰকৃত ঘটনাটো হ'ল গণিতৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰই কিছুমান উক্তিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল যিবোৰ সঁচা বুলি মানি লোৱা হয় আৰু যাৰ কোনো প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা নহয়। এইবোৰ হ'ল 'স্বতঃ প্ৰমাণিত সত্য', যাক আমি প্ৰমাণ অবিহনে সঁচা বুলি স্বীকাৰ কৰি লওঁ। এনেধৰণৰ উক্তিবোৰক স্বতঃ সিদ্ধ (Axioms) আখ্যা দিয়া হয়। অধ্যায়-5ত তোমালোকে ইউক্লিডৰ স্বতঃ সিদ্ধ (Axioms) আৰু স্বীকাৰ্য (Postulates) সম্পৰ্কে অধ্যয়ণ কৰিছিলা (আজিকালি আমি স্বতঃ সিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্যৰ মাজত প্ৰভেদ থকা বুলি নধৰো)।

উদাহৰণ স্বৰূপে ইউক্লিডৰ প্ৰথম স্বীকাৰ্যটো হ'ল ঃ

যি কোনো এটা বিন্দুৰ পৰা আন যি কোনো এটা বিন্দুলৈ এডাল সৰল ৰেখা টানিব পাৰি।

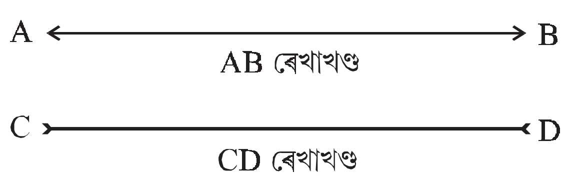
আৰু তৃতীয় স্বীকাৰ্যটো হ'ল ঃ

যি কোনো কেন্দ্ৰ ধৰি যি কোনো ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্ত আঁকিব পাৰি।

এই উক্তিসমূহ সম্পূৰ্ণৰূপে সঁচা যেন লাগে আৰু ইউক্লিডে এইবোৰক সঁচা বুলিয়েই ধৰিছিল। কিয়? ইয়াৰ কাৰণ হ'ল, আমি প্ৰতিটো কথাকে প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাব নোৱাৰো আৰু ক'ৰবাৰ পৰা আমি আৰম্ভ কৰিবই লাগিব। সঁচা বুলি গ্ৰহণ কৰিব পৰা আমাক কিছুমান উক্তি লাগে। যিবোৰ আমি সঁচা বুলি মানি লওঁ আৰু তাৰ পাছত এই স্বতঃ সিদ্ধ উক্তিবোৰৰ পটভূমিত যুক্তি তৰ্কৰ বিধি খটুৱাই আমি আমাৰ জ্ঞান বঢ়াই যাব পাৰো

তেতিয়া তোমালোকে হয়তো প্ৰশ্ন কৰিবা যে স্বতঃ প্ৰমাণিত যেন লগা আটাইবোৰ উক্তিকে আমি কিয় সহজে সঁচা বুলি গ্ৰহণ নকৰো। ইয়াৰ বহু কাৰণ আছে। প্ৰায়ভাগ ক্ষেত্ৰতে আমাৰ স্বতঃস্ফুৰ্ত অনুভৱবোৰ (Intuition) ভুল হ'ব পাৰে, চিত্ৰ বা চানেকীবোৰে আমাক ঠগিব পাৰে, আৰু সেয়েহে কিবা এটা কথা সঁচা বুলি নিশ্চিত হোৱাৰ বাবে প্ৰমাণেই হ'ল একমাত্ৰ উপায়। উদাহৰণ স্বৰূপে, আমাৰ বহুতে বিশ্বাস কৰে যে এটা সংখ্যাক আন এটা সংখ্যাৰে পূৰণ কৰিলে পূৰণফলটো উভয় সংখ্যাতকৈ ডাঙৰ হয়। কিন্তু আমি জানো যে ই সদায় সঁচা নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, $5 \times 0.2 = 1$ যিটো 5তকৈ সৰু।

আকৌ, A1.3 চিত্ৰটোলৈ মন কৰা। কোনডাল ৰেখাখণ্ড বেছি দীঘল, AB নে CD?



চিত্ৰ A1.3

দেখা যায়, দুয়োডাল ৰেখাখণ্ড ঠিক একে দৈৰ্ঘ্যৰ, যদিও ABক ছুটি যেন লাগে!

তেনে ক্ষেত্ৰত তোমালোকৰ মনত স্বতঃ সিদ্ধবোৰৰ বৈধতাৰ (Validity) ওপৰতো সন্দেহ

উপজিব। স্বতঃ সিদ্ধবোৰ নিৰ্বাচন কৰা হয় আমাৰ স্বতঃস্ফুৰ্ত অনুভব আৰু যিবোৰ ধাৰণা স্বতঃ প্ৰমাণিত সত্য যেন লাগে সেইবোৰৰ পটভুমিত। গতিকে সেইবোৰ সত্য হোৱাটোৱেই আমি বিচাৰো। যি হওঁক, এনে ধৰণৰ কথাও সম্ভৱ যে পৰৱৰ্তী সময়ত আমি আৱিস্কাৰ কৰিছো যে কোনো এটা বিশেষ স্বতঃ সিদ্ধ সঁচা নহয়। এনে ধৰণৰ সম্ভাৱনাৰ বিৰুদ্ধে ৰক্ষাকবচ কি হ'ব? আমি পৰৱৰ্তী পদক্ষেপবোৰ ল'ব পাৰোহক ঃ

(i) স্বতঃ সিদ্ধৰ সংখ্যা নূন্যতম হ'ব লাগে। উদাহৰণ স্বৰূপে, ইুক্লিডৰ স্বতঃ সিদ্ধ আৰু পাঁচটা মাত্ৰ স্বীকাৰ্যৰ সহায়ত আমি শ শ উপপাদ্য উলিয়াব পাৰো।

(ii) স্বতঃ সিদ্ধসমূহ যাতে সংগত (consistent) হয় সেই কথাৰ নিশ্চয়তাৰ প্ৰতি মন দিব লাগে।

স্বতঃ সিদ্ধৰ সংগ্ৰহ এটাক অসংগত (Inconsistent) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ এটা কোনো এটা স্বতঃ সিদ্ধ ব্যৱহাৰ কৰি আন এটা স্বতঃ সিদ্ধ সঁচা নহয় বুলি দেখুৱাব পৰা যায়। উদাহৰণ স্বৰূপে, নিম্নোক্ত উক্তি দুটা বিবেচনা কৰা। আমি দেখুৱাম যে সিহঁত অসংগত (Inconsistent)।

উক্তি-1 ঃ কোনো পূৰ্ণ সংখ্যাই (Whole number) তাৰ ঠিক পৰৱৰ্তী সংখ্যাটোৰ (Successor) সমান নহয়।

উক্তি-2 ঃ পূৰ্ণ সংখ্যা এটাক শূণ্যৰে হৰণ কৰিলে এটা পূৰ্ণ সংখ্যা পোৱা যায়।

(মনত পেলোৱা যে শূণ্যৰে হৰণ কৰা কাৰ্য সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। কেৱল এই মূহুৰ্তৰ বাবে আমি ধৰি লওঁ যে ই সম্ভৱ আৰু কি ঘটে চাওহক)

উক্তি-2 ৰ পৰা আমি পাওঁ $\frac{1}{0} = a$, য'ত a কোনোবা এটা পূৰ্ণ সংখ্যা। ইয়াৰ পৰা আমি পাওঁ $1 = 0$। কিন্তু ই উক্তি-1 ক অনুমোদন নকৰে; যি উক্তি অনুসৰি কোনো পূৰ্ণ সংখ্যাই তাৰ ঠিক পৰৱৰ্তী সংখ্যাটোৰ সমান নহয়।

(iii) অসত্য স্বতঃ সিদ্ধ এটাই সোনকালে হওক বা পলমকৈ হওক বিৰোধৰ (Contradiction) সূচনা কৰিব। বিৰোধৰ সূচনা তেতিয়াই হয় যেতিয়া এনে এটা উক্তি পোৱা যায় যাতে উক্তিটো আৰু তাৰ বিপৰীত উক্তিটো (Negation) একেলগে সঁচা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, ওপৰৰ উক্তি দুটা (উক্তি-1 আৰু উক্তি-2) আকৌ এবাৰ বিবেচনা কৰা।

উক্তি-1ৰ পৰা আমি পাওঁ $2 \neq 1$। এতিয়া $x^2 - x^2$ ৰাশিটোলৈ চোৱা। আমি দুই ধৰণে ইয়াৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিব পাৰোহক, যেনে—

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ আৰু

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

গতিকে, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$

উক্তি-2 ৰ সহায়ত উভয় পক্ষৰ পৰা $(x - x)$ক আমি কাটিব পাৰো।তেতিয়া আমি পাওঁ, $x = 2x$ যিটোৱে আকৌ সূচায় যে $2 = 1$।

গতিকে আমি দেখিলো যে উক্তি $2 \neq 1$ আৰু ইয়াৰ বিপৰীত উক্তি $2 = 1$ উভয়ে সত্য। ই এক বিৰোধ। 'পূৰ্ণ সংখ্যাক শূণ্যৰে ভাগ কৰিলে পূৰ্ণ সংখ্যা পোৱা যায়' এই অসত্য স্বতঃ সিদ্ধৰ বাবেই বিৰোধৰ সৃষ্টি হ'ল।

গতিকে, উক্তি এটাক স্বতঃ সিদ্ধ ৰূপে কৰিবলৈ ভালেখিনি চিন্তা-ভাৱনা আৰু অন্তৰ্দৃষ্টিৰ প্ৰয়োজন হয়। আমি নিশ্চিত হ'ব লাগিব যাতে সেইবোৰ কোনো বিসংগতি নাইবা যুক্তিগত বিৰোধৰ সৃষ্টি নকৰে। তাৰোপৰি, স্বতঃ সিদ্ধসমূহৰ বাছনিয়েই কেতিয়াবা নতুন আৱিস্কাৰৰ বাবে সহায়ক হ'ব পাৰে! অধ্যায়-5 ত তোমালোকে ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্য আৰু এই স্বীকাৰ্যৰ ভিত্তিত অইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰ আৱিস্কাৰৰ সৈতে পৰিচিত হৈছা। তোমালোকে পাই আহিছা যে গণিতজ্ঞসকলৰ বিশ্বাস অনুসৰি পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো স্বীকাৰ্য হ'ব নালাগিছিল বৰং ই আছিল এটা উপপাদ্য যাক কেৱল প্ৰথম চাৰিটা স্বীকাৰ্যৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। বিস্ময়জনকভাৱে, এই প্ৰচেষ্টাসমূহৰ ফলতে আৱিস্কাৰ হৈছিল অইউক্লিডীয় বিভিন্ন জ্যামিতিৰ।

স্বীকাৰ্য বা স্বতঃ সিদ্ধ, উপপাদ্য আৰু অনুমান (Conjecture) সমূহৰ পাৰস্পৰিক প্ৰভেদ স্মৰণ কৰি আমি এই অনুচ্ছেদৰ মোখনি মাৰিম। স্বীকাৰ্য হৈছে এটা গাণিতিক উক্তি যাক প্ৰমাণ অবিহনে সত্য বুলি গ্ৰহণ কৰা হয়; অনুমান হৈছে এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা বা অসত্যতা এতিয়াও সাব্যস্ত কৰিবলৈ বাকী আৰু উপপাদ্য হৈছে এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা যুক্তিগতভাৱে সাব্যস্ত বা প্ৰতিষ্ঠিত হৈছে।

অনুশীলনী-A1.3

1. যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা বিবেচনা কৰা আৰু সিহঁতৰ গুণফল উলিওৱা; উদাহৰণ স্বৰূপে, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ ইত্যাদি। এই গুণফলবোৰৰ সম্পৰ্কত তিনিটা অনুমান আগবঢ়োৱা।

2. পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজলৈ উভতি যোৱা

শাৰী-1 ঃ $1 = 11^0$

শাৰী-2 ঃ $11 = 11^1$

শাৰী-3 ঃ $121 = 11^2$

শাৰী-4 আৰু শাৰী-5 সম্পৰ্কে অনুমান আগবঢ়োৱা। তোমাৰ অনুমানটো সঠিক হৈছেনে? তোমাৰ অনুমানটো শাৰী-6 ৰ বাবেও সঠিক হৈছেনে?

3. ত্ৰিভুজীয় সংখ্যাবোৰলৈ (চিত্ৰ A1.2 দ্ৰষ্টব্য) পুনৰ লক্ষ্য কৰা। দুটা ক্ৰমিক ত্ৰিভুজীয় সংখ্যা যোগ কৰা। উদাহৰণ স্বৰূপে, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$

$T_4 + T_5$ৰ মান কি হ'ব? $T_{n-1} + T_n$ সম্পৰ্কে এটা অনুমান আগবঢ়োৱা।

4. নিম্নোক্ত চানেকীটোলৈ লক্ষ্য কৰা ঃ

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

তলৰ প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰত একোটা অনুমান আগবঢ়োৱা।

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

তোমাৰ অনুমানৰ সত্যতাপৰীক্ষা কৰা।

5. এই পুথিখনত ব্যৱহৃত হোৱা পাঁচোটা স্বতঃ সিদ্ধ (স্বীকাৰ্য) উল্লেখ কৰা।

A1.5 গাণিতিক প্ৰমাণ মানে কি (What is a Mathematical Proof)?

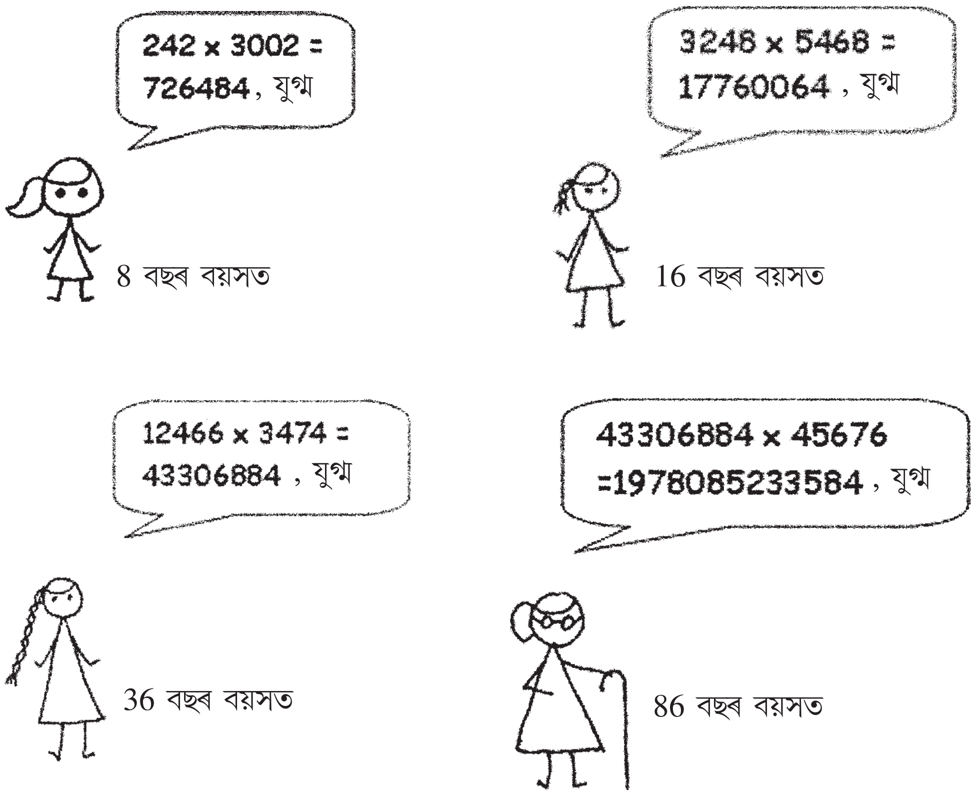
এতিয়া আমি প্ৰমাণৰ বিভিন্ন দিশৰ ওপৰত দৃষ্টিপাত কৰোহক। প্ৰথমে আমি সত্যাপন (Verification) আৰু প্ৰমাণ (Proof)ৰ মাজৰ পাৰ্থক্যটো বুজিবলৈ চেষ্টা কৰোহক। গণিতত প্ৰমাণৰ বিষয়ে অধ্যয়ণ কৰিবলৈ লোৱাৰ পূৰ্বে তোমালোকক ঘাইকৈ উক্তিসমূহক সত্যাপন কৰি চাবলৈ কোৱা হৈছিল।

উদাহৰণ স্বৰূপে, তোমালোকক হয়তো উদাহৰণৰ সৈতে সত্যাপন কৰি চাবলৈ কোৱা হৈছিল যে, 'দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম সংখ্যা গতিকে, তোমালোকে হয়তো যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা যুগ্ম সংখ্যা লৈছিলা যেনে 24 আৰু 2006 আৰু পৰীক্ষা কৰি চাইছিলা যে $24 \times 2006 = 48144$ এটা সংখ্যা। আৰু বহুতো উদাহৰণৰ ক্ষেত্ৰতো তোমালোকে হয়তো এনকুৱাই কৰিছিলা!

আকৌ তোমালোকক হয়তো শ্ৰেণীকোঠাত কাৰ্য হিচাপে ভালেকেইটা ত্ৰিভুজ আঁকিবলৈ কোৱা হৈছিল আৰু সেইবোৰৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি গণনা কৰি উলিয়াবলৈ দিয়া হৈছিল। জোখ-মাখৰ বাবে হোৱা ভুলৰ বাহিৰে তোমালোকে নিশ্চয় ত্ৰিভুজৰ অন্তঃ কোণসমূহৰ সমষ্টি 180^0য়েই পাইছিলা!

এই পদ্ধতিটোত কি ধৰণৰ খুঁত আছে? সত্যাপনৰ প্ৰক্ৰিয়াত কেইবাটাও সমস্যা তাকে। যদিও ই সঁচা বুলি বিশ্বাস হোৱা এটা উক্তি ব্যক্ত কৰাত তোমাক সহায় কৰিব পাৰে তথাপি উক্তিটো সকলো ক্ষেত্ৰতে সঁচা হ'বই বুলি তুমি নিশ্চিত হ'ব নোৱাৰা। উদাহৰণ স্বৰূপে কেইবাযোৰ যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফলে আমাক হয়তো এনে এক অনুমান গ্ৰহণ কৰিবলৈ বাধ্য কৰিব যে দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল সদায় যুগ্ম। যি হওক এই কাৰ্যই যুগ্ম সংখ্যাৰ সকলোবোৰ যোৰৰ গুণফল যুগ্ম হোৱা বিষয়টোৰ প্ৰতি নিশ্চয়তা প্ৰদান নকৰে। তুমি শাৰীৰিকভাৱে যুগ্ম সংখ্যাৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ

যোৰৰ গুণফল পৰীক্ষা কৰি চাব নোৱাৰা। যদি তুমি তেনেকুৱাই কৰিব খোজা তেন্তে ব্যংগ চিত্ৰত দেখুওৱা ছোৱালীজনীৰ দৰে জীৱনৰ বাকী থকা কালছোৱা যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল সমূহ গণনা কৰিয়েই কটাব লাগিব। সদৃশধৰণে, তুমি এতিয়ালৈ আজি নোচোৱা কিছুমান ত্ৰিভুজ থাকিব পাৰে যিবোৰৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি 180°ৰ সমান নহয়। সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ ত্ৰিভুজৰ অন্তঃ কোণবোৰ আমি জুখি চাব নোৱাৰো।



তাৰোপৰি সত্যাপন প্ৰায়ে বিভ্ৰান্তিমূলক হ'ব পাৰে। উদাহৰণ হিচাপে পূৰ্বৰ সত্যাপন বিলাকৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে আৰু পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ (প্ৰশ্ন-2, অনুশীলনী A1.3)ৰ পৰা আমাক $11^5 = 15101051$ বুলি গ্ৰহণ কৰিবলৈ প্ৰৰোচিত কৰিব পাৰে। কিন্তু $11^5 = 161051$

গতিকে কেৱল কিছুমান সত্যাপনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নোহোৱাকৈ তোমালোক অন্য ধৰণে আগবাঢ়িব লাগিব। অগ্ৰসৰ হোৱাৰ অন্য এক পথ আছে যাক আমি 'উক্তিৰ প্ৰমাণ' আখ্যা দিওঁ। কেৱল যুক্তি-তৰ্কৰ ওপৰতে নিৰ্ভৰ কৰি এটা গাণিতিক উক্তিৰ সত্যতা সাব্যস্ত কৰা পদ্ধতিকে 'গাণিতিক প্ৰমাণ' বোলা হয়।

অনুচ্ছেদ A1.2ৰ উদাহৰণ-2 ত তোমালোকে দেখিছিলা যে গাণিতিক উক্তি এটা অসত্য বুলি দেখুৱাবলৈ এটা মাত্ৰ প্ৰতি-উদাহৰণেই যথেষ্ট। গতিকে, যি সময়ত এটা গাণিতিক উক্তিৰ বৈধতা সাব্যস্ত কৰিবলৈ হেজাৰটা পৰীক্ষণ বা সত্যাপনো যথেষ্ট নহ'ব পাৰে, সেই সময়তে কিন্তু উক্তি এটাৰ বিসংগতি নিৰ্ণয় কৰিবলৈ (অৰ্থাৎ কোনোবাখিনিত থকা কেৰোণ প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ) মাত্ৰ এটা প্ৰতি-উদাহৰণেই যথেষ্ট। এই কথাটো বিশেষভাৱে প্ৰণিধানযোগ্য।

গাণিতিক উক্তি এটা অসত্য বুলি দেখুৱাবলৈ এটা মাত্ৰ প্ৰতি উদাহৰণেই যথেষ্ট। গতিকে দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ যোগফল অযুগ্ম এই উক্তিটোৰ ক্ষেত্ৰত এটা প্ৰতি-উদাহৰণ হ'ল— $7 + 5 = 12$।

আমি এতিয়া প্ৰমাণ এটাৰ মৌলিক উপাদান সমূহৰ ওপৰত চকু ফুৰাই চাওহক ঃ

(i) উপপাদ্য এটাৰ প্ৰমাণৰ বাবে আমি কি ধৰণে অগ্ৰসৰ হ'ব লাগিব সেই সম্পৰ্কে আমাৰ এটা থুলমূল ধাৰণা থাকিব লাগিব।

(ii) উপপাদ্য এটাত ইতিমধ্যে প্ৰদত্ত তথ্যাৱলী (পূৰ্ব ধাৰণা) স্পষ্টভাৱে বুজি লৈ সেইবোৰ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব।

উদাহৰণ স্বৰূপে, 'দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল যুগ্ম' বুলি উল্লেখ কৰা উপপাদ্য A1.2ত আমাক দুটা স্বাভাৱিক যুগ্ম সংখ্যা দিয়া আছে। গতিকে আমি সিহঁতৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব।

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem)ত (অধ্যায়-2) তোমালোকক এটা বহুপদ $p(x)$ দিয়া আছে আৰু কোৱা হৈছে যে $p(a) = 0$। ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি তোমালোকে দেখুৱাব লাগিব যে $(x – a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক। সদৃশভাৱে, উৎপাদক উপপাদ্যৰ

বিপৰীত উপপাদ্যৰ বাবে তোমালোকক $(x - a)$, $p(x)$ৰ উৎপাদক বুলি দিয়া আছে আৰু এই পূৰ্বধাৰণা খটুৱাই তোমালোকে $p(a) = 0$ বুলি প্ৰমাণ কৰিব লাগিব।

উপপাদ্য এটাৰ প্ৰমাণত তোমালোকে অংকণ কাৰ্যৰো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰা। উদাহৰণ স্বৰূপে ত্ৰিভুজৰ কোণসমূহৰ সমষ্টি 180^o বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ আমি ত্ৰিভুজটোৰ কোনো বাহু এটাৰ বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুৰে বাহুটোৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা আঁকো আৰু সমান্তৰাল ৰেখাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰো।

(iii) এটা প্ৰমাণ গাণিতিক উক্তিৰ অনুক্ৰমেৰে গঠিত হয়। প্ৰমাণ একোটাত থকা প্ৰতিটো উক্তি প্ৰমাণটোত সন্নিবিষ্ট পূৰ্বৰ উক্তি, বা ইতিপূৰ্বে প্ৰমাণিত কোনো উপপাদ্য, বা স্বতঃ সিদ্ধ বা উল্লেখিত পূৰ্ব-ধাৰণাৰ পৰা যুক্তিৰ সহায়ত আগবঢ়োৱা হয়।

(iv) যুক্তিপূৰ্ণভাৱে শুদ্ধ ক্ৰমত সজোৱা গাণিতিক সত্য উক্তিসমূহৰ অনুক্ৰমৰ পৰা পোৱা সিদ্ধান্তই হ'ব লাগে। উপপাদ্যই হৈছে বিষয়-বস্তুৰ আমি বিচৰা প্ৰমাণ।

এই উপাদানসমূহ বুজি পাবলৈ আমি উপপাদ্য A1.1 আৰু ইয়াৰ প্ৰমাণটো বিশ্লেষণ কৰি চাম। অধ্যায় 6ত এই উপপাদ্যটো সম্পৰ্কে তোমালোকে ইতিমধ্যে পঢ়ি আহিছা। কিন্তু জ্যামিতিত প্ৰমাণ সম্পৰ্কে প্ৰথমে কেইটামান মন্তব্য দিয়া হওক। উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত সহায়ক হোৱাকৈ আমি প্ৰায়ে চিত্ৰৰ আশ্ৰয় লওঁ আৰু এইটো অতিকৈ দৰকাৰী কথা। যিহওক, প্ৰমাণত থকা প্ৰতিটো উক্তিয়েই কেৱল যুক্তিৰ দ্বাৰা সাব্যস্ত হ'ব লাগিব। প্ৰায় সঘনাই ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে এনে ধৰণৰ উক্তিৰ উল্লেখ কৰা আমি শুনিবলৈ পাওঁ যেনে—

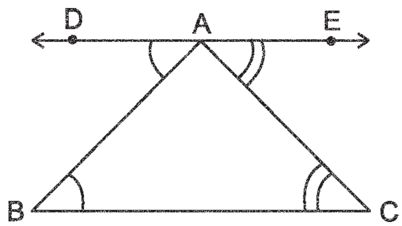
'সেই কোণ দুটা সমান কাৰণ, চিত্ৰত সিহঁতক সমান দেখাইছে' নাইবা 'সেই কাণটো 90°ৰ সমান হ'ব লাগিব কাৰণ, ৰেখাদুডাল দেখিবলৈ পৰস্পৰ লম্ব যেন লাগিছে'। তুমি যি দেখিছা তাৰ পৰা ঠগ খোৱাৰ প্ৰতি সাৱধান হ'বা। (চিত্ৰ A1.3 মনত পেলোৱা)।

গতিকে আমি এতিয়া উপপাদ্য A1.1ৰ পিনে অগ্ৰসৰ হওঁ।

উপপাদ্য A1.1 ঃ ত্ৰিভুজৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি 180°ৰ সমান।

প্ৰমাণ ঃ এটা ত্ৰিভুজ ABC বিবেচনা কৰা (চিত্ৰ A1.4 দ্ৰষ্টব্য)। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে—

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^o \qquad .....(1)$$



চিত্ৰ A1.4

A বিন্দুৰে BCৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা DE অংকণ কৰা। .....(2)

DE, BC ৰ সমান্তৰাল আৰু AB এডাল ছেদক। গতিকে, ∠DAB আৰু ∠ABC একান্তৰ কোণ। সেয়েহে অধ্যায়- 6ৰ, উপপাদ্য 6.2 অনুসৰি, সিহঁত সমান

অৰ্থাৎ ∠DAB = ∠ABC .....(3)

সদৃশভাৱে ∠CAE = ∠ACB .....(4)

সেইবাবে ∠ABC + ∠BAC + ∠ACB = ∠DAB + ∠BAC + ∠CAE .....(5)

কিন্তু ∠DAB + ∠BAC + CAE = 180°, যিহেতু সৰল কোণ উৎপন্ন কৰিছে। .....(6)

গতিকে ∠ABC + ∠BAC + ∠ACB = 180°

এতিয়া প্ৰমাণটোৰ প্ৰতিটো ঢাপৰ ওপৰত আমি মন্তব্য আগবঢ়াম।

ঢাপ-1 ঃ আমাৰ উপপাদ্যটো ত্ৰিভুজৰ এটা ধৰ্মৰ সৈতে জড়িত, গতিকে আমি ত্ৰিভুজ এটাৰে আৰম্ভ কৰিছো।

ঢাপ-2 ঃ এইটোৱেই হ'ল মূল ধাৰণা— অৰ্থাৎ স্বতঃ স্ফুৰ্ত অনুভুতিৰ এটা খোজ বা বোধশক্তি যিয়ে উপপাদ্যটোৰ প্ৰমাণৰ দিশত আগবাঢ়ি যোৱাত সহায় কৰে। প্ৰায়ভাগ ক্ষেত্ৰতে জ্যামিতিয় প্ৰমাণৰ বাবে এটা অংকনৰ আৱশ্যক হয়।

ঢাপ-3 আৰু 4 ঃ ইয়াত আমি সিদ্ধান্ত আগবঢ়াইছো যে ∠DAE = ∠ABC আৰু ∠CAE = ∠ABC আৰু ইয়াকে কৰোতে আমি (অংকন কাৰ্যৰ পৰা) DE, BCৰ সমান্তৰাল এই তথ্যটোৰ লগতে ইতিপূৰ্বে প্ৰমাণ কৰি থোৱা উপপাদ্য 6.2ৰ ব্যৱহাৰ কৰিছো য'ত কোৱা হয় যে যদি দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক কোনো ছেদকে কাটে, তেন্তে একান্তৰ কোণবোৰ সমান হয়।

ঢাপ-5 ঃ ∠ABC + ∠BAC + ∠ACB = ∠DAB + ∠BAC + ∠CAE পাবলৈ আমি ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য (অধ্যায়-5 দ্ৰষ্টব্য) ব্যৱহাৰ কৰিছো য'ত কোৱা হয়— 'সমান সমান পৰিমাণৰ সৈতে সমান সমান পৰিমাণ লগ লগালে মুঠ পৰিমাণবোৰ সমান হয়।' অৰ্থাৎ ত্ৰিভুজটোৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি সৰল ৰেখাত থকা কোণকেইটাৰ সমষ্টিৰ সমান।

ঢাপ-6 ঃ ∠DAB + ∠BAC + ∠CAE = 180° বুলি দেখুৱাবলৈ ইয়াত আমি অধ্যায়-6ত সন্নিবিষ্ট ৰৈখিক যোৰ সম্বন্ধীয় স্বীকাৰ্যৰ ব্যৱহাৰ কৰিছো য'ত কোৱা হয় যে এডাল সৰল ৰেখাত থকা কোণবোৰৰ সমষ্টি 180°ৰ সমান।

ঢাপ-7 ঃ ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য— 'একেটা বস্তুৰ সৈতে সমান হোৱা দুটা বস্তু পৰস্পৰ সমান' ব্যৱহাৰ কৰি আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হৈছো যে ∠ABC + ∠BAC + ∠ACB = ∠DAB + ∠BAC + ∠CAE = 180°। মন কৰা যে ঢাপ-7 য়েই হ'ল উপপাদ্যটোত আমি প্ৰমাণ কৰিব খোজা বক্তব্য।

এতিয়া আমি কোনো বিশ্লেষণ অবিহনে উপপাদ্য A1.2 আৰু A1.3ৰ প্ৰমাণ আগবঢ়াম।

উপপাদ্য A1.2 ঃ দুটা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হওক, x আৰু y দুটা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা আমি প্ৰমাণ কৰিব বিচাৰো যে xy যুগ্ম। যিহেতু x আৰু y যুগ্ম, উভয়েই 2 ৰে বিভাজ্য হ'ব। গতিকে আমি লিখিব পাৰো যে কোনো এক স্বাভাৱিক সংখ্যা mৰ বাবে $x = 2m$ আৰু কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা nৰ বাবে $y = 2n$। তেতিয়া, $xy = 4mn$। যিহেতু $4mn$, 2ৰে বিভাজ্য, গতিকে xyও 2ৰে বিভাজ্য। সেয়েহে xy যুগ্ম।

উপপাদ্য A1.3 ঃ যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফল 16ৰে বিভাজ্য।

প্ৰমাণ ঃ তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ আকাৰ হ'ব $2n$, $2n + 2$ আৰু $2n + 4$ য'ত n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে সিহঁতৰ গুণফল $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16ৰে বিভাজ্য।

এতিয়া
$$2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2)$$
$$= 8n(n + 1)(n + 2)$$

এতিয়া আমি দুই ধৰণৰ অৱস্থা পাওঁ—

সেয়াহ'ল n যুগ্ম অথবা অযুগ্ম। প্ৰতিটো অৱস্থা পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওক।

ধৰা হ'ল n যুগ্ম। তেনে ক্ষেত্ৰত আমি $n = 2m$ লিখিব পাৰো, য'ত m কোনো এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।

গতিকে $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$

সেয়েহে, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16ৰে বিভাজ্য।

আকৌ ধৰা হ'ল n অযুগ্ম। তেতিয়া $n + 1$ যুগ্ম আৰু আমি $n + 1 = 2r$ লিখিব পাৰো, য'ত r কোনো এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।

গতিকে আমি পাওঁ—

$$2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$$
$$= 8\ (2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$
$$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$$

সেয়েহে, $2n(2n + 1)(2n + 2)$, 16ৰে বিভাজ্য।

গতিকে, উভয় ক্ষেত্ৰতে, তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল 16ৰে বিভাজ্য বুলি দেখুওৱা হ'ল।

গণিতজ্ঞসকলে কিদৰে ফলাফল (পৰিণাম) সমূহ আৱিস্কাৰ কৰে আৰু কেনেকৈ আনুষ্ঠানিক কঠিন প্ৰমাণসমূহ লিখি উলিয়ায় তাৰ মাজৰ প্ৰভেদৰ ওপৰত কেইটামান মন্তব্য আগবঢ়াই এই অধ্যায়ৰ আমি মোখানি মাৰিম।

ইতিমধ্যে উল্লেখ কৰি অহাৰ নিচিনাকৈ, প্ৰতিটো প্ৰমাণৰ ক্ষেত্ৰত একোটা (কেতিয়াবা একাধিক)

মূল স্বতঃস্ফুৰ্ত অনুভুতিৰ ধাৰণা থাকে। গণিতজ্ঞসকলৰ চিন্তা পদ্ধতি আৰু ফলাফল আৱিস্কাৰৰ ক্ষেত্ৰত তেওঁলোকৰ স্বতঃ স্ফুৰ্ত অনুভুতিয়েই কেন্দ্ৰীয় ভূমিকা পালন কৰে। প্ৰায়ভাগ ক্ষেত্ৰত, উপপাদ্য একোটাৰ প্ৰমাণ গণিতজ্ঞসকলৰ মনলৈ খেলি-মেলি হৈ আহে। শুদ্ধ সমাধান অথবা প্ৰমাণত উপনীত হোৱাৰ আগতে গণিতজ্ঞ এজনে চিন্তাৰ বিভিন্ন দৃষ্টিকোণ, যুক্তি আৰু উদাহৰণ লৈ পৰীক্ষা-নিৰীক্ষা কৰে। সৃষ্টিশীল পৰ্যায়টো তল পৰাৰ পাছতহে আটাইবোৰ যুক্তিক একেলগ কৰা হয় যাতে এটা উপযুক্ত প্ৰমাণ পাব পাৰি।

এইখিনিতে উল্লেখ কৰিব পাৰি যে মহান ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ শ্ৰীনিবাস ৰামানুজনে অতি উচ্চ স্তৰৰ স্বতঃস্ফুৰ্ত অনুভুতিৰ সহায়ত বহুতো সিদ্ধান্তত উপনীত হৈছিল যিবোৰক তেওঁ সত্য বুলি দাবী কৰিছিল। সেইবোৰৰ বহুকেইটা সত্য বুলি প্ৰমাণিত হৈছে আৰু সেইবোৰ বিখ্যাত উপপাদ্য হিচাপে স্বীকৃত হৈছে। অৱশ্যে তেওঁৰ কিছুমান দাবী বা অনুমান সত্য বা অসত্য বুলি সাব্যস্ত কৰাৰ বাবে সমগ্ৰ বিশ্বৰ গণিতজ্ঞসকলে এতিয়াও সংগ্ৰাম অব্যহত ৰাখিছে।

শ্ৰীনিবাস ৰামানুজন
(1887-1920)
চিত্ৰ A1.5

অনুশীলনী-A1.4

1. নিম্নোক্ত উক্তিবোৰ অসত্য প্ৰমাণ কৰিবলৈ এটাকৈ প্ৰতি-উদাহৰণ আগবঢ়োৱা—

(i) দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান হ'লে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হয়।

(ii) আটাইবোৰ বাহু সমান হোৱা চতুৰ্ভুজ এটা বৰ্গ হয়।

(iii) চতুৰ্ভুজ এটাৰ সকলো কোণ সমান হ'লে, ই এটা বৰ্গ হয়।

(iv) অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ বাবে

$$\sqrt{a^2+b^2} = a + b$$

(v) সকলো পূৰ্ণ সংখ্যা (whole number) nৰ বাবে $2n^2 + 11$ এটা মৌলিক সংখ্যা।

(vi) সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা nৰ বাবে $n^2 - n + 41$ এটা মৌলিক সংখ্যা।

2. তোমাৰ ভাল লগা যিকোনো প্ৰমাণ এটা লোৱা আৰু খণ্ড A1.5ত আলোচনা কৰাৰ ধৰণে ঢাপে ঢাপে (কি দিয়া আছে, কি প্ৰমাণ কৰা হৈছে, কোনবিলাক উপপাদ্য আৰু কোনবিলাক স্বতঃ সিদ্ধ ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে..... ইত্যাদি) ইয়াক বিশ্লেষণ কৰা।

3. প্ৰমাণ কৰা যে দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ যোগফল যুগ্ম।

4. প্ৰমাণ কৰা যে দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল অযুগ্ম।

5. প্ৰমাণ কৰা যে তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টিটো 6ৰে বিভাজ্য হয়।

6. প্ৰমাণ কৰা যে $y = 2x$ সমীকৰণৰ ৰেখাডালত অসীমভাৱে বহুতো বিন্দু থাকে। (ইংগিত ঃ যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা nৰ বাবে $(n, 2n)$ বিন্দুটো লোৱা।)
7. তোমাৰ হয়তো এগৰাকী বন্ধু আছে আৰু তেওঁ হয়তো তোমাক কোনো এটা সংখ্যা কল্পনা কৰিবলৈ দি ইয়াৰ ওপৰত কিবা কিবি প্ৰক্ৰিয়া সম্পন্ন কৰিবলৈ দি তাৰ পিছত তুমি ভবা মূল সংখ্যাটোৰ কথা নজনা সত্বেও তেওঁ সংখ্যাটো ক'বলৈ সমৰ্থ হ'ল। ইয়াত দুটা উদাহৰণ আগবঢ়োৱা হ'ল। এয়া কেনেকৈ সম্ভৱ হয় পৰীক্ষা কৰা।

   (i) সংখ্যা এটা লোৱা। ইয়াক দ্বিগুণ কৰা। তাৰ লগত 9 যোগ কৰা। ইয়াক 3ৰে হৰণ কৰা। ইয়াৰ লগত চাৰি যোগ কৰা। ইয়াৰ পৰা তোমাৰ মূল সংখ্যাটো বিয়োগ কৰা। তুমি পোৱা অন্তিম ফলটো হ'ল 7।

   (ii) যিকোনো তিনি অংকীয়া সংখ্যা এটা লিখা। (যেনে 425)। এই অংককেইটা একেটা ক্ৰমতে পুনৰাবৃত্তি কৰি ছয় অংকীয়া সংখ্যা এটা লিখা। (425425)। তোমাৰ নতুন নম্বৰটো 7, 11 আৰু 13ৰে বিভাজ্য হয়।

A1.6 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই পৰিশিষ্টত তোমালোকে নিম্নোক্ত কথাকেইটাৰ বিষয়ে শিকিবলৈ পালা ঃ

1. গণিতত উক্তি একোটা গ্ৰহণীয় হয় যেতিয়া ই সদায় সত্য অথবা সদায় অসত্য হয়।
2. এটা গাণিতিক উক্তি অসত্য দেখুৱাবলৈ এটা মাত্ৰ প্ৰতি-উদাহৰণেই যথেষ্ট
3. স্বতঃ সিদ্ধবোৰ হ'ল এনে ধৰণৰ উক্তি যিবোৰক প্ৰমাণ অবিহনে সত্য বুলি মানি লোৱা হয়।
4. অনুমান হ'ল এনে এটা উক্তি যাক আমি গাণিতিক স্বতঃস্ফুৰ্ত অনুভূতিৰ জৰিয়তে সত্য বুলি বিশ্বাস কৰোঁ, কিন্তু যাক আমি এতিয়াও প্ৰমাণিত কৰি চোৱা নাই।
5. এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা ইতিমধ্যে প্ৰতিষ্ঠিত হৈছে (বা প্ৰমাণিত) তাক উপপাদ্য বোলা হয়।
6. গাণিতিক উক্তি প্ৰমাণৰ প্ৰধান যুক্তিপূৰ্ণ আহিলা হ'ল নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি (Deductive reasoning)।
7. এটা প্ৰমাণ হ'ল, গাণিতিক উক্তিসমূহৰ এক আনুক্ৰমিক ধাৰা। প্ৰমাণ এটাত সন্নিবিষ্ট প্ৰতিটো উক্তিকে ইতিপূৰ্বে জ্ঞাত উক্তি বা আগতে প্ৰমাণিত হোৱা উপপাদ্য বা স্বতঃ সিদ্ধ বা পূৰ্ব ধাৰণাৰ আধাৰত যুক্তিযুক্ততাৰে সাব্যস্ত কৰা হয়।

পৰিশিষ্ট-2

গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ পৰিচয়
(Introduction to Mathematical Modelling)

A2.1 অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

আগৰ শ্ৰেণীসমূহৰ পৰাই তোমালোকে তোমালোকৰ চৌপাশৰ বাস্তৱ পৃথিৱীখনৰ সৈতে সম্পৰ্কিত সমস্যাৱলীৰ সমাধান কৰি আহিছা। উদাহৰণ স্বৰূপে— তোমালোকে সূত্ৰৰ সহায়ত সৰল সুদৰ সমস্যা সমাধান কৰিছা। সূত্ৰ (বা সমীকৰণ) হ'ল সুদ আৰু ইয়াৰ সৈতে যুক্ত আন তিনিটা ৰাশি— মূলধন, সুদৰ হাৰ আৰু সময়ৰ এটা সম্পৰ্ক। এই সূত্ৰটো গণিতীয় আৰ্হিৰ এটা উদাহৰণ। গণিতীয় আৰ্হি (mathematical modelling) হ'ল বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক অৱস্থাক বৰ্ণনা কৰিব পৰা একোটা গণিতীয় সম্পৰ্ক।

নানা প্ৰকাৰৰ বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৰ সমাধানত গণিতীয় আৰ্হিৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। যেনে—

- উপগ্ৰহৰ উৎক্ষেপন কাৰ্যত।
- মৌচুমীৰ আগজাননী দিয়াৰ ক্ষেত্ৰত।
- যান বাহনৰ পৰা উদ্ভুত প্ৰদূষণ নিয়ন্ত্ৰণৰ ক্ষেত্ৰত।
- বৃহৎ মহানগৰীসমূহৰ যান-জঁট লাঘৱ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত।

এই অধ্যায়ত তোমালোকক গণিতীয় আৰ্হি গঠন প্ৰক্ৰিয়াৰ সৈতে পৰিচয় কৰোৱা হ'ব যাক গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ বোলা হয়। গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত বাস্তৱ জগতৰ সমস্যা একোটা লোৱা হয় আৰু ইয়াক সমতুল্য গাণিতিক সমস্যাৰ ৰূপত লিখি উলিওৱা হয়। তাৰ পিছত গাণিতিক সমস্যাটোৰ সমাধান উলিয়াই পুনৰ বাস্তৱ জগতৰ পটভূমিত বাখ্যা কৰা হয়। ইয়াৰ পিছত সমাধানটো বাস্তৱ জগতৰ পৰিপ্ৰেক্ষিতত কিমান দূৰ প্ৰযোজ্য হৈছে সেই বিষয়টো পৰীক্ষা কৰি চোৱা হয়। গতিকে, গাণিতিক আৰ্হি প্ৰকৰণৰ সৈতে জড়িত ঢাপকেইটা হ'ল— সূত্ৰায়ন(Formulation),

সমাধান (Solution), ব্যাখ্যা (Interpretation), আৰু বৈধতাৰ পৰীক্ষণ বা বৈধকৰণ (Validation)।

পৰিচ্ছেদ A2.2ত শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যাৰ (Word-problem) সমাধান কৰোতে তোমালোকে গ্ৰহণ কৰা পদ্ধতিৰ পিনে দৃষ্টি ৰাখি আমি আলোচনা আৰম্ভ কৰিম। ইয়াত, তোমালোকে পূৰ্বৰ শ্ৰেণীসমূহত সমাধান কৰি অহা ধৰণৰ কিছুমান শব্দনিৰ্ভৰ সমস্যাৰ আলোচনা আগবঢ়োৱা হ'ব। পৰৱৰ্তী কালত আমি দেখিবলৈ পাম যে শব্দনিৰ্ভৰ সমস্যাৰ সমাধানত ব্যৱহৃত ঢাপ কিছুমান গাণিতিক আৰ্হি প্ৰকৰণতো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

পৰৱৰ্তী পৰিচ্ছেদত অৰ্থাৎ A2.3ত আমি কিছুমান সৰল আৰ্হিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

পৰিচ্ছেদ A2.4ত আমি আৰ্হি প্ৰকৰণৰ পদ্ধতি, ইয়াৰ সুবিধা আৰু কিছুমান সীমাবদ্ধতাৰ বিষয়ে সামগ্ৰীকভাৱে আলোচনা আগবঢ়াম।

A2.2 কথা প্ৰশ্নৰ পৰ্যালোচনা (Review of word-problems) ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ মোৰ গাড়ীখনেৰে 48 লিটাৰ পেট্ৰ'লত মই 432 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণ কৰিছিলো। গাড়ীখনেৰে 180 কিঃমিঃ দূৰৈত অৱস্থিত এখন ঠাইলৈ মই যাব বিচাৰো। মোক কিমান লিটাৰ পেট্ৰ'লৰ আৱশ্যক হ'ব?

সমাধান ঃ সমস্যাটো সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত জড়িত ঢাপবোৰ ক্ৰমানুসাৰে বাছি উলিওৱা হওক।

ঢাপ-1 ঃ সূত্ৰায়ন (Formulation) ঃ তোমালোকে জানা যে যিমানে অধিক দূৰলৈ আমি ভ্ৰমণ কৰো, সিমানে অধিক পেট্ৰ'লৰ প্ৰয়োজন হয়; অৰ্থাৎ পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ আমি অতিক্ৰম কৰা দূৰত্বৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষভাৱে পৰিৱৰ্তনশীল অৰ্থাৎ বিচৰণশীল।

432 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণৰ বাবে পেট্ৰ'ল লাগে = 48 লিটাৰ

180 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণৰ বাবে পেট্ৰ'ল লাগে = ?

গাণিতিক বৰ্ণনা ঃ ধৰা হওক—

x = মই ভ্ৰমণ কৰা দূৰত্ব

y = মোক প্ৰয়োজন হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ

x, yৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষভাৱে বিচৰণশীল

গতিকে, $y = kx$, য'ত k এটা ধ্ৰুৱক

48 লিটাৰ পেট্ৰ'লেৰে মই 432 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণ কৰিব পাৰো।

গতিকে, $y = 48$, $x = 432$

সেয়েহে, $k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

যিহেতু, $y = kx$

সেইবাবে $y = \frac{1}{9}x$ .....(1)

সমীকৰণ বা সূত্ৰ (1)য়ে প্ৰয়োজনীয় পেট্ৰ'ল আৰু ভ্ৰমণ কৰা দূৰত্বৰ মাজৰ সম্বন্ধটো বৰ্ণনা কৰে।

ঢাপ-2 ঃ **সমাধান (Solution)** ঃ 180 কিলোমিটাৰ দূৰত্ব ভ্ৰমণ কৰিবলৈ আৱশ্যক হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ আমি উলিয়াব বিচাৰো। গতিকে, $x = 180$ ৰ বাবে আমি yৰ মান উলিয়াব লাগিব। (1)ত $x = 180$ বহুৱাই আমি পাওঁ—

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

ঢাপ-3 ঃ **ব্যাখ্যা (Interpretation)** ঃ যিহেতু $y = 20$, গতিকে, 180 কিলোমিটাৰ ভ্ৰমণ কৰিবলৈ আমাক 20 লিটাৰ পেট্ৰ'লৰ আৱশ্যক হ'ব।

তোমালোকৰ এনে অনুভৱ হয় নে যে সকলো পৰিস্থিতিতে তোমালোকে সূত্ৰ (1)ৰ ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ সমৰ্থ নহবও পাৰা?

উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰি লোৱা, 432 কিলোমিটাৰ পথছোৱা পাহাৰৰ মাজে মাজে আৰু 180 কিলোমিটাৰ পথছোৱা সমান সমতলভুমিৰে গৈছে। প্ৰথম পথছোৱাৰ বাবে গাড়ীখনে খৰগতিত পেট্ৰ'ল খৰছ কৰিব; গতিকে 180 কিলোমিটাৰ পথছোৱাৰ বাবে আমি একে হাৰ ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰো য'ত পেট্ৰ'ল মন্থৰ গতিত ব্যৱহাৰ হ'ব। গতিকে সূত্ৰটো প্ৰযোজ্য হ'ব যদি পেট্ৰ'ল খৰছৰ হাৰক প্ৰভাৱিত কৰা এনেধৰণৰ সকলো চৰ্তাৱলী উভয়ছোৱা পথৰ বাবে একে হয়। নাইবা, যদি এনে চৰ্তাৱলীৰ মাজত কোনো প্ৰভেদ থাকে, তেন্তে গাড়ীখনৰ বাবে আৱশ্যক হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণৰ ওপৰত এই প্ৰভেদৰ প্ৰভাৱ অতি ক্ষুদ্ৰ হয়। মাত্ৰ এনে এক পৰিস্থিতিতহে ব্যৱহাৰ হোৱা পেট্ৰ'ল অতিক্ৰান্ত দূৰত্বৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষভাৱে বিচৰণশীল হয়। সমস্যাটোৰ সমাধান আগবঢ়াওতে আমি এই কথাটো ধৰি লৈছিলো।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰি লোৱা, সুধীৰে বছৰি 8% হাৰ সুদত 15000 টকা বিনিয়োগ কৰে। বিনিয়োগৰ জৰিয়তে হোৱা আয়ৰ পৰা তেওঁ 19000 টকা মূল্যৰ এটা কাপোৰ ধোৱা মেচিন কিনিব বিচাৰিলে। 15000 টকা তেওঁ কিমান সময়ৰ বাবে বিনিয়োগ কৰিব লাগিব যাতে কাপোৰ ধোৱা মেচিনটো ক্ৰয় কৰিব পৰাকৈ তেওঁৰ হাতত পৰ্যাপ্ত ধন জমা হয়?

সমাধান ঃ ঢাপ-1 ঃ **সমস্যাটোৰ সূত্ৰায়ন (Formulation of the problem)** ঃ ইয়াত, আমি মূলধন আৰু সুদৰ হাৰ সম্পৰ্কে জানো। সুদখিনি হ'ল কাপোৰ ধোৱা মেচিনটো কিনিবলৈ সুধীৰক 15000 টকাৰ ওপৰঞ্চিভাৱে প্ৰয়োজন হোৱা ধনৰ পৰিমাণ। আমি উলিয়াব লাগিব বছৰৰ সংখ্যা।

গাণিতিক বৰ্ণনা (Mathematical Description)ঃ

সৰল সুদৰ সূত্ৰটো হ'ল

$$I = \frac{Pnr}{100}$$

য'ত, P = মূলধন

n = বছৰৰ সংখ্যা

r% = সুদৰ হাৰ

I = আৰ্জিত সুদ।

ইয়াত, মূলধন = 15,000 টকা

কাপোৰ ধোৱা মেচিনটো কিনিবলৈ সুধীৰক প্ৰয়োজন হোৱা টকাৰ পৰিমাণ = 19,000 টকা

গতিকে আৱশ্যকীয় সুদৰ পৰিমাণ = 19,000 টকা – 15,000 টকা = 4,000 টকা

15,000 টকা জমা ৰখা বছৰৰ সংখ্যা = n

বছৰি 8% হাৰে n বছৰৰ বাবে 15,000 টকাৰ ওপৰত সুদৰ পৰিমাণ = I

তেতিয়া $I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$

গতিকে I = 1200n .....(1)

হ'ল বছৰৰ সংখ্যা আৰু সুদৰ মাজত থকা সম্বন্ধটো, যদি 15000 টকা বছৰি 8% হাৰে বিনিয়োগ কৰা হয়। আৰ্জিত সুদৰ পৰিমাণ 4000 টকা হ'বলৈ প্ৰয়োজন হোৱা সময় উলিয়াব লাগে।

(1)ত I = 4000 বহুৱাই আমি পাওঁ—

4000 = 1200n .....(2)

ঢাপ-2 ঃ **সমস্যাটোৰ সমাধান** ঃ (2) সমীকৰণটো সমাধান কৰি পাওঁ—

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

ঢাপ-3 ঃ **ব্যাখ্যা** ঃ যিহেতু $n = 3\frac{1}{3}$ আৰু এবছৰৰ এক তৃতীয়াংশই 4 মাহ বুজায় গতিকে 3 বছৰ 4 মাহৰ পিছত সুধীৰে এটা কাপোৰ ধোৱা মেচিন কিনিব পাৰিব।

ওপৰৰ উদাহৰণটোত তোমালোকে আৰোপ কৰিবলগীয়া হোৱা পূৰ্ব চৰ্তটো কি অনুমান কৰিব পাৰিছানে? যিছোৱা সময়ৰ বাবে আমি সুদ নিৰ্ণয় কৰিছো সেই সময়ছোৱাৰ বাবে সুদৰ হাৰ একেই আছে বুলি আমি ধৰি লৈছো। অন্যথা, $I = \frac{Pnr}{100}$ সূত্ৰটো প্ৰযোজ্য নহ'লহেঁতেন। লগতে আমি ধৰি লৈছো যে সুধীৰে প্ৰয়োজনীয় টকাখিনি জোগাৰ কৰিবলৈ আৱশ্যক হোৱা সময়ছোৱাত

কাপোৰ ধোৱা মেচিনটোৰ মূল্য বঢ়া নাই।

উদাহৰণ 3 ঃ যন্ত্ৰচালিত নাও এখনে নদীৰ উজনিমুৱা সোঁতত গতি কৰি ছয় ঘণ্টাত পাৰত থকা দুখন চহৰৰ মাজৰ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰে। নাওখনে সেই একেখিনি দূৰত্ব ভটিয়নি সোঁতত অতিক্ৰম কৰিবলৈ পাঁচ ঘণ্টা সময় লয়। যদি সোঁতৰ গতিবেগ প্ৰতি ঘণ্টাত 2 কিঃ মিঃ তেন্তে স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ঢাপ-1 ঃ সূত্ৰায়ন ঃ নৈখনৰ গতিবেগ আৰু ঠাই দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিবলৈ আৱশ্যক হোৱা সময়ৰ পৰিমাণ আমি জানো। স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

গাণিতিক বৰ্ণনা ঃ নাওখনৰ গতিবেগ বুজাবলৈ x, অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব বুজাবলৈ y আৰু আৱশ্যক হোৱা সময় বুজাবলৈ আমি t লিখোঁহক। তেতিয়া,

$$y = tx \qquad .....(1)$$

ধৰা হওক ঠাই দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব d

উজনিমুৱা সোঁতত নাওখনৰ গতিবেগ = স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ – নৈখনৰ গতিবেগ

কাৰণ নাওখনে নৈৰ সোঁতৰ বিপৰীতে গতি কৰিছে।

গতিকে, উজনিমুৱা সোঁতত নাওখনৰ গতিবেগ = প্ৰতি ঘণ্টাত (x – 2) কিঃ মিঃ

উজনিমুৱা সোঁতত চহৰ দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিবলৈ নাওখনৰ 6 ঘণ্টাৰ প্ৰয়োজন হয়। গতিকে, (1)ৰ পৰা আমি পাওঁ

$d = 6(x - 2)$

ভটিয়নি সোঁতৰ ক্ষেত্ৰত নৈৰ গতিৰ সৈতে নাওৰ গতিৰ সমষ্টি ল'ব লাগিব।

গতিকে ভটিয়নি সোঁতত নাওখনৰ গতিবেগ = $(x + 2)$ কিঃ মিঃ/প্ৰতি ঘণ্টাত

ভটিয়নি সোঁতৰ ক্ষেত্ৰত একেখিনি দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিবলৈ প্ৰয়োজনীয় সময় হ'ল 5 ঘণ্টা।

গতিকে, $d = 5(x + 2) \qquad .....(3)$

(2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পাওঁ—

$5(x + 2) = 6(x - 2) \qquad .....(4)$

ঢাপ-2 ঃ সমাধান নিৰ্ণয় ঃ

সমীকৰণ (4)ৰ পৰা xৰ মান উলিয়াই আমি পাওঁ, x = 22

ঢাপ-3 ঃ ব্যাখ্যা ঃ

যিহেতু $x = 22$, গতিকে যন্ত্ৰচালিত নাওখনৰ স্থিৰ পানীত গতিবেগ 22 কিঃ মিঃ/প্ৰতি ঘণ্টাত

ওপৰোক্ত উদাহৰণটোৰ ক্ষেত্ৰত আমি জানো যে নৈখনৰ গতিবেগ সকলো ঠাইতে একে নহয়। নৈৰ পাৰৰ পিনে পানীৰ সোঁত কিছু ধীৰ আৰু নৈৰ মাজৰ পিনে কিছু খৰটকীয়া হয়। নাওখনে লক্ষ্যস্থান পোৱাৰ আগমূহুৰ্তত গতিবেগ কমাবলগীয়া হয় আৰু ই পাৰলৈ কাষ চাপি যায়।

গতিকে, নৈখনৰ পাৰৰ পিনে আৰু মাজত নাওখনৰ গতিবেগৰ অলপ পাৰ্থক্য আছে। যিহেতু নাওখন ক্ষুদ্ৰ সময়ৰ বাবেহে পাৰৰ কাষ চাপে নৈখনৰ গতিবেগৰ এই পাৰ্থক্যই গতিবেগক ক্ষুদ্ৰ সময়ৰ বাবেহে প্ৰভাৱিত কৰিব। গতিকে, নৈখনৰ গতিবেগৰ এই পাৰ্থক্যক আমি আওকাণ কৰিব পাৰোঁহক। নাওখনৰ গতিবেগৰ সৰুসুৰা তাৰতম্যকো আমি আওকাণ কৰিব পাৰোঁহক। ইয়াৰ উপৰি, নৈৰ গতিবেগৰ কথা নধৰিলেও নাওখনৰ তলি আৰু পানীৰ মাজৰ ঘৰ্ষণেও নাওখনৰ প্ৰকৃত গতিবেগক প্ৰভাৱিত কৰে। এই ধৰণৰ প্ৰভাৱো অতি তাকৰীয়া বুলি আমি ধৰি লওঁ। গতিকে, আমি ধৰি লৈছো যে—

1. নৈ আৰু নাও উভয়ৰে গতিবেগ সকলো সময়তে একেই থাকে।
2. নাও আৰু পানীৰ মাজৰ ঘৰ্ষণ তথা বায়ুৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘৰ্ষণৰ প্ৰভাৱ আওকাণ কৰিব পৰা বিধৰ।

ওপৰোক্ত ধাৰণা বা অনুমান (assumption/hypothesis)ৰ ভিত্তিত আমি স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰিছো।

ওপৰৰ শব্দ-নিৰ্ভৰ সমস্যাসমূহৰ সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত লক্ষ্য কৰাৰ নিচিনাকৈ এনেধৰণৰ প্ৰতিটো সমস্যা সমাধানত তিনিটাকৈ ঢাপ থাকে। সেইবোৰ হ'ল—

1. **সূত্ৰায়ন (Formulation)** ঃ সমস্যাটো বিশ্লেষণ কৰি চোৱা যাওক আৰু ইয়াৰ সমাধানত কেনেবোৰ কাৰকৰ প্ৰভাৱ মুখ্য সেই কথাৰ প্ৰতি লক্ষ্য কৰোঁহক। এইবোৰ হ'ল **প্ৰাসংগিক কাৰক (Relevant factors)**। আমাৰ প্ৰথমটো উদাহৰণত, প্ৰাসংগিক কাৰকসমূহ আছিল অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব আৰু খৰছ হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ। অন্যান্য কাৰক কিছুমান যেনে পথৰ অৱস্থা, গাড়ীচালনাৰ গতিবেগ ইত্যাদি আমি আওকাণ কৰিছিলো। অন্যথা, সমস্যাটোৰ সমাধান অত্যন্ত কঠিন হ'লহেঁতেন। আমি আওকাণ কৰিব পৰা কাৰক সমূহক কোৱা হয় **অপ্ৰাসংগিক কাৰক (Irrelevant factors)**।

   ইয়াৰ পিছত আমি গাণিতিকভাৱে এক বা একাধিক গণিতীয় সমীকৰণৰ ৰূপত সমস্যাটো বৰ্ণনা কৰোঁহক।
2. **সমাধান** ঃ প্ৰথম পদক্ষেপত পোৱা সমীকৰণসমূহক কোনো উপযুক্ত পদ্ধতিৰে সমাধান কৰি আমি সমস্যাটোৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰোহক।
3. **ব্যাখ্যা** ঃ দ্বিতীয় পদক্ষেপত লাভ কৰা সমাধানটোৰে মূল শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যাটোৰ পটভূমিত কি বুজায় আমি তাক উপলব্ধি কৰিবলৈ চেষ্টা কৰোহক।

ইয়াত তোমালোকৰ বাবে কেইটামান অনুশীলনী আগবঢ়োৱা হ'ল। নিম্নোক্ত সমস্যাৱলীৰ ক্ষেত্ৰত শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যা সমাধানত জড়িত পদক্ষেপ তিনিটা প্ৰয়োগ কৰাৰ জৰিয়তে এই পদক্ষেপকেইটাৰ বিষয়ে তোমালোকে আয়ত্ব কৰা জ্ঞানৰ পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা।

অনুশীলনী A2.1

নিম্নোক্ত সমস্যাবোৰৰ প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰতে উল্লেখ কৰি আহা 1, 2 আৰু 3 ঢাপ কেইটা প্ৰয়োগ কৰোতে লাভ কৰা প্ৰাসংগিক আৰু অপ্ৰাসংগিক কাৰকসমূহৰ বিষয়ে উল্লেখ কৰা

1. ধৰি লোৱা, এটা কোম্পানীৰ কিছু সময়ৰ বাবে এটা কম্পিউটাৰৰ প্ৰয়োজন হ'ল। কোম্পানীটোৱে মাহিলি 2000 টকাৰ বিনিময়ত কম্পিউটাৰ এটা ভাড়ালৈ ল'ব পাৰে নাইবা 25000 টকা দামত এটা কম্পিউটাৰ কিনি ল'ব পাৰে। যদি কোম্পানীটোৱে দীৰ্ঘ সময়ৰ বাবে কম্পিউটাৰটো ব্যৱহাৰ কৰিবলগীয়া হয় তেন্তে ভাড়াৰ নামত ইমান বেছি টকা ভৰিব লাগিব যে কম্পিউটাৰ এটা কিনি ল'লে তাতকৈ কম খৰছতে হ'ব। আনহাতে, যদি কোম্পানীটোৱে ঠিক এমাহৰ বাবেহে কম্পিউটাৰটো ব্যৱহাৰ কৰে, তেন্তে ইয়াক ভাড়ালৈ ল'লেহে খৰছ কম হ'ব। মাহৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা যি সংখ্যাতকৈ বেছি মাহৰ বাবে ভাড়া ল'লে কম্পিউটাৰ এটা কিনাদামতকৈ খৰছ অধিক হয়।

2. ধৰি লোৱা, এখন মটৰ গাড়ীয়ে এখন ঠাই Aৰ পৰা আন এখন ঠাই Bলৈ ঘণ্টাত 40 কিঃ মিঃ বেগেৰে ভ্ৰমণ কৰে। একে সময়তে আন এখন মটৰ গাড়ীয়ে ঠাই Bৰ পৰা Aলৈ ঘণ্টাত 30 কিঃ মিঃ বেগেৰে যাত্ৰা কৰে। যদি A আৰু Bৰ মাজৰ দূৰত্ব 100 কিঃ মিঃ হয় তেন্তে কিমান সময়ৰ অন্তত গাড়ী দুখন একেলগ হ'ব?

3. পৃথিৱীৰ পৰা চন্দ্ৰৰ দূৰত্ব প্ৰায় 3,84,000 কিঃ মিঃ আৰু পৃথিৱীৰ চাৰিওফালে ইয়াৰ কক্ষপথটো প্ৰায় বৃত্তাকাৰ। 24 ঘণ্টাত ই পৃথিৱীৰ চাৰিওফালে এপাক পৰিভ্ৰমণ কৰিলে, কক্ষপথত ইয়াৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰা। ($\pi = 3.14$ ল'বা)

4. এটা পৰিয়ালে 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰ নকৰা মাহবোৰত বিদ্যুতৰ বাবে গড়ে 1000 টকাকৈ পৰিশোধ কৰে। 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰ কৰা মাহবোৰত বিদ্যুতৰ বিল গড়ে 1240 টকা। প্ৰতি ঘণ্টাত 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰৰ খৰছ 4.00 টকা। দৈনিক গড়ে কেই ঘণ্টাকৈ 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰ হয় নিৰ্ণয় কৰা।

A2.3 কেইটামান গণিতীয় আৰ্হি (Some Mathematical Models) ঃ

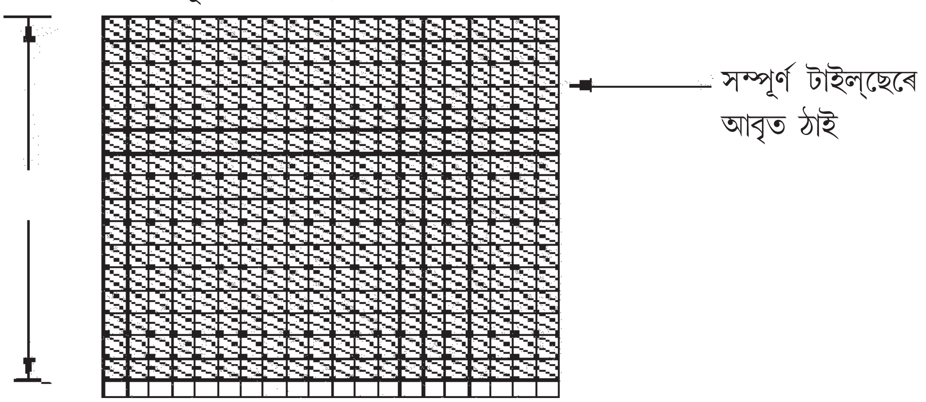
এই পৰ্যন্ত আমাৰ আলোচনাত কোনো নতুন বিষয় আলোচিত হোৱা নাই। এই পৰিচ্ছেদত ইতিমধ্যে আলোচনা কৰা তিনিটা ঢাপৰ সৈতে আন এটা ঢাপ সন্নিবিষ্ট কৰিব খুজিছো। এই ঢাপটোক কোৱা হয় বৈধকৰণ বা বিহিতকৰণ (Validation)। বৈধকৰণে কি বুজায়? আমি চাওঁহক। বাস্তৱ পৰিস্থিতিত এনে কোনো আৰ্হি আমি গ্ৰহণ কৰিব নোৱাৰো যিয়ে বাস্তৱৰ সৈতে খাপ নোখোৱা কোনো সমাধান দিয়ে। বাস্তৱ পৰিস্থিতিৰ সৈতে মিলাই সমাধান এটাৰ গ্ৰহণীয়তাক পৰীক্ষা কৰি চোৱা আৰু প্ৰয়োজন সাপেক্ষে গাণিতিক বৰ্ণনাৰ সালসলনি কৰা পদ্ধতিটোকেই কোৱা হয় বৈধকৰণ বা বিহিতকৰণ। আৰ্হি প্ৰণয়নৰ ক্ষেত্ৰত এইটো অতিশয় গুৰুত্বপূৰ্ণ ঢাপ। এই

পৰিচ্ছেদত আমি তোমালোকক এই ঢাপটোৰ সৈতে পৰিচয় কৰাম।

প্ৰথমে আমি এটা উদাহৰণ বিবেচনা কৰোঁহঁক য'ত বৈধকৰণৰ পিছত আমাৰ আৰ্হিটোৰ কোনো ধৰণৰ সালসলনি কৰিবলগীয়া নহয়।

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হওক, তোমাৰ কোঠালিটোৰ দীঘ 6 মিটাৰ আৰু প্ৰস্থ 5 মিটাৰ। কোঠালিৰ মজিয়াখন তুমি 30 ছেমি দীঘবিশিষ্ট বৰ্গীয় মোজেইক টাইল্‌ছৰ দ্বাৰা আবৃত কৰিব বিচাৰিছা। তোমাক কেইখন টাইল্‌ছৰ প্ৰয়োজন হ'ব? এটা গণিতীয় আৰ্হি তৈয়াৰ কৰি সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা।

সমাধান ঃ সূত্ৰায়ন ঃ সমস্যাটোৰ সমাধান পাবলৈ আমি কোঠালিটোৰ কালি আৰু 'টাইলছ' একোখনৰ কালি নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব। 'টাইলছ'ৰ দীঘ হ'ল 0.3 মিটাৰ। যিহেতু কোঠালিৰ দীঘ 6 মিটাৰ গতিকে কোঠালিৰ দীঘে দীঘে একোটা শাৰীত $\frac{6}{0.3} = 20$ খনকৈ টাইলছৰ প্ৰয়োজন হ'ব। আনহাতে, কোঠালিৰ প্ৰস্থ হ'ল 5 মিটাৰ আৰু $\frac{5}{0.3} = 16.67$। গতিকে একোটা স্তম্ভত আমি 16 খনকৈ টাইল্‌ছ বহুৱাব পাৰো। যিহেতু $16 \times 0.3 = 4.8$, $5 - 4.8 = 0.2$ মিটাৰ ঠাই প্ৰস্থৰ দিশত অনাবৃত থাকিব গতিকে এই ঠাইখিনি পূৰাবলৈ আমি অন্য 'টাইল্‌ছ'ৰ পৰা কাটি উলিয়াব লাগিব। মজিয়াৰ প্ৰস্থৰ অনাবৃত অংশৰ পৰিমাণ 0.2 মিটাৰ যিটো 'টাইল্‌ছ'ৰ দৈৰ্ঘ অৰ্থাৎ 0.3 মিটাৰৰ আধাতকৈ অধিক। গতিকে এখন 'টাইল'ক সমানে দুই খণ্ডত ভাঙি উভয় খনকে বাকী থকা অংশটো পূৰাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰো।



চিত্ৰ A2.1

গাণিতিক বৰ্ণনা ঃ আমি পাওঁ—

টাইল্‌ছৰ মুঠ সংখ্যা = (দীঘে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা) × (পথালিয়ে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা) + অনাবৃত অংশৰ বাবে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা .....(1)

সমাধান ঃ ওপৰত উল্লেখ কৰাৰ দৰে, দীঘে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা হ'ব 20 খন আৰু পথালিয়ে টাইল্‌ছৰ

সংখ্যা 16 খন। শেষৰ শাৰীটোৰ বাবে আমাক অতিৰিক্ত 20 খন টাইল্‌ছৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

এই মানবোৰ (1)অত বহুৱাই আমি পাওঁ—

(20 × 16) + 20 = 320 + 20 = 340

ব্যাখ্যা ঃ মজিয়াখন ঢাকিবলৈ মুঠ 340 খন টাইল্‌ছৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

বৈধতাৰ পৰীক্ষণ ঃ বাস্তৱ ক্ষেত্ৰত ৰাজ মিস্ত্ৰীয়ে টাইল্‌ছবোৰ সঠিক আকাৰত কাটি উলিয়াওতে নষ্ট হোৱা বাবে কেইখনমান অতিৰিক্ত টাইল্‌ছ তোমাক কিনিবলৈ ক'ব পাৰে। অৱশ্যে এই সংখ্যাটো ৰাজমিস্ত্ৰীৰ পাৰদৰ্শিতাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰিব। কিন্তু ইয়াৰ বাবে সমীকৰণ (1)ক পৰিবৰ্তন কৰাৰ কোনো প্ৰয়োজন নাই। এই সমীকৰণ তোমাক আৱশ্যকীয় টাইল্‌ছৰ সংখ্যা সম্পৰ্কে থূলমূল ধাৰণা দিব। গতিকে, আমি ইয়াতে সামৰিব পাৰোহক।

এতিয়া আমি অন্য এক পৰিস্থিতি বিবেচনা কৰি চাওহক।

উদাহৰণ 5 ঃ 2000 চনত ৰাষ্ট্ৰসংঘৰ 191 খন ৰাষ্ট্ৰই এক ঘোষণা পত্ৰত স্বাক্ষৰ কৰিছিল। এই ঘোষণা পত্ৰৰ জৰিয়তে ৰাষ্ট্ৰসমূহে 2015 চনৰ ভিতৰত সফল হ'ব পৰাকৈ কিছুমান ক্ষেত্ৰত উন্নয়ণৰ লক্ষ্য নিৰ্দিষ্ট কৰি লৈছিল। এইবোৰক 'মিলেনিয়াম ডেভেলপ্‌মেণ্ট গোল্‌ছ' (Millenium development goals) অৰ্থাৎ 'সহস্ৰ বাৰ্ষিক উন্নয়নৰ লক্ষ্য' আখ্যা দিয়া হৈছে। এই লক্ষ্যসমূহৰ এটা হ'ল লিংগ সমতা স্থাপন। এই লক্ষ্যত উপনীত হ'ব পৰা গৈছেনে সেয়া নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে এটা সূচক হৈছে প্ৰাথমিক, মাধ্যমিক আৰু উচ্চ শিক্ষাত ল'ৰা-ছোৱালীৰ অংশগ্ৰহণৰ অনুপাত।

ঘোষণাপত্ৰখনৰ এক স্বাক্ষৰকাৰী ৰাষ্ট্ৰ হিচাপে ভাৰতেও এই অনুপাতৰ উন্নীতকৰণৰ বাবে দায়বদ্ধ। সাৰণী A2.1ত প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তি কৰা ছোৱালীৰ তথ্য শতাংশ হিচাপত দিয়া হৈছে।

সাৰণী A2.1

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

Source : Educational Statistics, Web page of Department of Education, GOI

* য়ে সূচায় যে তথ্যকেইটা অস্থায়ীভাৱে সন্নিৱিষ্ট

এই তথ্যৰ সহায়ত প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তিকৃত ছোৱালীৰ অনুপাত কি হাৰে বৃদ্ধি পাইছে তাক গাণিতিকভাৱে বৰ্ণনা কৰা। লগতে, নামভৰ্তিকৃত ছোৱালীৰ সংখ্যা 50% ঢুকি পোৱা বছৰটো হিচাপ কৰি উলিওৱা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে সমস্যাটো এটা গাণিতিক সমস্যালৈ সলনি কৰা যাওক।

ঢাপ-1 ঃ সূত্ৰায়ন ঃ সাৰণীখনত 1991-92, 1992-93,..... ইত্যাদি বৰ্ষৰ বাবে নামভৰ্তিকৰণৰ হিচাপ দিয়া আছে। যিহেতু ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে শিক্ষাবৰ্ষৰ আৰম্ভণিতেই নামভৰ্তি কৰে, আমি বৰ্ষসমূহ 1991, 1992 ইত্যাদি ধৰণে ল'ব পাৰো। আমি ধৰি ল'ম যে সাৰণীখনত উল্লেখ কৰাৰ দৰে একে হাৰত প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তি কৰা ছোৱালীৰ শতাংশ বৃদ্ধি হৈ থাকে। গতিকে, কোনো নিৰ্দিষ্ট বৰ্ষৰ পৰিৱৰ্তে বৰ্ষৰ মুঠ সংখ্যাহে দৰকাৰী। (সদৃশ পৰিস্থিতিৰ এক উদাহৰণ পোৱা যায় যেতিয়া 3 বছৰৰ বাবে বছৰি 8% হাৰে 1500 টকাৰ সৰল সুত নিৰ্ণয় কৰিবলগীয়া হয়। ইয়াত 3 বছৰীয়া পৰ্যায়টো 1999ৰ পৰা 2002লৈ নে 2001ৰ পৰা 2004লৈ সেইটোৰ ওপৰত সুতৰ পৰিমাণ নিৰ্ভৰশীল নহয়। বিবেচনাধীন বছৰবোৰত সুতৰ হাৰহে গুৰুত্বপূৰ্ণ) লগতে ইয়াত, 1991ৰ পিছত অতিক্ৰান্ত হোৱা বছৰৰ সৈতে নামভৰ্তিকৰণৰ সংখ্যা তুলনা কৰি আমি দেখিম কি ধৰণে 1991 চনৰ পিছত নামভৰ্তিকৰণ বৃদ্ধি হৈছে। 1991ক আমি বৰ্ষ-0, 1992ক বৰ্ষ-1 লওহক, যিহেতু 1991ৰ পৰা 1992 পাওতে এবছৰ পাৰ হয়। সদৃশধৰণে, 1993ৰ বাবে বৰ্ষ-2, 1994ৰ বাবে বৰ্ষ-3 ইত্যাদি। গতিকে সাৰণী A2.1 খন এতিয়া সাৰণী A2.2ৰ দৰে দেখা যাব।

সাৰণী A2.2

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণ (%ত)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

নিম্নোক্ত সাৰণীখনত নামভৰ্তিকৰণৰ বৃদ্ধি আগবঢ়োৱা হ'ল ঃ

সাৰণী A2.3

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণ (%ত)	বৃদ্ধি
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991ৰ পৰা 1992 এক বছৰৰ অন্তত নামভৰ্তিকৰণ 41.9%ৰ পৰা 42.6%লৈ 0.7% বৃদ্ধি হৈছে। দ্বিতীয় বৰ্ষৰ শেষত ই 42.6%ৰ পৰা 42.7%লৈ 0.1% বাঢ়িছে। ওপৰোক্ত সাৰণীৰ পৰা আমি বছৰৰ সংখ্যা আৰু শতাংশৰ মাজত এটা সুনিৰ্দিষ্ট সম্বন্ধ পাব নোৱাৰো। কিন্তু বৃদ্ধি কিছু পৰিমাণে সুস্থিৰভাৱে ঘটিছে। মাত্ৰ প্ৰথম বৰ্ষ আৰু দশম বৰ্ষৰ বৃদ্ধিত একোটাকৈ জাঁপ লক্ষ্য কৰা যায়। মানসমূহৰ মাধ্য অৰ্থাৎ গড় হ'ল—

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

আমি ধৰোঁ যে নামভৰ্তিকৰণ বছৰে 0.22 শতাংশ হাৰে নিয়মিতভাৱে বৃদ্ধি হৈছে।

গাণিতিক বৰ্ণনা (Mathematical Description)ঃ

আমি ধৰি লৈছো যে নামভৰ্তিকৰণ বছৰে 0.22 শতাংশ হাৰে নিয়মিতভাৱে বৃদ্ধি হৈছে।

গতিকে, প্ৰথম বৰ্ষত নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ (E.P.) $= 41.9 + 0.22$

দ্বিতীয় বৰ্ষ E.P. $= 41.9 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 2 \times 0.22$

তৃতীয় বৰ্ষ E.P. $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3 \times 0.22$

গতিকে, nতম বৰ্ষত নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ $= 41.9 + n \times 0.22$

$= 41.9 + 0.22n \ (n \geq 1)$ ....(1)

এতিয়া আমি বছৰৰ সংখ্যা উলিয়াব লাগিব যাতে নামভৰ্তিকৰণ 50% সমান হয়।

গতিকে, আমি তলৰ সমীকৰণ অথবা সূত্ৰৰ পৰা nৰ মান উলিয়াব লাগিব—

$$50 = 41.9 + 0.22n \qquad ......(2)$$

ঢাপ-2 ঃ সমাধান (Solution) ঃ

(2) সমীকৰণটো সমাধান কৰি, আমি পাওঁ—

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

ঢাপ-3 ঃ ব্যাখ্যা (Interpretation) ঃ

যিহেতু বছৰৰ সংখ্যাটো এটা অখণ্ড সংখ্যা, আমি পৰৱৰ্তী অখণ্ড সংখ্যাটো অৰ্থাৎ 37ক nৰ মান হিচাপে ল'ম। গতিকে, নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ 50%ত উপনীত হোৱা বছৰটো হ'ল 1991 + 37 = 2028

শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যা একোটাত সাধাৰণতে আমি ইমানতে ক্ষান্ত থাকো। কিন্তু যিহেতু আমি বাস্তৱ জীৱন ভিত্তিক সমস্যাৰ আলোচনা কৰিছো গতিকে এই মান বাস্তৱ পৰিস্থিতিৰ সৈতে কিমানখিনি প্ৰযোজ্য হয় সেইটো চাব লাগিব।

ঢাপ-4 ঃ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ (Validation)

(2) সূত্ৰটো বাস্তৱৰ সৈতে সংগতিপূৰ্ণ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওক। ইতিমধ্যে জ্ঞাত বছৰবোৰৰ বাবে মানবোৰ সূত্ৰ (2)ৰ সহায়ত উলিয়াই চোৱা যাওঁক আৰু জ্ঞাত মানবোৰৰ সৈতে এই মানবোৰৰ পাৰ্থক্য উলিয়াই তুলনা কৰি চাওহক। মানবোৰ সাৰণী A2.4ত উল্লেখ কৰা হ'ল।

সাৰণী A2.4

বৰ্ষ	নাভৰ্তিকৰণ (%ত)	(2)ৰ দ্বাৰা প্ৰাপ্ত মান (%ত)	পাৰ্থক্য (%ত)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

দেখা গৈছে সূত্ৰ (2) ৰে প্ৰাপ্ত কিছু সংখ্যক মান প্ৰকৃত মানতকৈ প্ৰায় 0.3% আনকি 0.5% কম। ইয়ে প্ৰায় 3ৰ পৰা 5 পৰ্যন্ত বছৰৰ পাৰ্থক্য ঘটাব পাৰে যিহেতু দৰাচলতে বাৰ্ষিক বৃদ্ধিৰ পৰিমাণ 1%ৰ পৰা 2% পৰ্যন্তহে ঘটিছে। আমি এইখিনি পাৰ্থক্য গ্ৰহণীয় বুলি স্বীকাৰ কৰি ইয়াতে ইতি কৰিব পাৰোহক। এইক্ষেত্ৰত (2) হ'ল আমাৰ গাণিতিক আৰ্হি।

ধৰা যাওক, এই পাৰ্থক্য বা বিচ্যুতিখিনি যথেষ্ট বেছি বুলি আমি অনুভৱ কৰিলো, আৰু এই আৰ্হিটো উন্নত ৰূপত পাবলৈ বিচাৰিলো। তেতিয়া আমি ঢাপ-1 অৰ্থাৎ সূত্ৰায়নলৈ উভতি যাব লাগিব আৰু সমীকৰণ (2)ৰ পৰিবৰ্তন ঘটাব লাগিব। আমি তাকেই কৰোহক।

ঢাপ-1 ঃ পুনৰ্সূত্ৰায়ন (Reformulation) ঃ

আমি এতিয়াও ধৰি লওঁ যে মানবোৰ নিয়মিত ৰূপত 0.22% কৈ বৃদ্ধি হৈ আছে, কিন্তু পাৰ্থক্য হ্ৰাস কৰিবলৈ আমি এটা শুদ্ধিকৰণ ৰাশিৰ (Correction factor) অৱতাৰনা কৰিম। ইয়াৰ বাবে আমি সকলো পাৰ্থক্যৰ মাধ্য উলিয়াম। সেয়া হ'ল—

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

আমি পাৰ্থক্যসমূহৰ মাধ্য লওঁ আৰু এই মানৰ দ্বাৰা আমাৰ সূত্ৰটো ত্ৰুটীমুক্ত কৰোহক

সংশোধিত গাণিতিক বৰ্ণনা (Revised Mathematical Description)

এতিয়া আমি (2) ত প্ৰদত্ত নামভৰ্তিকৰণ শতাংশৰ বাবে সূত্ৰটোত পাৰ্থক্যৰ মাধ্য সংযোগ কৰোহঁক। গতিকে, শুদ্ধ সূত্ৰটো হ'ল—

nতম বৰ্ষত নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ $= 41.9 + 0.22n + 0.18$

$$= 42.08 + 0.22n,\ n \geq 1 \qquad .....(3)$$

আমি লগতে (2) সমীকৰণটোকো সঠিকভাৱে সজাম। nৰ নতুন সমীকৰণটো হ'ল—

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad .....(4)$$

ঢাপ-2 ঃ বিকল্প সমাধান (Altered Solution)

nৰ বাবে সমীকৰণ (4)ক সমাধান কৰি আমি পাওঁ—

$$n = \frac{50-42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

ঢাপ-3 ঃ ব্যাখ্যা (Interpretation) ঃ

যিহেতু n = 36 প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত 50% ছোৱালীৰ নামভৰ্তিকৰণ হোৱা বছৰটো হ'ল 1991 + 36 = 2027

ঢাপ-4 ঃ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ (Validation) ঃ

(4) নং সূত্ৰটোৰ সহায়ত লাভ কৰা মানবোৰ প্ৰকৃত মানৰ সৈতে আকৌ এবাৰ তুলনা কৰি চোৱা যাওক

সাৰণী A2.5ত এই তুলনা প্ৰদত্ত আছে

সাৰণী A2.5

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণ (%ত)	(2)ৰে প্ৰাপ্ত মানসমূহ	মানসমূহৰ অন্তৰফল	(4)ৰে প্ৰাপ্ত মানসমূহ	মানসমূহৰ অন্তৰফল
0	41.9	41.9	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

সাৰণীখনৰ পৰা দেখা যায় যে সূত্ৰ (2)ৰ সহায়ত প্ৰাপ্ত মানতকৈ সূত্ৰ (4)ৰ সহায়ত প্ৰাপ্ত বহুবোৰ মান প্ৰকৃত মানৰ বেছি নিকটবৰ্তী। এই ক্ষেত্ৰত ত্ৰুটীৰ মাধ্য 0।

আমাৰ প্ৰক্ৰিয়াটো আমি ইয়াতে সামৰিম। গতিকে সূত্ৰ (4)য়েই হ'ল আমাৰ গাণিতিক বৰ্ণনা যিয়ে মুঠ নামভৰ্তিকৰণৰ ভিতৰত ছোৱালীৰ নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশৰ সৈতে বছৰৰ এক সম্বন্ধ স্থাপন কৰে। আমি এক গাণিতিক আৰ্হি তৈয়াৰ কৰিলো যিয়ে বৃদ্ধিৰ দিশটো তুলি ধৰিবলৈ সক্ষম।

ওপৰোক্ত পটভূমিত আমি অনুসৰণ কৰা পদ্ধতিটোৱেই হ'ল গণিতীয় আৰ্হিকৰণ পদ্ধতি। ইতিমধ্যে আমি লাভ কৰা গণিতীয় সঁজুলি বা কৌশলেৰেই আমি এক গণিতীয় আৰ্হি তৈয়াৰ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিছোহক।

আনৰ হাতত থকা তথ্যৰ পৰা পূৰ্বানুমান আগবঢ়াবলৈ উৎকৃষ্টতৰ গাণিতিক সঁজুলি বা কৌশল আছে। কিন্তু সেইবোৰৰ আলোচনা বৰ্তমানৰ পৰিসৰত সম্ভৱ নহয়। এই আৰ্হি তৈয়াৰ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত আমাৰ উদ্দেশ্য আছিল তোমালোকক আৰ্হিকৰণ প্ৰক্ৰিয়া সম্পৰ্কে অৱগত কৰোৱাটোহে, নিখুঁত পূৰ্বানুমান আগবঢ়োৱাতো নহয়।

এতিয়া, তোমালোকে এই পৰ্যন্ত আমি আগবঢ়োৱা আলোচনাৰ পৰা যি বুজিছা সেয়া পৰীক্ষা কৰি চোৱাৰ উদ্দেশ্যে কিছুমান বাস্তৱ পৰিস্থিতিৰ আৰ্হি তৈয়াৰ কৰি চাব পাৰা। তোমালোকৰ প্ৰচেষ্টাৰ উদ্দেশ্যে এটা অনুশীলনী আগবঢ়োৱা হ'ল।

অনুশীলনী-A2.2

1. নিম্নোক্ত সাৰণীখনত অলিম্পিক খেলত 400 মিটাৰ দৌৰ প্ৰতিযোগিতা সন্নিৱিষ্ট হোৱাৰে পৰা সোণৰ পদক প্ৰাপ্তসকলে লোৱা সময় উল্লেখ কৰা হৈছে। বৰ্ষ আৰু প্ৰয়োজনীয় সময়ৰ সম্বন্ধসূচক এটা গণিতীয় আৰ্হি তৈয়াৰ কৰা। পৰৱৰ্তী অলিম্পিক সমূহত প্ৰয়োজন হ'বলগীয়া সময় সম্বন্ধে এই আৰ্হিৰ সহায়ত এক পূৰ্বানুমান আগবঢ়োৱা

সাৰণী A2.6

বৰ্ষ	সময় (ছেকেণ্ডত)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 আৰ্হি প্ৰকৰণ, ইয়াৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতাসমূহ (The Process of Modelling, its Advantage and Limitation) ঃ

আলোচিত উদাহৰণসমূহৰ পৰা উন্মোচিত হোৱা গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ তাৎপৰ্যসমূহ উল্লেখ কৰি আমি আমাৰ আলোচনা সামৰোহক। আগৰ পৰিচ্ছেদসমূহৰ পটভূমিত আমি এতিয়া আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত ঢাপসমূহৰ ওপৰত সংক্ষিপ্ত আলোকপাত কৰিব পৰা হৈছোহক।

ঢাপ-1 ঃ সূত্ৰায়ন (Formulation) ঃ

A2.2 পৰিচ্ছেদত আলোচিত উদাহৰণ-1ৰ সূত্ৰায়ন পৰ্ব আৰু A2.3 ছেদত আলোচিত আৰ্হিৰ সূত্ৰায়ন পৰ্বৰ মাজত তোমালোকে পাৰ্থক্য মন কৰিছা নিশ্চয়। উদাহৰণ-1ত সকলো তথ্য তৎক্ষণিকভাৱে ব্যৱহাৰ্য ৰূপত দিয়া আছে। কিন্তু A2.3ৰ আৰ্হিটোত তেনেধৰণে দিয়া হোৱা নাই। তাৰ উপৰি, এটা গাণিতিক বৰ্ণনা আগবঢ়াবলৈ আমাক কিছু সময়ৰ প্ৰয়োজন হৈছিল। প্ৰথম সূত্ৰটো আমি পৰীক্ষা কৰি চাইছিলো আৰু দেখিছিলো যে ই আমি পোৱা দ্বিতীয় সূত্ৰটোৰ দৰে ভাল নাছিল। এয়া প্ৰায় সাধাৰণভাৱে সত্য ঘটনা অৰ্থাৎ যেতিয়া বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক পৰিস্থিতিৰ

আৰ্হি এটা তৈয়াৰ কৰা হয়, প্ৰথম আৰ্হিটো সচৰাচৰ সংশোধন কৰিবলগীয়া হয়। যেতিয়া আমি বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যা এটাৰ সমাধান আগবঢ়াবলৈ চেষ্টা চলাও, সূত্ৰায়ন পৰ্বত ভালেখিনি সময়ৰ আৱশ্যক হ'ব পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে, নিউটনৰ গতিসূত্ৰ তিনিটা গতি সম্পৰ্কীয় গাণিতিক বৰ্ণনা আৰু এইবোৰ প্ৰকাশ কৰিবলৈ যথেষ্ট সৰল। কিন্তু এই সূত্ৰ সমূহ আৱিস্কাৰ কৰাৰ পূৰ্বে নিউটনে বহু তথ্য আৰু তেওঁৰ পূৰ্বসূৰীসকলৰ কাম-কাজসমূহ বিস্তৃতভাৱে অধ্যয়ণ কৰিছিল। সূত্ৰায়নৰ সৈতে নিম্নোক্ত ঢাপবোৰ জড়িত থাকে—

(i) সমস্যাটোৰ বৰ্ণনা (Stating the problem) ঃ প্ৰায়ে সমস্যাটো অস্পষ্টভাৱে বৰ্ণনা কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, বহল ভিত্তিত ল'ৰা আৰু ছোৱালীৰ নামভৰ্তিকৰণৰ ক্ষেত্ৰত সমতা স্থাপন কৰাটোৱেই হ'ল লক্ষ্য। ইয়াৰ অৰ্থ এনেভাৱে কৰিব পাৰি যে স্কুল যাবলৈ আৰম্ভ কৰা বয়সৰ মুঠ ল'ৰাৰ 50% ল'ৰা আৰু স্কুল যাবলৈ আৰম্ভ কৰা বয়সৰ মুঠ ছোৱালীৰ 50% ছোৱালীৰ নামভৰ্তি সুনিশ্চিত হ'ব লাগে। ইয়াৰ অৰ্থ অন্য ধৰণে এনেকৈও কৰিব পাৰি যে— স্কুল যাবলৈ আৰম্ভ কৰা বয়সৰ শিশুৰ 50% ছোৱালী হোৱাটো সুনিশ্চিত হ'ব লাগে। আমাৰ সমস্যাটোত আমি দ্বিতীয় অৰ্থটোহে ব্যৱহাৰ কৰিছো।

(ii) প্ৰাসংগিক বিষয়সমূহৰ চিনাক্তকৰণ (Identifying the relevant factor) ঃ কোনবোৰ ৰাশি আৰু সম্পৰ্ক সমস্যাটোৰ বাবে গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰু কোনবোৰ গুৰুত্বহীন তথা আওকাণ কৰিব পৰা বিধৰ সেইটো নিশ্চিত কৰা। উদাহৰণস্বৰূপে, প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তিকৰণ সম্পৰ্কীয় আমাৰ সমস্যাটোত আগৰ বছৰত নামভৰ্তি হোৱা ছোৱালীৰ শতাংশই এই বছৰত নামভৰ্তি হোৱা ছোৱালীৰ সংখ্যাত প্ৰভাৱ পেলাব পাৰে। কাৰণ, স্কুলবোৰত যিমানে বেছি ছোৱালীয়ে নামভৰ্তি কৰিব, সিমানে বেছি সংখ্যক মাক-দেউতাকে অনুভৱ কৰিব যে তেওঁলোকেও তেওঁলোকৰ কন্যা সন্তানবোৰক স্কুলত নামভৰ্তি কৰোৱা উচিত। কিন্তু এই বিষয়টো আমি আওকাণ কৰিছো কাৰণ, এই কথাটো তেতিয়াহে গুৰুত্বপূৰ্ণ হ'ব পাৰে যেতিয়া, নামভৰ্তিকৰণে এক নিৰ্দিষ্ট শতাংশ অতিক্ৰম কৰে। ইয়াৰ উপৰি, এই বিষয়টো সন্নিবিষ্ট কৰাৰ ফলস্বৰূপে আমাৰ আৰ্হিটো অধিক জটিল হ'ব পাৰে!

(iii) গাণিতিক বৰ্ণনা (Mathematical Description) ঃ এতিয়া, ধৰি লোৱা হওক, সমস্যাটো কি আৰু ইয়াৰ কোনবোৰ দিশ আনবোৰতকৈ অধিক গুৰুত্বপূৰ্ণ সেই সম্পৰ্কে আমি স্পষ্টভাৱে বুজি পালোহক। তেনেক্ষেত্ৰত বিভিন্ন দিশ সাঙুৰি এটা সমীকৰণ, এটা লেখ বা আন যিকোনো উপযুক্ত গাণিতিক বৰ্ণনাৰ ৰূপত আমি এটা সম্বন্ধ বিচাৰি উলিয়াব লাগিব। ই যদি এটা সমীকৰণ হয়, তেন্তে আমাৰ গাণিতিক সমীকৰণে এটা চলকৰ ৰূপত প্ৰতিটো গুৰুত্বপূৰ্ণ দিশক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিবলৈ সমৰ্থ হ'ব লাগিব।

ঢাপ-2 ঃ সমাধান নিৰ্ণয় (Finding the solution) ঃ

গাণিতিক সূত্ৰায়নে কোনো সমাধান নিদিয়ে। সমস্যাটোৰ গাণিতিক ৰূপৰ আমি সমাধান উলিয়াব লাগিব। এইখিনিতে তোমাৰ গাণিতিক জ্ঞানৰ ব্যৱহাৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

ঢাপ-3 ঃ সমাধানৰ ব্যাখ্যা (Interpretating the solution) ঃ

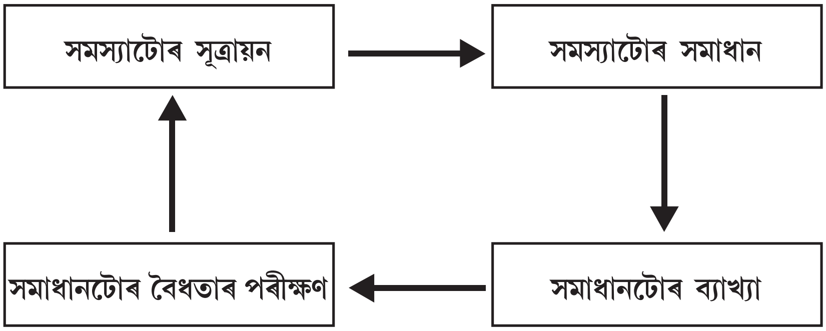
গাণিতিক সমাধান হ'ল আৰ্হিটোৰ চলকসমূহৰ কিছুমান মান। আমি বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাটোলৈ উভতি যাওঁ আৰু এই মানবোৰ সমস্যাটোত কি বুজায় চাওহক।

ঢাপ-4 ঃ সমাধানটোৰ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ (Validating the solution) ঃ

A2.3ত দেখাৰ দৰে, সমাধানটো উলিওৱাৰ পিছত এই সমাধান বাস্তৱৰ সৈতে কিমান খাপ খায় সেইটো পৰীক্ষা কৰি চোৱাটো আৱশ্যক। যদি ই খাপ খোৱা ধৰণৰ হয় তেন্তে গাণিতিক আৰ্হিটো গ্ৰহণীয় হয়। যদি গাণিতিক সমাধানটো খাপ নোখোৱা বিধৰ হয় তেন্তে আমি সূত্ৰায়ন পৰ্বলৈ পুনৰ ঘূৰি যাব লাগে আৰু আৰ্হিটো উন্নততৰ ৰূপত সজাবলৈ চেষ্টা কৰিব লাগে।

পদ্ধতিটোৰ এই ঢাপটোৱেই হ'ল ভাষা-আশ্ৰয়ী সমস্যা আৰু গাণিতিক আৰ্হি প্ৰকৰণ সমস্যাৰ মাজৰ এটা ডাঙৰ পাৰ্থক্য। ভাষা-আশ্ৰয়ী সমস্যাত দেখিবলৈ নোপোৱা ই হ'ল আৰ্হিকৰণৰ সবাতোকৈ গুৰুত্বপূৰ্ণ ঢাপ। অৱশ্যে, কিছুমান বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত আমি সমাধানৰ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ প্ৰয়োজনীয় নহব'ও পাৰে, কাৰণ, সমস্যাটো তেনেই সৰল আৰু আমি শুদ্ধ সমাধানটো পোনে পোনে লাভ কৰিব পাৰো।

A2.3 ত বিবেচনা কৰা প্ৰথম আৰ্হিটো এনেকুৱাই আছিল। গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত পৰ্ববোৰ যিটো ক্ৰমত অনুসৰণ কৰা হয় তাৰ এক সাৰাংশ পৰৱৰ্তী A2.2 চিত্ৰত প্ৰদৰ্শন কৰা হ'ল।



চিত্ৰ A2.2

গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত পৰ্যায়বোৰ অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত এতিয়া আমি ইয়াৰ বিভিন্ন দিশৰ কেইটামান আলোচনা কৰোঁহক।

গণিতীয় আৰ্হিপ্ৰকৰণৰ লক্ষ্য হ'ল বাস্তৱ জগতভিত্তিক সমস্যাক গণিতীয় সমস্যালৈ পৰিৱৰ্তন কৰি তাৰ পৰা কিছুমান প্ৰয়োজনীয় তথ্য লাভ কৰা। ই বিশেষভাৱে উপযোগী যেতিয়া অন্য উপায়েৰে— যেনে প্ৰত্যক্ষ পৰ্যবেক্ষণ বা পৰীক্ষাৰ জৰিয়তে অত্যন্ত ব্যয় সাপেক্ষ হয় অথবা একেবাৰে অসম্ভৱ হয়।

গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ আমি কিয় আশ্ৰয় ল'ব লাগে সেই বিষয়টো তোমাৰ আচৰিত লাগিব পাৰে। আৰ্হি প্ৰকৰণৰ কেইটামান সুবিধাৰ প্ৰতি আমি মন কৰোহক। ধৰি লোৱা, তাজমহলৰ ক্ষয়ীভৱনত মথুৰা তেল শোধনাগাৰৰ নিৰ্গমন প্ৰক্ৰিয়াৰ প্ৰভাৱ সম্পৰ্কে আমি অধ্যয়ন কৰিব বিচাৰো। আমি তাজমহলত পোনে পোনে পৰীক্ষা নিৰীক্ষা চলাবলৈ নিবিচাৰিম কিয়নো সেয়া তাজমহলৰ বাবে নিৰাপদ নহ'ব পাৰে। অৱশ্যে আমি এটা স্কেলযুক্ত ভৌত আৰ্হি ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোহক, কিন্তু ইয়াৰ বাবে আমাক বিশেষ ধৰণৰ সুবিধাৰ প্ৰয়োজন হ'ব পাৰে, যিটো অত্যন্ত ব্যয়সাপেক্ষ। এনে ক্ষেত্ৰতে গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণে আমাক সহায় কৰিব পাৰে।

আকৌ ধৰি লোৱা, 5 বছৰৰ পিছত আমাক কিমানখন প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ৰ প্ৰয়োজন হ'ব আমি জানিব খুজিছো। তেতিয়া এই সমস্যাৰ সমাধান আমি কেৱল গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ জৰিয়তেহে কৰিব পাৰোহক। সদৃশভাৱে, বিজ্ঞানীসকলে বিভিন্ন পৰিঘটনাৰ অস্তিত্ব সম্পৰ্কে কেৱল আৰ্হি প্ৰকৰণৰ জৰিয়তেহে ব্যাখ্যা কৰিবলৈ সমৰ্থ হৈছে।

A2.3 ছেদত তোমালোকে দেখিছিলা যে আমি উন্নততৰ কৌশলৰ দ্বাৰা দ্বিতীয় উদাহৰণৰ সমাধানটো আৰু উন্নত কৰিব পাৰিলোহেঁতেন। কিন্তু গণিতিক কৌশল নথকাৰ বাবে আমি অধিক আগবাঢ়িব নোৱাৰিলো। বাস্তৱ জীৱনতো এনেকুৱা হ'ব পাৰে। উপযুক্ত গাণিতিক কৌশলৰ অভাৱত প্ৰায়ে আমি অতি আসন্ন মানতে সন্তুষ্ট থাকিবলগীয়া হওহক। উদাহৰণ স্বৰূপে, বতৰৰ আৰ্হি প্ৰকৰণত ব্যৱহৃত আৰ্হি সমীকৰণবোৰ ইমানেই জটিল যে সঠিক সমাধান পাব পৰাকৈ গাণিতিক কৌশল বিচাৰি পোৱা নাযায়।

তোমালোকৰ মনত প্ৰশ্ন হ'ব পাৰে এই বুলি যে আমাৰ আৰ্হি উন্নতকৰণৰ ক্ষেত্ৰত আমি কিমান দূৰলৈ চেষ্টা চলাব পাৰিমহক। সচৰাচৰ, ইয়াক উন্নতৰূপত সজাবলৈ আমি অন্যান্য কেতবোৰ বিষয় বিবেচনাৰ আওতালৈ আনিব লাগিব। যেতিয়া আমি এনে কৰো, আমাৰ গাণিতিক সমীকৰণৰ সৈতে কিছুমান অতিৰিক্ত চলক যুক্ত কৰোহক। তেতিয়া আমি ব্যৱহাৰৰ বাবে কষ্টসাধ্য এটা অত্যন্ত জটিল আৰ্হি পাব পাৰোহক। আৰ্হি এটা ব্যৱহাৰৰ বাবে যথেষ্ট সৰল হ'ব লাগে। এটা ভাল আৰ্হিয়ে দুটা বিষয়ৰ মাজত ভাৰসাম্য ৰক্ষা কৰে ঃ

1. শুদ্ধতা অৰ্থাৎ ই বাস্তৱৰ কিমান আসন্ন

2. ব্যৱহাৰৰ সুচলতা

উদাহৰণ স্বৰূপে, নিউটনৰ গতিসূত্ৰ কেইটা বৰ সৰল কিন্তু বহু ভৌতিক পৰিস্থিতিৰ আৰ্হি প্ৰকৰণত ই যথেষ্ট ক্ষমতাশালী।

তেন্তে, গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণেই সকলো সমস্যাৰ সমিধান বুলি ক'ব পাৰি নেকি? একেবাৰেই নহয়! ইয়াৰো সীমাবদ্ধতা আছে।

এইদৰে আমি মনত ৰখা উচিত যে আৰ্হি এটা বাস্তৱ জগত সম্পৰ্কীয় সমস্যাৰ কেৱল সৰলীকৃত ৰূপহে, দুয়োটা একে কথা নহয়। এয়া ঠিক এখন দেশৰ ভৌতিক লক্ষণসমূহ বৰ্ণনা কৰা মানচিত্ৰখন আৰু দেশখনৰ মাজত থকা পাৰ্থক্যৰ দৰে। আমি মানচিত্ৰখন চাই এখন ঠাইৰ সাগৰ পৃষ্ঠৰ পৰা উচ্চতা উলিয়াব পাৰো, কিন্তু ইয়াৰ পৰা মানুহৰ বৈশিষ্টসমূহ বুজিব নোৱৰো। গতিকে, যি উদ্দেশ্য সাধনৰ অৰ্থে আৰ্হি এটা তৈয়াৰ কৰা হয় সেই উদ্দেশ্যতহে ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা উচিত আৰু আৰ্হিটো তৈয়াৰ কৰা সময়ত যিবোৰ দিশ আওকাণ কৰা হৈছে সেই আটাবোৰ কথা মনত ৰখা উচিত। আৰ্হি এটা য'ত প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি সেই সীমাৰ ভিতৰতহে আমি ইয়াক প্ৰয়োগ কৰা উচিত। পৰবৰ্তী শ্ৰেণীসমূহত আমি এই দিশটোৰ ওপৰত অলপ বেছিকৈ আলোচনা আগবঢ়াম।

অনুশীলনী A2.3

1. তোমালোকে পাঠ্যপুথিসমূহত পাই অহা শব্দ-নিৰ্ভৰ সমস্যাবোৰৰ সমাধান পদ্ধতি আৰু গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ পদ্ধতিৰ মাজত প্ৰভেদ কি?

2. ধৰি লোৱা, চাৰিটা পথৰ মিলনস্থলত যান-বাহনৰ অপেক্ষাৰ সময় তুমি নূন্যতম পৰ্যায়ত ৰাখিব বিচাৰিছো। তলত উল্লেখ কৰা বিষয়সমূহৰ কোনবোৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰু কোনবোৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ নহয়?

(i) পেট্ৰ'লৰ দাম

(ii) চাৰিটা ভিন্ন পথেৰে আহি গোট খোৱা যান-বাহনৰ হাৰ।

(iii) ধীৰ বেগী যান যেনে চাইকেল আৰু ৰিক্সা আৰু তীব্ৰ বেগী যান যেনে চাৰিচকীয়া 'কাৰ' আৰু মটৰ চাইকেলৰ অনুপাত।

A2.5 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই পৰিশিষ্টটোত তোমালোকে নিম্নোক্ত বিষয়সমূহ অধ্যয়ন কৰিলাহক ঃ

1. শব্দ-নিৰ্ভৰ সমস্যাবোৰৰ সমাধানত জড়িত ঢাপসমূহ।

2. কিছুমান গণিতীয় আৰ্হিৰ গঠন পদ্ধতি

3. গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত ঢাপসমূহ পৰৱৰ্তী বাকচটোত উল্লেখ কৰা ধৰণৰ ঃ

1. **সূত্ৰায়ন ঃ**
   (i) সমস্যাটোৰ বৰ্ণনা
   (ii) প্ৰাসংগিক কাৰকসমূহৰ চিনাক্তকৰণ
   (iii) গাণিতিক বৰ্ণনা
2. **সমাধান নিৰ্ণয়**
3. বাস্তৱ জগতভিত্তিক সমস্যাৰ প্ৰসংগত সমাধানৰ ব্যাখ্যা
4. আৰ্হিটোৱে অধ্যয়ন চালিত সমস্যাটোক কিমান ভালদৰে প্ৰতিনিধিত্ব কৰিবলৈ সক্ষম হৈছে তাৰ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ।

4. গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ লক্ষ্য, সুবিধা আৰু সীমবদ্ধতা।

উত্তৰ/ইংগিত (Answers/Hints)

অনুশীলনী R-1

1. 1.41   2. $a+\sqrt{b}, a-\sqrt{b}$, $b \geq 0$

3. –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4

6. (i) গ.সা.গু = 3 আৰু ল. সা. গু. = 42372

   (ii) গ.সা.গু = 7 আৰু ল. সা. গু. = 2730

   (iii) গ.সা.গু = 34 আৰু ল. সা. গু. = 2040

7. $\frac{45}{264}$ আৰু $\frac{23}{132}$ (অন্য শুদ্ধ উত্তৰো গ্ৰহণযোগ্য)

8. $5\sqrt{2}$, 7.05

9. (i) $\frac{9}{11}$ (ii) $\frac{17}{9}$ (iii) $\frac{223}{90}$ (iv) $\frac{24187}{9900}$

10. (i) $5-2\sqrt{6}$ (ii) 7   (iii) $19+10\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{2}-1$

    (v) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (vi) $\frac{26+7\sqrt{3}}{23}$ (vii) 1   (viii) $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

12. (i) 3.126   (ii) 0.636

13. (i) .28   (ii) 0.075   (iii) 0.03   (iv) 0.115   (v) .08

14. (i) $\frac{53}{100}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{200}$ (iv) 1   (v) $\frac{1}{100}$

15. (i) 50%   (ii) 25%   (iii) 15%   (iv) 33.6%   (v) 4%

    (vi) 125%

16. 10 : 11   17. 50%   18. 2310 টকা   19. 0.30 টকা

20. 552.64 টকাত। 21. 23.05%

অনুশীলনী R-2

1. (d) 400 মিটাৰ। 2. (c) 100 মিটাৰ 3. (b) 60 ছে.মি.
4. (b) 4800 বৰ্গ ছে.মি. 5. (b) 12 ছে.মি. 6. (a) 80 মি.মি.
7. (c) 31.4 ছে.মি. 8. (d) 2464 বৰ্গমিটাৰ. 9. (c) 7 ছে.মি.
10. (c) 88 ছে.মি. 11. 800 বৰ্গছে.মি. 12. 14.2 বৰ্গ মি.
13. 8 ছে.মি., বৰ্গৰ কালি বেছি।
14. 3.2 ছে.মি. 15. 6 ছে.মি. 16. 2.5 ছে.মি. 17. 3 ছে.মি.
18. 157 বৰ্গ মি. 19. 22 বৰ্গ ছে.মি. 20. 7 ছে.মি.
21. 62.86 মিলিমিটাৰ. 22. 1900 বৰ্গ মি. 23. 3744 বৰ্গ মি.
24. 10.5 বৰ্গ ছে. মি.। 25. 11.2 বৰ্গ মি. (প্ৰায়)।

অনুশীলনী 1.1

1. হয়। $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ ইত্যাদি, হৰ q ক ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হিচাপেও ল'ব পাৰি।

2. 3 আৰু 4 ৰ মাজত অসীম সংখ্যক পৰিমেয় সংখ্যা থাকিব পাৰে। সিহঁতক পাব পৰাৰ এটা উপায় হ'ল

$3 = \frac{21}{6+1}$, $4 = \frac{28}{6+1}$ । তেতিয়া ছয়টা সংখ্যা হ'ব

$\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$ ।

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}$, $\frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ । গতিকে, পৰিমেয় সংখ্যা পাঁচটা হ'ল $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$ ।

4. (i) সত্য, কাৰণ পূৰ্ণ সংখ্যাবোৰৰ সংগ্ৰহটোত আটাইবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যা আছে।
(ii) অসত্য, উদাহৰণস্বৰূপে – 2 এটা পূৰ্ণ সংখ্যা নহয়।
(iii) অসত্য, কাৰণ $\frac{1}{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা, কিন্তু এটা পূৰ্ণ সংখ্যা নহয়।

অনুশীলনী 1.2

1. (i) সত্য, যিহেতু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটো পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাৰে গঠিত।
(ii) অসত্য, কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাই স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গমূল হ'ব নোৱাৰে।

(iii) অসত্য, উদাহৰণ স্বৰূপে 2 বাস্তৱ কিন্তু অপৰিমেয় নহয়।

2. নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে $\sqrt{4} = 2$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

3. চিত্ৰ 1.8 ৰ পদ্ধতিটো কেবাবাৰো পুনৰাবৃত্তি কৰা। প্ৰথমে $\sqrt{4}$ উলিওৱা, আৰু পিছত $\sqrt{5}$।

অনুশীলনী 1.3

1. (i) 0.36, পৰিসমাপ্ত (ii) $0.\overline{09}$, অপৰিসমাপ্ত পুনৰাবৃত্ত

(iii) 4.125, পৰিসমাপ্ত (iv) $0.\overline{230769}$, অপৰিসমাপ্ত পৌনঃপুনিক

(v) $0.1\overline{8}$, অপৰিসমাপ্ত পৌনঃপুনিক (vi) 0.8225, পৰিসমাপ্ত

2. $\frac{2}{7} = 2\times\frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$ $\frac{3}{7} = 3\times\frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$ $\frac{4}{7} = 4\times\frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$

$\frac{5}{7} = 5\times\frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$ $\frac{6}{7} = 6\times\frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [ধৰা $x = 0.666...$ গতিকে $10x = 6.666...$ বা, $10x = 6 + x$ বা $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$ (iv) $\frac{6}{11}$ (v) $\frac{3}{5}$ (vi) $\frac{19}{105}$ (vii) $\frac{318023}{9900}$ (viii) $\frac{17}{45}$

4. 1 [ধৰা $x = 0.9999...$ গতিকে $10x = 9.999...$ বা, $10x = 9 + x$ বা, $x = 1$]

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণত কেৱল 2 ৰ ঘাত নাইবা 5 ৰ ঘাত নাইবা দুয়োটাই আছে।

7. 0.01001000100001..., 0.202002000200002..., 0.003000300003...

8. 0.75075007500075000075..., 0.767076700767000767...,
0.808008000800008...

9. (i), আৰু (v) অপৰিমেয়; (ii), (iii) আৰু (iv) পৰিমেয়।

অনুশীলনী 1.4

1. 2.665 ৰ কাৰণে অনুচ্ছেদ 1.4 ৰ দৰে আগবাঢ়া।

2. উদাহৰণ 11 ৰ দৰে আগবঢ়া।

অনুশীলনী 1.5

1. (i) অপৰিমেয় (ii) পৰিমেয় (iii) পৰিমেয় (iv) অপৰিমেয়

(v) অপৰিমেয়

2. (i) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7+2\sqrt{10}$ (iv) 3

(v) $93-24\sqrt{15}$ (vi) $\sqrt{21}-6\sqrt{3}+6\sqrt{7}-7$ (vii) $14+6\sqrt{6}$

3. ইয়াত কোনো বিৰোধ নাই। মনত ৰাখা যে যেতিয়া তুমি কোনো এটা দৈৰ্ঘ্য এডাল স্কেল নাইবা অইন কোনো উপায়েৰে জোখা, তুমি কেৱল এটা আসন্ন পৰিমেয় মানহে পাবা। গতিকে, তুমি উপলব্ধ কৰিব নোৱাৰিব পাৰা যে হয় c নাইবা d অপৰিমেয়।

4. চিত্ৰ 1.17 চোৱা

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

(v) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ (vi) $41+12\sqrt{5}$ (vii) $\frac{15-5\sqrt{6}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}$

(viii) $2\sqrt{6}-5$ (ix) $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

6. (ii) 1 (iii) $1.4\bar{1}$

অনুশীলনী 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5

2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-\frac{1}{3}}=\left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}}=5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{4}}$

অনুশীলনী 2.1

1. (i) আৰু (ii) এটা চলকযুক্ত বহুপদ (v) এটা তিনিটা চলকযুক্ত বহুপদ।
(iii) আৰু (iv) বহুপদ নহয়, কাৰণ ইয়াৰ প্ৰত্যেকতে চলকৰ সূচক এটা পূৰ্ণ সংখ্যা নহয়।

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0 (v) –9

3. $3x^{35}-4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (বেলেগ বেলেগ সহগৰে তুমি আৰু কিছুমান বহুপদ লিখিব পাৰা।)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) দ্বিঘাত (ii) ত্ৰিঘাত (iii) দ্বিঘাত (iv) ৰৈখিক (v) ৰৈখিক (vi) দ্বিঘাত (vii) ত্ৰিঘাত

অনুশীলনী 2.2

1. (i) 3 (ii) –6 (iii) –3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) হয় (ii) নহয় (iii) হয় (iv) হয় (v) হয় (vi) হয়

(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ এটা শূন্য, কিন্তু $\frac{2}{\sqrt{3}}$ বহুপদটোৰ এটা শূন্য নহয়। (viii) নহয়।

4. (i) -5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

অনুশীলনী 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1 (iv) $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$ (v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$ **3.** নহয়, যিহেতু ভাগশেষ শূন্য নহয়।

4.

	ভাগফল	ভাগশেষ
(i)	$x^2 - 2x - 2$	1
(ii)	$2x - 1$	$2x - 4$
(iii)	$x^2 - 2x + 4$	-7
(iv)	$x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	-6

5. (i) $x - 4$ (ii) $x^2 + 3x + 2$ **6.** (i) হয় (ii) নহয় **7.** -2

অনুশীলনী 2.4

1. $(x + 1)$, (i)ৰ এটা উৎপাদক, কিন্তু (ii), (iii) আৰু (iv)ৰ উৎপাদক নহয়।

2. (i) হয় (ii) নহয় (iii) হয়

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x - 1)(4x - 1)$ (ii) $(x + 3)(2x + 1)$ (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$
(iv) $(x + 1)(3x - 4)$ (v) $(2x - 9)(x + 5)$ (vi) $(y + 13)(y + 5)$
(vii) $(p + 13)(p + 1)$ (viii) $(x - 9)(2 - x)$ (ix) $(2a - 3b)(4a - 5b)$

5. (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$
(iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$
(v) $(x + 1)(x + 1)(x - 1)$ (vi) $(x + 1)(x^2 + 1)$
(vii) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$ (viii) $(x - 2)(x^2 + 5x + 3)$
(ix) $(x - 2)(x + 3)(3x + 2)$

অনুশীলনী 2.5

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$

(iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$ (ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$

(iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$ (iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$

(v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y + 5z)(9y^2 + 25z^2 - 15yz)$ (ii) $(4m - 7n)(16m^2 + 49n^2 + 28mn)$

11. $(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

12. সোঁপক্ষক সৰল কৰা।

13. অভেদ VIII ত $x + y + z = 0$ বহুওৱা।

14. (i) –1260. ধৰা $a = -12$, $b = 7$, $c = 5$. ইয়াত $a + b + c = 0$. প্ৰশ্ন 13 ত দিয়া ফল ব্যৱহাৰ কৰা।

(ii) 16380

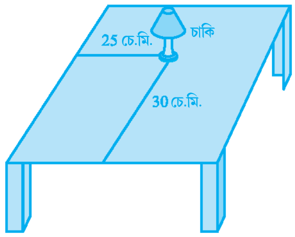
15. (i) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ ঃ দীঘ $= 5a - 3$, প্ৰস্থ $= 5a - 4$

(ii) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ ঃ দীঘ $= 7y - 3$, প্ৰস্থ $= 5y + 4$

16. (i) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ ঃ 3, x আৰু $x - 4$

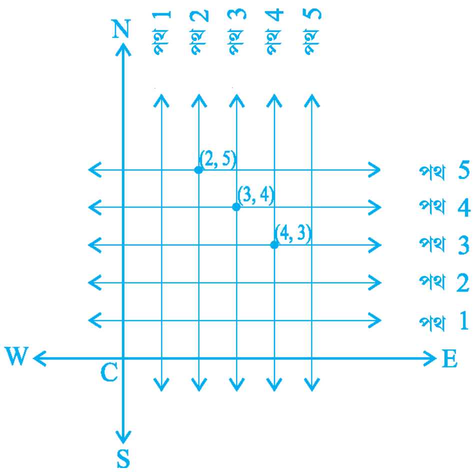
(ii) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ ঃ $4k$, $3y + 5$ আৰু $y - 1$

অনুশীলনী 3.1



1. চাকিটোক এটা বিন্দু আৰু মেজখনক এখন সমতল হিচাপে বিবেচনা কৰা। মেজখনৰ যিকোনো দুটা লম্ব দাঁতি বাচা। দীঘল দাঁতিটোৰ পৰা চাকিটোৰ দূৰত্ব জোখা। ধৰা ই 25 চে.মি.। আকৌ চুটি দাঁতিটোৰপৰা চাকিটোৰ দূৰত্বটো জুখি উলিওৱা। ধৰা ই 30 চে.মি.। এতিয়া চাকিটোৰ অৱস্থানক তুমি নিৰ্দিষ্ট কৰা ক্ৰম সাপেক্ষে (30, 25) বা (25, 30) বুলি লিখিব পাৰা।

2. পথটোৰ পৰিকল্পনাটো তলৰ চিত্ৰত দেখুওৱা হৈছে—



কটাকটি কৰা দুয়োটা পথকে ওপৰৰ চিত্ৰত চিহ্নিত কৰা হৈছে। আমি সিহঁতৰ অৱস্থান নিৰূপণ কৰাৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা দুডাল প্ৰাসংগিক ৰেখাৰ বাবেই সিহঁতক অদ্বিতীয়ভাৱে পোৱা গৈছে।

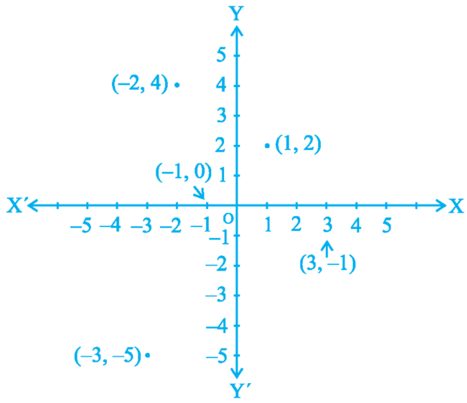
অনুশীলনী 3.2

1. (i) x - অক্ষ আৰু y - অক্ষ (ii) চোকবোৰ (iii) মূলবিন্দু

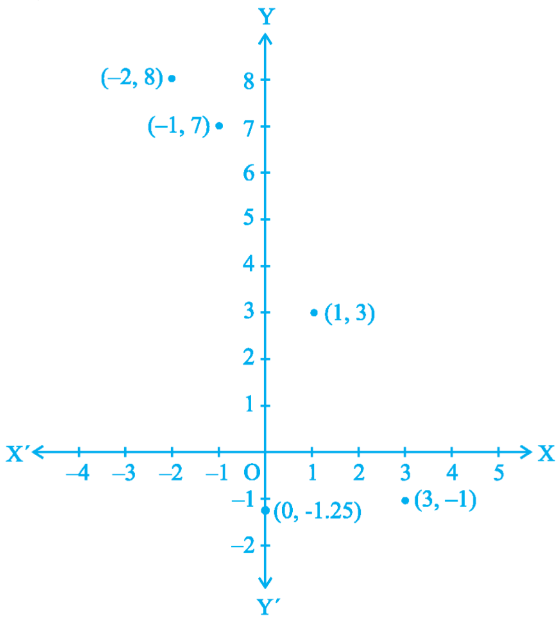
2. (i) (– 5, 2) (ii) (5, –5) (iii) E (iv) G
(v) 6 (vi) – 3 (vii) (0, 5) (viii) (–3, 0)

অনুশীলনী 3.3

1. (–2, 4) বিন্দুটো চোক II ত আছে, (3, –1) বিন্দুটো চোক IV ত আছে, (– 1, 0) বিন্দুটো ঋণাত্মক x - অক্ষত আছে, (1, 2) বিন্দুটো চোক I ত আছে আৰু (–3, –5) বিন্দুটো চোক III ত আছে। কাষৰ চিত্ৰত বিন্দুবোৰৰ অৱস্থান দৰ্শোৱা হৈছে।



2. কাষৰ চিত্ৰত বিন্দুবোৰৰ অৱস্থান ডটবিন্দুৰে দেখুওৱা হৈছে।



অনুশীলনী 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0; a = 2, b = 3, c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \dfrac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \dfrac{-1}{5}, c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

অনুশীলনী 4.2

1. (iii), কাৰণ x ৰ প্ৰতিটো মানৰ বাবেই y ৰ এটা অনুৰূপ মান আছে আৰু বিপৰীতভাৱেও ই সত্য।

2. (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, –1)

(ii) $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

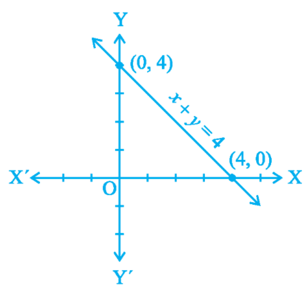
(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) নহয় (ii) নহয় (iii) হয় (iv) নহয় (v) নহয়

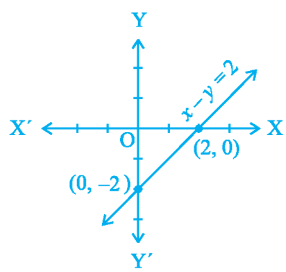
4. 7

অনুশীলনী 4.3

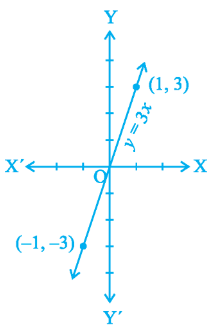
1. (i)



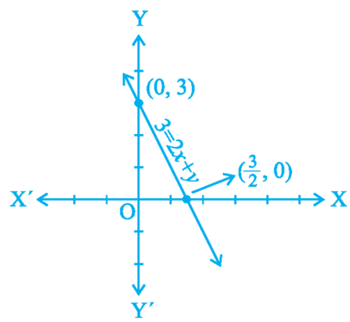
(ii)



(iii)



(iv)

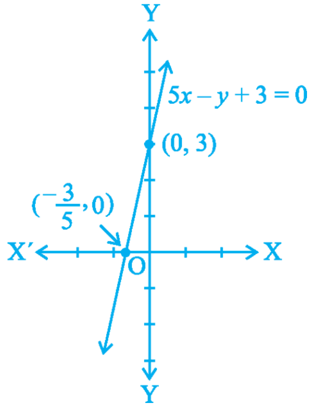


2. $7x - y = 0$ আৰু $x + y = 16$; অসীমভাৱে বহুত
[এটা বিন্দুৰ মাজেৰে অসংখ্য ৰেখা টানিব পাৰি]

3. (i) $\frac{5}{3}$ (ii) 3 (iii) 8 (iv) $\frac{-15}{7}$

(v) আছে (vi) নাই (vii) 0

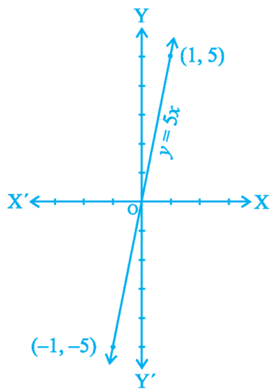
4. $5x - y + 3 = 0$



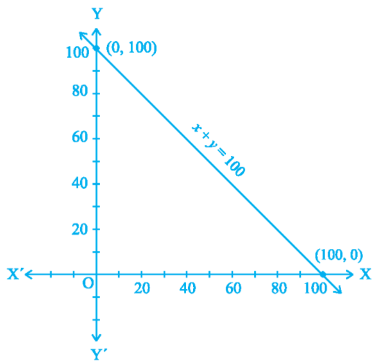
5. চিত্ৰ 4.6 ৰ ক্ষেত্ৰত $x + y = 0$ আৰু চিত্ৰ 4.7 ৰ ক্ষেত্ৰত $y = -x + 2$.

6. x-অক দূৰত্ব আৰু y ক কাম কৰা হিচাপে ধৰি সমস্যাটোত সমীকৰণটো হ'ব $y = 5x$.

(i) 10 একক (ii) 0 একক



7. (i) $x + y = 100$



(ii) $2x - y + 10$　　(iii) $5y - 8x = 150$　　(iv) $2x - 3y + 17 = 0$

(প্ৰশ্ন নং 7- (ii), (iii), (iv) ৰ লেখবোৰ নিজে আঁকা।)　　(v) $x + y = 33$

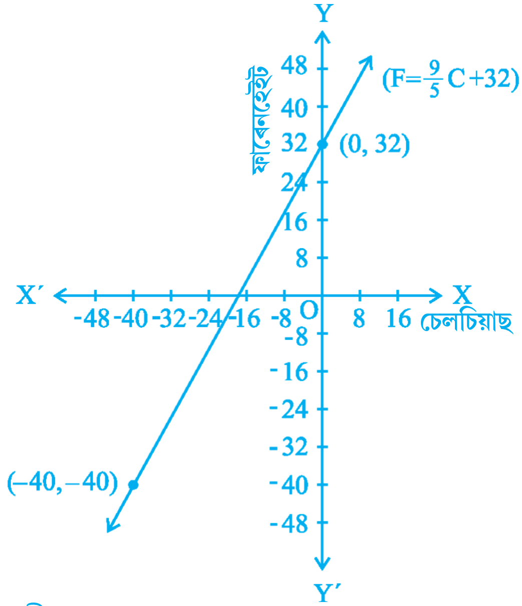
8. (i) কাষৰ চিত্ৰটো চোৱা

(ii) 86° F

(iii) 35° C

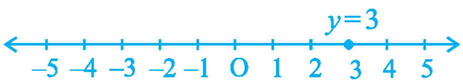
(iv) 32° F, –17.8° C (প্ৰায়)

(v) হয়, – 40° (F আৰু C দুয়োটাতে)

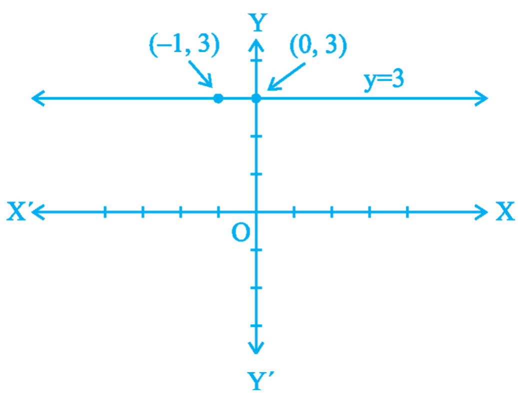


অনুশীলনী 4.4

1. (i)

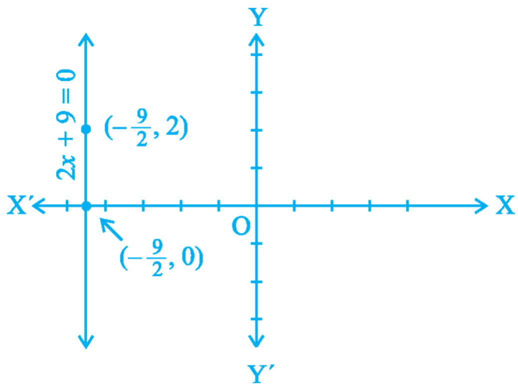


(ii)



2. (i)

(ii)



অনুশীলনী 5.1

1. (i) অসত্য। ছাত্রই চাক্ষুষভাৱে এইটো চাব পাৰিব।

(ii) অসত্য। ই স্বতঃসিদ্ধ 5.1 ক বিৰোধ কৰিব।

(iii) সত্য। (স্বীকার্য 2)

(iv) সত্য। তুমি যদি এটা বৃত্তই আৱৰা ক্ষেত্ৰটোক অইনটোৰ ওপৰত জাপি দিয়া, তেন্তে ইহঁত মিলি যাব। গতিকে সিহঁতৰ কেন্দ্ৰ আৰু পৰিসীমাও মিলি যাব। সেয়ে সিহঁতৰ ব্যাসার্ধও একেদৰে মিলিব।

(v) সত্য। ইউক্লিডৰ প্ৰথম স্বতঃসিদ্ধ।

3. বহুতো সংজ্ঞা নথকা বা অসংজ্ঞাবদ্ধ পদ আছে, ছাত্ৰই যিবোৰৰ তালিকা প্ৰস্তুত কৰা উচিত। সেইবোৰ সংগত (consistent) কাৰণ সিহঁতে দুটা বিভিন্ন পৰিস্থিতিৰ সৈতে জড়িত (i)ৰ মতে A আৰু B দুটা বিন্দু দিয়া থাকিলে সিহঁতৰ মাজৰ ৰেখাটোত এটা বিন্দু C থাকিবই; (ii)ৰ মতে A আৰু B বিন্দু দিয়া থাকিলে, তুমি A আৰু B মাজেৰে যোৱা ৰেখাটোত নথকা এটা বিন্দু C ল'ব পাৰা।

এইবোৰ 'স্বীকার্য' ইউক্লিডৰ স্বীকার্যৰপৰা পোৱা নাযায়, হ'লেও সিহঁতক স্বতঃসিদ্ধ 5.1ৰ পৰা পোৱা যায়।

4. $$AC = BC$$

গতিকে, $AC + AC = BC + AC$ (সমানক সমানৰ সৈতে যোগ কৰা হৈছে)

অর্থাৎ, $2AC = AB$ (BC + AC, ABৰ সৈতে মিলিছে)

সেয়ে, $AC = \frac{1}{2} AB$

5. এটা সাময়িক ধাৰণা কৰা যে ABৰ দুটা ভিন্ন মধ্যবিন্দু C আৰু D। এতিয়া দেখুওৱা যে C আৰু D বিন্দু দুটা বেলেগ নহয়।

6. AC = BD (দিয়া আছে) ....(1)

AC = AB + BC (B বিন্দুটো A আৰু Cৰ মাজত আছে)....(2)

BD = BC + CD (C বিন্দুটো B আৰু Dৰ মাজত আছে।) ....(3)

(2) আৰু (3)ক (1)ত বহুৱাই পাবা

AB + BC = BC + CD

গতিকে, AB = CD (সমানৰ পৰা সমান বাদ দি)

7. যিহেতু এইটো পৃথিৱীৰ যিকোনো ঠাইতে যিকোনো বস্তুৰ ক্ষেত্ৰতেই সত্য, গতিকে ই এক বিশ্বজনীন সত্য।

অনুশীলনী 5.2

1. ছাত্ৰই আগবঢ়োৱা যিকোনো সূত্ৰৰ বৈধতাৰ বিষয়ে শ্ৰেণীত আলোচনা হোৱা উচিত।

2. যদি এডাল সৰলৰেখা l অইন দুডাল সৰলৰেখা m আৰু n ৰ ওপৰত এনেদৰে থাকে যাতে l ৰ একেফালে থকা অন্তঃস্থ কোণ দুটাৰ সমষ্টি দুই সমকোণ, তেন্তে ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্য মতে ৰেখা দুটাই l ৰ এই ফালটোত লগ নালাগে। তাৰ পাছত তোমালোকে জানিছা যে l ৰেখাটোৰ বাকীফালে থকা অন্তঃস্থ কোণ দুটাৰ সমষ্টিও দুই সমকোণ। গতিকে সিহঁতে ৰেখাটোৰ অইনটো ফালতো লগ নালাগিব। গতিকে, m আৰু n ৰেখা দুটাই কেতিয়াও লগ নালাগে আৰু সেয়ে সিহঁত সমান্তৰাল।

অনুশীলনী 6.1

1. 30°, 250° **2.** 126°

4. এটা বিন্দুত আটাইবোৰ কোণৰ সমষ্টি = 360°

5. ∠QOS = ∠SOR + ∠ROQ আৰু ∠POS = ∠POR – ∠SOR.

6. 122°, 302°

অনুশীলনী 6.2

1. 130°, 130° **2.** 126° **3.** 126°, 36°, 54° **4.** 60° **5.** 50°, 77°

6. আপতন কোণ = প্ৰতিফলন কোণ। B বিন্দুত BE ⊥ PQ আৰু C বিন্দুত CF ⊥ RS টানা।

অনুশীলনী 6.3

1. 65° **2.** 32°, 121° **3.** 92° **4.** 60° **5.** 37°, 53°

6. ΔPQRৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি = ΔQTR ৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি আৰু
$\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$.

অনুশীলনী 7.1

1. সিহঁত সমান। **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

অনুশীলনী 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$

7. প্ৰতিটোৱেই 45°

অনুশীলনী 7.3

3. **(ii)** (i) ৰ পৰা $\angle ABM = \angle PQN$

অনুশীলনী 7.4

4. BD সংযোগ কৰা আৰু দেখুওৱা যে $\angle B > \angle D$।
AC সংযোগ কৰা আৰু দেখুওৱা যে $\angle A > \angle C$।

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$, ইত্যাদি।

অনুশীলনী 8.1

1. 36°, 60°, 108° আৰু 156°.

6. (i) ΔDAC আৰু ΔBCAৰ পৰা দেখুওৱা যে
$\angle DAC = \angle BCA$ আৰু $\angle ACD = \angle CAB$ ইত্যাদি।
(ii) উপপাদ্য 8.4 ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে $\angle BAC = \angle BCA$

অনুশীলনী 8.2

2. দেখুওৱা যে PQRS এটা সামান্তৰিক। আকৌ দেখুওৱা যে PQ || AC আৰু PS || BD।
গতিকে $\angle P = 90°$।

5. AECF এটা সামান্তৰিক। গতিকে AF || CE, ইত্যাদি।

অনুশীলনী 9.1

1. (i) ভূমি DC, DC আৰু AB সমান্তৰাল (iii) ভূমি QR, QR আৰু PS সমান্তৰাল।

(v) ভূমি AD, AD আৰু BQ সমান্তৰাল।

অনুশীলনী 9.2

1. 12.8 চে.মি. **2.** EG সংযোগ কৰা; উদাহৰণ 2 ৰ ফল ব্যৱহাৰ কৰা।

6. ΔAPQত ঘেঁহু আৰু বাকী দুটা ত্ৰিভুজত মাহ, নাইবা
ΔAPQ ত মাহ আৰু বাকী দুটা ত্ৰিভুজত ঘেঁহু।

অনুশীলনী 9.3

4. CM $\perp$ AB আৰু DN $\perp$ AB টানা। দেখুওৱা যে CM = DN.

12. উদাহৰণ 4 চোৱা।

অনুশীলনী 9.4 (ঐচ্ছিক)

7. উদাহৰণ 3 ৰ ফল বাৰে বাৰে ব্যৱহাৰ কৰা।

অনুশীলনী 10.1

1. (i) অন্তঃস্থ (ii) বহিঃস্থ (iii) ব্যাস
(iv) অৰ্দ্ধবৃত্ত (v) জ্যাডাল (vi) তিনি

2. (i) সত্য (ii) অসত্য (iii) অসত্য
(iv) সত্য (v) অসত্য (vi) সত্য

অনুশীলনী 10.2

1. সৰ্বসম বৃত্তৰ জ্যা বিবেচনা কৰি 10.1 ৰ সঠিক একেদৰে প্ৰমাণ কৰা।

2. ত্ৰিভুজ দুটাৰ সৰ্বসমতা দেখুৱাবলৈ সৰ্বসম স্বতঃসিদ্ধ SAS ব্যৱহাৰ কৰা।

অনুশীলনী 10.3

1. 0, 1, 2. দুই **2.** উদাহৰণ 1ৰ দৰে আগবঢ়া।

3. বৃত্তবোৰৰ কেন্দ্ৰ O, O$'$ অক সাধাৰণ জ্যা AB ৰ মধ্যবিন্দু M ৰ সৈতে সংযোগ কৰা। পিছত দেখুওৱা যে
$\angle$OMA = 90° আৰু $\angle$O$'$MA = 90°।

অনুশীলনী 10.4

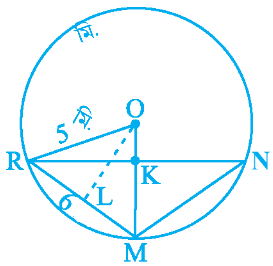
1. 6 চে.মি.। প্ৰথমে দেখুওৱা যে কেন্দ্ৰবোৰৰ সংযোগী ৰেখাটো সৰু বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধৰ লম্ব

আৰু পিছত দেখুওৱা যে সাধাৰণ জ্যাডাল সৰু বৃত্তটোৰ ব্যাস।

2. যদি O কেন্দ্ৰীয় বৃত্তৰ সমান জ্যা AB আৰু CD য়ে E বিন্দুত ছেদ কৰে, তেন্তে OM $\perp$ AB আৰু ON $\perp$ CD টানা আৰু OE সংযোগ কৰা। দেখুওৱা যে OME আৰু ONE সমকোণী ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম।

3. উদাহৰণ 2 ৰ দৰে আগবাঢ়া। **4.** OM $\perp$ AD টানা।

5. ৰেজিয়া, মেৰী আৰু নীলাক্ষীক যথাক্ৰমে R, M আৰু N ৰে সূচোৱা। ধৰা KR = x মিঃ (চিত্ৰ চোৱা)



ΔORM ৰ কালি = $\frac{1}{2} x \times 5.$

আকৌ ΔORM ৰ কালি = $\frac{1}{2}$ RM × OL = $\frac{1}{2} \times 6 \times 4$

x উলিওৱা আৰু ইয়াৰপৰা RN।

6. সমবাহু ত্ৰিভুজৰ ধৰ্ম আৰু পাইথাগোৰাছৰ উপপাদ্যও ব্যৱহাৰ কৰা।

অনুশীলনী 10.5

1. 45° **2.** 150°, 30° **3.** 10° **4.** 80°

5. 110° **6.** $\angle$BCD = 80° আৰু $\angle$ECD = 50°

8. CD ৰ ওপৰত AM আৰু BN লম্ব টানা (AB || CD আৰু AB < CD)। দেখুওৱা যে ΔAMD $\cong$ ΔBNC। ইয়াৰ পৰা $\angle$C = $\angle$D আৰু সেয়ে, $\angle$A + $\angle$C = 180°।

অনুশীলনী 10.6 (ঐচ্ছিক)

2. ধৰা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ O। তেতিয়া দুয়োডাল জ্যাৰে লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুডাল একে হ'ব আৰু O ৰ মাজেৰে যাব। ধৰা r ব্যাসাৰ্ধ, তেন্তে $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6-x)^2$ য'ত 11 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ জ্যাডালৰ ওপৰত O ৰ পৰা টনা লম্বৰ দীঘ x । ইয়াৰ পৰা $x = 1$।

গতিকে, $r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ চে.মি.।

3. 3 চে.মি.।

4. ধৰা $\angle$AOC = x আৰু $\angle$DOE = y। ধৰা $\angle$AOD = z। তেন্তে $\angle$EOC = z আৰু $x + y + 2z = 360°$।

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90° + \frac{1}{2}z$।

পুনৰ $\angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$

8. $\angle ABE = \angle ADE, \angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$।

গতিকে, $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF$

$$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

$$= \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{1}{2}\angle A.$$

9. উদাহৰণ 10.2 ৰ প্ৰশ্ন 1 আৰু উপপাদ্য 10.8 ব্যৱহাৰ কৰা।

10. ধৰা $\angle A$ ৰ দ্বিখণ্ডকে ΔABC ৰ পৰিবৃত্তক D ত কাটে। DC আৰু DBক সংযোগ কৰা। তেন্তে

$\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ আৰু $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$.

গতিকে, $\angle BCD = \angle DBC$ বা DB = DC.

গতিকে D বিন্দুটো BC ৰ লম্ব দ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত থাকিব।

অনুশীলনী 12.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $900\sqrt{3}$ চে.মি.^{2} **2.** 1650000 টকা **3.** $20\sqrt{2}$ মি.^{2}

4. $21\sqrt{11}$ চে.মি.^{2} **5.** 9000 চে.মি.^{2} **6.** $9\sqrt{15}$ চে.মি.^{2}

7. $16\sqrt{3}$ চে.মি.^{2} **8.** 30 চে.মি.^{2}

অনুশীলনী 12.2

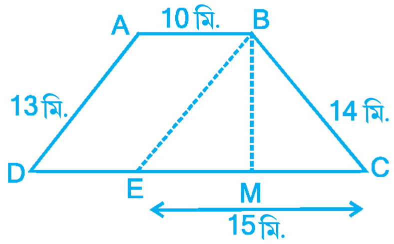
1. 65.5 মি^{2} (প্ৰায়) **2.** 15.2 চে.মি.^{2} (প্ৰায়) **3.** 19.4 চে.মি.^{2} (প্ৰায়)

4. 12 চে.মি. **5.** 48 মি^{2} **6.** $1000\sqrt{6}$ চে.মি.^{2}, $1000\sqrt{6}$ চে.মি.^{2}

7. ছাঁ I ৰ কালি = ছাঁ II ৰ কালি = 256 চে.মি.^{2} আৰু ছাঁ III ৰ কালি = 17.92 চে.মি.^{2}

8. 705.60 টকা

9. 196 মিঃ^{2} (চিত্ৰটো চোৱা। ΔBEC ৰ কালি উলিওৱা = 84 মিঃ^{2}। পিছত BM ৰ উচ্চতা উলিওৱা।)



অনুশীলনী 13.1

1. (i) 5.45 মি.^{2} (ii) 109 টকা

2. 555 টকা **3.** 6 মি **4.** 100 ইটা

5. (i) ঘনকাকৃতিৰ বাকচৰ পাৰ্শ্বীয় পৃষ্ঠকালি 40 চে.মি.^{2} বেছি।
(ii) আয়তীয় ঘনক আকৃতিৰ বাকচৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি 10 চে.মি.^{2} বেছি।

6. (i) 4250 চে.মি.^{2} গ্লাছ (ii) ফিটাৰ 320 চে.মি. [আটাইবোৰ দাঁতিৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা (12 টা দাঁতিত 4 টা দীঘ, 4 টা প্ৰস্থ আৰু 4 টা উন্নতি থাকে)]

7. 2184 টকা **8.** 47 মি^{2}

অনুশীলনী 13.2

1. 2 চে.মি.. **2.** 7.48 মি.^{2}

3. (i) 968 চে.মি.^{2} (ii) 1064.8 চে.মি.^{2} (iii) 2038.08 চে.মি.^{2}
[এটা পাইপৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = (অন্তঃ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি + বহিঃ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি + দুয়ো ভূমিৰ কালি)। প্ৰতিটো ভূমিয়ে $\pi(R^2 - r^2)$ কালিবিশিষ্ট এটা ৰিং, য'ত R = বহিঃ ব্যাসাৰ্ধ আৰু r = অন্তঃ ব্যাসাৰ্ধ].

4. 1584 মি.^{2} **5.** 68.75 টকা **6.** 1 মি.

7. (i) 110 মি.^{2} (ii) 4400 টকা **8.** 4.4 মি.^{2}

9. (i) 59.4 মি^{2} (ii) 95.04 মি.^{2}

[ধৰা ব্যৱহৃত তীখাৰ প্ৰকৃত কালি = x মি.^{2}। যিহেতু প্ৰকৃতভাৱে ব্যৱহৃত তীখাৰ $\frac{1}{12}$ অংশ নষ্ট হ'ল, টেংকিটোত ব্যৱহৃত তীখাৰ কালি = x ৰ $\frac{11}{12}$। ইয়ে বুজায় যে প্ৰকৃতভাৱে ব্যৱহৃত তীখাৰ কালি = $\frac{12}{11} \times 87.12$ মি.^{2}]

10. 2200 চে.মি..^{2}; চুঙাৰ উন্নতিক (30 + 2.5 + 2.5) চে.মি.. হিচাপে গণ্য কৰা উচিত।

11. 7920 চে.মি..^{2}

অনুশীলনী 13.3

1. 165 চে.মি..^{2} **2.** 1244.57 মি.^{2}
3. (i) 7 চে.মি.. (ii) 462 চে.মি.^{2}
4. (i) 26 মি. (ii) 137280 টকা
5. 63 মি. **6.** 1155 টকা
7. 5500 চে.মি.^{2} **8.** 384.34 টকা (প্ৰায়)

অনুশীলনী 13.4

1. (i) 1386 চে.মি.^{2} (ii) 394.24 চে.মি.^{2} (iii) 2464 চে.মি.^{2}
2. (i) 616 চে.মি.^{2} (ii) 1386 চে.মি.^{2} (iii) 38.5 মি^{2}
3. 942 চে.মি.^{2} **4.** 1 : 4 **5.** 27.72 টকা
6. 3.5 চে.মি. **7.** 1 : 16 **8.** 173.25 চে.মি.^{2}
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

অনুশীলনী 13.5

1. 180 চে.মি.^{3} **2.** 135000 লিটাৰ **3.** 4.75 মি
4. 4320 টকা **5.** 2 মি. **6.** 3 দিন
7. 16000 **8.** 6 চে.মি., 4 : 1 **9.** 4000 মি.^{3}

অনুশীলনী 13.6

1. 34.65 লিটাৰ
2. 3.432 কিঃগ্ৰাঃ [এটা পাইপৰ আয়তন = $\pi h \times (R^2 - r^2)$, য'ত R বহিঃ ব্যাসাৰ্ধ আৰু r অন্তঃ ব্যাসাৰ্ধ]
3. চুঙাটোৰ ধাৰকত্ব 85 চে.মি.^{3} বেছি।
4. (i) 3 চে.মি. (ii) 141.3 চে.মি.^{3}
5. (i) 110 মি^{2} (ii) 1.75 মি (iii) 96.25 কিলোলিটাৰ
6. 0.4708 মি^{2}
7. কাঠৰ আয়তন = 5.28 চে.মি.^{3}, গ্ৰেফাইটৰ আয়তন = 0.11 চে.মি.^{3}.
8. চুপৰ 38500 চে.মি.^{3} বা 38.5 লিটাৰ।

অনুশীলনী 13.7

1. (i) 264 চে.মি.^{3} (ii) 154 চে.মি.^{3}

2. (i) 1.232 লিটাৰ (ii) $\frac{11}{35}$ লিটাৰ

3. 10 চে.মি. **4.** 8 চে.মি. **5.** 38.5 কিলোলিটাৰ

6. (i) 48 চে.মি. (ii) 50 চে.মি. (iii) 2200 চে.মি.^{2}

7. 100π চে.মি.^{3} **8.** 240π চে.মি.^{3}; 5 : 12 **9.** 86.625 মি^{3}, 99.825 মি^{2}

অনুশীলনী 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ চে.মি.^{3} (ii) 1.05 মি^{3} (প্ৰায়)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ চে.মি.^{3} (ii) 0.004851 মি^{3} **3.** 345.39 গ্ৰাম (প্ৰায়)

4. $\frac{1}{64}$ **5.** 0.303 লিটাৰ (প্ৰায়) **6.** 0.06348 মি^{3} (প্ৰায়)

7. $179\frac{2}{3}$ চে.মি.^{3}

8. (i) 249.48 মি^{2} (ii) 523.9 মি^{3} (প্ৰায়)

9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9 **10.** 22.46 মিঃমি^{3} (প্ৰায়)

অনুশীলনী 13.9

1. 6275 টকা

2. 2784.32 টকা (প্ৰায়) [ৰূপালী ৰং দিয়া খৰচ নিৰূপণ কৰোতে আশ্ৰয়টোত থিতাপি লোৱা গোলকৰ অংশটোক বাদ দিবলৈ নাপাহৰিবা]

3. 43.75%

অনুশীলনী 14.1

1. আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰপৰা আমি সংগ্ৰহ কৰিব পৰা তথ্যৰ পাঁচটা উদাহৰণ—

(i) আমাৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰৰ সংখ্যা।

(ii) আমাৰ স্কুলৰ ফেনবোৰৰ সংখ্যা।

(iii) যোৱা দুবছৰ ধৰি আমাৰ ঘৰৰ বিদ্যুৎ বিলবোৰ।

(iv) টেলিভিছন বা বাতৰি কাকতৰপৰা পোৱা নিৰ্বাচনী ফলাফল।

(v) শৈক্ষিক সমীক্ষাৰপৰা পোৱা সাক্ষৰতা হাৰৰ অংক।

নক'লেও মনত ৰাখিবা যে ইয়াত বহুতো বিভিন্ন ধৰণৰ উত্তৰ হ'ব পাৰে।

2. প্ৰাথমিক তথ্য ঃ (i), (ii) আৰু (iii) গৌণ তথ্য ঃ (iv) আৰু (v)

অনুশীলনী 14.2

1.

তেজৰ বিভাগ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা
A	9
B	6
O	12
AB	3
মুঠ	**30**

বেছিভাগৰে – O , বিৰল – AB

2.

দূৰত্ব (কি.মি.)ত	দাগচিহ্ন	বাৰংবাৰতা
0 - 5	𝍸	5
5 - 10	𝍸 𝍸 𝍷	11
10 - 15	𝍸 𝍸 𝍷	11
15 - 20	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	9
20 - 25	𝍷	1
25 - 30	𝍷	1
30 - 35	𝍷𝍷	2
মুঠ		40

3. (i)

আপেক্ষিক আৰ্দ্ৰতা (% ত)	বাৰংবাৰতা
84 - 86	1
86 - 88	1
88 - 90	2
90 - 92	2
92 - 94	7
94 - 96	6
96 - 98	7
98 - 100	4
মুঠ	**30**

(ii) যিহেতু আপেক্ষিক আৰ্দ্ৰতা উচ্চ, তথ্যবোৰ বৰষুণৰ সেমেকা বতৰত গ্ৰহণ কৰা যেন লাগিছে।

(iii) পৰিসৰ = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

উচ্চতা (চে.মি..ত)	বাৰংবাৰতা
150 - 155	12
155 - 160	9
160 - 165	14
165 - 170	10
170 - 175	5
মুঠ	**50**

(ii) ওপৰৰ তালিকাখনৰপৰা ল'ব পৰা এটা সিদ্ধান্ত এই যে 50% তকৈ বেছি ছাত্ৰ 165 চে.মি. তকৈ চাপৰ।

5. (i)

ছালফাৰ-ডাই-অক্সাইডৰ গাঢ়তা (ppm অত)	বাৰংবাৰতা
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2
মুঠ	**30**

(ii) ছালফাৰ ডায়'-অক্সাইডৰ গাঢ়তা 8 দিনৰ বাবে 0.11 ppm অতকৈ বেছি আছিল।

6.

মুণ্ডৰ সংখ্যা	বাৰংবাৰতা
0	6
1	10
2	9
3	5
মুঠ	**30**

7. (i)

অংক	বাৰংবাৰতা
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
মুঠ	**50**

(ii) আটাইতকৈ সঘনাই ওলোৱা অংককেইটা 3 আৰু 9। আটাইতকৈ কম ওলোৱা অংক 0.

8. (i)

ঘণ্টাৰ সংখ্যা	বাৰংবাৰতা
0 - 5	10
5 - 10	13
10 - 15	5
15 - 20	2
মুঠ	**30**

(ii) ল'ৰা-ছোৱালী- 2

9.

বেটাৰীৰ জীৱনকাল (বছৰত)	বাৰংবাৰতা
2.0 - 2.5	2
2.5 - 3.0	6
3.0 - 3.5	14
3.5 - 4.0	11
4.0 - 4.5	4
4.5 - 5.0	3
মুঠ	**40**

অনুশীলনী 14.3

1. (ii) প্ৰজনন সম্পৰ্কীয় স্বাস্থ্য অৱস্থা

3. (ii) দল A   4. (ii) বাৰংবাৰতা বহুভুজ (iii) নহয়

5. (ii) 184

8.

বয়স (বছৰ)	বাৰংবাৰতা	প্ৰস্থ	আয়তৰ দীঘ
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1}\times1=5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1}\times1=3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2}\times1=3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2}\times1=6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3}\times1=3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5}\times1=2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2}\times1=2$

এই দৈৰ্ঘ্যবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি তুমি এতিয়া স্তম্ভলেখ আঁকিব পাৰা।

9. (i)

চিঠিৰ সংখ্যা	বাৰংবাৰতা	অন্তৰালৰ প্ৰস্থ	আয়তৰ দীঘ
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3}\times2=4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2}\times2=30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2}\times2=44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4}\times2=8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8}\times2=1$

এতিয়া স্তম্ভলেখটো আঁকা।

(ii) 6 - 8

অনুশীলনী 14.4

1. মাধ্য = 2.8; মধ্যমা = 3; বহুলক = 3
2. মাধ্য = 54.8; মধ্যমা = 52; বহুলক = 52
3. $x = 62$ **4.** 14
5. 60 জন কৰ্মীৰ গড় বেতন = 5083.33 টকা

অনুশীলনী 15.1

1. $\frac{24}{30}$ অৰ্থাৎ $\frac{4}{5}$ **2.** (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ **3.** $\frac{3}{20}$ **4.** $\frac{9}{25}$

5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$ **6.** (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ **8.** $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 **11.** $\frac{7}{11}$ **12.** $\frac{1}{15}$ **13.** $\frac{1}{10}$

অনুশীলনী A1.1

1. (i) সদায় মিছা। বছৰটোত 12 মাহ থাকে।

(ii) দ্ব্যৰ্থক। এটা উল্লিখিত বছৰত এটা শুক্ৰবাৰত দেৱালী পৰিবও পাৰে, নপৰিবও পাৰে।

(iii) দ্ব্যৰ্থক। বছৰটোৰ কোনোবা এটা সময়ত মাগদিৰ উত্তাপ 26° C হ'ব পাৰে।

(iv) সদায় সত্য।

(v) সদায় অসত্য। কুকুৰে উৰিব নোৱাৰে।

(vi) দ্ব্যৰ্থক। লিপ-ইয়াৰত ফেব্ৰুৱাৰীত 29 দিন থাকে।

2. (i) অসত্য। চতুৰ্ভুজৰ অন্তঃকোনবোৰৰ সমষ্টি 360°।

(ii) সত্য (iii) সত্য (iv) সত্য

(v) অসত্য, উদাহৰণ স্বৰূপে $7 + 5 = 12$, যিটো অযুগ্ম নহয়।

3. (i) 2 তকৈ ডাঙৰ আটাইবোৰ মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম।

(ii) স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ দুগুন সদায় যুগ্ম।

(iii) যিকোনো $x > 1$ৰ ক্ষেত্ৰত $3x + 1 > 4$।

(iv) যিকোনো $x \geq 0$ৰ ক্ষেত্ৰত $x^3 \geq 0$।

(v) সমবাহু ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা এডাল এটা কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকো হয়।

অনুশীলনী A1.2

1. (i) মানৱ মেৰুদণ্ডী। (ii) নহয়, দীনেশে অইন কাৰোবাৰ দ্বাৰা চুলি কটাব পাৰিলেহেঁতেন। (iii) গুলাগৰ এখন ৰঙা জিভা আছে। (iv) আমাৰ অভিমত যে নাওৰাখন কাইলৈ চাফ কৰিব লাগিব। (v) নেজ থকা আটাইবোৰ জন্তুৱে কুকুৰ হোৱাৰ প্ৰয়োজন নাই। উদাহৰণ স্বৰূপে, ম'হ, বান্দৰ, মেকুৰী ইত্যাদি ধৰণৰ জন্তুৰ নেজ আছে, কিন্তু কুকুৰ নহয়।
2. তুমি B আৰু 8 ৰ ওপৰেৰে লুটিয়াব লাগিব। যদি অইনটো ফালত B ৰ এটা যুগ্ম সংখ্যা আছে, তেন্তে নিয়মটো ভংগ হ'ল। একেদৰে যদি অইনটো ফালত 8 ৰ এটা ব্যঞ্জণবৰ্ণ আছে, তেন্তে নিয়মটো ভংগ হ'ল।

অনুশীলনী A1.3

1. তিনিটা সম্ভৱপৰ অনুমান

   (i) যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল যুগ্ম।

   (ii) যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল 4 ৰে বিভাজ্য।

   (iii) যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল 6 ৰে বিভাজ্য।
2. লাইন 4 : $1331 = 11^3$; লাইন 5 : $14641 = 11^4$;

   লাইন 4 আৰু লাইন 5 ৰ ক্ষেত্ৰত অনুমানটো খাটিছে;

   নহয়, কাৰণ $11^5 \neq 15101051$।
3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.
4. $111111^2 = 12345654321$;

   $1111111^2 = 1234567654321$
5. ছাত্ৰৰ নিজৰ উত্তৰ। উদাহৰণ স্বৰূপে, ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্যবোৰ।

অনুশীলনী A1.4

1. (i) একে কোণ থকা কিন্তু বিভিন্ন বাহুৰে তুমি যিকোনো দুটা ত্ৰিভুজ দিব পাৰা।

   (ii) এটা ৰম্বাচৰ বাহুবোৰ সমান কিন্তু এটা বৰ্গ নহ'বও পাৰে।

   (iii) এটা আয়তৰ কোণবোৰ সমান কিন্তু এটা বৰ্গ নহ'বও পাৰে।

   (iv) $a = 3$ আৰু $b = 4$ ৰ ক্ষেত্ৰত বিবৃতিটো সত্য নহয়।

   (v) $n = 11$ৰ ক্ষেত্ৰত $2n^2 + 11 = 253$, যিটো এটা মৌলিক নহয়।

   (vi) $n = 41$, ৰ ক্ষেত্ৰত $n^2 - n + 41$ সংখ্যাটো মৌলিক নহয়।
2. ছাত্ৰৰ নিজা উত্তৰ।
3. ধৰা x আৰু y দুটা অযুগ্ম সংখ্যা। তেন্তে $x = 2m + 1$ (কোনোবা স্বাভাৱিক সংখ্যা m ৰ

ক্ষেত্ৰত) আৰু $y = 2n + 1$ (কোনোবা স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ ক্ষেত্ৰত) $x + y = 2(m + n + 1)$। গতিকে $x + y$, 2 ৰে বিভাজ্য আৰু যুগ্ম।

4. প্ৰশ্ন 3 চোৱা। $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$।
গতিকে xy, 2 ৰে বিভাজ নহয়, সেয়ে ই অযুগ্ম।

5. ধৰা $2n$, $2n + 2$ আৰু $2n + 4$ তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা।
তেন্তে সিহঁতৰ যোগফল $6(n + 1)$, যিটো 6 ৰে বিভাজ্য।

7. (i) ধৰা তোমাৰ মূল সংখ্যাটো n। তেন্তে আমি তলৰ প্ৰক্ৰিয়াবোৰ কৰিছো—

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n+9 \rightarrow 2n+9+n = 3n+9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n+3 \rightarrow n+3+4$$

$= n + 7 \rightarrow n + 7 - n = 7$।

(ii) লক্ষ্য কৰা যে $7 \times 11 \times 13 = 1001$। যিকোনো তিনিটা অংক লোৱা, যেনে abc। তেন্তে $abc \times 1001 = abcabc$। গতিকে ছয় অংকীয় সংখ্যা $abcabc$ সদায়7, 11 আৰু 13 ৰে বিভাজ্য হ'ব।

অনুশীলনী A2.1

1. খেপ-1ঃ **বিধিবদ্ধন (Formulation) ঃ**

প্ৰাসংগিক কাৰককেইটা হ'ল— কম্পিউটাৰ এটা ভাড়া কৰাৰ কাৰণে সময় কাল আৰু আমাক দিয়া দুবিধ খৰচ। আমি ধৰি লওঁ যে কম্পিউটাৰ এটা কিনা নাইবা ভাড়া লোৱাৰ লোৱাৰ খৰচৰ ক্ষেত্ৰত কোনো তাৎপৰ্যপূৰ্ণ পৰিৱৰ্তন নাই। গতিকে আমি এনে যিকোনো পৰিৱৰ্তন এটাক অপ্ৰাসংগিক বুলিয়ে গণ্য কৰিম। আমি কম্পিউটাৰৰ আটাইবোৰ বিশেষ মাৰ্কা আৰু প্ৰজন্মকো একে বুলি গণ্য কৰিম, অৰ্থাৎ এই পাৰ্থক্যবোৰো অপ্ৰাসংগিক।

x মাহৰ বাবে কম্পিউটাৰটো ভাড়া কৰাৰ খৰচ $2000x$ টকা। যদি এইটো কম্পিউটাৰ এটা কিনা খৰচতকৈ বেছি হয়, আমি কম্পিউটাৰ এটা কিনিয়েই বেছি লাভৱান হ'ম। গতিকে সমীকৰণটো হ'ব—

$2000\,x = 25000$ (1)

খেপ-2 : **বিধিবদ্ধন ঃ** (1)ক সমাধা কৰি, $x = \dfrac{25000}{2000} = 12.5$

খেপ-3 : **বিশ্লেষণ ঃ** যিহেতু 12.5 মাহ পিছত কম্পিউটাৰ এটা ভাড়া লোৱা খৰচ বেছি হয়, গতিকে যদি তুমি ইয়াক 12 মাহতকৈ বেছি ব্যৱহাৰ কৰিব লগা হয় তেন্তে কম্পিউটাৰ এটা কিনাটো বেছি সস্তা হ'ব।

2. খেপ-1 : **বিধিবদ্ধন ঃ** আমি ধৰি ল'ম যে গাড়ীবোৰে এটা স্থিৰ গতিত ভ্ৰমণ কৰে। সেয়ে

গতিৰ যিকোনো পৰিৱৰ্তনক অপ্ৰাসংগিক বুলি গণ্য কৰা হ'ব। যদি গাড়ীবোৰে x ঘণ্টা পিছত লগ লাগে, প্ৰথম গাড়ীখনে A ৰ পৰা এটা দূৰত্ব $40x$ কিলোমিটাৰ ভ্ৰমণ কৰিব আৰু দ্বিতীয় গাড়ীখনে $30x$ কিলোমিটাৰ ভ্ৰমণ কৰিব যাতে ই A ৰ পৰা $(100 – 30x)$ কিঃমিঃ দূৰত্ব এটাত থাকিব। গতিকে সমীকৰণটো হ'ব

$40x = 100 – 30x$, অৰ্থাৎ $70x = 100$.

খেপ-2 : সমাধান ঃ সমীকৰণটো সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$x = \frac{100}{70}$$

খেপ-3 : বিশ্লেষণ ঃ $\frac{100}{70}$ আসন্নভাৱে 1.4 ৰ সমান।

গতিকে গাড়ীবোৰ 1.4 ঘণ্টা পিছত লগ হ'ব।

3. **খেপ-1 : বিধিবদ্ধন ঃ** চন্দ্ৰই পৃথিৱীক প্ৰদক্ষিণ কৰা গতি

$$= \frac{\text{কক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য}}{\text{লোৱা সময়}}$$

খেপ-2 ঃ সমাধান ঃ যিহেতু কক্ষপথ প্ৰায় বৃত্তাকৃতিৰ, দৈৰ্ঘ্য হ'ব $2 \times \pi \times 384000$ কিঃমিঃ $= 2411520$ কিঃমিঃ প্ৰায়। চন্দ্ৰ কক্ষপথ এবাৰ সম্পূৰ্ণ কৰিবলৈ 24 ঘণ্টা লয়। গতিকে,

$$\text{গতি} = \frac{2411520}{24} = 100480 \text{ কি.মি./ঘণ্টা।}$$

খেপ-3 ঃ বিশ্লেষণ ঃ গতিবেগ হ'ব 100480 কি.মি./ঘণ্টা।

4. **বিধিবন্ধন ঃ** এটা মানি ল'ব পাৰো যে বিলখনত থকা পাৰ্থক্যটো কেৱল পানী উত্তাপকটো ব্যৱহাৰ কৰাৰ বাবে হৈছে।

ধৰা পানী-উত্তাপকটো ব্যৱহাৰ কৰা ঘণ্টাৰ গড় সংখ্যা $= x$

পানী-উত্তাপক ব্যৱহাৰৰ কৰাৰ ফলত প্ৰতি মাহে পাৰ্থক্য

$= (1240 – 1000)$ টকা $= 240$ টকা

এঘণ্টাৰ বাবে পানী-উত্তাপক ব্যৱহাৰৰ খৰচ $= 8$ টকা

গতিকে 30 দিনৰ বাবে পানী-উত্তাপক ব্যৱহাৰ কৰাৰ খৰচ $= 8 \times 30 \times x$

গতিকে, $240x = 240$

সমাধান ঃ সমীকৰণটোৰ পৰা আমি পাও $x = 1$

বিশ্লেষণ ঃ যিহেতু $x = 1$, পানী উত্তাপকটো দিনে গড়ে 1 ঘণ্টাকৈ ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে।

অনুশীলনী A2.2

1. আমি ইয়াত কোনো বিশেষ সমাধানৰ কথা আলোচনা নকৰিম। আমি শেষ উদাহৰণটোত ব্যৱহাৰ কৰাৰ দৰে তোমালোকে একে পদ্ধতিয়ে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিবা, অথবা তোমালোকে উপযুক্ত বিবেচনা কৰা যিকোনো পদ্ধতিয়ে ল'ব পাৰিবা।

অনুশীলনী A2.3

1. আমি ইতিমধ্যে উল্লেখ কৰিছো যে বিধিবদ্ধন অংশটো বাস্তৱ জীৱনৰ পৰিস্থিতিত অতি বাহুল্য হ'ব পাৰে। তাৰোপৰি, কথা-প্ৰশ্নবোৰত আমি উত্তৰটোৰ বৈধতা পেচ নকৰো। ইয়াৰ বাহিৰেও কথা-প্ৰশ্নৰ এটা 'শুদ্ধ উত্তৰ' আছে। বাস্তৱ জীৱনৰ পৰিস্থিতিত এনেকুৱা এটা ক্ষেত্ৰ হোৱাৰ প্ৰয়োজন নাই।

2. প্ৰয়োজনীয় কাৰকবোৰ— (ii) আৰু (iii)। ইয়াত (i) এটা প্ৰয়োজনীয় কাৰক নহয়, যদিও বিক্ৰী হোৱা যান-বাহনবোৰৰ ওপৰত ইয়াৰ এটা প্ৰভাৱ থাকিব পাৰে।