Y7J8G3

গণিত

দশম শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথি

মাধ্যমিক শিক্ষা বিভাগ, অসম চৰকাৰ

গণিত

দশম শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথি

'The mathematicians who are merely mathematicians reason correctly, but only when everything has been explained to them in terms of definitions and principles. Otherwise they are limited and insufferable, for they reason correctly only when they are dealing with very clear principles.'

— Blaise Pascal

খাদ্য প্ৰণালী

U6T3S5

ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ বাবে ঃ

1. নিতৌ যথেষ্ট পৰিমাণৰ সতেজ ফল-মূল, শাক-পাচলি আদি খাবা।

2. কেতিয়াও আহাৰ খোৱাৰ সময় নিপিছুৱাবা। পুষ্টিহীনতাৰ ফলত যাতে স্বাস্থ্যৰ ক্ষতি নহয় তাৰ বাবে যথেষ্ট পৰিমাণে পুষ্টিকৰ খাদ্য খাবা।

3. সুস্বাস্থ্য বজাই ৰাখিবলৈ নিয়মিত যথেষ্ট পৰিমাণে পানী খাবা।

4. অতিৰিক্ত আৰু খোৱাৰ অনুপযোগী খাদ্য নাখাবা। কম পৰিমাণৰ বা অতিৰিক্ত পৰিমাণৰ খাদ্য গ্ৰহণ কৰাটো এক অসমতুল্য আৰু অপ্ৰকৃত আহাৰ যিয়ে সুস্বাস্থ্যকৰ জীৱন-যাপন কৰাত অসুবিধাৰ সৃষ্টি কৰে।

5. ৰাতিপুৱা, দুপৰীয়া আৰু ৰাতিৰ গুৰু আহাৰৰ মাজত কম পৰিমাণে আন খাদ্য খোৱাৰ জৰিয়তে দেহত অতিৰিক্ত পুষ্টি আৰু কেলৰি পোৱা যায় আৰু ই এটা ভাল পদ্ধতি।

6. জাংক ফুড /ফাষ্ট ফুড খোৱাৰপৰা বিৰত থাকিবা।

7. প্ৰতিদিনে ভিন্ ভিন্ খাদ্য খাবা যাতে শৰীৰটোৱে বেলেগ বেলেগ ভিটামিন, খনিজ পদাৰ্থ আদি সময়ে সময়ে পাই থাকে। এবিধ খাদ্যতে সকলোবোৰ পৌষ্টিক পদাৰ্থ পোৱা নাযায়। গতিকে সুষম আহাৰ গ্ৰহণ কৰাটো অতি প্ৰয়োজন।

8. চেনী আৰু ষ্টাৰ্চ বেছিকৈ থকা বস্তু বেছিকৈ খালে দাঁতৰ ক্ষতিসাধন হ'ব পাৰে। গোটেই দিনটোৱেই কিবা-কিবি খাই থকা আৰু পানীয় সেৱন কৰা কথাটো বৰ্জন কৰিব লাগে। দিনে অন্ততঃ দুবাৰকৈ দাঁত মাজিব লাগে। ৰাতি শোৱাৰ সময়ত দাঁত মজাৰ পিছত একো খাব নালাগে।

9. খাদ্য লাহে লাহে আৰু ভালদৰে চোবাই খাবা।

10. প্ৰতিদিনে আহাৰ আৰু আন সৰু-সুৰা খাদ্য বস্তু একেটা সময়তে খাবা। আহাৰ খোৱাৰ বাবে এখন ৰুটিন মানি চলিবা। অনিয়মিত খাদ্য গ্ৰহণ, খাদ্যৰ সময় পিছুৱাই দিয়া, মূল খাদ্যৰ পৰিৱৰ্তে আন ফাষ্ট ফুড্ বা পানীয় খোৱাৰ ফলত ভোক নলগা বা কমি যোৱাৰ আশংকা থাকে।

11. মূল আহাৰৰ কিবা পৰিৱৰ্তন আনিব খুজিলে খাদ্য বিশেষজ্ঞৰপৰা পৰামৰ্শ ল'বা।

Save Rhino, Save Nature

মাধ্যমিক শিক্ষা বিভাগ, অসম চৰকাৰ

গণিত

(দশম শ্ৰেণীৰ বাবে পাঠ্যপুথি)

Y7J8G3

অনুবাদক

ডº কৈলাশ গোস্বামী (অধ্যায় ঃ ১, ২, ৩, ৪)

ডº দিব্যজ্যোতি মহন্ত (অধ্যায় ঃ ৫, ৬, ৭, ৮)

প্ৰদীপ চন্দ্ৰ গোস্বামী (অধ্যায় ঃ ৯, ১০, ১১, ১২)

ডº চন্দ্ৰ চুতীয়া (অধ্যায় ঃ ১৩, ১৪, ১৫, পৰিশিষ্ট-১, ২)

পুনৰীক্ষক ঃ **ডº দিলীপ কুমাৰ শৰ্মা**

সমন্বয়ক ঃ **ডº নিত্যজ্যোতি কলিতা**

প্ৰস্তুতকৰণ ঃ **ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদ**
(National Council of Educational Research and Training)

অভিযোজনা ঃ **অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ**

প্ৰকাশক ঃ **অসম ৰাজ্যিক পাঠ্যপুথি প্ৰণয়ন আৰু প্ৰকাশন নিগম লিমিটেড**

GANIT : *A textbook on Mathematics, for Class X in Assamese, prepared by National Council of Educational Research and Training (NCERT), New Delhi, translated/approved by the Board of Secondary Education, Assam and published by the Assam State Textbook Production and Publication Corporation Ltd. (ASTPPC), Guwahati after having copyright permission from the NCERT, New Delhi.*

FREE TEXTBOOK

© ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদ, ২০০৬

অধিগৃহীত © অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ

সৰ্বস্বত্ব সংৰক্ষিত

❖ প্ৰকাশকৰ অনুমতি অবিহনে এই প্ৰকাশনৰ যি কোনো অংশৰ ছপা কৰা কাৰ্য অথবা ইলেকট্ৰ'নিক মাধ্যম, যান্ত্ৰিক মাধ্যম, ফটো প্ৰতিলিপি, ৰেকৰ্ডিং নাইবা আন কোনো উপায়েৰে, পুনঃপদ্ধতিৰ সহায়ত ইয়াৰ সংগ্ৰহকৰণ অথবা সংবৰ্ধন কৰাটো নিষিদ্ধ।

প্ৰথম প্ৰকাশ ঃ ২০১৩
দ্বিতীয় প্ৰকাশ ঃ ২০১৪
তৃতীয় প্ৰকাশ ঃ ২০১৫
চতুৰ্থ প্ৰকাশ ঃ ২০১৬
পঞ্চম প্ৰকাশ ঃ ২০১৭
ষষ্ঠ প্ৰকাশ ঃ ২০১৮
সপ্তম প্ৰকাশ ঃ ২০১৯
অষ্টম প্ৰকাশ ঃ ২০২০

ঃ 70 GSM কাগজত মুদ্ৰিত পাঠ্যপুথি।

প্ৰকাশক ঃ অসম চৰকাৰৰদ্বাৰা বিনামূলীয়াকৈ বিতৰণৰ বাবে অসম ৰাজ্যিক পাঠ্যপুথি প্ৰণয়ন আৰু প্ৰকাশন নিগম লিমিটেডৰ দ্বাৰা প্ৰকাশিত পাঠ্যপুথি।

Illustration : **NCERT**

Printed at : **অমৰজ্যোতি প্ৰিণ্টাৰ্চ, কমাৰ্চ্ছ কলেজ**
গুৱাহাটী

আগকথা

ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদ, চমুকৈ এন.চি.ই.আৰ.টি (NCERT)য়ে ৰাষ্ট্ৰীয় কাৰিকুলাম আধাৰ, চমুকৈ এন.চি.এফ, ২০০৫ৰ আধাৰত পাঠ্যপুথি প্ৰস্তুত কৰি উলিওৱাৰ পিচত দেশৰ প্ৰায়বোৰ ৰাজ্যৰ দৰে অসমতো ইয়াৰ প্ৰবৰ্তনৰ ক্ষেত্ৰত চিন্তা-চৰ্চা চলিছিল। এনেধৰণৰ চিন্তা-চৰ্চাৰ অন্তত, অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদে কেইটিমান বিষয়ৰ পাঠ্যপুথি, এন.চি.ই.আৰ.টি পাঠ্যক্ৰমৰ পৰা গ্ৰহণ কৰাৰ সিদ্ধান্ত লয়। সেই মৰ্মে ২০১৩ চনত নৱম শ্ৰেণী আৰু ২০১৪ চনৰ পৰা দশম শ্ৰেণীৰ বাবে ইংৰাজী, বিজ্ঞান আৰু গণিত বিষয়ৰ পাঠ্যপুথি কেইখন পোনে পোনে পৰিষদৰ পাঠ্যক্ৰমত প্ৰৱৰ্তন কৰাৰ পোষকতা কৰে।

পৰিষদে সদ্যহতে নৱম আৰু দশম শ্ৰেণীৰ গণিত, বিজ্ঞান, ইংৰাজী, সংস্কৃত আৰু হিন্দী বিষয়ৰ পাঠ্যপুথি এন.চি.ই.আৰ.টি পাঠ্যক্ৰমৰ পৰা গ্ৰহণ কৰিছে। ইয়াৰ ভিতৰত গণিত আৰু বিজ্ঞানৰ পাঠ্যপুথিকেইখন আঞ্চলিক ভাষালৈ অনুবাদ কৰা হৈছে। অনুবাদ কৰোতে থলুৱা উদাহৰণ আৰু শব্দ ব্যৱহাৰৰ প্ৰতি দৃষ্টি ৰখা হৈছে। ইয়াৰ উপৰিও পৰিষদৰ ফালৰ পৰা নিজাববীয়াকৈ ইং ২০২০ শিক্ষাবৰ্ষৰ পৰা কাৰ্য্যকৰী হোৱাকৈ গণিতৰ পুথিদুখনত পুনৰালোচনা নামেৰে একোটিকৈ নতুন পাঠ অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হৈছে। এই পাঠটিত শিক্ষাৰ্থীসকলে আগৰ শ্ৰেণীবোৰত শিকি অহা কিছুমান কথা সন্নিবিষ্ট কৰা হৈছে যাতে তেওঁলোকে নৱম/দশম শ্ৰেণীৰ পাঠবোৰ সহজে আয়ত্ব কৰিব পাৰে।

শেষত, পুথিকেইখন ব্যৱহাৰ কৰোতে কিবা আঁসোৱাহ দৃষ্টিগোচৰ হ'লে সদাশয় শিক্ষক সমাজে আঙুলিয়াই দিলে আমি নথৈ কৃতাৰ্থ হ'ম। আমি আশা ৰাখিছোঁ শিক্ষক সমাজৰ অগ্ৰণী ভূমিকাৰে আমি এক ৰাষ্ট্ৰীয় মানৰ শিক্ষা প্ৰদান কৰি আমাৰ ৰাজ্যখনক শিক্ষাৰ দিশত আগুৱাই নিব পাৰিম।

সচিব
অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ
গুৱাহাটী, অসম

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Inter-University Centre for Astronomy & Astro-physics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisors

P. Sinclair, *Professor,* School of Sciences, IGNOU, New Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* and *Head,* DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Lal, *PGT,* DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

A.K. Wazalwar, *Associate Professor,* DESM, NCERT

B.S. Upadhyaya, *Professor,* RIE, Mysore

Jayanti Datta, *PGT,* Salwan Public School, Gurgaon

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Manica Aggarwal, Green Park, New Delhi

N.D. Shukla, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Ram Avtar, *Professor* (Retd.) & *Consultant,* DESM, NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, St. John's Road, Bangalore

S. Jagdeeshan, *Teacher* and *Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT

Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri District Centre, Delhi

V.A. Sujatha, *TGT,* Kendriya Vidyalaya No. 1, Vasco, Goa

V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chankyapuri, New Delhi

Member-coordinator

R.P. Maurya, *Associate Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

ডিজিটেল বিষয়বস্তু উপলব্ধ কৰিবলৈ কেনেদৰে QR CODE ব্যবহাৰ কৰিব:

আপোনাৰ মোবাইলৰ ব্ৰাউজাৰত diksha.gov.in/app type কৰক আৰু install button স্পৰ্শ কৰক ।

OR

Google Play Store ত DIKSHA search কৰক আৰু App টো ডাউনলড কৰিবলৈ Install Button টো স্পৰ্শ কৰক।

মোবাইলত QR Code ব্যবহাৰ কৰি কেনেকৈ ডিজিটেল বিষয়বস্তু উপলব্ধ কৰিব পাৰি—

1) অগ্ৰাধিকাৰ দিয়া ভাষাটোক নিৰ্বাচন কৰক।
2) আপোনাৰ ভূমিকা বাছনি কৰক-ছাত্ৰ/শিক্ষক/অন্য
3) QR Code Scan কৰিবলৈ QR ক'ডৰ আইকনটোত স্পৰ্শ কৰক।
4) প্ৰবেশ অনুমোদন কৰক আৰু এপ ব্যৱহাৰৰ অনুমতি দিয়ক।
5) পাঠ্যপুথিৰ QR Codeত Camera কেন্দ্ৰীভূত/ দৃষ্টিপাত (Focus) কৰক।
6) QR Code সম্পৰ্কিত হৈ থকা বিষয়বস্তু প্ৰদৰ্শন কৰিবলৈ ক্লিক কৰক।

Desktop অত QR Code ব্যবহাৰ কৰি ডিজিটেল বিষয়বস্তু কেনেদৰে উপলব্ধ কৰিব পাৰি

1) QR Codeৰ তলত আপুনি ছটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাটো (ডায়েল কোড) দেখিব।
2) আপোনাৰ ব্ৰাউজাৰত Diksha.Gov.in/as/get টাইপ কৰক।
3) ৬ অংকৰ ডায়েল ক'ডটো আপোনাৰ Desktopৰ চাৰ্চবাৰডালত লিখক।
4) উপলব্ধ বিষয়বস্তুৰ তালিকা নিৰীক্ষণ কৰক আৰু নিজৰ পছন্দৰ বিষয়বস্তুত ক্লিক কৰক।

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop:

Mala Mani, *TGT,* Amity International School, Sector-44, Noida; Meera Mahadevan, *TGT,* Atomic Energy Central School, No. 4, Anushakti Nagar, Mumbai; Rashmi Rana, *TGT,* D.A.V. Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi; Mohammad Qasim, *TGT,* Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Happy Valley, Mussoorie; Rakesh Kaushik, *TGT,* Sainik School, Kunjpura, Karnal; Ashok Kumar Gupta, *TGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Dudhnoi, Distt. Goalpara; Sankar Misra, *TGT,* Demonstration Multipurpose School, RIE, Bhubaneswar; Uaday Singh, *Lecturer,* Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi; B.R. Handa, *Emeritus Professor*, IIT, New Delhi; Monika Singh, *Lecturer,* Sri Ram College (University of Delhi), Lajpat Nagar, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Sirpur, Kagaz Nagar, Adilabad; Ajay Kumar Singh, *TGT,* Ramjas Sr. Secondary School No. 3, Chandni Chowk, Delhi; Mukesh Kumar Agrawal, *TGT,* S.S.A.P.G.B.S.S. School, Sector-V, Dr Ambedkar Nagar, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, *Head,* DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, *Incharge,* Computer Station; Purnendu Kumar Barik, *Copy Editor;* Naresh Kumar and Nargis Islam, *D.T.P. Operators;* Yogita Sharma, *Proof Reader*.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

কৃতজ্ঞতা

'MATHEMATICS for Class X' পুথিখন আঞ্চলিক ভাষালৈ অনুবাদ কৰি দশম শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথি হিচাপে প্ৰচলন কৰিবলৈ অনুমতি প্ৰদান কৰাৰ বাবে ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদলৈ আমাৰ কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন কৰিলো।

সচিব

অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ

বিষয় সূচী

	পুনৰালোচনা		**1**
1.	**বাস্তৱ সংখ্যা**		**24**
	1.1	অৱতাৰণা	24
	1.2	ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা	25
	1.3	পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য	32
	1.4	অপৰিমেয় সংখ্যালৈ পুনৰ উভতি যাওঁ	37
	1.5	পৰিমেয় সংখ্যা আৰু সিহঁতৰ দশমিক বিস্তাৰত পুনৰ ভূমুকি	40
	1.6	সাৰাংশ	44
2.	**বহুপদ**		**46**
	2.1	অৱতাৰণা	46
	2.2	বহুপদ এটাৰ শূন্যবোৰৰ জ্যামিতিক অৰ্থ	48
	2.3	এটা বহুপদৰ শূন্য আৰু সহগৰ মাজৰ সম্পৰ্ক	54
	2.4	বহুপদৰ বিভাজন কলনবিধি	59
	2.5	সাৰাংশ	64
3.	**দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ**		**65**
	3.1	অৱতাৰণা	65
	3.2	দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ	66
	3.3	ৰৈখিক সমীকৰণ এযোৰৰ সমাধানৰ লৈখিক পদ্ধতি	71
	3.4	এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণ সমাধান কৰা বীজীয় পদ্ধতি	78
	3.5	দুটা চলকৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰত পৰিণত কৰিব পৰা সমীকৰণবোৰ	94
	3.6	সাৰাংশ	100

4. দ্বিঘাত সমীকৰণ 102

4.1 অৱতাৰণা 102

4.2 দ্বিঘাত সমীকৰণ 103

4.3 উৎপাদকীকৰণেৰে দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান 107

4.4 বৰ্গ-সম্পূৰণ পদ্ধতিৰে দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান 110

4.5 মূলৰ প্ৰকৃতি 122

4.6 সাৰাংশ 125

5. সমান্তৰ প্ৰগতি 127

5.1 অৱতাৰণা 127

5.2 সমান্তৰ প্ৰগতি 129

5.3 সমান্তৰ প্ৰগতিৰ nতম পদ 134

5.4 সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল 143

5.5 সাৰাংশ 153

6. ত্ৰিভুজ 154

6.1 অৱতাৰণা 154

6.2 সদৃশ চিত্ৰ 155

6.3 ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্য 160

6.4 ত্ৰিভুজৰ সদৃশতাৰ চৰ্ত 167

6.5 সদৃশ ত্ৰিভুজৰ কালি 178

6.6 পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য 182

6.7 সাৰাংশ 191

7. স্থানাংক জ্যামিতি 193

7.1 অৱতাৰণা 193

	7.2	দূৰত্ব সূত্ৰ	194
	7.3	বিভাজন সূত্ৰ	201
	7.4	ত্ৰিভুজৰ কালি	207
	7.5	সাৰাংশ	212
8.	**ত্ৰিকোণমিতিৰ পৰিচয়**		**213**
	8.1	অৱতাৰণা	213
	8.2	ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত	215
	8.3	কেইটামান বিশেষ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত	222
	8.4	পূৰক কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত	229
	8.5	ত্ৰিকোণমিতিক অভেদাৱলী	231
	8.6	সাৰাংশ	236
9.	**ত্ৰিকোণমিতিৰ কিছুমান প্ৰয়োগ**		**237**
	9.1	অৱতাৰণা	237
	9.2	উচ্চতা আৰু দূৰত্ব	238
	9.3	সাৰাংশ	248
10.	**বৃত্ত**		**249**
	10.1	অৱতাৰণা	249
	10.2	বৃত্তৰ স্পৰ্শক	250
	10.3	এটা বৃত্তৰ এটা বিন্দুৰপৰা টনা স্পৰ্শকৰ সংখ্যা	253
	10.4	সাৰাংশ	258
11.	**অংকন**		**259**
	11.1	অৱতাৰণা	259
	11.2	এডাল ৰেখাখণ্ডৰ বিভাজন	259

	11.3 বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ অংকন	264
	11.4 সাৰাংশ	265
12.	**বৃত্ত সম্বন্ধীয় কালি**	**266**
	12.1 অৱতাৰণা	266
	12.2 বৃত্তৰ পৰিসীমা আৰু কালি— এটি পৰ্য্যালোচনা	267
	12.3 বৃত্তকলা আৰু বৃত্তখণ্ডৰ কালি	269
	12.4 সামতলিক আকাৰবোৰৰ গোটসমূহৰ কালি	275
	12.5 সাৰাংশ	283
13.	**পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন**	**284**
	13.1 অৱতাৰণা	284
	13.2 গোটা বস্তুৰ সংমিশ্ৰণৰ পৃষ্ঠকালি	285
	13.3 গোটা বস্তুৰ সংমিশ্ৰণৰ আয়তন	291
	13.4 গোটা বস্তু এটা আকৃতিৰপৰা আন এটা আকৃতিলৈ ৰূপান্তৰ	295
	13.5 এটা শংকুৰ শংকুচ্ছেদ	298
	13.6 সাৰাংশ	305
14.	**পৰিসংখ্যা**	**306**
	14.1 অৱতাৰণা	306
	14.2 সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মাধ্য	306
	14.3 সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক	318
	14.4 সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা	322
	14.5 সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ লৈখিক ৰূপ	334
	14.6 সাৰাংশ	339

15. সম্ভাৱিতা **341**

15.1 অৱতাৰণা 341

15.2 সম্ভাৱিতা— এটা তত্বগত উপস্থাপন 342

15.3 সাৰাংশ 359

পৰিশিষ্ট-1 গণিতত প্ৰমাণ **360**

A1.1 অৱতাৰণা 360

A1.2 গাণিতিক উক্তিৰ পুনৰীক্ষণ 361

A1.3 নিগমন যুক্তি 364

A1.4 পূৰ্বানুমান, উপপাদ্য, প্ৰমাণ আৰু গাণিতিক যুক্তি 366

A1.5 এটা উক্তিৰ নএঃৰ্থক 371

A1.6 উক্তিৰ বিপৰীত উক্তি 374

A1.7 বিৰোধাচৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে প্ৰমাণ 377

A1.8 সাৰাংশ 382

পৰিশিষ্ট-2 গাণিতিক আৰ্হিকৰণ **383**

A2.1 অৱতাৰণা 383

A2.2 গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ ঢাপ 384

A2.3 কিছু ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 388

A2.4 কিয় গাণিতিক আৰ্হিকৰণ গুৰুত্বপূৰ্ণ ? 392

A2.5 সাৰাংশ 393

উত্তৰ / ইংগিত **394**

পুনৰালোচনা (Revision)

প্ৰথম খণ্ড

সমানুপাত (Proportion)

তোমালোকে সপ্তম শ্ৰেণীত সমানুপাতৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰি আহিছা। শিকি অহা কথাবিলাক মনত পেলাওঁচোন আহা।

সমানুপাত হৈছে দুটা অনুপাতৰ সমতা বা তুলনা।

যেনে — (i) $a : b = x : y$ এটা সমানুপাত।

(ii) 2 কি.গ্ৰাম চাউলৰ মূল্য 70 টকা।

7 কি.গ্ৰাম চাউলৰ মূল্য 245 টকা।

ইয়াত চাউলৰ পৰিমাণৰ অনুপাত আৰু চাউলৰ মূল্যৰ অনুপাত সমান।

অৰ্থাৎ $2 : 7 = 70 : 245$

গতিকে ই এটা সমানুপাত।

(iii) যদি $a : b = c : d$, তেন্তে a, b, c, d ৰাশি কেইটাক সমানুপাতত থকা বুলি কোৱা হয়। ইয়াক $a : b : : c : d$, এনেদৰে লিখা হয়।

ইয়াত, $a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \therefore ad = bc$

অৰ্থাৎ a, b, c, d সমানুপাতত থাকিলে

প্ৰান্ত দুটাৰ পুৰণফল = মাধ্য দুটাৰ পূৰণফল

এতিয়া তোমালোকে তলৰ তালিকাখন পূৰণ কৰাচোন

x চেনি (কি.গ্ৰা)	1	2	3	$\longrightarrow$
y মূল্য (টকা)	44	88		$\longrightarrow$

দেখা গ'ল চেনিৰ পৰিমাণ বঢ়াৰ লগে লগে মূল্যও সেই অনুপাতে বাঢ়ি গৈছে। অৰ্থাৎ

x বাঢ়িলে y ও বাঢ়ে। তেতিয়া আমি ক'ম যে, x, yত প্ৰত্যক্ষ সমানুপাতিক নাইবা x, y সাপেক্ষে প্ৰত্যক্ষভাৱে বিচৰণ কৰে। ইয়াকে বুজোৱা হয় এনেদৰে $x \propto y$।

আনহাতে, যদি x আৰু y এনেদৰে বিচৰণ কৰে যাতে x বাঢ়িলে y কমে নাইবা x কমিলে y বাঢ়ে তেন্তে আমি ক'ম যে x, yত ব্যস্তানুপাতিক। নাইবা x, y ৰ বিপৰীতভাৱে বিচৰণ কৰে। ইয়াক লিখা হয় $x \propto \frac{1}{y}$। তালিকাত প্ৰকাশ কৰিলে $x \propto \frac{1}{y}$ সম্পৰ্কটো এনে হ'ব—

x	x_1	x_2	x_3	.....	.....	.....
y	y_1	y_2	y_3	.....	.....	.....

যাতে $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 =$ .... ধ্ৰুবক।

অৰ্থাৎ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ ...... ইত্যাদি।

উদাহৰণ এটা লওঁ আহা —

উদাহৰণ ঃ 5 জন মানুহে এটা কাম 20 দিনত কৰিব পাৰে। কিমানজন মানুহে সেই কামটো 1 দিনত কৰিব পাৰিব?

সমাধান ঃ আমি জানো যে মানুহ বাঢ়িলে সময় কমে। গতিকে মানুহৰ সংখ্যা আৰু সময় ব্যস্তানুপাতত থাকিব।

ধৰাহ'ল x_2 জন মানুহে কামটো 1 দিনত কৰিব পাৰিব।

x (মানুহ)	5	x_2
y (সময়। দিন হিচাপত)	20	1

সম্বন্ধটো এটা ব্যস্তনুপাতিক গতিকে,

$x_1y_1 = x_2y_2$ [ইয়াত, $x_1 = 5$, $y_1 = 20$, $y_2 = 1$]

$\therefore\ 5 \times 20 = x_2 \times 1$

$\therefore\ x_2 = 5 \times 20 = 100$

$\therefore$ 100 জন মানুহে 1 দিনত কামটো কৰিব পাৰিব।

অনুশীলনী ঃ R–1

1. তলৰ কোনটো অনুপাত একোটা সমানুপাত হ'ব?

(a) 12 : 21 আৰু 32 : 56 (b) 18 : 30 আৰু 14 : 21

(c) 22 : 33 আৰু 33 : 24 (d) 24 : 28 আৰু 20 : 25

2. তলৰ কোনবোৰ সংখ্যা ক্ৰমে সমানুপাতত থাকিব?

(a) 2, 6, 6, 8 (b) 10, 20, 30, 60

(c) $p,\ pq,\ p^2q,\ q^2$ (d) 6, 20, 4, 30

3. খালী ঠাই পূৰোৱা ঃ

(i) বৃত্তৰ কালি $A = \pi r^2$

যদি A বাঢ়ে তেন্তে r ____________। যদি r কমে তেন্তে A __________।

(ii) এখন গাড়ীৰ ভ্ৰমণৰ সময় (t) আৰু দূৰত্ব (d) সম্বন্ধটো তলৰ তালিকাত দিয়া ধৰণৰ —

t	1	2	3	4	5	6	–	–	–
d	4	8	12	16	20	–	28	–	36

খালী ঠাই পূৰোৱা ঃ

(a) t আৰু d য়ে ————— ভাৱে বিচৰণ কৰে।

(b) $t = 6$ হ'লে $d =$ ______

(c) $d = 28$ হ'লে $t =$ _____

(d) $d = 36$ হ'লে $t =$ _________

4. যদি $p \propto q$ আৰু $p = 6$ হ'লে $q = 30$, এতিয়া $p = 2$, তেন্তে q ৰ মান কিমান?

(a) 12 (b) 20 (c) 10 (d) 15

5. তলৰ তালিকাখনৰ খালী ঠাইত y ৰ মান —

x	1	2	4	8
y	32	16	8	–

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 2

• • •

দ্বিতীয় খণ্ড

বৰ্গ আৰু বৰ্গমূল (Square and Square Root)

সাধাৰণ ধাৰণাসমূহ ঃ

(1) যদি কোনো এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা m ক n^2 হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত n ও এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা, তেতিয়া m এটা বৰ্গ সংখ্যা হ'ব।

যেনে ঃ $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$

4, 9, 16 .... আদি সংখ্যাবোৰ বৰ্গ সংখ্যা।

(2) সকলো বৰ্গ সংখ্যাৰ একক স্থানত 0, 1, 4, 5, 6, 9 ৰে শেষ হয়।

(3) বৰ্গ সংখ্যাৰ শেষত যুগ্ম সংখ্যক শূন্যহে থাকিব পাৰে।

যেনে ঃ $10^2 = 100$, $400^2 = 160000$

(4) বৰ্গমূল বৰ্গৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া।

যেনে ঃ 7 ৰ বৰ্গ 49

49 ৰ বৰ্গমূল 7

অৰ্থাৎ a ৰ বৰ্গ b হ'লে

b ৰ বৰ্গমূল a হ'ব।

(5) প্ৰতিটো পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যাৰ দুটা বৰ্গমূল থাকে। এটা ধনাত্মক আনটো ঋনাত্মক (মান হিচাপে দুয়োটা সমান)। যেনে 49 ৰ বৰ্গমূল দুটা 7 আৰু –7 ।

কোনো এটা সংখ্যাৰ ধনাত্মক বৰ্গমূলক √ প্ৰতীকেৰে নিৰ্দেশ কৰা হয়।

যেনে $\sqrt{4} = 2$ (–2 নহয়); $\sqrt{49} = 7$ (–7 নহয়)

(ইয়াত কেৱল ধনাত্মক বৰ্গমূলৰ কথাহে কোৱা হৈছে)

(6) n ৰ বৰ্গ আৰু $(n + 1)$ ৰ বৰ্গৰ মাজত $2n$ টা স্বাভাৱিক সংখ্যা থাকে। যেনে, 11^2 আৰু 12^2 ৰ মাজত $(2\times11) = 22$ টা স্বাভাৱিক সংখ্যা আছে।

অনুশীলনী ঃ R–2

(1) তলৰ সংখ্যাকেইটাৰ বৰ্গ সংখ্যাৰ এককৰ স্থান কি হ'ব?

(i) 272 (ii) 79 (iii) 400 (iv) 2637

(2) তলৰ সংখ্যাকেইটা পূৰ্ণবৰ্গ নোহোৱাৰ কাৰণ কি?

(i) 1057 (ii) 7928 (iii) 222 (iv) 640

(3) তলৰ সংখ্যাকেইটাৰ বৰ্গ কিমান হ'ব?

(i) 19 (ii) 37 (iii) 53 (iv) 78

(4) মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতিৰে বৰ্গমূল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) 1764 (ii) 9216 (iii) 7744 (iv) 9801

(5) তলৰ প্ৰতিটো সংখ্যাৰ বাবে আটাইতকৈ সৰু কি সংখ্যাৰে পূৰণ কৰিলে সংখ্যাটো এটা পূৰ্ণবৰ্গ হ'ব?

(i) 1525 (ii) 1008 (iii) 2028 (iv) 768

(6) তলৰ প্ৰতিটো সংখ্যাৰ বাবে আটাইতকৈ সৰু কি সংখ্যাৰে হৰণ কৰিলে সংখ্যাটো এটা পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যা হ'ব?

(i) 468 (ii) 1584 (iii) 2645 (iv) 1620

(7) সেনাৰ কেম্প এটাত নায়কজনে 1764 জন সৈন্যক বৰ্গাকাৰ ৰূপত এনেদৰে থিয় কৰালে যাতে দীঘে পথালিয়ে শাৰীবোৰত সমান সংখ্যক সৈন্য থাকে। প্ৰতি শাৰীত কেইজনকৈ সৈন্য আছিল?

(8) 4, 9 আৰু 10 ৰে হৰণ কৰিব পৰা আটাইতকৈ সৰু পূৰ্ণ বৰ্গ সংখ্যাটো উলিওৱা।

(9) হৰণ পদ্ধতিৰে বৰ্গমূল নিৰ্ণয় কৰা।

(i) 2116 (ii) 4761 (iii) 576 (iv) 6084

(10) তলৰ দশমিক সংখ্যাবোৰৰ বৰ্গমূল নিৰ্ণয় কৰা।

(i) 12.25 (ii) 24.01 (iii) 146.41 (iv) 102.01

(11) (a) তলৰ কোনটো সংখ্যা অযুগ্ম সংখ্যাৰ বৰ্গ?

(i) 256 (ii) 169 (iii) 546 (iv) 754

(b) তলৰ কোনটোৰ একক স্থানত 1 থাকিব?

(i) 19^2 (ii) 34^2 (iii) 18^2 (iv) 20^2

(c) 18^2 আৰু 19^2 ৰ মাজত কেইটা স্বাভাৱিক সংখ্যা আছে?

(i) 38 (ii) 36 (iii) 42 (iv) 40

(d) তলৰ কোনটো বৰ্গ সংখ্যা নহয়?

(i) 441 (ii) 572 (iii) 576 (iv) 729

(e) $\sqrt{2025} = 45$ হ'লে $\sqrt{20.25}$ হ'ব

(i) 45 (ii) 4.5 (iii) 0.45 (iv) 0.045

ঘন আৰু ঘনমূল (Cube and Cube Root)

(1) কোনো এটা সংখ্যাক সেই সংখ্যাটোৰে, তিনিবাৰ পূৰণ কৰি পোৱা সংখ্যাটোক সেই সংখ্যাটোৰ ঘন সংখ্যা বুলি কোৱা হয়।

যদি a এটা যিকোনো সংখ্যা, তেন্তে $a \times a \times a = a^3$, a^3 ক a ৰ ঘন বোলে। যেনে ঃ 1, 8, 27 ... ইত্যাদি ক্ৰমে 1, 2, 3, ...ৰ ঘন।

(2) যদি কোনো এটা সংখ্যাৰ মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণত প্ৰতিটো উৎপাদক তিনিবাৰকৈ আছে, তেন্তে সংখ্যাটো এটা পূৰ্ণঘন সংখ্যা হ'ব।

3 ৰ ঘন 27 আনহাতে 27ৰ ঘনমূল 3

সেইদৰে, 5 ৰ ঘন 125, ইয়াৰ বিপৰীতে 125 ৰ ঘনমূল 5।

(3) $\sqrt[3]{\ }$ চিনটোৱে ঘনমূল সূচিত কৰে

যদি $3^3 = 27$ হয় তেন্তে $\sqrt[3]{27} = 3$ হ'ব।

$b^3 = a$ হ'লে $\sqrt[3]{a} = b$ হ'ব

(ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে তলত দিয়া ধৰণেৰে তালিকা প্ৰস্তুত কৰি মনত ৰাখিব পাৰিলে ভৱিষ্যতলৈ অঙ্ক কৰাত বহুত সুবিধা হ'ব।

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$n^3 =$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

11 ৰ পৰা 20 লৈ নিজে তালিকা প্ৰস্তুত কৰা)

অনুশীলনী ঃ R–3

(1) তলৰ কোনবোৰ সংখ্যা পূৰ্ণঘন নহয়?

(i) 3757 (ii) 3375 (iii) 3332 (iv) 4096

(2) তলৰ সংখ্যাকেইটাৰ ঘনফল নিৰ্ণয় কৰা।

(i) 19 (ii) 21 (iii) 23 (iv) 27

(3) তলৰ প্ৰতিটো সংখ্যাৰ ঘনৰ একক স্থানৰ অংক কি হ'ব?

(i) 14 (ii) 18 (iii) 13 (iv) 27

(4) তলৰ সংখ্যাবোৰ পূৰ্ণঘন হ'বলৈ আটাইতকৈ সৰু কি সংখ্যাৰে পূৰণ কৰিব লাগিব?

(i) 5324 (ii) 3087 (iii) 3125 (iv) 648

(5) এটা পূৰ্ণঘন পাবলৈ আটাইতকৈ সৰু কি সংখ্যাৰে তলৰ সংখ্যাকেইটাক হৰণ কৰিব লাগিব?

(i) 10,368 (ii) 2187 (iii) 5000 (iv) 8192

(6) নিম্নলিখিত সংখ্যাকেইটাৰ ঘনমূল উলিওৱা।

(i) 1331 (ii) 1728 (iii) 2197 (iv) 2744

(7) উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতিৰে ঘনমূল নিৰ্ণয় কৰা।

(i) 3375 (ii) 4913 (iii) 9261 (iv) 13824

(8) উৎপাদক বিশ্লেষণ নকৰাকৈ ঘনমূল অনুমান কৰি লিখা।

(i) 12167 (ii) 8000 (iii) 4096 (iv) 5832

(9) এটা ঘনকৰ দীঘ 1.2 ছে.মি.। ঘনকটোৰ আয়তন কিমান?

(10) এটা ঘনক আকৃতিৰ বাকচৰ আয়তন 6859 ঘনছে.মি. হ'লে বাকচটো কিমান ওখ হ'ব?

(11) প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ কাৰণে চাৰিটাকৈ উত্তৰ দিয়া আছে। শুদ্ধ উত্তৰটো লিখা।

(a) 23 ৰ ঘনৰ একক স্থানৰ অংকটো হ'ল—

(i) 6 (ii) 7 (iii) 8 (iv) 9

(b) তলৰ কোনটো পূৰ্ণ ঘন?

(i) 652 (ii) 933 (iii) 343 (iv) 1002

(c) $\sqrt[3]{1000}$ ৰ মান

(i) 30 (ii) 100 (iii) 10 (iv) 1000

(d) যদি m, n ৰ ঘনমূল হয় তেন্তে n ৰ মান হ'ব

(i) $\sqrt{m}$ (ii) $\sqrt[3]{m}$ (iii) m^3 (iv) m^2

(e) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}$ ৰ মান হ'ব

(i) 6 (ii) 7 (iii) 8 (iv) 9

সূচক আৰু ঘাত (Indices and Power)

(1) এটা সংখ্যা বাৰে বাৰে পূৰণ কৰোঁতে সূচক ব্যৱহাৰ কৰি সংক্ষিপ্ত ৰূপত প্ৰকাশ কৰা হয়।

(2) এটা ডাঙৰ সংখ্যা বা একেবাৰে সৰু সংখ্যাক সংক্ষিপ্ত ৰূপত প্ৰকাশ কৰিবলৈ সূচক ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(3) কোনো সংখ্যা সংক্ষিপ্ত ৰূপত থাকিলে, তাক পঢ়িবলৈ, লিখিবলৈ আৰু তুলনা কৰিবলৈ উজু হৈ পৰে।

(4) $10{,}000 = 10^4$ ত 10 ভূমি, 4 সূচক আৰু 10^4 হ'ল 10 ৰ চতুৰ্থ ঘাত।

(5) সূচকীয় ৰূপত থকা সংখ্যাবোৰে নিৰ্দিষ্ট বিধি মানি চলে। যিকোনো অশূন্য অখণ্ড সংখ্যা a, b, m আৰু n ৰ বাবে

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (f) $a^0 = 1$

(g) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (h) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ (i) $(-1)^n = 1$, যদি n যুগ্ম।

(j) $(-1)^n = -1$, যদি n অযুগ্ম।

(6) কিছুমান অতি বৃহৎ সংখ্যা বা অতি ক্ষুদ্ৰ সংখ্যাক প্ৰামাণিক ৰূপ বা মান্য ৰূপত তলত দিয়া ধৰণেৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। এই ৰূপটো হ'ল

$K \times 10^m$ য'ত $1 \le K < 10$ আৰু m এটা অখণ্ড সংখ্যা (K, 1 আৰু 10 ৰ মাজৰ যিকোনো দশমিক সংখ্যা)

অনুশীলনী ঃ R–4

(1) মান নিৰ্ণয় কৰা

(i) 11^3 (ii) 2×10^3 (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (iv) $(-4)^{-2}$

(2) তলৰ প্ৰতিটো সংখ্যাক সিহঁতৰ মৌলিক উৎপাদকৰ ঘাতৰ পূৰণৰূপে প্ৰকাশ কৰা

(i) 729 (ii) 3125 (iii) 3600 (iv) 108×192

(3) সৰল কৰা ঃ

(i) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (ii) $(2^3 \times 2)^4$ (iii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (iv) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

(4) তলৰ সংখ্যাবোৰ তুলনা কৰা

(i) $2^8,\ 8^2$ (ii) $2.7 \times 10^{12},\ 1.5 \times 10^8$

(5) তলৰ ফলাফলবোৰ ধনাত্মক সূচকেৰে প্ৰকাশ কৰা।

(i) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$ (ii) $(-3)^{-4} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$

(6) তলৰ সংখ্যাবোৰ প্ৰামাণিক ৰূপত প্ৰকাশ কৰা।

(i) 3430,000 (ii) 70,040,000,000

(iii) 0.00000015 (iv) 0.00001436

(7) তলৰ সংখ্যাবোৰ সাধাৰণ ৰূপত প্ৰকাশ কৰা।

(i) 1.0001×10^9 (ii) 3.02×10^{-6}

(8) m নিৰ্ণয় কৰা যাতে

$(-3)^{m+1}\times(-3)^5=(-3)^7$ হয়

(9) এটা উদ্ভিদকোষৰ আকাৰ (ব্যাস) 0.00001275 মিটাৰ, ইয়াক মান্য ৰূপত প্ৰকাশ কৰা।

(10) এটা থাকত 20 মিমি বেধৰ 5 খন কিতাপ আৰু 0.016 মিমি. বেধৰ 5 খিলা কাগজ আছে। থাকটোৰ মুঠ বেধ কিমান?

(11) তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ কাৰণে চাৰিটা উত্তৰ লিখা আছে। শুদ্ধ উত্তৰটো লিখিবা।

(a) 3^{-3} ৰ মান হ'ব।

(i) 3^3 (ii) $3^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\frac{1}{3^3}$ (iv) 3×3

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ৰ মান হ'ব।

(i) $\frac{1}{(2\times3)^2}$ (ii) $(2\times3)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ (iv) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ ৰ মান হ'ব।

(i) $\frac{8}{12}$ (ii) $\frac{16}{81}$ (iii) $-\frac{16}{81}$ (iv) $-\frac{8}{12}$

(d) 0.000064 ৰ প্ৰামাণিক ৰূপটো হ'ল।

(i) 64×10^4 (ii) 64×10^{-4} (iii) 6.4×10^5 (iv) 6.4×10^{-5}

(e) 2.03×10^{-5} ৰ মানটো হ'ব।

(i) 0.203 (ii) 0.0000203 (iii) 203000 (iv) 0.00203

উৎপাদক বিশ্লেষণ (Factorisation)

উৎপাদক (Factor)ঃ কোনো এটা অখণ্ড সংখ্যাক, তাতকৈ সৰু বা সমান যিমানবোৰ অখণ্ড সংখ্যাৰে সম্পূৰ্ণকৈ হৰণ কৰিব পাৰি, সেইবোৰেই হ'ল সংখ্যাটোৰ উৎপাদক।

(1) 1 সকলো সংখ্যাৰে উৎপাদক।

(2) প্ৰতিটো সংখ্যাই সংখ্যাটোৰ এটা উৎপাদক।

(3) সংখ্যা এটাৰ প্ৰতিটো উৎপাদকেই সংখ্যাটোৰ সঠিক ভাজক।

(4) প্ৰত্যেকটো উৎপাদক প্ৰদত্ত সংখ্যাতকৈ সৰু বা সমান।

(5) প্ৰদত্ত সংখ্যা এটাৰ উৎপাদকৰ সংখ্যা নিৰ্দিষ্ট।

(6) যেতিয়া এটা সংখ্যাক ইয়াৰ উৎপাদক কেইটাৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা হয়, আমি সংখ্যাটোক উৎপাদকত বিশ্লেষণ কৰা বুলি কওঁ।

(7) উৎপাদক সমূহ যেতিয়া মৌলিক সংখ্যা হয়, তেনে ধৰণৰ উৎপাদকৰ বিশ্লেষণক মৌলিক উৎপাদকত বিশ্লেষণ কৰা বুলি কোৱা হয়।

তলৰ উদাহৰণটো মন কৰা ঃ

$24 = 1\times24,\ 24 = 2\times12,\ 24 = 3\times8$

$24 = 4\times6,\ 24 = 2\times2\times2\times3$

দেখা গ'ল 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 প্ৰতিটোৰেই 24 ৰ উৎপাদক। শেষৰ উদাহৰণটোত $2\times2\times2\times3$ ৰ প্ৰতিটোৰেই মৌলিক উৎপাদক। গতিকে "উৎপাদকত প্ৰকাশ কৰা" আৰু "মৌলিক উৎপাদকত প্ৰকাশ কৰা" দুয়োটাৰে পাৰ্থক্য আছে।

(8) বীজগণিতীয় ৰাশিৰ ক্ষেত্ৰত মৌলিক উৎপাদকত বিশ্লেষণ কৰা বুলিলে ভুল কৰা হব কাৰণ $5xy$ ৰ 5 মৌলিক কিন্তু x আৰু y ক মৌলিক বুলি ক'ব নোৱাৰি।

$5xy$ ৰ উৎপাদক বুলিলে $5, x, y, 5x, 5y, xy, 5xy$ প্ৰতিটোৰেই $5xy$ ৰ একো একোটা উৎপাদক। ইয়াত 1 টো উল্লেখ কৰা নহয়।

(9) যেতিয়া এটা বীজগণিতীয় ৰাশিক তাৰ উৎপাদকৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা হয়, তাকেই ৰাশিটোৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা বুলি কোৱা হয়।

(10) বহুপদ ৰাশিৰ উৎপাদক বিশ্লেষণত বিতৰণ বিধিৰ সহায় লোৱা হয়। (সাধাৰণ উৎপাদক পদ্ধতি)

যেনে ঃ $2xy + 2y = 2y\,(x+1)$, ($2y$ সাধাৰণ উৎপাদক)

$= 2 \times y \times (x + 1)$

(11) বীজগণিতীয় ৰাশি থকা পদক উপযুক্ত গোটত সজাই উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা হয়।

যেনে ঃ $a^2+ab+9a+9b$

$= a(a+b)+9(a+b)$, $(a+b)$ সাধাৰণ উৎপাদক

$= (a+b)(a+9)$

(12) বীজগণিতীয় ৰাশিৰ উৎপাদক নিৰ্ণয়ত নিম্নলিখিত অভেদসমূহ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

যেনে ঃ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$x^2+(a+b)\,x+ab=(x+a)(x+b)$

(13) $(x+a)\,(x+b)$ ৰ নিচিনা উৎপাদক থকা ৰাশিবোৰত একমাত্ৰ সাংখ্যিক পদটো হৈছে ab। ইয়াৰ উৎপাদক a আৰু b এনেদৰে বাছনি কৰিব লাগে যাতে উৎপাদক দুটাৰ যোগফলটো x ৰ সহগৰ সমান হয়।

যেনে ঃ $x^2+5x+6 = x^2+(2+3)x+2\times 3$

$= x^2+2x+3x+2\times 3$

$= x(x+2)+3(x+2)$

$= (x+2)(x+3)$

(14) বীজগণিতীয় ৰাশিৰ সম্পূৰ্ণ বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত পোৱা, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল, উৎপাদক নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য।

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + বাকী বা ভাগশেষৰ সম্বন্ধত ভাগশেষ শূন্য 0 হবই লাগিব, তেহে ভাজক আৰু ভাগফল উভয়েই ভাজ্যৰ উৎপাদক হ'ব।

অনুশীলনী ঃ R–5

(1) সাধাৰণ উৎপাদক উলিওৱা

(i) $14\,pq,\ 28\,p^2q^2$

(ii) $16x^3-4x^2,\ 32x$

(iii) $20pq, 30qr, 40rp$

(iv) $3x^2y^3, 10x^3y^2, 6x^2y^2z$

(2) উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা

(i) $4a^2 + 8a^3$　(ii) $7x^2y - 21xy^2$

(iii) $a^2bc + ab^2c + abc^2$　(iv) $a^3 - a^2b^2$

(3) উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা

(i) $x^2 + xy + 6x + 6y$　(ii) $xy + x + y + 1$

(iii) $24x^2y + 12x^2 - 12xy - 6x$　(iv) $z - 7 + 7xy - xyz$

(4) উৎপাদকত প্ৰকাশ কৰা ঃ

(i) $4x^2 + 12x + 9$　(ii) $25m^2 + 30m + 9$　(iii) $x^2 - 10x + 25$

(iv) $121b^2 - 88bc + 16c^2$　(v) $9p^2 - 16q^2$　(vi) $(l+m)^2 - (l-m)^2$

(vii) $x^2 - 13x - 30$　(viii) $y^2 - 5y - 36$　(ix) $4y^2 + 25y - 21$

(x) $3x^6 - 6x^2y - 45x^2y^2$

(5) তলৰ বহুপদ ৰাশিক একপদ ৰাশিৰে হৰণ কৰা

(i) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$　(ii) $(p^3q^3 - p^6q^3) \div p^3q^3$

(6) হৰণফল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $(10x - 25) \div (2x - 5)$　(ii) $20(y+4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y+4)$

(7) উৎপাদকত প্ৰকাশ কৰি হৰণফল নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $(4u^2 + 25u - 21) \div (u + 7)$　(ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$

● ● ●

তৃতীয় খণ্ড

পৰিমিতি (Mensuration)

আগৰ পাঠৰ পুনৰালোচনা ঃ

সপ্তম শ্ৰেণীৰ পাঠত সমতলীয় বন্ধ চিত্ৰৰ পৰিসীমা আৰু কালিৰ ধাৰণা আগবঢ়োৱা হৈছে। এই ক্ষেত্ৰত, কেইটামান বিশেষ জ্যামিতিক আকৃতি যেনে— বৰ্গ, আয়ত, ত্ৰিভুজ, সামান্তৰিক, বৃত্ত আদিৰ পৰিসীমা আৰু কালি নিৰ্ণয়ৰ কৌশলসমূহকো আলোচনা কৰা হৈছে।

অষ্টম শ্ৰেণীৰ পাঠত এক বিশেষ ধৰণৰ জ্যামিতিক আকৃতি ট্ৰেপিজিয়াম আৰু সাধাৰণ চতুৰ্ভুজৰ পৰিসীমা আৰু কালি উলিওৱাৰ কৌশল আলোচনা কৰা হৈছে।

ইয়াৰ উপৰি বিভিন্ন পৃষ্ঠ (পিঠি), দাঁতি (কাষ) আৰু শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট গোটা আকৃতিৰ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তনৰ ধাৰণাৰ লগতে সেইবোৰ নিৰ্ণয়ৰ কৌশল সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হৈছে।

সেই আটাইবোৰকে থোৰতে আকৌ মনত পেলাও আহা —

পৰিসীমা (Perimeter) ঃ

(i) n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজৰ পৰিসীমা $= n \times$ বাহুৰ দীঘ।

(ii) বৰ্গৰ পৰিসীমা $= 4 \times$ বাহুৰ দীঘ।

(iii) আয়তৰ পৰিসীমা $= 2 \times$ (দীঘ + প্ৰস্থ)

(iv) সামান্তৰিকৰ পৰিসীমা $= 2 \times$ (এযোৰ সন্নিহিত বাহুৰ দীঘৰ সমষ্টি)

(v) চতুৰ্ভুজৰ পৰিসীমা = চাৰিওটা বাহুৰ দীঘৰ সমষ্টি।

(vi) বৃত্তৰ পৰিধি $= 2\pi \times$ (ব্যাসাৰ্দ্ধৰ দীঘ) $= 2\pi r$, য'ত $\pi = \frac{22}{7}$ আৰু r- হ'ল বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ।

কালি ঃ (Area)

(i) বৰ্গৰ কালি = (বাহুৰ দীঘ)^2

(ii) আয়তৰ কালি = দীঘ × প্ৰস্থ

(iii) সামান্তৰিকৰ কালি = ভূমি × উচ্চতা

(এই ক্ষেত্ৰত, সামান্তৰিকটোৰ যিকোনো এটা বাহুক ভূমি হিচাপে ল'ব পৰা যায়, তেতিয়া ইয়াৰ উচ্চতা হ'ব ভূমি আৰু ভূমিৰ সমান্তৰাল বাহুৰ মাজৰ দূৰত্ব।)

(iv) ত্ৰিভুজৰ কালি = $\frac{1}{2}$ভূমি × উচ্চতা।

(এই ক্ষেত্ৰতো ত্ৰিভুজটোৰ যিকোনো এটা বাহুকে ভূমি হিচাপে ল'ব পৰা যায় আৰু তেতিয়া বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুৰ পৰা আঁকা লম্বডালেই হ'ব সেই ভূমিৰ ওপৰত ত্ৰিভুজটোৰ উচ্চতা বা উন্নতি)

(v) ট্ৰেপিজিয়ামৰ কালি = $\frac{1}{2}$ × সমান্তৰাল বাহুযোৰৰ দীঘৰ সমষ্টি × উচ্চতা।

[ইয়াত উচ্চতাই সমান্তৰাল বাহু এযোৰৰ মাজৰ দূৰত্বক সূচাইছে]

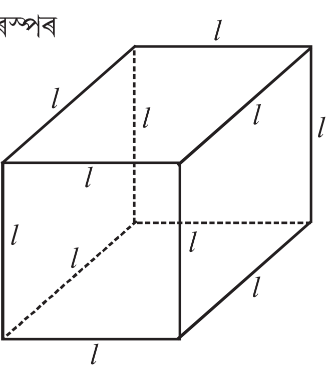
(vi) চতুৰ্ভুজৰ কালি = $\frac{1}{2}$ × এডাল কৰ্ণৰ দীঘ × কৰ্ণডাল ভূমি হিচাপে থকা ত্ৰিভুজ দুটাৰ উচ্চতাৰ সমষ্টি

ৰম্বাছৰ কালি = $\frac{1}{2}$ × কৰ্ণ দুডালৰ দীঘৰ পূৰণফল।

(vii) বৃত্তৰ কালি = πr^2

গোটা আকৃতিৰ ভিতৰত বিশেষভাৱে উল্লেখযোগ্য কেইটামান হ'ল — ঘনক, আয়তীয় ঘনক, চুঙা, শঙ্কু আৰু পিৰামিড। ইয়াত কেৱল ঘনক, আয়তীয় ঘনক আৰু চুঙাৰ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তনৰ বিষয়েহে বিবেচনা কৰা হৈছে।

ঘনক ঃ (Cube) ঘনক এটা গোটা আকৃতি যাৰ ছয়খন পৰস্পৰ সৰ্বসম পিঠি বা পৃষ্ঠ, 12 টা পৰস্পৰ সমান দাঁতি বা কাষ আৰু 8 টা শীৰ্ষবিন্দু আছে।



প্ৰতিটো দাঁতিয়েই বৰ্গাকাৰ পৃষ্ঠ একোখনৰ বাহু। দাঁতিৰ দীঘ l ধৰিলে প্ৰতিখন বৰ্গাকাৰ পৃষ্ঠৰ কালি হ'ব l^2। গতিকে ঘনকটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $6l^2$

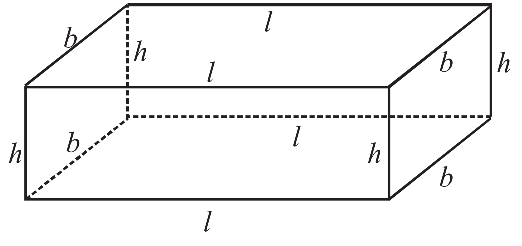
আনহাতে, ঘনকটোৰ আয়তন = l^3 = (দাঁতিৰ দীঘ)^3

আয়তীয় ঘনক (Cuboid) ঃ

আয়তীয় ঘনক এক ধৰণৰ গোটা আকৃতি যাৰ 6খন আয়তাকৃতিৰ পৃষ্ঠ, 12 টা দাঁতি আৰু 8 টা শীৰ্ষবিন্দু থাকে। একোটা শীৰ্ষবিন্দুত তিনিটাকৈ দাঁতি মিলিত হয়। শীৰ্ষবিন্দুত মিলিত হোৱা তিনিটা দাঁতিক ক্ৰমে দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা বোলা হয়। আয়তীয় ঘনকৰ পৰস্পৰ বিপৰীতফালে থকা আয়তাকৃতিৰ পৃষ্ঠবোৰ সৰ্বসম। অৰ্থাৎ ইয়াত তিনিযোৰ সৰ্বসম আয়তাকৃতিৰ পিঠি থাকে। আয়তীয় ঘনক এটাৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতাক ক্ৰমে l, b আৰু hৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰিলে

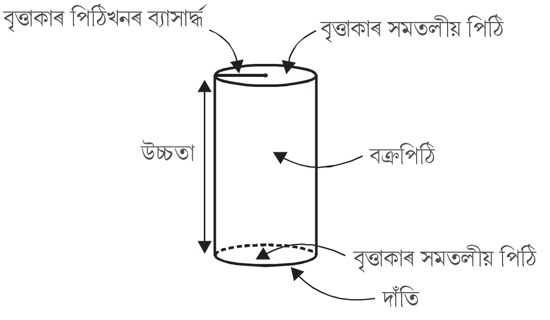
ইয়াৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি $= 2[l \times b + b \times h + l \times h]$

আনহাতে ইয়াৰ আয়তন $= l \times b \times h$



চুঙা (Cylinder) ঃ

চুঙা হ'ল এক গোটা আকৃতি যাৰ 3 খন পিঠি আৰু দুটা দাঁতি আছে। ইয়াৰ কোনো শীৰ্ষবিন্দু নাই। তিনিখন পিঠিৰ এখন বক্ৰপিঠি আৰু দুখন বৃত্তাকৃতিৰ সমতলীয় পিঠি। বক্ৰপিঠিখনৰ দুয়োমূৰে বৃত্তাকৃতিৰ পিঠি দুখন পৰস্পৰ সমান্তৰালভাৱে কিন্তু বক্ৰপিঠিৰ সৈতে লম্বভাৱে থাকে। চুঙাটোৰ দুয়োমূৰে সমান্তৰালভাৱে থকা বৃত্তাকাৰ পিঠি দুখনৰ মাজৰ লম্ব দূৰত্বক চুঙাটোৰ উচ্চতা বোলা হয়। চুঙাৰ বক্ৰপিঠি সাপেক্ষে বৃত্তাকৃতিৰ পিঠি দুখন লম্বভাৱে থাকে বাবে এনে চুঙাক লম্ববৃত্তীয় চুঙাও বোলা হয়।



বৃত্তাকাৰ পিঠিদুখনৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ r ধৰিলে প্ৰতিখন পিঠিৰে পৰিসীমা হ'ব $2\pi r$ আৰু কালি হ'ব πr^2 বক্ৰ পিঠিখনৰ কালি উলিয়াবলৈ আমি এনেদৰে আগবাঢ়িব পাৰোঁ। বক্ৰ পিঠি আৰু ইয়াৰ জোখত হুবহু মিলাকৈ এখন কাগজ কাটি উলিয়াব লাগে কাগজখন দীঘলকৈ মেলি দিলে আমি এটা আয়ত পাওঁ যাৰ দীঘ বৃত্তাকাৰ পিঠিখনৰ পৰিসীমাৰ সমান অৰ্থাৎ $2\pi r$ ৰ সমান আৰু প্ৰস্থ চুঙাটোৰ উচ্চতা hৰ সমান।

গতিকে চুঙাটোৰ বক্ৰ পিঠিখনৰ কালি $2\pi r \times h$

অৰ্থাৎ চুঙাটোৰ মুঠ পিঠিকালি = বৃত্তাকাৰ পিঠি দুখনৰ কালি + বক্ৰপিঠিৰ কালি

$= \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r\ (r + h)$

আকৌ, চুঙাটোৰ আয়তন = বৃত্তাকাৰ পিঠিৰ কালি × উচ্চতা

$= \pi r^2 h$

গতিকে, গোটা আকৃতিৰ ক্ষেত্ৰত পোৱা ফলসমূহ থোৰতে এনে ধৰণৰ —

পৃষ্ঠকালি সম্পৰ্কীয় ঃ

l দীঘ বিশিষ্ট ঘনকৰ পৃষ্ঠ কালি = $6 \times l^2$

দীঘ l, প্ৰস্থ b আৰু উচ্চতা h বিশিষ্ট আয়তীয় ঘনকৰ পৃষ্ঠকালি = $2[l\times b+b\times h+l\times h]$

r ব্যাসাৰ্দ্ধ আৰু h উচ্চতা বিশিষ্ট চুঙাৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = $2\pi r(r + h)$

আয়তন সম্পৰ্কীয় ঃ

l দৈৰ্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনকৰ আয়তন = l^3

দৈৰ্ঘ্য l, প্ৰস্থ b আৰু উচ্চতা h বিশিষ্ট আয়তীয় ঘনকৰ আয়তন = lbh

r ব্যাসাৰ্দ্ধ আৰু h উচ্চতাবিশিষ্ট চুঙাৰ আয়তন = $\pi r^2 h$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ-1 : 4 ছে.মি. বাহুবিশিষ্ট বৰ্গৰ সৈতে একে পৰিসীমাৰ এটা আয়তৰ দীঘ কিমান যদি আয়তটোৰ প্ৰস্থ 3 ছে.মি. হয়?

সমাধান ঃ 4 ছে.মি. বাহুবিশিষ্ট বৰ্গৰ পৰিসীমা = 4 × বাহুৰ দীঘ

= 4 × 4 ছে.মি.

= 16 ছে.মি.

একে পৰিসীমাৰ আয়তটোৰ প্ৰস্থ 3ছে.মি. আৰু দীঘ l ছে.মি. হ'লে

$$2 \times (l + 3) = 16$$
$$\Rightarrow 2l = 16 - 6 = 10$$
$$\Rightarrow l = 5$$

আয়তটোৰ দীঘ 5 ছে. মি.।

উদাহৰণ-2 : দীঘ আৰু প্ৰস্থৰ নিৰ্দিষ্ট মাপ লৈ দেখুওৱা যে একে পৰিসীমা বিশিষ্ট এটা বৰ্গ আৰু এটা আয়তৰ কালিৰ ক্ষেত্ৰত বৰ্গৰ কালি আয়তৰ কালিতকৈ অধিক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল এটা বৰ্গৰ বাহুৰ দীঘ 4 ছে.মি.

আৰু এটা আয়তৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ ক্ৰমে 5 ছে.মি. আৰু 3 ছে.মি.।

বৰ্গটোৰ পৰিসীমা $= 4 \times 4$ ছে.মি. $= 16$ ছে.মি.

আয়তটোৰ পৰিসীমা $= 2 \times (5 + 3)$ ছে.মি. $= 16$ ছে.মি.।

গতিকে বৰ্গৰ পৰিসীমা = আয়তৰ পৰিসীমা

এতিয়া বৰ্গৰ কালি $= 4 \times 4$ বৰ্গ ছে.মি. $= 16$ বৰ্গ ছে.মি.

আয়তটোৰ কালি $= 5 \times 3$ বৰ্গ ছে.মি. $= 15$ বৰ্গ ছে.মি.।

অৰ্থাৎ বৰ্গটোৰ কালি আয়তটোৰ কালিতকৈ অধিক।

উদাহৰণ-3 : এটা আয়তৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ ক্ৰমে 6 ছে.মি. আৰু 4 ছে.মি.। এটা সামান্তৰিক অঁকা হ'ল যাৰ এটা বাহুৰ দীঘ 8 ছে.মি.। যদি সামান্তৰিক আৰু আয়তটোৰ কালি একে হয়, তেন্তে প্ৰদত্ত বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ আয়তটোৰ কালি $= 6 \times 4$ বৰ্গ ছে.মি. $= 24$ বৰ্গ ছে.মি.।

সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা h ধৰা হ'ল।

গতিকে সামান্তৰিকটোৰ কালি $= 8 \times h$ বৰ্গ ছে.মি.।

চৰ্তমতে, $8 \times h = 24$

বা, $h = \frac{24}{8} = 3$

$\therefore$ সামান্তৰিকটোৰ নিৰ্ণেয় উচ্চতা 3 ছে.মি.।

উদাহৰণ-4 : এটা সামান্তৰিকৰ সন্নিহিত (ওচৰা ওচৰি) এযোৰ বাহুৰ জোখ ক্ৰমে 5 ছে.মি. আৰু 4 ছে.মি.। যদি সামান্তৰিকটোৰ কালি একে জোখৰ বাহুবিশিষ্ট আয়তৰ কালিৰ আধা হয়, তেন্তে 5 ছে.মি. জোখৰ বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটো উচ্চতা কিমান?

সমাধান ঃ প্ৰশ্নমতে, আয়তটোৰ দীঘ 5 ছে.মি.

আৰু প্ৰস্থ 4 ছে.মি.।

গতিকে, আয়তটোৰ কালি = 5 × 4 বৰ্গ ছে.মি. = 20 বৰ্গ ছে.মি.।

আকৌ, 5 চে.মি. জোখৰ বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটোৰ

উচ্চতা h হ'লে ইয়াৰ কালি = 5 × h বৰ্গ ছে.মি.।

চৰ্তমতে, $5 \times h = \frac{1}{2} \times 20$

বা, $5h = 10$

বা, $h = 2$

অৰ্থাৎ সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা 2 ছে.মি.।

উদাহৰণ-5 : এটা সামান্তৰিকৰ সন্নিহিত বাহু এযোৰৰ জোখ ক্ৰমে 4 ছে.মি. আৰু 3 ছে.মি.। 4 ছে.মি. জোখ বিশিষ্ট বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা 2 ছে.মি. হ'লে 3 ছে.মি. জোখবিশিষ্ট বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা কিমান?

সমাধান ঃ 3 ছে.মি. জোখবিশিষ্ট বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা h হ'লে, কালি $3 \times h$,

প্ৰশ্নমতে—

$4 \times 2 = 3 \times h$

বা $h = \frac{8}{3}$

অৰ্থাৎ 3 ছে.মি. জোখবিশিষ্ট বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা $\frac{8}{3}$ ছে.মি.।

উদাহৰণ-6 : এটা ত্ৰিভুজৰ ভূমি 4 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 3 ছে.মি.। ত্ৰিভুজটোৰ ভূমিৰ জোখ 3 গুণ বৃদ্ধি হ'লে ইয়াৰ কালি কিমান গুণ বৃদ্ধি হ'ব?

সমাধান ঃ ত্ৰিভুজ এটাৰ ভূমি 4 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 3 ছে.মি. হ'লে

ইয়াৰ কালি হ'ব $\frac{1}{2} \times 4 \times 3$ বৰ্গ ছে.মি.।

= 6 বৰ্গ ছে.মি.।

ভূমি 3 গুণ বৃদ্ধি হ'লে নতুন ভূমিৰ জোখ হ'ব 4 × 3 ছে.মি. = 12 ছে.মি.।

ত্ৰিভুজটোৰ বৰ্দ্ধিত কালি হ'ব = $\frac{1}{2} \times 12 \times 3$ বৰ্গ ছে.মি.।

= 18 বৰ্গ ছে.মি.।

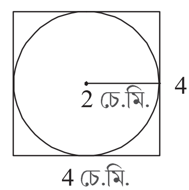
$$\frac{\text{মূল ত্ৰিভুজটোৰ কালি}}{\text{ত্ৰিভুজটোৰ বৰ্দ্ধিত কালি}} = \frac{6 \text{ বৰ্গ ছে.মি.}}{18 \text{ বৰ্গ ছে.মি.}} = \frac{1}{3}$$

অৰ্থাৎ ত্ৰিভুজটোৰ বৰ্দ্ধিত কালি = 3 × মূল ত্ৰিভুজটোৰ কালি

অৰ্থাৎ ত্ৰিভুজৰ উচ্চতা একে থাকিলে ভূমি 3 গুণ বাঢ়িলে কালিও 3 গুণ বাঢ়ে।

উদাহৰণ-7 : 4 ছে.মি. জোখৰ বাহু বিশিষ্ট বৰ্গ এটাৰ বাহুবোৰক চুই থকা বৃত্ত এটাৰ পৰিসীমা আৰু কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ চিত্ৰৰপৰা বুজিব পাৰি যে বৰ্গৰ ভিতৰত থকা বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 2 ছে.মি.।



∴ বৃত্তটোৰ পৰিসীমা $= 2\pi \times 2$ ছে.মি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2$ ছে.মি., $\quad \pi = \frac{22}{7}$

$= \frac{88}{7}$ ছে.মি.।

বৃত্তটোৰ কালি $= \pi \times 2^2$ বৰ্গ ছে.মি.

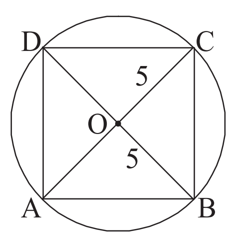
$= \frac{22}{7} \times 4$ বৰ্গ ছে.মি. $= \frac{88}{7}$ বৰ্গ ছে.মি.।

উদাহৰণ-8 : 5 ছে.মি. জোখৰ ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত বৃত্ত এটাৰ ভিতৰত শীৰ্ষবিন্দুবোৰ বৃত্তটোত থকাকৈ এটা বৰ্গ অঁকা হ'ল। বৰ্গ আৰু বৃত্তটোৰ কালিৰ অনুপাত উলিওৱা।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল বৃত্তটোৰ ভিতৰত ABCD এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ।

O বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ; গতিকে OB = OC = 5 ছে.মি.।

আকৌ, ∠BOC = 1 সমকোণ। কাৰণ, বৰ্গৰ কৰ্ণবোৰ লম্বভাৱে কেন্দ্ৰত সমদ্বিখণ্ডিত হয়।



পাইথাগোৰাছৰ চৰ্তমতে,

$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$= 25 + 25 = 50$

গতিকে বৰ্গৰ কালিৰ মান $= BC^2 = 50$

গতিকে বৃত্তৰ কালিৰ মান $= \pi \times 5^2 = 25 \times \frac{22}{7}$, $\quad \pi = \frac{22}{7}$

$= \frac{550}{7}$

গতিকে, $\frac{\text{বৰ্গৰ কালি}}{\text{বৃত্তৰ কালি}} = \frac{50}{\frac{550}{7}} = \frac{7 \times 50}{550} = \frac{7}{11}$

উদাহৰণ-9 : এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ সমান্তৰাল বাহুবোৰৰ জোখ ক্ৰমে 7 ছে.মি. আৰু 5 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 4 ছে.মি. হ'লে ইয়াৰ কালি উলিওৱা।

সমাধান ঃ ট্ৰেপিজিয়ামটোৰ কালি = $\frac{1}{2}\times$ (সমান্তৰাল বাহু দুটাৰ দীঘৰ সমষ্টি) $\times$ উচ্চতা

$$= \frac{1}{2}\times (7 + 5) \times 4$$

$$= 24$$

নিৰ্ণেয় কালি = 24 বৰ্গ ছে.মি.।

উদাহৰণ-10 : এটা ৰম্বাছৰ কালি উলিওৱা যাৰ কৰ্ণ দুডালৰ দীঘ ক্ৰমে 8 ছে.মি. আৰু 4 ছে.মি.।

সমাধান ঃ ৰম্বাছৰ কালি = $\frac{1}{2}\times$ কৰ্ণ দুডালৰ দীঘৰ পূৰণফল

$$= \frac{1}{2}\times 8 \times 4$$

$$= 16$$

নিৰ্ণেয় কালি = 16 বৰ্গ ছে.মি.।

উদাহৰণ-11 : এটা আয়তীয় ঘনকৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা ক্ৰমে 8 ছে.মি., 6 ছে.মি. আৰু 4 ছে.মি.। আয়তীয় ঘনকটো মুঠ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন উলিওৱা।

সমাধান ঃ আয়তীয় ঘনকটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = 2 ×(দীঘ×প্ৰস্থ+প্ৰস্থ×উচ্চতা+উচ্চতা×দীঘ)

$$= 2\times[8\times6+6\times4+4\times8]$$

$$= 2\times[48+24+32]$$

$$= 2 \times 104$$

$$= 208$$

নিৰ্ণেয় পৃষ্ঠকালি = 208 বৰ্গ ছে.মি.।

আয়তীয় ঘনকটোৰ আয়তন = দীঘ × প্ৰস্থ × উচ্চতা

$$= 8 \times 6 \times 4$$

$$= 192$$

নিৰ্ণেয় আয়তন = 192 ঘন ছে.মি.

উদাহৰণ-12 : এটা চুঙাৰ ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধ 5 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 16 ছে.মি. হ'লে চুঙাটোৰ মুঠ পৃষ্ঠ কালি আৰু আয়তন কিমান?

সমাধান ঃ চুঙাটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = বৃত্তাকৃতিৰ পৃষ্ঠদুখনৰ কালি + বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি

$$= 2\pi r\ (r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5(5 + 16)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times 21$$

$$= 44 \times 15$$

$$= 660$$

নিৰ্ণেয় পৃষ্ঠকালি = 660 বৰ্গ ছে.মি.

আকৌ, চুঙাটোৰ আয়তন = $\pi r^2 \times h,$ (r ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধ, h উচ্চতা)

$$= \frac{22}{7} \times 5^2 \times 16$$

$$= \frac{550 \times 16}{7} = \frac{8800}{7}$$

নিৰ্ণেয় আয়তন = $\frac{8800}{7}$ ঘন ছে.মি.।

অনুশীলনী ঃ R–6

(1) এটা আয়তৰ দীঘ 12 ছে.মি. আৰু প্ৰস্থ 4 ছে.মি. হ'লে আয়তটোৰ পৰিসীমা আৰু কালি নিৰ্ণয় কৰা।

(2) এটা আয়তৰ প্ৰস্থ 5 ছে.মি. আৰু দীঘ প্ৰস্থৰ তিনিগুণ। আয়তটোৰ পৰিসীমা আৰু কালি কিমান?

(3) 7 ছে.মি. জোখৰ বাহু বিশিষ্ট বৰ্গ এটাৰ কালি উলিওৱা।

(4) এটা সামান্তৰিকৰ বাহু এটাৰ জোখ 6 ছে.মি.। যদি এই বাহু সাপেক্ষে সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতা 3 ছে.মি. হয়, তেন্তে ইয়াৰ কালি কিমান হ'ব?

(5) এটা সামান্তৰিকৰ এডাল কৰ্ণৰ জোখ 8 ছে.মি. আৰু ইয়াক সাধাৰণ ভূমি হিচাপে থকা ত্ৰিভুজ দুটাৰ প্ৰতিটোৰে উচ্চতা 4 ছে.মি. হ'লে সামান্তৰিকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

(6) ৰম্বাছ আকৃতিৰ মাটি এটুকুৰাৰ দুই কৰ্ণৰ জোখ ক্ৰমে 125 মিটাৰ আৰু 85 মিটাৰ। মাটিটুকুৰাৰ কালি উলিওৱা।

(7) এটা ৰম্বাছৰ কৰ্ণ দুডালৰ জোখ 24 মিটাৰ আৰু 10 মিটাৰ হ'লে ৰম্বাছটোৰ (i) পৰিসীমা আৰু (ii) কালি উলিওৱা।

(8) এটা আয়তৰ প্ৰস্থ 5 মিটাৰ আৰু কালি 100 বৰ্গমিটাৰ হ'লে আয়তটোৰ দীঘ কিমান?

(9) এটা সামান্তৰিকৰ ভূমি 9 ছে.মি. আৰু কালি 54 বৰ্গ ছে.মি. হ'লে ইয়াৰ উচ্চতা কিমান?

(10) এটা আয়তৰ কালি 12 ডেকামিটাৰ জোখৰ বাহুবিশিষ্ট এটা বৰ্গৰ কালিৰ সমান। আয়তটোৰ দীঘ 24 ডেকামিটাৰ হ'লে ইয়াৰ প্ৰস্থ কিমান?

(11) এটা আয়তৰ দীঘ প্ৰস্থৰ তিনিগুণ। আয়তটোৰ কালি 432 বৰ্গমিটাৰ হ'লে আয়তটোৰ পৰিসীমা কিমান?

(12) এটা সামান্তৰিকৰ কৰ্ণৰ দীঘৰ 86 মিটাৰ আৰু বাকী দুটা শীৰ্ষবিন্দুৰ যিকোনো এটাৰপৰা ইয়ালৈ টনা লম্বৰ দীঘ 36 মিটাৰ হ'লে সামান্তৰিকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

(13) এটা ৰম্বাছৰ কৰ্ণ দুডালৰ জোখ 24 মিটাৰ আৰু 10 মি.। ৰম্বাছটোৰ বাহুবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(14) এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ সমান্তৰাল বাহুযোৰৰ জোখ ক্ৰমে 6 মিটাৰ আৰু 4 মিটাৰ আৰু ইহঁতৰ মাজৰ লম্ব দূৰত্ব 7 মিটাৰ। ট্ৰেপিজিয়ামটোৰ কালি উলিওৱা।

(15) এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ কালি 1350 বৰ্গমিটাৰ আৰু ইয়াৰ সমান্তৰাল বাহুযোৰৰ দীঘৰ সমষ্টি উচ্চতাৰ তিনিগুণ হ'লে উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

(16) এটা চতুৰ্ভুজৰ এডাল কৰ্ণ আৰু ইয়াৰ ওপৰত বাকী শীৰ্ষবিন্দু দুটাৰ পৰা টনা লম্ব দুটাৰ দীঘ যথাক্ৰমে 121 মিটাৰ, 40 মিটাৰ আৰু 80 মিটাৰ। চতুৰ্ভুজটোৰ কালি উলিওৱা।

(17) চকা এটাৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 28 ছে.মি. হ'লে ইয়াৰ পৰিসীমাৰ জোখ কিমান?

(18) 35 ছে.মি. জোখৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত এটাৰ কালি উলিওৱা।

(19) এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ কালি আন চাৰিটা বৃত্তৰ কালিৰ সমষ্টিৰ সমান যিবোৰৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ সমূহ ক্ৰমে 5 মিটাৰ, 6 মিটাৰ, 8 মিটাৰ আৰু 10 মিটাৰ।

(20) 70 মিটাৰ ব্যাসযুক্ত এখন বৃত্তাকৃতিৰ পথাৰৰ চাৰিওফালে 3.5 মিটাৰ বহল এটি বৃত্তাকৃতিৰ পথ আছে। পথটোৰ কালি উলিওৱা।

(21) দুটা আয়তীয় ঘনকৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা যথাক্ৰমে 30 ছে.মি., 25 ছে.মি., 15 ছে.মি. আৰু 35 ছে.মি., 20 ছে.মি., 12 ছে.মি.। সিহঁতৰ পৃষ্ঠকালি তুলনা কৰা। ঘনক

দুটাৰ ভিতৰত কাৰ আয়তন অধিক?

(22) 60 ছে.মি. × 40 ছে.মি. × 20 ছে.মি. জোখৰ 25 টা চুটকেছৰ 'কভাৰ' তৈয়াৰ কৰিবলৈ 110 ছে.মি. প্ৰস্থযুক্ত কিমান দৈৰ্ঘ্যৰ ডাঠ কাপোৰৰ আৱশ্যক হ'ব?

(23) 600 বৰ্গমিটাৰ পৃষ্ঠকালিৰ ঘনক এটাৰ দাঁতি(বাহু)ৰ দৈৰ্ঘ্য উলিওৱা।

(24) 1 মিটাৰ × 1 মিটাৰ জোখৰ বৰ্গাকৃতিৰ ধাতুৰ পাতেৰে 14 মিটাৰ উচ্চতা আৰু 2 মিটাৰ ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা চুঙা তৈয়াৰ কৰিবলৈ তেনে ধাতুৰ পাত কেইখনৰ প্ৰয়োজন হ'ব?

(25) 14 ছে.মি. প্ৰস্থবিশিষ্ট আয়তাকৃতিৰ কাগজ এখন মেৰিয়াই 20 ছে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা চুঙা তৈয়াৰ কৰা হ'ল। চুঙাটোৰ আয়তন কিমান?

(26) এটা চুঙা A ৰ ব্যাস 7 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 14 ছে.মি.। আন এটা চুঙা Bৰ ব্যাস 14 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 7 ছে.মি.। A আৰু B ৰ ভিতৰত কাৰ আয়তন অধিক?

(27) এটা চুঙাৰ উচ্চতা উলিওৱা যাৰ আয়তন 1.54 ঘনমিটাৰ আৰু ভূমিৰ ব্যাস 140 ছে.মি.।

(28) চুঙাৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা যদি ইয়াৰ

(i) ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধ 7 মিটাৰ আৰু উচ্চতা 10 মিটাৰ।

(ii) ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধ 4 মিটাৰ আৰু উচ্চতা 5.6 মিটাৰ।

(iii) ভূমিৰ পৰিসীমা 85 মিটাৰ আৰু উচ্চতা 12 মিটাৰ।

(29) এটা চুঙাৰ ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধ 14 ছে.মি. আৰু উচ্চতা 20 ছে.মি. হলে—

(i) বক্ৰ পিঠিৰ কালি উলিওৱা।

(ii) মুঠ পিঠিকালি উলিওৱা।

(iii) মুঠ আয়তন উলিওৱা।

(30) চুঙাৰ উচ্চতা উলিওৱা যদি —

(i) ভূমি কালি 360 বৰ্গ মিটাৰ আৰু আয়তন 2880 ঘনমিটাৰ।

(ii) ভূমিৰ পৰিসীমা 160 মিটাৰ আৰু বক্ৰ পিঠিৰ কালি 1440 বৰ্গ মিটাৰ হয়।

● ● ●

V8E1A4

বাস্তৱ সংখ্যা
(Real Numbers)

প্ৰথম
অধ্যায়

1.1 অৱতাৰণা (Introduction)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে বাস্তৱ সংখ্যাৰ পৰিজগতখনৰ উদ্‌ঘাটন আৰম্ভ কৰিছিলা আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ সৈতে মুখামুখি হৈছিলা। এই অধ্যায়ত আমি বাস্তৱ সংখ্যাৰ আলোচনাকেই অব্যাহত ৰাখিম। অনুচ্ছেদ 1.2 আৰু 1.3ত আমি যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ দুটা অতি প্ৰয়োজনীয় ধৰ্মৰে বিশেষকৈ ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি (Euclid's division algorithm) আৰু পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যৰে আৰম্ভ কৰিম।

ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি, নামটোৰে কোৱা অনুসাৰেই অখণ্ড সংখ্যাৰ বিভাজ্যতাৰে কাম কৰিবলগীয়া হয়। চমুকৈ বৰ্ণালে, ই হ'ল— যি কোনো এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা aক অইন এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা b ৰে এনেদৰে ভাগ কৰিব পাৰি যাতে ই b তকৈ সৰু এটা ভাগশেষ r বাকী এৰে। তোমালোকৰ বহুতেই সম্ভৱতঃ ইয়াক এটা দীঘলীয়া ভাগ প্ৰক্ৰিয়া ৰূপেহে চিনি পোৱা। যদিও এই ফলটো বৰ্ণনা কৰা আৰু বুজি পোৱাত সহজ, ইয়াৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ বিভাজ্যতাৰ ধৰ্ম সম্পৰ্কীয় বহুতো প্ৰয়োগ আছে। আমি সেইবোৰৰ কেইটামান আলোচনা কৰিম আৰু ইয়াক প্ৰধানকৈ দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গ.সা.উ. নিৰ্ণয় কৰাত ব্যৱহাৰ কৰিম।

আনহাতে, পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যই দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণন সম্পৰ্কে কিছুমান কাম কৰাত সহায় কৰে। তোমালোকে ইতিমধ্যেই জানিছা যে— প্ৰতিটো যৌগিক সংখ্যাকে (composite number) কেতবোৰ মৌলিক সংখ্যাৰ পূৰণফল হিচাপে এক অদ্বিতীয় ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি— এই দৰকাৰী সত্যটোৰে হ'ল **পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য**। আকৌ এই ফলটো যিদৰে বৰ্ণাবলৈ আৰু বুজিবলৈ সহজ, একেদৰে গণিতৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ কিছুমান গভীৰ আৰু তাৎপৰ্যপূৰ্ণ প্ৰয়োগ আছে। পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটোক আমি প্ৰধানকৈ দুটা মুখ্য প্ৰয়োগৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰোঁ। প্ৰথমতে আমি ইয়াক তোমালোকে নৱম

শ্ৰেণীতে অধ্যয়ন কৰা $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ আৰু $\sqrt{5}$ৰ দৰে বহুতো সংখ্যাৰ অপৰিমেয়ত্ব প্ৰমাণৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰোঁ। দ্বিতীয়তে, এটা পৰিমেয় সংখ্যা যেনে $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ক কেতিয়া সাবধি (পৰিসমাপ্ত) (terminating) আৰু কেতিয়া ইয়াক নিৰবধি (অপৰিসমাপ্ত) পৌনঃপুনিক (non-terminating repeating) দশমিকত সঠিককৈ বিস্তাৰ কৰিব পাৰি তাৰ উদ্‌ঘাটনত আমি এই উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰিম। আমি সেইটো $\frac{p}{q}$ৰ হৰ q ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণক লক্ষ্য কৰি কৰিম। তোমালোকে দেখিবলৈ পাবা যে q ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণে $\frac{p}{q}$ৰ দশমিক বিস্তাৰৰ প্ৰকৃতি সম্পূৰ্ণভাবে প্ৰকাশ কৰিব।

গতিকে, আমি আমাৰ উদ্‌ঘাটন আৰম্ভ কৰোঁ আহা।

1.2 ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা (Euclid's Division Lemma)

তলৰ লোক-সাঁথৰটো লোৱা*.

এজন বেপাৰীয়ে কণী বেছি বাস্তাৰে গৈ আছিল। এজন কাম বন নোহোৱা ধোদ (নিষ্কৰ্মা) এজনে বেপাৰীটোৰ লগত কথাৰ তৰ্কাতৰ্কি আৰম্ভ কৰিলে। ইয়ে গৈ কাজিয়াত পৰিণত হ'ল। সি কণীৰ পাচিটো টনাটনি কৰি মাটিত বগৰাই দিলে। কণীবোৰ ভাগি থাকিল। বেপাৰীজনে পঞ্চায়তক কাবৌ কৰিলে ধোদজনক ভগা কণীৰ মূল্য পৰিশোধ কৰাবলৈ। পঞ্চায়তে বেপাৰীজনক সুধিলে, কিমান কণী ভাগিছিল? বেপাৰীয়ে তলত দিয়া উত্তৰবোৰ দিলে—

'যদি যুৰীয়াকৈ গণো, বাকী থাকে এটা;
যদি তিনিটাকৈ গণো, বাকী থাকে দুটা;
যদি চাৰিটাকৈ গণো, বাকী থাকে তিনিটা;
যদি পাঁচটাকৈ গণো, বাকী থাকে চাৰিটা;
যদি ছয়টাকৈ গণো, বাকী থাকে পাঁচটা;
যদি সাতটাকৈ গণো, বাকী নাথাকে এটাও,

মোৰ পাচিটোত পিছে 150 টাতকৈ বেছি কণী নধৰে।'

গতিকে তাত কিমানটা কণী আছিল? আমি চেষ্টা কৰি সাঁথৰটো সমাধা কৰোঁ আহা। ধৰা কণীৰ সংখ্যা a। তেন্তে, বিপৰীত মুখে হিচাপ কৰি আমি পাওঁ যে a, 150 তকৈ সৰু বা সমান।

* এ. ৰামপাল আৰু অইন কিছুমানৰ 'Numeracy Counts'ত দিয়া সাঁথৰ এটাৰ ই ৰূপভেদ (modification)।

যদি সাতটাকৈ গণা হয়, তেন্তে এটাও বাকী নাথাকে। ইয়াৰ অৰ্থ, $a = 7p + 0$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা pৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি ছয়টাকৈ গণা হয়, পাঁচটা ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ, $a = 6q+5$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা qৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি পাঁচটাকৈ গণা হয়, চাৰিটা ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ, $a = 5w + 4$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা wৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি চাৰিটাকৈ গণা হয়, তিনিটা বাকী ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ $a = 4s + 3$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা s ৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি তিনিটাকৈ গণা হয়, দুটা বাকী ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ $a = 3t + 2$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা t ৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি দুটাকৈ গণা হয়, এটা বাকী ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ $a = 2u + 1$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা uৰ ক্ষেত্ৰত। অৰ্থাৎ, প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে, আমি পাওঁ a আৰু এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা b (আমাৰ উদাহৰণত b য়ে যথাক্ৰমে 7, 6, 5, 4, 3 আৰু 2 মানবোৰ গ্ৰহণ কৰিছে), যিয়ে a ক হৰণ কৰে আৰু b তকৈ সৰু এটা সংখ্যা r বাকী ৰাখে (আমাৰ ক্ষেত্ৰত r য়ে যথাক্ৰমে 0, 5, 4, 3, 2 আৰু 1 হৈছে)। বাস্তৱিকতে এনেবোৰ সমীকৰণ লিখাৰ প্ৰতি মুহূৰ্ততে আমি 1.1 উপপাদ্যত দিয়া ইউক্লিডৰ বিভাজ্যতাৰ প্ৰমেয়িকাটো ব্যৱহাৰ কৰি আহিছো।

সাঁথৰটোলৈ আকৌ উভতিলে, ইয়াৰ সমাধানৰ কিবা ধাৰণা তোমাৰ আছে নেকি? এৰা! তুমি 7ৰ গুণিতকবোৰ চাব লাগিব যিয়ে আটাইবোৰ চৰ্ত সিদ্ধ কৰে। (ল.সা.গু.ৰ ধাৰণাৰে) প্ৰয়াস-প্ৰমাদ প্ৰণালীৰে (trail and error method) তুমি পাবা যে বেপাৰীজনৰ 119 টা কণী আছিল।

ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা কি তাক অনুভৱ কৰিবলৈ তলৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোৰকেইটালৈ মন কৰা—

17, 6;   5, 12;   20, 4

উদাহৰণটোত কৰাৰ দৰে, আমি এনে প্ৰতিটো যোৰৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ সম্পৰ্কবোৰ লিখিব পাৰোঁঃ

$17 = 6 \times 2 + 5$ (6 য়ে 17ৰ ভিতৰত দুবাৰ যায় আৰু 5 এটা বাকী ৰাখে)

$5 = 12 \times 0 + 5$ (এই সম্পৰ্কটো খাটে যিহেতু 12, 5 তকৈ ডাঙৰ)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (ইয়াত 4, 20 ৰ ভিতৰত পাঁচবাৰ যায় আৰু কোনো বাকী নেৰাখে)

অৰ্থাৎ যোগাত্মক অখণ্ড a আৰু bৰ প্ৰতিযোৰৰ ক্ষেত্ৰতে আমি পূৰ্ণ সংখ্যা q আৰু r বিচাৰি পাম যাতে

$a = bq + r, 0 \le r < b$

এই সম্পৰ্কটো সিদ্ধ হয়। **মন কৰা** যে q বা r শূন্যও হ'ব পাৰে।

তলৰ অখণ্ড a আৰু b যোগাত্মক প্ৰতিযোৰ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত এতিয়া তোমালোকে q আৰু r অখণ্ড সংখ্যা দুটাকৈ উলিয়াব চেষ্টা নকৰা কিয়?

(i) 10, 3; (ii) 4, 19; (iii) 81, 3

তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছিলা নেকি যে q আৰু r অদ্বিতীয়? ইহঁত দুটা একমাত্ৰ অখণ্ড সংখ্যা যিয়ে $a = bq + r$, য'ত $0 \leq r < b$, এই সম্পৰ্কবোৰ সিদ্ধ কৰে। তোমালোকে হয়তো আৰু অনুভৱ কৰিছা যে এইটো তোমালোকে ইমান বছৰে কৰি অহা দীৰ্ঘ হৰণ প্ৰণালীৰ পুনৰবিবৃতিৰ বাহিৰে একো নহয় আৰু q আৰু r অখণ্ড সংখ্যা দুটাও যথাক্ৰমে ভাগফল আৰু ভাগশেষৰ বাহিৰে একো নহয়।

এই ফলটোৰ এটা বিধিগত বিবৃতি তলত দিয়াৰ দৰে হ'ব

উপপাদ্য (Theorem) 1.1 (ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা) ঃ দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b, দিয়া থাকিলে এনে দুটা অদ্বিতীয় সংখ্যা q আৰু r থাকিব যাতে $a = bq + r, 0 \leq r < b$।

এই ফলটো সম্ভৱতঃ বহু আগৰে পৰাই জনাজাত আছিল কিন্তু ইয়াক ইউক্লিডৰ এলিমেণ্টছৰ VII কিতাপখনত প্ৰথমে অভিলেখন কৰা হৈছিল। ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি এই প্ৰমেয়িকাটোৰ ওপৰতে ভিত্তি কৰা হৈছে।

কিছুমান সুসজ্জিত ক্ষেপৰ (স্তৰৰ) এটা শ্ৰেণীয়েই এটা **কলনবিধি (algorithm)** যিয়ে কোনো এক বিশেষ ধৰণৰ সমস্যা সমাধানৰ বাবে এটা প্ৰণালী আগবঢ়ায়।

নৱম শতিকাৰ পাৰ্চী গণিতজ্ঞ অল-খোৱাৰি জমীৰ নামটোৰ পৰাই 'এলগ'ৰিথিম' অৰ্থাৎ 'কলনবিধি' শব্দটোৰ উৎপত্তি হয়। প্ৰকৃততে, 'এলজেব্ৰা' (বীজগণিত) শব্দটোও আনকি তেওঁ লিখা 'হিচাব অল-জাবৰ ৱাল-মুকাবলা' নামৰ কিতাপ এখনৰপৰা ওলোৱা।

প্ৰমেয়িকা (lemma) এটা প্ৰমাণিত বিবৃতি যাক অইন বিবৃতি এটা প্ৰমাণ কৰাৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

মহম্মদ ইবল মুচা অল-খোৱাৰি জমা
(খৃষ্টাব্দ 780 – 850)

ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গৰিষ্ঠ সাধাৰণ উৎপাদক (গ.সা.উ.) উলিওৱাৰ এটা কৌশল। মনত পেলোৱা যে দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ গ.সা.উ.

হ'ল a আৰু b উভয়কে হৰণ কৰা আটাইতকৈ ডাঙৰ যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা d।

এটা উদাহৰণৰ সহায়ত প্ৰথমে আমি চাওঁ আহা কলনবিধি এটাই কিদৰে কাম কৰে। ধৰা আমি 455 আৰু 42ৰ গ.সা.উ. উলিয়াব লাগে। আমি দুয়োটাৰে ডাঙৰ সংখ্যাটো, অৰ্থাৎ 455 ৰে আৰম্ভ কৰো। পিছত আমি ইউক্লিডৰ প্ৰমেয়িকা ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

এতিয়া ভাজক 42 আৰু ভাগশেষ 35 লোৱা। বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

এতিয়া ভাজক 35 আৰু ভাগশেষ 7 লোৱা। বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

লক্ষ্য কৰা যে ভাগশেষ শূন্য হ'ল আৰু আমি আগলৈ আগবাঢ়িব নোৱাৰিম। আমি কম যে, 455 আৰু 42 ৰ গ.সা.উ. এই পৰ্যায়ত সিহঁতৰ ভাজকটো অৰ্থাৎ 7। তোমালোকে 455 আৰু 42ৰ আটাইবোৰ উৎপাদকৰ তালিকা উলিয়াই এইটো সহজে সত্যাপন কৰি চাব পাৰিবা। এই পদ্ধতিটো বাৰু কিয় কাৰ্যকাৰী হয়? তলৰ ফলটোৰ বাবেই ই কাৰ্যকৰী হয়। সেয়ে, আমি স্পষ্টভাৱে **ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি**টো বৰ্ণাই লওঁ আহা।

দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, ধৰা c আৰু dৰ, যাতে $c > d$, গ.সা.উ. পাবলৈ তলৰ সোপান (পৰ্যায়)কেইটা অনুসৰণ কৰা ঃ

সোপান (Step)1 : c আৰু dত ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা। তেতিয়া আমি পূৰ্ণ সংখ্যা q আৰু r পাম যাতে $c = dq + r,\ 0 \le r < d$.

সোপান (Step) 2 : যদি $r = 0$, তেন্তে c আৰু dৰ গ.সা.উ. d। যদি $r \neq 0$, তেন্তে d আৰু rত বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা।

সোপান (Step) 3 : ভাগশেষ শূন্য পোৱালৈকে এই প্ৰণালীটো অব্যাহত ৰাখা। এই পৰ্যায়ত পোৱা ভাজকটোৱে হ'ব নিৰ্ণেয় গ.সা.উ.।

কলনবিধিটো কাৰ্যকৰী হ'ব কাৰণ গ.সা.উ.(c, d) = গ.সা.উ. (d, r) য'ত গ.সা.উ. (c, d) প্ৰতীকে c আৰু dৰ গ.সা.উ. বুজায় ইত্যাদি।

উদাহৰণ 1 : ইউক্লিডৰ কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰি 4052 আৰু 12576ৰ গ.সা.উ. উলিওৱা।

সমাধান ঃ

সোপান (Step) 1 : যিহেতু 12576 > 4052, আমি 12576 আৰু 4052ৰ ওপৰত বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

সোপান (Step) 2 : যিহেতু ভাগশেষ $420 \neq 0$, আমি 4052 আৰু 420ৰ ওপৰত বিভাজন

প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

সোপান (Step) 3 : আমি নতুন ভাজক 420 আৰু নতুন ভাগশেষ 272 বাচি লৈ আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

আকৌ নতুন ভাজক 272 আৰু নতুন ভাগশেষ 148 বিবেচনা কৰি আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

নতুন ভাজক 148 আৰু নতুন ভাগশেষ 124 বিবেচনা কৰি আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

একেদৰে নতুন ভাজক 124 আৰু নতুন ভাগশেষ 24 বিবেচনা কৰি আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰযোগ কৰি আমি পাওঁ,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

আকৌ নতুন ভাজক 24 আৰু নতুন ভাগশেষ 4 লৈ আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ইয়াত ভাগশেষ এতিয়া শূন্য হ'ল, গতিকে আমাৰ প্ৰণালীও বন্ধ হ'ব। যিহেতু এই পৰ্যায়ত ভাজক 4, গতিকে 12576 আৰু 4052ৰ গ.সা.উ. 4

লক্ষ্য কৰা যে 4 = গ.সা.উ. (24, 4) = গ.সা.উ. (124, 24) = গ.সা.উ. (148, 124)
= গ.সা.উ. (272, 148) = গ.সা.উ. (420, 272)
= গ.সা.উ. (4052, 420) = গ.সা.উ. (12576, 4052)

ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি অকল বৰ ডাঙৰ সংখ্যাৰ গ.সা.উ. উলিওৱাৰ কাৰণেহে যে উপকাৰী এনে নহয়, কিন্তু এটা কম্পিউটাৰে পালন কৰিবলগীয়া প্ৰগ্ৰেমিঙৰ কলনবিধিৰ আদিম উদাহৰণবোৰৰ ভিতৰত ইও এটা।

মন্তব্য (Remark) ঃ

1. ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা আৰু কলনবিধি ইমান ঘনিষ্ঠভাৱে জড়িত যে মানুহে প্ৰায়েই প্ৰথমটোকে বিভাজন কলনবিধি বুলিও কয়।

2. যদিও ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধিক অকল যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ কাৰণেহে বৰ্ণোৱা হৈছে, ইয়াক শূন্যৰ বাহিৰে অৰ্থাৎ $b \neq 0$, আটাইবোৰ অখণ্ড সংখ্যালৈকে বিস্তাৰ কৰিব

পাৰি। যিয়েই নহওক, আমি এই দিশটোৰ বিষয়ে ইয়াত আলোচনা নকৰিম।

সংখ্যাৰ ধৰ্ম নিৰ্ণয় সম্পৰ্কত ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা/কলনবিধিৰ অজস্ৰ প্ৰয়োগ আছে। আমি তাৰে কেইটামান উদাহৰণ তলত দিলো ঃ

উদাহৰণ 2 : দেখুওৱা যে প্ৰত্যেক যোগাত্মক যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $2q$ আৰ্হিৰ আৰু প্ৰত্যেক যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাই $2q + 1$ আৰ্হিৰ, য'ত q কোনোবা অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান ঃ ধৰা a যিকোনো যোগাত্মক সংখ্যা আৰু $b = 2$। তেন্তে ইউক্লিডৰ কলনবিধিৰ সহায়ত $a = 2q + r$; য'ত $q \geq 0$, আৰু $r = 0$ বা $r = 1$, কাৰণ $0 \leq r < 2$। গতিকে $a = 2q$ বা $a = 2q + 1$।

যদি $a = 2q$ আৰ্হিৰ, তেন্তে a এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা। আকৌ এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাই হয় যুগ্ম নাইবা অযুগ্ম। গতিকে যিকোনো যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাই $2q + 1$ আৰ্হিৰ হ'ব।

উদাহৰণ 3 : দেখুওৱা যে যিকোনো যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখাই $4q + 1$ নাইবা $4q + 3$ আৰ্হিৰ য'ত q কোনোবা এটা অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান ঃ আমি এটা যোগাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা a ৰে আৰম্ভ কৰোহঁক। আমি এইটো a লৈ আৰু $b = 4$ ধৰি বিভাজন কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰোঁ।

যিহেতু $0 \leq r < 4$, যোগাত্মক ভাগশেষবোৰ 0, 1, 2 আৰু 3 অৰ্থাৎ a য়ে $4q$ বা $4q+1$ বা $4q + 2$ নাইবা $4q + 3$ হে হ'ব পাৰে য'ত q ভাগফল। যিয়েই নহওঁক, যিহেতু a অযুগ্ম, a য়ে $4q$ বা $4q + 2$ হ'ব নোৱাৰে (যিহেতু ইহঁত দুয়ো 2 ৰে বিভাজ্য)। গতিকে যিকোনো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $4q + 1$ নাইবা $4q + 3$ আৰ্হিৰ।

উদাহৰণ 4 : এজন মিঠাই বেপাৰীৰ 420 টা কাজু বৰফি আৰু 130 টা বাদাম বৰফি আছে। তেওঁ সেইবোৰ কেইটামান থাকত এনেদৰে সজাব বিচাৰিলে যে প্ৰতিটো থাকতে সমান সংখ্যক মিঠাই থাকে আৰু ট্ৰেখনত এইবোৰে আটাইতকৈ কম ঠাই আগুৰে। এই উদ্দেশ্যৰে থাকবোৰ সজাব খুজিলে প্ৰতিটো থাকতে কিমান সংখ্যক মিঠাই থাকিব?

সমাধান ঃ প্ৰয়াস-প্ৰমাদ প্ৰণালীৰ সহায়ত এইটো সমাধান কৰিব পাৰি। কিন্তু পদ্ধতিযুক্তভাৱে কৰিবলৈ আমি গ.সা.উ. (420, 130) উলিয়াব লাগিব। তেতিয়া এই সংখ্যাটোৱে প্ৰতিটো থাকতে সৰ্বোচ্চ সংখ্যক বৰফি দিব আৰু থাকৰ সংখ্যাও নিম্নতম হ'ব।

এতিয়া সংখ্যা দুটাৰ গ.সা.উ. নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি ইউক্লিডৰ কলনবিধি ব্যৱহাৰ কৰোঁহক। আমি পাওঁ—

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

$\therefore$ 420 আৰু 130 ৰ গ.সা.উ. হ'ব 10।

গতিকে মিঠাই বিক্ৰেতাজনে দুয়োধৰণৰ বৰফিকে 10 টাকৈ প্ৰতিটো থাকতে সজাব।

অনুশীলনী 1.1

1. ইউক্লিডৰ কলনবিধি ব্যৱহাৰ কৰি গ.সা.উ. উলিওৱা—

(i) 135 আৰু 225 (ii) 196 আৰু 38220 (iii) 867 আৰু 255

(iv) 272 আৰু 1032 (v) 405 আৰু 2520 (vi) 155 আৰু 1385

(vii) 384 আৰু 1296 (viii) 1848 আৰু 4058

2. দেখুওৱা যে যিকোনো যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাই $6q + 1$, বা $6q + 3$, বা $6q+5$ আৰ্হিৰ, য'ত q এটা কোনোবা অখণ্ড সংখ্যা।

3. 616 সদস্যৰ এটা সৈন্যবাহিনীৰ গোটে 32 জনীয়া এটা সেনাদলৰ পিছে পিছে কদম-খোজ কাঢ়ি কাঢ়ি যাবলগীয়া হ'ল। দুয়োটা দলেই একে সমান সংখ্যক স্তম্ভত কদম-খোজ কাঢ়িবলগীয়া হ'ল। তেওঁলোকে খোজ কাঢ়িবলগীয়া স্তম্ভৰ উচ্চতম সংখ্যা কি হ'ব?

4. ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে যিকোনো যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গই হয় $3m$ নাইবা $3m + 1$ আৰ্হিৰ, য'ত m এটা কোনোবা অখণ্ড সংখ্যা। [**ইংগিত** ঃ ধৰা x এটা যিকোনো যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেন্তে ইয়াৰ আৰ্হি হ'ব $3q$, $3q + 1$ বা $3q + 2$ এতিয়া ইহঁতৰ প্ৰতিটোকে বৰ্গ কৰা আৰু দেখুওৱা যে সিহঁতক $3m$ বা $3m + 1$ আৰ্হিত লিখিব পাৰি।]

5. ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে যি কোনো যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ ঘনফলটো $9m$, $9m + 1$ নাইবা $9m + 8$ আৰ্হিৰ।

6. হিমাদ্ৰীয়ে 625 টা ভাৰতীয় আৰু 325 টা আন্তঃৰাষ্ট্ৰীয় ডাকটিকট সংগ্ৰহ কৰিলে। তাই এইবোৰ এক বিশেষ থূপত ৰাখি প্ৰদৰ্শন কৰিবলৈ বিচাৰে যাতে এটাও ডাকটিকট বৈ নাযায়। হিমাদ্ৰীয়ে সৰ্বাধিক কিমানটা থূপত ডাকটটিকটবোৰ প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰিব?

7. দুডাল ৰছীৰ দৈৰ্ঘ্য ক্ৰমে 64 ছে.মি. আৰু 80 ছে.মি.। দুয়োডালৰ পৰা সমান দৈৰ্ঘ্যৰ টুকুৰা কাটি উলিয়াব লাগে। অকণো বৈ নোযোৱাকৈ দুয়োডাল ৰছীৰ পৰা কাটি উলিয়াব পৰা তেনে টুকুৰাৰ সৰ্বাধিক দৈৰ্ঘ্য কিমান হ'ব?

1.3. পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য (The Fundamental Theorem of Arithmetic)

আগৰ শ্ৰেণীবোৰত তোমালোকে দেখিছা যে যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যাকে ইয়াৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰৰ পূৰণফল হিচাপে লিখিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ আৰু ইত্যাদি। এতিয়া আমি স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰক অইনটো দিশৰ পৰা চাবলৈ চেষ্টা কৰো আহা। যেনে ধৰা, যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা কিছুমানক পূৰণ কৰি পাব পাৰিনে? আমি চাওঁ।

যিকোনো মৌলিক সংখ্যা কিছুমান লোৱা, যেনে— 2, 3, 7, 11 আৰু 23। আমি যদি ইয়াৰে কিছুমান নাইবা আটাইবোৰকে পূৰণ কৰোঁ আৰু একোটাকে যিমান ইচ্ছা সিমানবাৰেই পূৰণ কৰোঁ, তেন্তে আমি এক বৃহৎ সংখ্যক যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা উৎপন্ন কৰিব পাৰোঁ (প্ৰকৃততে, অসীমভাৱে অজস্ৰ)। আমি সিহঁতৰ কেতবোৰ এইদৰে দেখুৱাব পাৰোঁ—

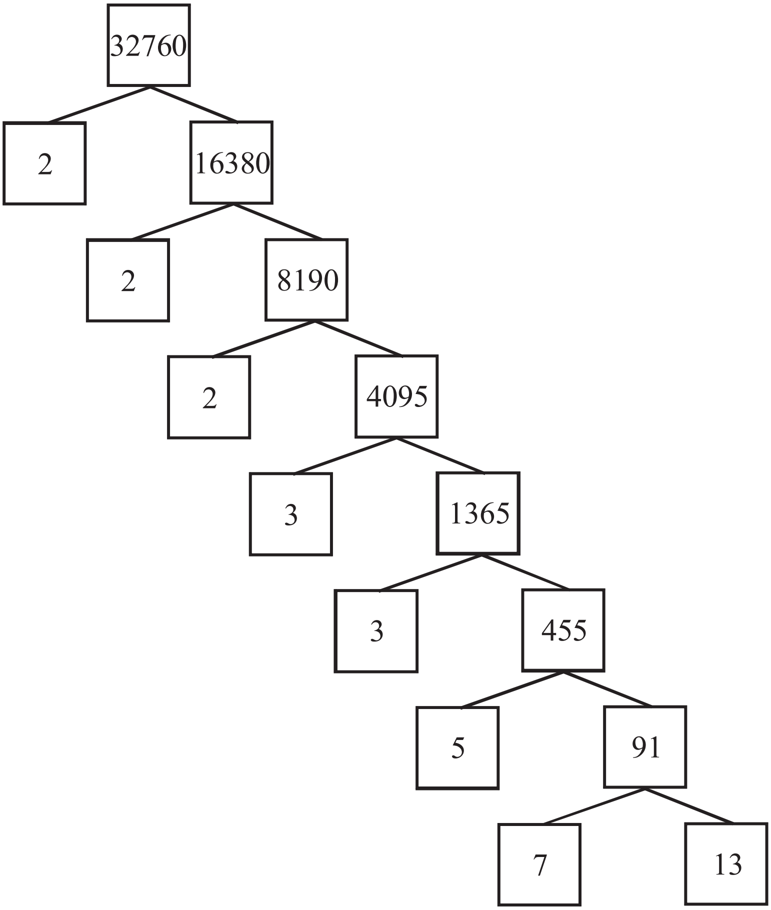
$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\qquad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\qquad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ইত্যাদি বহুতো।

এতিয়া ধৰা তুমি লোৱা মৌলিক সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটোত সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ মৌলিক সংখ্যা আছে। এই সংগ্ৰহটোৰ আকাৰ সম্বন্ধে তোমাৰ ধাৰণা কি? ইয়াত কেৱল সসীম সংখ্যক অখণ্ড সংখ্যা থাকিব, নে অসীম সংখ্যক? প্ৰকৃততে মৌলিক সংখ্যা অসীম সংখ্যক আছে। গতিকে, যদি আমি এই মৌলিক সংখ্যাবোৰ সকলো সম্ভৱপৰ ধৰণে লগ লগাওঁ, আমি অসীম সংখ্যক সংখ্যাৰ এটা সংগ্ৰহ পাম, আটাইবোৰ মৌলিক আৰু মৌলিকৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ গুণফল। প্ৰশ্নটো হ'ল— এইদৰে আমি আটাইবোৰ যৌগিক সংখ্যাকেই উৎপন্ন কৰিব পাৰো নেকি; তোমালোকে কি ভাবা? তোমালোকে ভাবা নেকি যে এনে এটা যৌগিক সংখ্যা থাকিব পাৰে যি মৌলিকৰ ঘাতবোৰৰ গুণফল নহয়? এইটোৰ উত্তৰ দিয়াৰ আগতে, আমি যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ উৎপাদক উলিয়াওঁ, অৰ্থাৎ আমি এতিয়ালৈ যি কৰিছো তাৰ বিপৰীতটো কৰোঁ আহা।

তোমালোক আটাইৰে পৰিচিত উৎপাদক বৃক্ষকে আমি ব্যৱহাৰ কৰিব গৈছো। আমি এটা ডাঙৰ সংখ্যা লওঁ, ধৰা 32760, আৰু ইয়াক তলত দিয়া ধৰণে উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰোঁ ঃ



গতিকে আমি 32760 ক মৌলিকৰ গুণফল হিচাপে $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$, অৰ্থাৎ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ বা মৌলিকৰ ঘাতৰ গুণফলৰূপে উৎপাদকত ভাঙিব পাৰো। আমি অইন এটা সংখ্যা চেষ্টা কৰি চাওঁ; ধৰা 123456789, ইয়াক এইদৰে লিখিব পাৰি— $3^2 \times 3803 \times 3607$। অৱশ্যে তুমি পৰীক্ষা কৰিব লাগিব যে 3803 আৰু 3607 মৌলিক! (নিজে অইন কেবাটাও স্বাভাৱিক সংখ্যা লৈ চেষ্টা কৰা) ইয়ে আমাক এটা অনুমানলৈ লৈ যাব যে, প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যাৰ ঘাতৰ গুণফল ৰূপে লিখিব পাৰি। প্ৰকৃততে, এই বিবৃতিটো সত্য আৰু অখণ্ড সংখ্যাৰ অধ্যয়নত ইয়াৰ মৌলিক নিৰ্ণায়ক গুৰুত্বপূৰ্ণ ভূমিকাৰ বাবে ইয়াক বোলা হয় **পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য**। এতিয়া আমি বিধিগতভাৱে এই উপপাদ্যটো বৰ্ণনা কৰোঁ আহা ঃ

উপপাদ্য (Theorem) 1.2 (পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য) ঃ *প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকেই মৌলিকৰ গুণফল হিচাপে প্ৰকাশ (উৎপাদকত) কৰিব পাৰি; আৰু মৌলিক উৎপাদকবোৰ প্ৰকাশ পোৱা ক্ৰমৰ বাহিৰে এই উৎপাদকীকৰণ অদ্বিতীয়।*

উপৰিউক্ত 1.2 উপপাদ্যটো এনেদৰে পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যৰূপে জনাজাত হোৱাৰ আগতেই ইয়াৰ এটা সমাৰ্থক উক্তি সম্ভৱতঃ ইউক্লিডৰ এলিমেণ্টছৰ কিতাপ IX ৰ সম্পাদ্য 14 ত উল্লেখিত হৈছিল। হ'লেও, ইয়াৰ প্ৰথম শুদ্ধ প্ৰমাণটো কাৰ্ল ফ্ৰেড্‌ৰিক গাউছে তেওঁৰ 'ডিচ্‌কুইজিচন্‌চ এৰিথমেটিকা'ত দাঙি ধৰিছিলি।

কাৰ্ল ফ্ৰেড্‌ৰিক গাউছক প্ৰায়েই 'গণিতজ্ঞসকলৰ ৰাজকুমাৰ' বুলি অভিহিত কৰা হয়। আৰ্কিমিডিচ্ আৰু নিউটনৰ সৈতে গাউছক সৰ্বকালৰ শ্ৰেষ্ঠ গণিতজ্ঞ তিনিজনৰ ভিতৰত এজন বুলি মনা হয়। তেওঁ গণিত আৰু বিজ্ঞান উভয়তে বহুতো মৌলিক অৱদান আগবঢ়াই গৈছে।

কাৰ্ল ফ্ৰেড্‌ৰিক গাউছ
(1777 – 1855)

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটোৱে কৈছে যে প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকেই মৌলিক সংখ্যাৰ গুণফলৰূপে উৎপাদকত ভাঙিব পাৰি। প্ৰকৃতাৰ্থত ই তাতোকৈ বেছিকৈ কয়। ইয়েই কয় যে প্ৰদত্ত যিকোনো এটা যৌগিক সংখ্যাক মৌলিক সংখ্যাৰ গুণফলৰূপে আৰু মৌলিক উৎপাদকবোৰ প্ৰকাশ পোৱা ক্ৰমৰ বাহিৰে ইয়াক এক অদ্বিতীয়ভাৱে উৎপাদকত ভাঙিব পাৰি। অৰ্থাৎ যিকোনো এটা যৌগিক সংখ্যা দিয়া থাকিলে, ইয়াৰ মৌলিকবোৰৰ ক্ৰম সম্পৰ্কে বিশেষভাৱে ধ্যান দিয়া নোহোৱালৈকে তাক এক আৰু মাত্ৰ এক ধৰণেহে মৌলিকৰ গুণফলৰূপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। সেয়ে, উদাহৰণস্বৰূপে, $2 \times 3 \times 5 \times 7$ গুণফলটোক $3 \times 5 \times 7 \times 2$ নাইবা অইন যিকোনো সম্ভৱপৰ ক্ৰমত মৌলিকবোৰ লিখা থাকিলেও আমি একেই বুলি ধৰিম। এই সত্যটোক তলত দিয়া ধৰণেও বৰ্ণোৱা হয় ঃ

উৎপাদকবোৰৰ ক্ৰমৰ বাহিৰে, এটা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ অদ্বিতীয়।

সাধাৰণতে, এটা যৌগিক সংখ্যা x দিয়া থাকিলে, আমি ইয়াক $x = p_1p_2 \ldots p_n$, য'ত $p_1, p_2, \ldots, p_n$ বোৰ মৌলিক আৰু উৰ্ধ্বক্ৰমত লিখা হয়, অৰ্থাৎ $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$. একেবোৰ মৌলিককে যদি আমি লগ লগাওঁ, আমি মৌলিকৰ ঘাত পাম। উদাহৰণস্বৰূপে,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

ক্ৰমটো উৰ্ধহাৰত থকাটো এবাৰ সিদ্ধান্ত কৰি ল'লে যি ধৰণে সংখ্যাটো উৎপাদকীকৰণ হয় সেইটো অদ্বিতীয়।

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটোৰ প্ৰয়োগ গণিতৰ ভিতৰ আৰু বাহিৰা ক্ষেত্ৰতো বহুতো আছে। আমি কেইটামান উদাহৰণলৈ চকু ফুৰাওঁ আহা।

উদাহৰণ 5 ঃ 4^n সংখ্যাবোৰ লোৱাঁ, য'ত n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা। n অৰ এনে কোনো মান আছে নেকি যাতে 4^nৰ মান শূন্য অংকটোৰে শেষ হয়, পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান ঃ n অৰ কোনো মানৰ ক্ষেত্ৰত যদি 4^n সংখ্যাটো শূন্য অংকটোৰে শেষ হ'বলগীয়া হয়, তেন্তে ই 5ৰে বিভাজ্য হ'ব। ইয়াৰ অৰ্থ, 4^nঅৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণত 5 মৌলিক সংখ্যাটো থাকিব। এইটো সম্ভৱ নহয়, কাৰণ $4^n = (2)^{2n}$; অৰ্থাৎ 4^n ৰ উৎপাদকীকৰণত অকল মৌলিক 2হে থাকিব। গতিকে পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যই নিশ্চিত কৰে যে 4^nঅৰ উৎপাদকীকৰণত অইন কোনো মৌলিক উৎপাদক নাই। সেয়ে এনে কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা n নাই যাৰ ক্ষেত্ৰত 4^nয়ে শূন্য অংকেৰে শেষ হয়।

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য সম্পৰ্কে কোনো অনুভৱ নকৰাকৈয়ে তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীবোৰত ইয়াৰ সহায় লৈয়ে কিদৰে দুটা সংখ্যাৰ গ.সা.উ. আৰু ল.সা.গু. উলিয়াব লাগে তাক শিকিছা। এই পদ্ধতিটোক **মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতি** (*prime factorisation method*) বুলিও কোৱা হয়। এটা উদাহৰণেৰে আমি এই পদ্ধতিটো মনত পেলাওঁ আহা।

উদাহৰণ 6 ঃ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে 6 আৰু 20ৰ ল.সা.গু. আৰু গ.সা.উ. উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ, $6 = 2^1 \times 3^1$

আৰু $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

তোমাৰ আগৰ শ্ৰেণীত কৰি অহাৰ দৰে, উলিয়াব পাৰা যে, গ.সা.উ.(6, 20) = 2 আৰু ল.সা.গু.(6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$।

লক্ষ্য কৰা যে, গ.সা.উ.(6, 20) = 2^1 = **সংখ্যা দুটাত থকা প্ৰতিটো সাধাৰণ মৌলিক উৎপাদকৰ ক্ষুদ্ৰতম ঘাতৰ গুণফল।**

ল.সা.গু (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **সংখ্যা দুটাত থকা প্ৰতিটো মৌলিক উৎপাদকৰ বৃহত্তম ঘাতৰ গুণফল।**

ওপৰৰ উদাহৰণৰপৰা তুমি পোৱা যে,

গ.সা.উ (6, 20) × ল.সা.গু. (6, 20) = 6×20।

প্ৰকৃততে আমি সত্যাপন কৰিব পাৰোঁ যে—

যিকোনো দুটা অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ ক্ষেত্ৰত গ.সা.উ. (a, b) × ল.সা.গু. $(a, b) = a \times b$।

দুটা অখণ্ড সংখ্যাৰ ল.সা.গু উলিয়াবলৈ আমি এই ফলটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ যদিহে আমি এই অখণ্ড সংখ্যা দুটাৰ গ.সা.উ. ইতিমধ্যে পাইছোঁ।

উদাহৰণ 7 ঃ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে 96 আৰু 404ৰ গ.সা.উ. উলিওৱা। ইয়াৰপৰা সিহঁতৰ ল.সা.গু. উলিওৱা।

সমাধান ঃ 96 আৰু 404ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণে দিব

$96 = 2^5 \times 3, \qquad 404 = 2^2 \times 101$

গতিকে এই অখণ্ড সংখ্যা দুটাৰ গ.সা.উ. হ'ব $= 2^2 = 4$।

আকৌ ল.সা.গু. $(96, 404) = \dfrac{96 \times 404}{\text{গ.সা.উ.}\ (96, 404)} = \dfrac{96 \times 404}{4} = 9696$

উদাহৰণ 8 ঃ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে 6, 72 আৰু 120ৰ গ.সা.উ. আৰু ল.সা.গু. উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ

$6 = 2 \times 3, \qquad 72 = 2^3 \times 3^2, \qquad 120 = 2^3 \times 3 \times 5$

ইয়াত 2^1 আৰু 3^1 দুয়ো যথাক্রমে 2 আৰু 3 এই সাধাৰণ উৎপাদক দুটাৰ নিম্নতম ঘাত।

গতিকে, গ.সা.উ. (6, 72, 120) $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

সংখ্যা তিনিটা থকা 2, 3, আৰু 5 এই মৌলিক উৎপাদককেইটাৰ যথাক্রমে 2^3, 3^2 আৰু 5^1 বৃহত্তম ঘাত।

গতিকে ল.সা.গু. (6, 72, 120) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$।

মন্তব্য (Remark) ঃ মন কৰা, $6 \times 72 \times 120 \neq$ গ.সা.উ. (6, 72, 120) $\times$ ল.সা.গু. (6, 72, 120)। গতিকে সংখ্যা তিনিটাৰ গুণফলটো সিহঁতৰ গ.সা.উ. আৰু ল.সা.গু.ৰ গুণফলৰ সমান নহ'ব পাৰে।

অনুশীলনী 1.2

1. প্ৰতিটো সংখ্যাকে ইয়াৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰৰ গুণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা ঃ

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. তলৰ অখণ্ড সংখ্যাকেইযোৰৰ ল.সা.গু. আৰু গ.সা.উ. উলিওৱা। সত্যাপন কৰা যে ল.সা.গু. $\times$ গ.সা.উ. $=$ সংখ্যাদুটাৰ গুণফল।

(i) 26 আৰু 91 (ii) 510 আৰু 92 (iii) 336 আৰু 54

3. মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে তলৰ অখণ্ড সংখ্যাবোৰৰ ল.সা.গু. আৰু গ.সা.উ. উলিওৱা।

(i) 12, 15 আৰু 21 (ii) 17, 23 আৰু 29 (iii) 8, 9 আৰু 25

4. দিয়া আছে গ.সা.উ. (306, 657) = 9। ল.সা.গু. (306, 657) উলিওৱা।

5. পৰীক্ষা কৰা, কোনোবা স্বাভাৱিক সংখ্যা n অৰ ক্ষেত্ৰত 6^n সংখ্যাটো 0 অংকেৰে শেষ হ'ব পাৰেনে নাই।

6. $7 \times 11 \times 13 + 13$ আৰু $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ সংখ্যা দুটা কিয় যৌগিক সংখ্যা, ব্যাখ্যা কৰা।

7. এখন খেল পথাৰৰ চাৰিওপিনে এটা বৃত্তাকাৰ পথ। খেল পথাৰখন গাড়ীৰে এবাৰ ঘূৰিবলৈ ছোনিয়াৰ 18 মিনিট লাগে, য'ত একেটা ঘূৰণতে ৰবিৰ লাগে 12 মিনিট। ধৰা তেওঁলোকে একেটা বিন্দুতে একে সময়তে আৰু একেটা দিশত যাত্ৰা আৰম্ভ কৰে। কিমান মিনিট পিছত তেওঁলোক আকৌ আৰম্ভণিৰ বিন্দুটোত লগ লাগিব?

8. (i) এটা ৰেজিমেণ্টত থকা সৈনিকবোৰক 15, 20 বা 25 জনকৈ লৈ কিছুমান শাৰীত থিয় কৰাব পাৰি। ৰেজিমেণ্টটোত অতি কমেও কিমানজন সৈনিক আছে?

(ii) এটা ঘণ্টা 18 ছেকেণ্ড আৰু আন এটা ঘণ্টা 60 ছেকেণ্ডৰ অন্তৰালত বাজে। কোনো এক সময়ত দুয়োটা ঘণ্টা একেলগে বাজিলে তাৰ কিমান ছেকেণ্ড পিছত ঘণ্টাদুটা পুণৰ একেলগে বাজিব?

(iii) এটা অনাতাঁৰ কেন্দ্ৰই প্ৰতি দুদিনৰ মূৰে মূৰে “অসম সংগীত”টো বজায়। আন এটা কেন্দ্ৰই একেটা সংগীত প্ৰতি তিনি দিনৰ মূৰে মূৰে বজায়। 30 দিনত মুঠতে কিমানবাৰ দুয়োটা অনাতাঁৰ কেন্দ্ৰই একেটা দিনত সংগীতটো বজাব?

1.4 অপৰিমেয় সংখ্যালৈ পুনৰ উভতি যাওঁ (Revisiting Irrational Numbers)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকক অপৰিমেয় সংখ্যা আৰু এইবোৰৰ বহুতো ধৰ্মৰ লগত পৰিচয় কৰোঁৱা হৈছে। তোমালোকে সেইবোৰৰ অস্তিত্ব আৰু কিদৰে পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয়বোৰ লগ হৈ বাস্তৱ সংখ্যাবোৰ গঠন কৰিছে তাৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছিলা। তোমালোকে আনকি অপৰিমেয় সংখ্যাবোৰ সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰত কিদৰে স্থান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি তাকো অধ্যয়ন কৰিছিলা। কিন্তু সেইবোৰ যে অপৰিমেয় সংখ্যা আছিল তাক আমি প্ৰমাণ কৰা নাছিলোঁ। এই অনুচ্ছেদত, আমি প্ৰমাণ কৰিম যে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ আৰু $\sqrt{5}$, আৰু সাধাৰণতে, যদি p মৌলিক তেন্তে $\sqrt{p}$ একোটা অপৰিমেয় সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰোতে আমি ব্যৱহাৰ কৰা উপপাদ্যবোৰৰ ভিতৰত এটা হ'ব পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য।

মনত পেলোৱা যে এটা সংখ্যা 's' অক **অপৰিমেয়** বোলে যদি ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত, য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। তোমালোকে ইতিমধ্যে সুপৰিচিত হোৱা অপৰিমেয় সংখ্যা কেতবোৰৰ উদাহৰণ হ'ল, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110..., ইত্যাদি।

$\sqrt{2}$ অপৰিমেয় বুলি প্ৰমাণ কৰাৰ আগেয়ে আমাক তলৰ উপপাদ্যটো লাগিব, যাৰ প্ৰমাণ 'পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য'ৰ ওপৰত ভিত্তি কৰা হয়।

উপপাদ্য 1.3 ঃ *ধৰা p মৌলিক। যদি pয়ে a^2ক হৰণ কৰে, তেন্তে pয়ে aক হৰণ কৰিব, য'ত a এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।*

*প্ৰমাণ ঃ ধৰা aৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ এনে,

$a = p_1 p_2 \dots p_n$, য'ত $p_1, p_2, \dots, p_n$ আদি মৌলিক, কিন্তু স্পষ্ট হোৱাৰ আৱশ্যক নাই। গতিকে $a^2 = (p_1 p_2 \dots p_n)(p_1 p_2 \dots p_n) = p^2{}_1 p^2{}_2 \dots p^2{}_n$।

এতিয়া আমাক দিয়া আছে যে p য়ে a^2ক হৰণ কৰে। সেয়ে পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যৰ পৰা পাওঁ যে a^2ৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰৰ ভিতৰত pয়ো এটা। যিয়েই নহওঁক, পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি আমি গম পাওঁ যে a^2ৰ একমাত্ৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰ হ'ব— $p_1, p_2, \dots, p_n$। সেয়ে $p_1, p_2, \dots, p_n$বোৰৰ ভিতৰত p য়ো এটা হ'ব। এতিয়া যিহেতু $a = p_1\, p_2 \dots p_n$, গতিকে pয়ে aক হৰণ কৰিব।

এতিয়া আমি $\sqrt{2}$ যে অপৰিমেয় তাৰ প্ৰমাণ এটা দিবৰ বাবে প্ৰস্তুত হ'লো। প্ৰমাণটো 'বিৰুদ্ধৰ সহায়ত প্ৰমাণ' (proof by contradiction) নামৰ বিশেষ প্ৰবিধি (কৌশল) এটাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰা হয়। (এই প্ৰবিধিটো অলপ বিতংভাৱে পৰিশিষ্ট-1অত আলোচনা কৰা হৈছে)

উপপাদ্য (Theorem) 1.4 ঃ *$\sqrt{2}$ অপৰিমেয়*

প্ৰমাণ ঃ ওপৰৰ উক্তিটোৰ বিৰুদ্ধে আমি ধৰি লওঁ যে $\sqrt{2}$ পৰিমেয়। গতিকে আমি অখণ্ড সংখ্যা r আৰু s $(\neq 0)$ পাব পাৰিম যাতে $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$।

ধৰা r আৰু sঅৰ 1অৰ বাহিৰে অইন সাধাৰণ উৎপাদক আছে। তেন্তে আমি এই সাধাৰণ উৎপাদকেৰে ভাগ কৰি পাওঁ, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, য'ত a আৰু b সহমৌলিক (coprime)। গতিকে $b\sqrt{2} = a$।

দুয়োপিনে বৰ্গ কৰি আৰু সজাই $2b^2 = a^2$ (i)। গতিকে 2য়ে a^2ক হৰণ কৰে। এতিয়া উপপাদ্য 1.3 অনুসৰি এইটো পাওঁ যে 2য়ে aক হৰণ কৰে। সেয়ে আমি লিখিব পাৰো

$a = 2c$, কোনোবা অখণ্ড cৰ ক্ষেত্ৰত। (i)ত aৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ, $2b^2 = 4c^2$, অৰ্থাৎ $b^2 = 2c^2$ ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল 2য়ে b^2ক হৰণ কৰে আৰু সেয়ে 2য়ে bক হৰণ কৰে (আৰু উপপাদ্য 1.3 ব্যৱহাৰ কৰি, $p = 2$ৰ বাবে)

গতিকে a আৰু b উভয়ৰে অন্ততঃ এটা সাধাৰণ উৎপাদক আছে, যি 2। কিন্তু ইয়ে আমি ধৰা 'a আৰু bৰ 1অৰ বাহিৰে অইন সাধাৰণ উৎপাদক নাই' এই সত্যটোক বিৰোধ কৰে। এই বিৰুদ্ধৰ কাৰণ এয়ে যে '$\sqrt{2}$ পৰিমেয়' বুলি কৰা আমাৰ ধাৰ্যটো অশুদ্ধ। সেয়ে আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো যে $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

উদাহৰণ 9 ঃ প্ৰমাণ কৰা যে $\sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

সমাধান ঃ বিৰুদ্ধভাৱে আমি ধৰো যে $\sqrt{3}$ পৰিমেয়। অৰ্থাৎ আমি অখণ্ড r আৰু s $(\neq 0)$ পাব পাৰো যাতে $\sqrt{3} = \frac{r}{s}$ ।

ধৰা r আৰু s ৰ 1ৰ বাহিৰে বেলেগ সাধাৰণ উৎপাদক আছে। তেতিয়া আমি এই সাধাৰণ উৎপাদকটোৰে হৰণ কৰিব পাৰোঁ আৰু ধৰিব পাৰোঁ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, a আৰু b সহমৌলিক।

গতিকে $b\sqrt{3} = a$ ।

দুয়োপিনে বৰ্গ কৰি আৰু সজাই $3b^2 = a^2$ (i)। গতিকে a^2, 3ৰে বিভাজ্য। উপপাদ্য 1.3 অনুসৰি, aয়ো 3ৰে বিভাজ্য। সেয়ে আমি লিখিব পাৰোঁ $a = 3c$, কোনো অখণ্ড cৰ ক্ষেত্ৰত। (i)ত aৰ সলনি $3c$ বহুৱাই পাওঁ, $3b^2 = 9c^2$, অৰ্থাৎ $b^2 = 3c^2$। ইয়াৰ অৰ্থ, b^2, 3ৰে বিভাজ্য আৰু সেয়ে bয়ো 3ৰে বিভাজ্য, (উপপাদ্য 1.3, $p = 3$ৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰি)।

গতিকে a আৰু bৰ অন্ততঃ এটা সাধাৰণ উৎপাদক 3 আছে। কিন্তু ই 'a আৰু b সহমৌলিক' এই ধাৰ্য সত্যটোক বিৰোধ কৰে।

এই বিৰুদ্ধ ফল ওলোৱাৰ কাৰণ হ'ল যে '$\sqrt{3}$ পৰিমেয়' বুলি ধৰা আমাৰ এই কথাটো অশুদ্ধ। গতিকে আমি সিদ্ধান্ত পালো যে $\sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

নৱম শ্ৰেণীত আমি উল্লেখ কৰিছিলোঁ—

- এটা পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয়ৰ সমষ্টি বা অন্তৰফল এটা অপৰিমেয়।
- এটা অশূন্য পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয়ৰ গুণফল বা ভাগফল এটা অপৰিমেয়।

কেইটামান বিশেষফল আমি ইয়াত ব্যৱহাৰ কৰিম।

উদাহৰণ 10 ঃ দেখুওৱা যে $5 - \sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

সমাধান ঃ বিৰুদ্ধভাৱে আমি ধৰো যে $5 - \sqrt{3}$ পৰিমেয়।

তেন্তে আমি a আৰু b $(b \neq 0)$ সহমৌলিক দুটা পাব পাৰো যাতে, $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, গতিকে $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$ ।

সমীকৰণটো সজাই পাওঁ, $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$

যিহেতু a, b অখণ্ড, আমি পাওঁ, $5 - \frac{a}{b}$ পৰিমেয় আৰু সেয়ে $\sqrt{3}$ পৰিমেয়। কিন্তু ইয়ে

'$\sqrt{3}$ অপৰিমেয়' এই সত্যতাৰ বিৰোধ কৰে। এই বিৰুদ্ধ ফলৰ কাৰণ হ'ল যে আমাৰ ধাৰ্য্য $5-\sqrt{3}$ পৰিমেয়। গতিকে আমি সিদ্ধান্ত পালো যে, $5-\sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

উদাহৰণ 11 ঃ দেখুওৱা যে $3\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

সমাধান ঃ বিৰুদ্ধভাৱে আমি ধৰো, $3\sqrt{2}$ পৰিমেয়।

সেয়ে আমি a আৰু b ($b \neq 0$) সহমৌলিকযোৰ পাব পাৰো যে, $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$। সজাই পাওঁ $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$। যিহেতু 3, a আৰু b বোৰ অখণ্ড, $\frac{a}{3b}$ পৰিমেয় আৰু সেয়ে $\sqrt{2}$ পৰিমেয়। কিন্তু ইয়ে '$\sqrt{2}$ অপৰিমেয়' এই সত্যতাৰ বিৰোধ কৰে। গতিকে আমি সিদ্ধান্ত পালো যে $3\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

অনুশীলনী 1.3

1. দেখুওৱা যে $\sqrt{5}$ অপৰিমেয়।
2. দেখুওৱা যে $3 + 2\sqrt{5}$ অপৰিমেয়।
3. দেখুওৱা যে তলৰ সংখ্যাবোৰ অপৰিমেয় ঃ

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

1.5 পৰিমেয় সংখ্যা আৰু সিহঁতৰ দশমিক বিস্তাৰত পুনৰ ভূমুকি (Revisiting Rational Numbers and Their Decimal Expansions)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে অধ্যয়ন কৰিছিলা যে পৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ হয় পৰিসমাপ্ত বা সাবধি (সীমাবদ্ধ) দশমিক বিস্তৃতি নাইবা এটা অপৰিসমাপ্ত বা নিৰবধি দশমিক বিস্তৃতি থাকে। এই অনুচ্ছেদত আমি $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ৰ দৰে এটা পৰিমেয় সংখ্যা ল'ম আৰু সঠিকভাৱে কেতিয়া $\frac{p}{q}$ৰ বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত বা সাবধি আৰু কেতিয়া ই নিৰবধি পৌনঃপুনিক তাক বিচাৰ কৰিম। আমি কেবাটাও উদাহৰণ বিবেচনাৰে সেইটো কৰিবলৈ চাম।

তলৰ পৰিমেয় সংখ্যাবোৰ বিবেচনা কৰোঁ আহা

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408.

এতিয়া (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

আশা কৰাৰ দৰেই এই আটাইবোৰকে পৰিমেয় সংখ্যা হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি যাৰ হৰবোৰ 10অৰ ঘাত। আমি লব আৰু হৰবোৰৰ মাজত থকা সাধাৰণ উৎপাদকবোৰ বিলোপ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰি কি পাওঁ চাওঁ আহা ঃ

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

তোমালোকে কিবা আৰ্হি লক্ষ্য কৰিছানে? দেখা গৈছে যে এটা বাস্তৱ সংখ্যা, যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো সাৱধি তাক আমি এটা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যালৈ পৰিৱৰ্তিত কৰিছো য'ত p আৰু q সহমৌলিক আৰু হৰটোৰ (অৰ্থাৎ qৰ) মৌলিক উৎপাদকীকৰণত কেৱল 2 ৰ ঘাত বা 5 অৰ ঘাত নাইবা দুয়োৰে ঘাতহে আছে। হৰটো এনে হোৱাটো আমি আশা কৰোঁ, কাৰণ 10ৰ ঘাতত উৎপাদক হিচাপে কেৱল 2 আৰু 5হে থাকিব পাৰে।

যদিও আমি মাত্ৰ কেৱল কেইটামান উদাহৰণহে কৰি দেখুৱাইছোঁ, তোমালোকে দেখা পাবা যে সাৱধি (পৰিসমাপ্ত) দশমিক বিস্তৃতি থকা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাকে এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰূপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি যাৰ হৰটো এটা 10ৰ ঘাত। আকৌ 10ৰ একমাত্ৰ মৌলিক উৎপাদক 2 আৰু 5। গতিকে লব আৰু হৰৰ মাজত থকা সাধাৰণ উৎপাদক বিলোপ কৰি আমি দেখিবলৈ পাম যে এই বাস্তৱ সংখ্যাটো এটা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যা, য'ত qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ $2^n 5^m$ আৰ্হিৰ আৰু n, m বোৰ অ-বিয়োগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (পূৰ্ণ সংখ্যা)।

আমাৰ এই ফলটো এতিয়া বিধিগতভাৱে লিখোঁ আহা ঃ

উপপাদ্য 1.5 ঃ *ধৰা x এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো পৰিসমাপ্ত (সাৱধি)। তেতিয়া xঅক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত p, q সহমৌলিক। তদুপৰি qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো $2^n 5^m$ আৰ্হিৰ, য'ত n, mবোৰ অ-বিয়োগাত্মক সংখ্যা।*

তোমালোক চাগে উদ্বিগ্নই হৈ আছা যে উপপাদ্য 1.5ৰ ওলোটা দিশত গ'লে কি হ'ব? অৰ্থাৎ যদি আমাৰ এটা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যা পাওঁ আৰু যদি qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ $2^n.5^m$, য'ত n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যা হয়, তেন্তে $\frac{p}{q}$ৰ এটা পৰিসমাপ্তি বা সাবধি (সীমাবদ্ধ) দশমিক বিস্তৃতি থাকিবনে?

এইটো কিদৰে সত্য হ'ব পাৰে তাৰ কিবা স্পষ্ট কাৰণ আছেনে আমি চাওঁ আহা। তোমালোকে নিশ্চয়কৈ মানি ল'বা যে, যদি b এটা 10ৰ ঘাত হয় তেন্তে $\frac{a}{b}$ আৰ্হিৰ যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাৰে এটা সাবধি দশমিক বিস্তৃতি থাকিব। গতিকে এটা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যা, যাৰ qটো 2^n5^m আৰ্হিৰ, তাক 10ৰ ঘাত বিশিষ্ট b থকা $\frac{a}{b}$ আৰ্হিৰ এটা সমতুল্য পৰিমেয় সংখ্যালৈ পৰিবৰ্তন কৰাটো বোধপূৰ্ণ হ'ব। আমি ওপৰৰ উদাহৰণকেইটালৈ উভতি যাও আৰু বিপৰীত দিশত কামবোৰ কৰি যাওঁ আহা।

(i) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$ (ii) $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times 2^3}{5^3\times 2^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$

(iii) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times 5}=\frac{7\times 5^3}{2^4\times 5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625}=\frac{2^2\times 7\times 521}{5^4}=\frac{2^6\times 7\times 521}{2^4\times 5^4}=\frac{233408}{10^4}=23.3408$

গতিকে এই উদাহৰণবোৰে আমাক দেখুৱায় আমি কিদৰে 2^n5^m আৰ্হিৰ এটা হৰ q থকা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যাক $\frac{a}{b}$ আৰ্হিৰ, য'ত b এটা 10ৰ ঘাত, পৰিমেয় সংখ্যালৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰো। সেয়ে এনেবোৰ পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিবোৰ পৰিসমাপ্ত বা সাবধি। আমাৰ এই ফলটো এতিয়া বিধিগতভাৱে লিখি লওঁ আহা।

উপপাদ্য (Theorem) 1.6 : *ধৰা $x=\frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা, যাতে n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত q হৰটোৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ 2^n5^m আৰ্হিৰ। তেন্তে x অৰ এটা সাবধি দশমিক বিস্তৃতি আছে।*

আমি এতিয়া সেইবোৰ পৰিমেয় সংখ্যালৈ যাব ওলাইছো যিবোৰৰ দশমিক বিস্তৃতি নিৰবধি (অপৰিসমাপ্ত) আৰু পৌনঃপুনিক। পুনৰ এবাৰ এটা উদাহৰণলৈ চাম ইয়াত কি হয়। আমি তোমালোকৰ নৱম শ্ৰেণীৰ অধ্যায়-1অৰ উদাহৰণ 5লৈ আঙুলিয়াও আঁহা। বিশেষকৈ $\frac{1}{7}$ পৰিমেয় সংখ্যাটোলৈ। ইয়াত ভাগশেষবোৰ ক্ৰমে 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . আৰু ভাজক 7।

$$\begin{array}{r|l} & 0.1428571 \\ 7 & 10 \\ & \underline{7} \\ & \textcircled{3}0 \\ & \underline{28} \\ & \textcircled{2}0 \\ & \underline{14} \\ & \textcircled{6}0 \\ & \underline{56} \\ & \textcircled{4}0 \\ & \underline{35} \\ & \textcircled{5}0 \\ & \underline{49} \\ & \textcircled{1}0 \\ & \underline{7} \\ & \textcircled{3}0 \end{array}$$

লক্ষ্য কৰা, ইয়াৰ হৰত থকা 7 সংখ্যাটো স্পষ্টভাৱে 2^n5^m আৰ্হিৰ নহয়। গতিকে উপপাদ্য 1.5 আৰু 1.6ৰ পৰা আমি জানো যে $\frac{1}{7}$ ৰ সাবধি দশমিক বিস্তৃতি নাথাকিব।

সেয়ে 0টোক ভাগশেষ ৰূপত দেখা নাযাব (কিয়?) আৰু এটা নিৰ্দিষ্ট পৰ্য্যায়ৰ পিছত ভাগশেষবোৰ পৌনঃপুনিক ৰূপত ওলাবলৈ আৰম্ভ কৰিব। গতিকে $\frac{1}{7}$ ৰ ভাগফলত আমি অংক কিছুমানৰ সমষ্টি এটা পাম, যেনে 142857, যিয়ে পুনৰাবৃত্তি কৰি থাকিব।

$\frac{1}{7}$ ৰ ক্ষেত্ৰত আমি যি দেখিলো সেইটো উপপাদ্য 1.5 বা উপপাদ্য 1.6.য়ে সামৰি নোলোৱা যি কোনো পৰিমেয় সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰতেই সত্য। এনে সংখ্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত আমি পাওঁ ঃ

উপপাদ্য (Theorem)1.7 ঃ *ধৰা $x = \frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাতে হৰ q ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো 2^n5^m আৰ্হিৰ নহয়, য'ত n, m অ-বিয়োগাত্মক সংখ্যা। তেন্তে x অৰ এটা দশমিক বিস্তৃতি থাকিব যি অপৰিসমাপ্ত বা নিৰবধি আৰু পৌনঃপুনিক।*

ওপৰৰ আলোচনাৰপৰা আমি সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰো যে, *প্ৰত্যেক পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো হয় সাবধি নহয় নিৰবধি পৌনঃপুনিক।*

অনুশীলনী 1.4

1. দীৰ্ঘ হৰণ নকৰাকৈ তলত উল্লেখ কৰা পৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ কোনবোৰৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত (সাবধি) নাইবা কোনবোৰৰ নিৰবধি পৌনঃপুনিক দশমিক বিস্তৃতি থাকিব বৰ্ণনা কৰা ঃ

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2.5^7.7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ওপৰৰ প্ৰশ্ন-1অত যিবোৰ পৰিমেয় সংখ্যাৰ পৰিসমাপ্ত দশমিক বিস্তৃতি আছে সেইবোৰৰ দশমিক বিস্তৃতিবোৰ লিখি দেখুওৱা।

3. তলৰ বাস্তৱ সংখ্যাবোৰৰ ইয়াত দেখুওৱা ধৰণে দশমিক বিস্তৃতি আছে। প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰতে ই এটা পৰিমেয় হয় নে নহয় সিদ্ধান্ত কৰা। যদি ই পৰিমেয় আৰু ই $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ, তেন্তে ইয়াৰ qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণৰ বিষয়ে কি ক'ব পাৰিবা?

(i) 43.123456789 (ii)0.120120012000120000. . .

(iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ প্ৰসংগকেইটা অধ্যয়ন কৰিছা ঃ

1. **ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা ঃ**
a আৰু b দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা দিয়া থাকিলে, q আৰু r দুটা এনে পূৰ্ণ সংখ্যা বিচাৰি পোৱা যাব যাতে $a = bq + r, 0 \leq r < b$।

2. **ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি ঃ** ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা ওপৰত ই নিৰ্ভৰ কৰে। এইটোৰ মতে, দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ ($a > b$ ধৰি) গ.সা.উ. তলত দিয়াৰ দৰে পোৱা যায় ঃ

সোপান (Step) 1 : q আৰু r পাবলৈ ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা য'ত $a = bq + r, 0 \leq r < b$.

সোপান (Step) 2 : যদি $r = 0$, গ.সা.উ. হ'ব b।
যদি $r \neq 0$, b আৰু rক লৈ ইউক্লিডৰ প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা।

সোপান (Step) 3 : ভাগশেষ শূন্য পোৱালৈকে এই প্ৰণালীটো অব্যাহত ৰাখা। এই পৰ্যায়ত পোৱা ভাজকটোৱে হ'ব গ.সা.উ. (a, b)। তদুপৰি গ.সা.উ. (a, b) = গ.সা.উ.(b, r)।

3. **পাটিগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য ঃ** প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকেই মৌলিকৰ গুণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব (উৎপাদকত) পাৰি আৰু মৌলিক উৎপাদকবোৰ প্ৰকাশ পোৱা ক্ৰমৰ বাহিৰে এই উৎপাদকীকৰণ অদ্বিতীয়।

4. যদি p মৌলিক আৰু pয়ে a^2ক হৰণ কৰে, য'ত a এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে pয়ে aক হৰণ কৰিব।

5. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ বোৰ অপৰিমেয়।

6. ধৰা x এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো পৰিসমাপ্ত। তেতিয়া xঅক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত p, q সহমৌলিক। তদুপৰি qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো 2^n5^m আৰ্হিৰ, য'ত n, mবোৰ অবিয়োগাত্মক সংখ্যা।

7. ধৰা $x = \frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাতে n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত q হৰটোৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ 2^n5^m আৰ্হিৰ।
তেন্তে xঅৰ এটা সাবধি (পৰিসমাপ্ত) দশমিক বিস্তৃতি আছে।

8. ধৰা $x = \frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাতে হৰ qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো $2^n\ 5^m$ আৰ্হিৰ নহয়, য'ত n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যা। তেন্তে xৰ এটা দশমিক বিস্তৃতি থাকিব যি নিৰবধি (অপৰিসমাপ্ত) আৰু পৌনঃপুনিক।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A NOTE TO THE READER)

তোমালোকে দেখিলা যে ঃ

গ.সা.উ. (p, q, r) × ল.সা.গু. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, য'ত p, q, r কেইটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (উদাহৰণ 8 চোৱা)। যি নহওক তিনিটা সংখ্যা p, q, r ৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ ফল দুটা প্ৰযোজ্য ঃ

$$\text{ল.সা.গু.}\ (p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot\ \text{গ.সা.উ.}\ (p, q, r)}{\text{গ.সা.উ.}\ (p, q) \times\ \text{গ.সা.উ.}\ (q, r) \times\ \text{গ.সা.উ.}\ (p, r)}$$

$$\text{গ.সা.উ.}\ (p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot\ \text{ল.সা.গু.}\ (p, q, r)}{\text{ল.সা.গু.}\ (p, q) \times\ \text{ল.সা.গু.}\ (q, r) \times\ \text{ল.সা.গু.}\ (p, r)}$$

Z2C2H3

বহুপদ (Polynomials)

দ্বিতীয় অধ্যায়

2.1 অৱতাৰণা (Introduction)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে এটা চলকৰ বহুপদ (polynomial of one variable) আৰু ইহঁতৰ মাত্ৰা (degree) সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিছিলা। মনত পেলোৱা যে যদি xঅত $p(x)$ এটা বহুপদ, তেন্তে $p(x)$অত xঅৰ উচ্চতম ঘাতটোকে **$p(x)$ বহুপদটোৰ মাত্ৰা** বোলা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, $4x + 2$, x চলকত এটা 1 মাত্ৰাৰ বহুপদ; $2y^2 - 3y + 4$ এটা y চলকত 2 মাত্ৰাৰ বহুপদ; $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ এটা x চলকত 3 মাত্ৰাৰ বহুপদ আৰু $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ এটা u চলকত 6 মাত্ৰাৰ বহুপদ।

$\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ ইত্যাদি ধৰণৰ ৰাশিবোৰ বহুপদ নহয়।

এক মাত্ৰাৰ এটা বহুপদক **ৰৈখিক বহুপদ** (linear polynomial) বোলে। উদাহৰণ স্বৰূপে $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$ ইত্যাদি আটাইবোৰ ৰৈখিক বহুপদ। $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ ইত্যাদি বহুপদবোৰ ৰৈখিক নহয়।

দুই মাত্ৰাৰ বহুপদ এটাক **দ্বিঘাত বহুপদ** (quadratic polynomial) বোলে। ইংৰাজী quadratic শব্দটো ‘quadrate’ শব্দটোৰপৰা উৎপন্ন হৈছে, যাৰ অৰ্থ বৰ্গ (square)।

বাস্তৱ সংখ্যাৰ সহগ (coefficient) থকা তলৰ আটাইবোৰ বহুপদেই দ্বিঘাত ঃ

$2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ ইত্যাদি।

অতি সাধাৰণভাৱে, যদি a, b, c বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a \neq 0$, তেন্তে xঅত থকা $ax^2 + bx + c$ আকাৰৰ যিকোনো বহুপদেই দ্বিঘাত বহুপদ।

তিনি মাত্ৰাৰ এটা বহুপদক **ত্ৰিঘাত বহুপদ** (cubic polynomial) বোলে। ত্ৰিঘাত বহুপদৰ কেইটামান উদাহৰণ হ'ল

$2 - x^3, x^3, \ 3 - x^2 + x^3, 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ আদি।

প্ৰকৃততে এটা ত্ৰিঘাত বহুপদৰ বেছি সাধাৰণ আৰ্হি হ'ল

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

য'ত a, b, c, d বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a \neq 0$।

এতিয়া $p(x) = x^2 - 3x - 4$ বহুপদটো লোৱা। তেন্তে বহুপদটোত $x = 2$ বহালে, আমি পাওঁ

$p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$।

$x^2 - 3x - 4$ অত xক 2ৰে সলনি কৰি পোৱা এই '-6' মানটোক $x^2 - 3x - 4$ৰ $x = 2$ত মান বোলে। একেদৰে $p(x)$ৰ $x = 0$ত মান হ'ব $p(0)$ যিটো -4।

যদি xত $p(x)$ এটা বহুপদ, আৰু k এটা বাস্তৱ সংখ্যা, তেন্তে $p(x)$ত xঅক kৰে সলনি কৰি পোৱা মানটোক **$p(x)$ৰ $x = k$ত মান** বোলে; ইয়াক $p(k)$ৰে সূচোৱা হয়।

$p(x) = x^2 - 3x - 4$ৰ $x = -1$ত মান কি?

আমি পাওঁ, $p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$

আকৌ লক্ষ্য কৰা, $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$

যিহেতু $p(-1) = 0$ আৰু $p(4) = 0$, আমি $x^2 - 3x - 4$ এই দ্বিঘাত বহুপদটোৰ -1, আৰু 4ক শূন্য (zero) বুলি ক'ম।

অতি সাধাৰণভাৱে, এটা বাস্তৱ সংখ্যা kক **এটা বহুপদ $p(x)$ৰ এটা শূন্য** বোলে যদি $p(k) = 0$।

এটা ৰৈখিক বহুপদৰ শূন্য কিদৰে উলিয়ায় তাক তোমালোকে ইতিমধ্যেই নৱম শ্ৰেণীত পঢ়িছাই। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি $p(x) = 2x + 3$ৰ k এটা শূন্য, তেন্তে $p(k) = 0$য়ে আমাক দিব $2k + 3 = 0$ অৰ্থাৎ $k = -\frac{3}{2}$.

সাধাৰণতে যদি $p(x) = ax + b$ৰ k এটা শূন্য, তেন্তে $p(k) = ak + b = 0$, অৰ্থাৎ $k = \frac{-b}{a}$.।

গতিকে এটা ৰৈখিক বহুপদ $ax + b$ৰ শূন্যটো হ'ব, $\frac{-b}{a} = \frac{-\text{(ধ্ৰুৱক পদ)}}{x\text{অৰ সহগ}}$ ।

এইদৰে, এটা ৰৈখিক বহুপদৰ শূন্যটো ইয়াৰ সহগবোৰৰ লগত সম্পৰ্কিত। অইন বহুপদবোৰৰ ক্ষেত্ৰতো জানো এই কথাটো খাটিব? উদাহৰণস্বৰূপে, এটা দ্বিঘাত বহুপদৰ শূন্যবোৰতো জানো ইয়াৰ সহগবোৰৰ লগত সম্পৰ্ক আছে?

এই অধ্যায়ত আমি এনেবোৰ প্ৰশ্নৰে উত্তৰ দিব চেষ্টা কৰিম। আমি লগতে বহুপদৰ বিভাজন কলনবিধি সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিম।

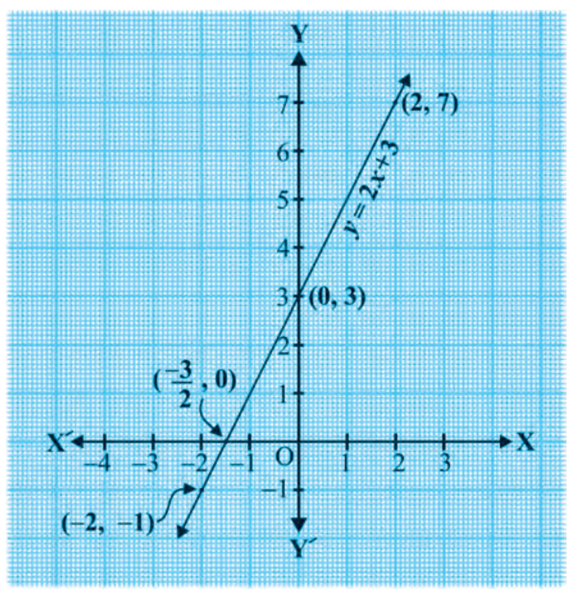
2.2 বহুপদ এটাৰ শূন্যবোৰৰ জ্যামিতিক অৰ্থ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial) ঃ

তোমালোকে জানিলা যে এটা বাস্তৱ সংখ্যা k, $p(x)$ বহুপদটোৰ শূন্য হ'ব যদি $p(k) = 0$। কিন্তু বহুপদ এটাৰ শূন্যবোৰৰ ইমান প্ৰয়োজন কিয় ? ইয়াৰ উত্তৰ পাবলৈ, প্ৰথমে আমি ৰৈখিক আৰু দ্বিঘাত বহুপদবোৰৰ জ্যামিতিক প্ৰদৰ্শন আৰু সিহঁতৰ শূন্যবোৰৰ জ্যামিতিক অৰ্থৰ বিষয়ে চাম।

প্ৰথমতে $ax + b= 0, a \neq 0$ ৰৈখিক সমীকৰণ এটা লোৱা। নৱম শ্ৰেণীৰ অধ্যয়নতে তোমালোকে পাইছা যে, $y = ax + b$ ৰ লেখ এটা সৰল ৰেখা। উদাহৰণ স্বৰূপে $y = 2x + 3$ ৰ লেখ $(-2, -1)$ আৰু $(2, 7)$ বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যোৱা এটা সৰলৰেখা।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

চিত্ৰ 2.1ৰ পৰা তোমালোকে দেখা পাবা যে $y = 2x + 3$ৰ লেখটোৱে x-অক্ষক $x = -1$ আৰু $x = -2$,ৰ সোঁমাজত অৰ্থাৎ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ বিন্দুটোত কাটিছে। তোমালোকক জনাওঁ যে $2x + 3$ ৰ শূন্য $-\frac{3}{2}$। গতিকে $2x + 3$ৰ বহুপদটোৰ শূন্যটো $y = 2x + 3$ৰ লেখটোৱে x-অক্ষক কটা বিন্দুটোৰ x স্থানাংক।



চিত্ৰ-2.1

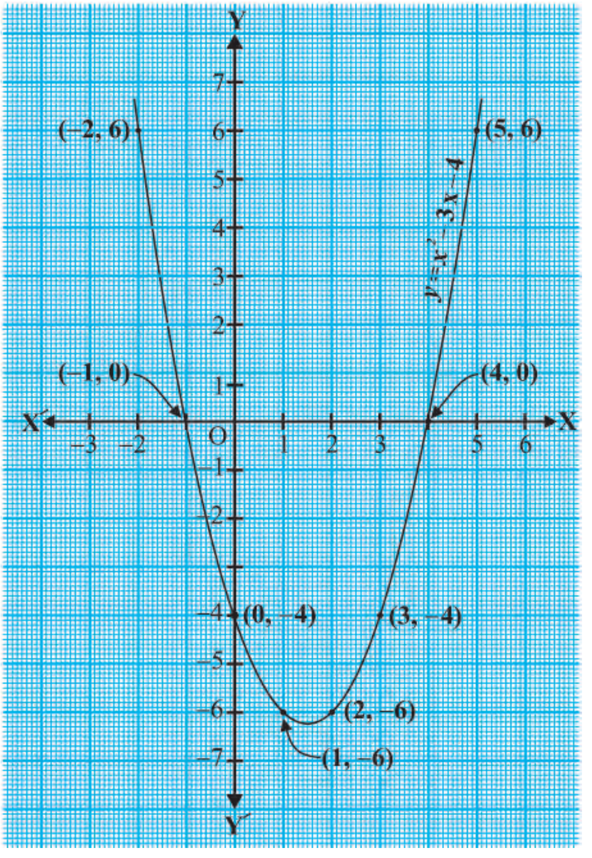
সাধাৰণতে, $ax + b = 0, a \neq 0$ এটা ৰৈখিক বহুপদৰ ক্ষেত্ৰত $y = ax + b$ এটা সৰলৰেখা, যিয়ে x-অক্ষক মাত্ৰ এটা বিন্দুতহে অৰ্থাৎ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ বিন্দুটোত ছেদ কৰে। গতিকে $ax + b = 0,\ a \neq 0$, ৰৈখিক বহুপদটোৰ মাত্ৰ এটাহে শূন্য আছে, অৰ্থাৎ সেই বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক য'ত $y = ax+b$ৰ লেখটোৱে x-অক্ষত কাটে।

এতিয়া আমি এটা দ্বিঘাত বহুপদৰ শূন্যৰ ক্ষেত্ৰত বিচাৰ কৰি চাওঁ আঁহা। $x^2 - 3x - 4$ বহুপদটো লোৱা। আমি $y = x^2 - 3x - 4$ৰ লেখটো* কেনে দেখা হ'ব চাওঁ। তালিকা 2.1ত দিয়া xঅৰ কেইটামান মানৰ অনুৰূপে $y = x^2 - 3x - 4$ৰ মানকেইটাৰ তালিকা এখন লোৱা হ'ল।

তালিকা 2.1

x	– 2	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	– 4	– 6	– 6	– 4	0	6

আমি যদি ওপৰৰ তালিকাভুক্ত বিন্দুবোৰ এখন লেখ কাকতত বহুৱাওঁ আৰু লেখটো আঁকো, তেন্তে ইয়াক প্ৰকৃততে চিত্ৰ 2.2 ত দিয়াৰ দৰেই দেখা যাব।



চিত্ৰ 2.2

প্ৰকৃততে, $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, এনে যিকোনো দ্বিঘাত বহুপদৰ ক্ষেত্ৰতে, ইয়াৰ অনুৰূপ সমীকৰণ $y = ax^2 + bx + c$ৰ লেখটোৰ আকৃতি হয় $\bigcup$ দৰে ওপৰমুখে খোলা নাইবা $\bigcap$ ৰ দৰে তলমুখে খোলা— এই দুটাৰ ভিতৰত এটা হ'ব আৰু ই নিৰ্ভৰ কৰিব $a > 0$ নাইবা $a < 0$ৰ ওপৰত। এনে বক্ৰবোৰক **অধিবৃত্ত** (parabola) বোলা হয়।

তালিকা 2.1ৰ পৰা দেখা পোৱা যে দ্বিঘাত বহুপদটোৰ শূন্য হ'ব –1 আৰু 4। আকৌ চিত্ৰ 2.2 অৰ পৰা লক্ষ্য কৰা যে $y = x^2 - 3x - 4$ অৰ লেখটোৱে x-অক্ষক য'ত কাটিছে –1 আৰু 4 হ'ল সেই বিন্দু দুটাৰ x-স্থানাংক। গতিকে দ্বিঘাত বহুপদ $x^2 - 3x - 4$ৰ শূন্য দুটাই হ'ল $y = x^2 - 3x - 4$ৰ লেখটোৱে x-অক্ষক কটা বিন্দু দুটাৰ

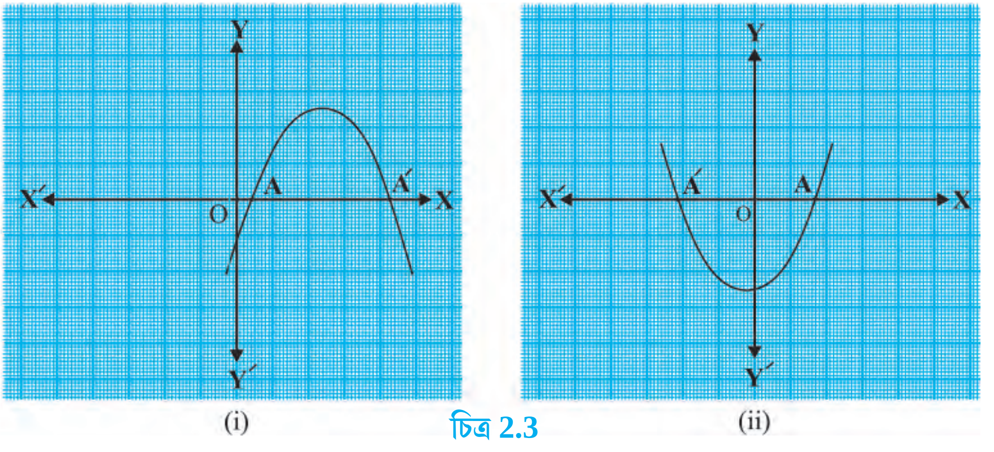
* দ্বিঘাত বা ত্ৰিঘাত বহুপদৰ লেখ স্থাপন কৰাটো নাইবা লেখৰপৰা মান নিৰ্ণয় ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে কৰাটো ইয়াত বুজোৱা হোৱা নাই।

x-স্থানাংক।

এই কথাটো যিকোনো দ্বিঘাত বহুপদৰ ক্ষেত্ৰতেই সত্য, অৰ্থাৎ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, এই বহুপদটোৰ শূন্যকেইটাই হ'ল $y = ax^2 + bx + c$ক প্ৰদৰ্শন কৰা লেখটোৱে x-অক্ষক কটা বিন্দুকেইটাৰ x-স্থানাংক।

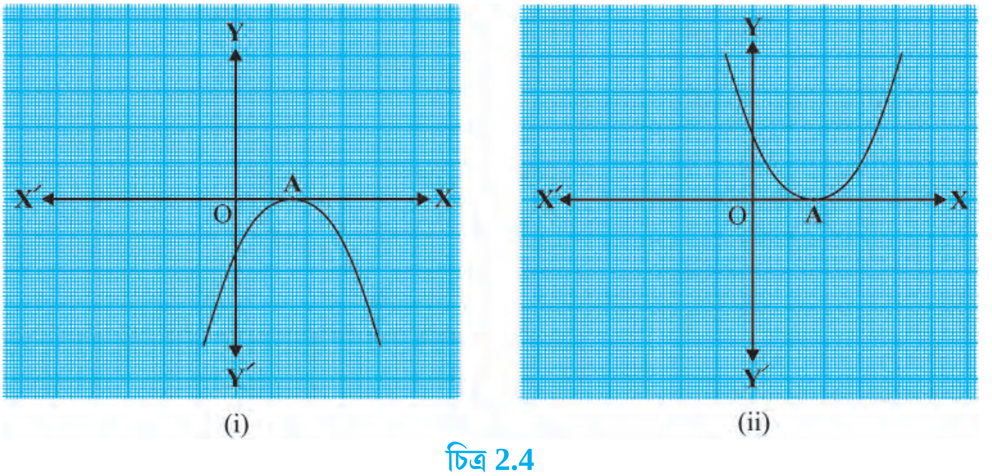
আমি আগতে $y = ax^2 + bx + c$ৰ লেখটোৰ আকৃতি নিৰীক্ষণ কৰাৰ পৰা তলৰ তিনিটা ক্ষেত্ৰই হ'ব পাৰে।

ক্ষেত্ৰ (Case) (i) : ইয়াত লেখটোৱে x-অক্ষক A আৰু A′ এই দুটা স্পষ্ট বিন্দুত কাটে। এই ক্ষেত্ৰত— A আৰু A′ ৰ x-স্থানাংক দুটাই $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত বহুপদটোৰ **শূন্য দুটা** হ'ব (চিত্ৰ 2.3 চোৱা)



চিত্ৰ 2.3

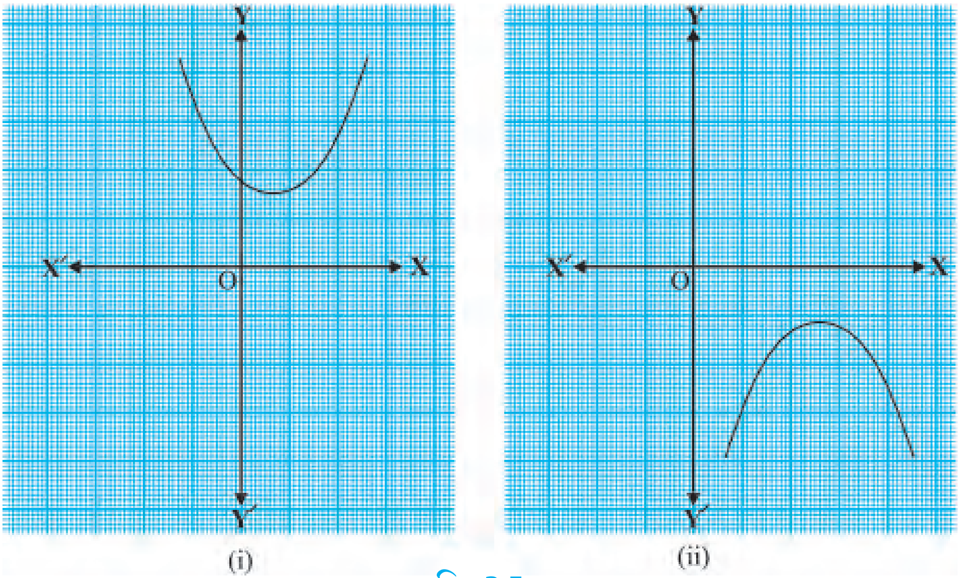
ক্ষেত্ৰ (Case) (ii) : ইয়াত লেখটোৱে x-অক্ষৰ সঠিক এটা বিন্দুত কাটে, অৰ্থাৎ দুটা লগ লগা বিন্দুত। গতিকে ক্ষেত্ৰ (i)ৰ A আৰু A′ বিন্দু দুটাই এটা হৈ লগ লাগিব (চিত্ৰ 2.4 চোৱা)



চিত্ৰ 2.4

এই ক্ষেত্রত $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত বহুপদটোৰ বাবে A বিন্দুৰ x-স্থানাংকটোৱে **একমাত্র শূন্য** হ'ব।

ক্ষেত্র (Case)(iii) : ইয়াত লেখটো হয় সম্পূর্ণভাৱে x-অক্ষৰ ওপৰপিনে নাইবা সম্পূর্ণভাৱে x-অক্ষৰ তলৰ পিনে থাকিব। সেয়ে ই x-অক্ষক কোনো বিন্দুতে নেকাটে (চিত্র 2.5 চোৱা)।



চিত্র 2.5

গতিকে $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত বহুপদটোৰ এই ক্ষেত্রত **কোনো শূন্য নাথাকিব**।

গতিকে জ্যামিতিকভাৱে আমি দেখা পাওঁ যে এটা দ্বিঘাত বহুপদৰ হয়তো দুটা স্পষ্ট শূন্য থাকে বা দুটা একে সমান শূন্য (অর্থাৎ এটা শূন্য) থাকে নাইবা এটাও শূন্য নাথাকে। ইয়াৰ অর্থ এইটোৱে যে এটা দুই মাত্রাৰ বহুপদৰ খুব বেছি দুটা শূন্য থাকে।

এতিয়া তোমালোকে এটা ত্রিঘাত বহুপদৰ শূন্যবোৰৰ জ্যামিতিক অর্থ কি হোৱাতো আশা কৰা? আমি বিচাৰি চাওঁ আহা। $x^3 - 4x$ ত্রিঘাত বহুপদটোকে লোৱা। $y = x^3 - 4x$ ৰ লেখটো দেখাত কেনে হ'ব চাবলৈ হ'লে আমি তালিকা 2.2 ত দেখুওৱাৰ দৰে xৰ কিছুমান মানৰ অনুৰূপে কিছুমান yৰ মানৰ তালিকা উলিয়াওঁ আহা।

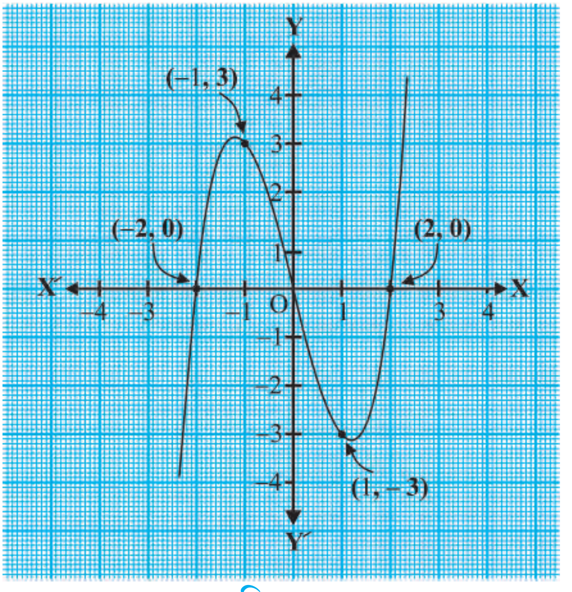
তালিকা 2.2

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0

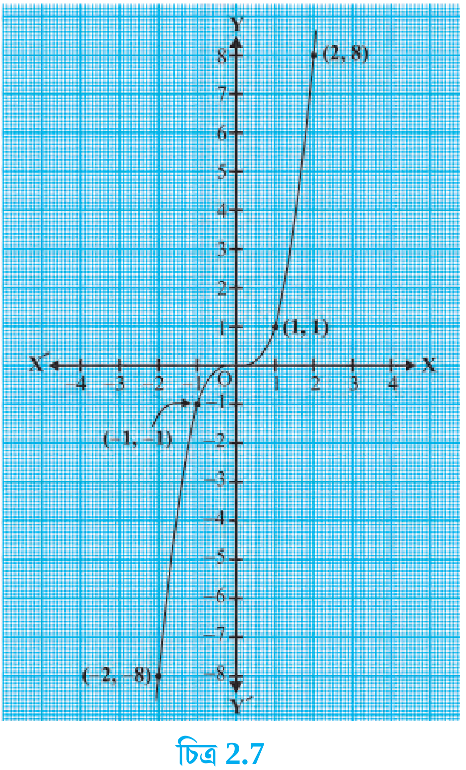
লেখ কাকত এখনত বিন্দুবোৰ স্থাপন কৰি আৰু লেখটো আঁকিলে আমি দেখা পাওঁ যে $y = x^3 - 4x$ৰ লেখটো প্রকৃততে চিত্র 2.6ত দিয়াৰ দৰে হয়।

ওপৰৰ তালিকাখনৰপৰা আমি দেখো যে, $x^3 - 3x$ বহুপদটোৰ শূন্যবোৰ $-2, 0$ আৰু 2। লক্ষ্য কৰা যে, -2, 0 আৰু 2 সংখ্যাকেইটা প্ৰকৃততে $y = x^3 - 4x$ ৰ লেখটোৱে মাত্ৰ x-অক্ষক কটা বিন্দুকেইটাৰহে x-স্থানাংক। যিহেতু লেখটোৱে x-অক্ষক মাত্ৰ এই তিনিটা বিন্দুতহে কাটে, এই বিন্দুকেইটাৰ x-স্থানাংকবোৰেহে কেৱল বহুপদটোৰ শূন্য।

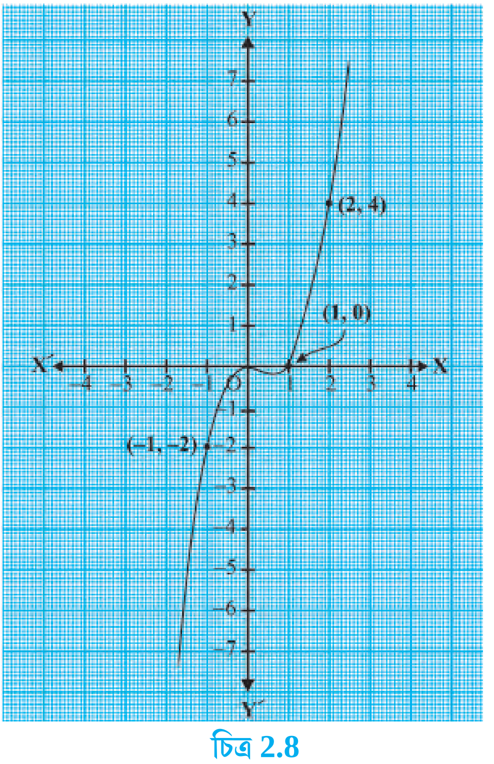
আমি আৰু কেইটামান উদাহৰণ লওঁ। x^3 আৰু $x^3 - x^2$ ত্ৰিঘাত বহুপদকেইটা লোৱা। চিত্ৰ 2.7 আৰু 2.8অত আমি $y = x^3$ আৰু $y = x^3 - x^2$ ৰ লেখ দুটা আঁকিছো।



চিত্ৰ 2.6



চিত্ৰ 2.7



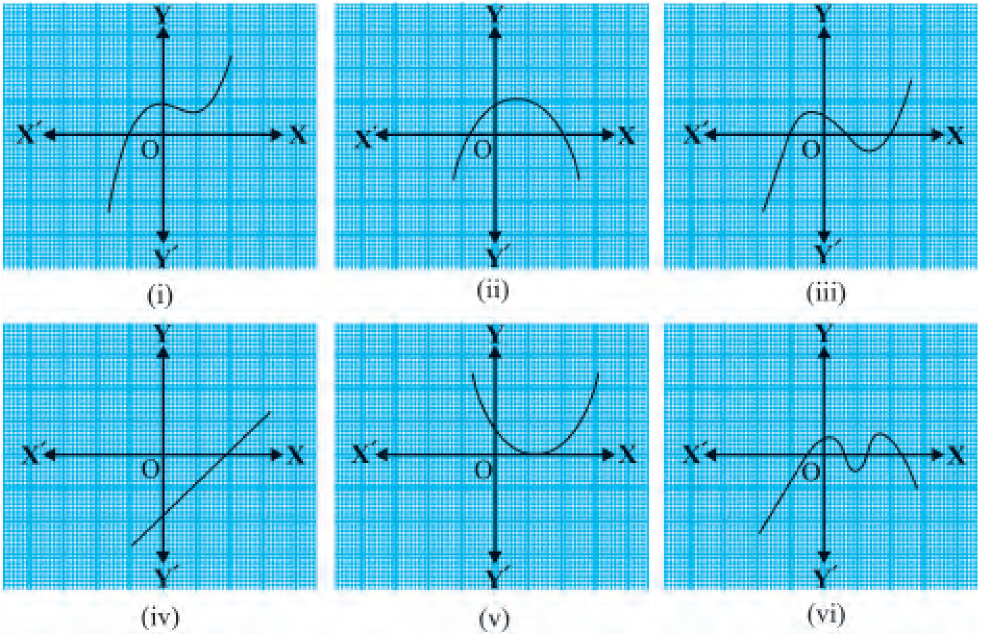
চিত্ৰ 2.8

লক্ষ্য কৰা, x^3 বহুপদটোৰ 0 টোৱে একমাত্ৰ শূন্য। আকৌ চিত্ৰ 2.7ৰ পৰা দেখা পাবা যে $y = x^3$ৰ লেখটোৱে x-অক্ষক কটা একমাত্ৰ বিন্দুটোৰ x-স্থানাংক হ'ল 0। একেদৰে যিহেতু $x^3 - x^2 = x^2 (x - 1)$, গতিকে $x^3 - x^2$ বহুপদটোৰ 0 আৰু 1 হে একমাত্ৰ শূন্য। আকৌ চিত্ৰ 2.8ৰ পৰা এই মানকেইটাই হ'ল $y = x^3 - x^2$ ৰ লেখটোৱে মাত্ৰ x-অক্ষক কটা বিন্দুকেইটাৰ x-স্থানাংক।

ওপৰৰ উদাহৰণকেইটাৰ পৰা আমি দেখিবলৈ পাওঁ যে— এটা ত্ৰিঘাত বহুপদৰ খুব বেছি তিনিটা শূন্য থাকে। আনভাষাত, তিনি মাত্ৰাৰ এটা বহুপদৰ খুব বেছি তিনিটা শূন্য থাকে।

মন্তব্য (Remark) ঃ সাধাৰণতে, n মাত্ৰাৰ এটা বহুপদ $p(x)$ দিয়া থাকিলে, $y = p(x)$ ৰ লেখটোৱে x-অক্ষক খুব বেছি nটা বিন্দুত কাটে। গতিকে n মাত্ৰাৰ এটা বহুপদ $p(x)$ৰ খুব বেছি nটা শূন্য থাকিব।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ চিত্ৰ 2.9ৰ লেখবোৰলৈ চোৱা। প্ৰতিটোৱে $p(x)$ বহুপদ এটাৰ ক্ষেত্ৰত $y = p(x)$ৰ লেখ। প্ৰতিটো লেখৰ ক্ষেত্ৰত $p(x)$ৰ শূন্যৰ সংখ্যা উলিওৱা।



চিত্ৰ 2.9

সমাধান ঃ

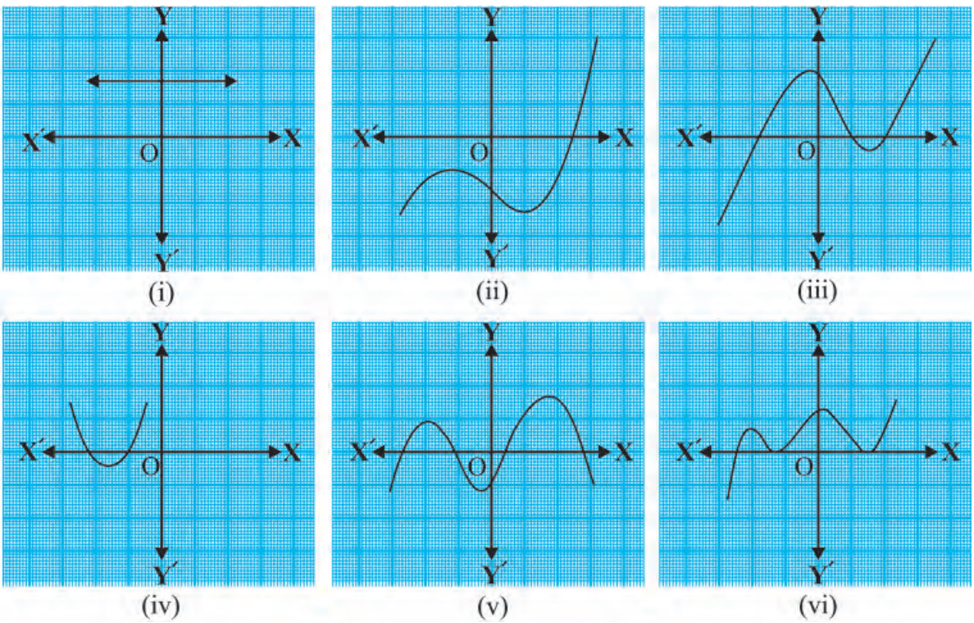
(i) যিহেতু লেখটোৱে x-অক্ষক মাত্ৰ এটা বিন্দুতহে কাটে, শূন্যৰ সংখ্যা 1।

(ii) যিহেতু লেখটোৱে x-অক্ষক মাত্ৰ দুটা বিন্দুতহে কাটে, শূন্যৰ সংখ্যা 2।

(iii) শূন্যৰ সংখ্যা 3 (কিয় ?)
(iv) শূন্যৰ সংখ্যা 1 (কিয় ?)
(v) শূন্যৰ সংখ্যা 1 (কিয় ?)
(vi) শূন্যৰ সংখ্যা 4 (কিয় ?)

অনুশীলনী 2.1

1. কিছুমান বহুপদ $p(x)$অৰ ক্ষেত্ৰত $y = p(x)$ ৰ লেখবোৰ তলৰ চিত্ৰ 2.10 ত দিয়া আছে। প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে $p(x)$ৰ শূন্যৰ সংখ্যা উলিওৱা।



চিত্ৰ 2.10

2.3 এটা বহুপদৰ শূন্য আৰু সহগৰ মাজৰ সম্পৰ্ক (Relationship between Zeroes and Coefficients of a Polynomial)

তোমালোকে ইতিমধ্যে দেখা পাইছা যে, এটা ৰৈখিক বহুপদ $ax + b$ ৰ শূন্যটো $-\frac{b}{a}$ । আমি এতিয়া অনুচ্ছেদ 2.1ত উত্থাপন কৰা এটা দ্বিঘাত বহুপদৰ শূন্য আৰু সহগৰ মাজৰ সম্পৰ্ক সম্বন্ধীয় প্ৰশ্নৰ উত্তৰ পাবলৈ চেষ্টা কৰিম। ইয়াৰ বাবে, আমি এটা দ্বিঘাত বহুপদ, যেনে $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ লওঁ

আহা। নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে দ্বিঘাত বহুপদ এটাক কিদৰে মাজৰ পদটোক দুভাগ কৰি উৎপাদক উলিয়ায় শিকিছা। গতিকে, ইয়াত মধ্যপদ '$-8x$'ক দুটা পদৰ যোগফল হিচাপে ভাগ কৰিব লাগিব যাৰ পূৰণফল হ'ব $6 \times 2x^2 = 12x^2$। গতিকে আমি লিখোঁ

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

গতিকে $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ৰ মান শূন্য, যেতিয়া $x - 1 = 0$ বা $x - 3 = 0$, অৰ্থাৎ যেতিয়া $x = 1$ বা $x = 3$। গতিকে $2x^2 - 8x + 6$ ৰ শূন্যবোৰ 1 আৰু 3। লক্ষ্য কৰা যে

শূন্য দুটাৰ সমষ্টি $= 1 + 3 = 4 = \dfrac{-(-8)}{2} = \dfrac{-(x\text{ৰ সহগ})}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

শূন্য দুটাৰ গুণফল $= 1 \times 3 = 3 = \dfrac{6}{2} = \dfrac{\text{ধ্ৰুৱক পদ}}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

আমি আৰু এটা বহুপদ লওঁ, যেনে ধৰা $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$, মধ্যপদটো ভাগ কৰা পদ্ধতিৰে,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

গতিকে, $3x^2 + 5x - 2$ৰ মান শূন্য হয়, যেতিয়া $3x - 1 = 0$ বা $x + 2 = 0$ অৰ্থাৎ যেতিয়া $x = \dfrac{1}{3}$ বা $x = -2$। গতিকে $3x^2 + 5x - 2$ৰ শূন্য দুটা $\dfrac{1}{3}$ আৰু -2। লক্ষ্য কৰা যে,

শূন্য দুটাৰ সমষ্টি $= \dfrac{1}{3} + (-2) = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{-(x\text{ৰ সহগ})}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

শূন্য দুটাৰ গুণফল $= \dfrac{1}{3} \times (-2) = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{\text{ধ্ৰুৱক পদ}}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

সাধাৰণতে যদি $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, বহুপদটোৰ α* আৰু β* শূন্য, তেন্তে তোমালোকে জানা যে $x - \alpha$ আৰু $x - \beta$ দুয়ো $p(x)$ৰ উৎপাদক। সেইকাৰণে

$$ax^2 + bx + c = k(x-\alpha)(x-\beta), \text{ য'ত } k \text{ এটা ধ্ৰুৱক}$$
$$= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$$
$$= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta$$

দুয়োপিনে x^2, x আৰু ধ্ৰুৱক পদবোৰৰ সহগবোৰ তুলনা কৰিলে, আমি পাওঁ—

* α, β আদি গ্ৰীক অক্ষৰ; পঢ়া হয় অনুক্ৰমে 'আলফা' আৰু 'বিতা' বুলি, পিছলৈ আমি আৰু এটা অক্ষৰ γ ব্যৱহাৰ কৰিম, পঢ়া হয় 'গামা' বুলি।

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ আৰু $c = k\alpha\beta$.

ইয়াৰ পৰা, $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

অৰ্থাৎ $\quad$ শূন্য দুটাৰ সমষ্টি $= \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(x\text{ৰ সহগ})}{x^2\text{ৰ সহগ}}$,

শূন্য দুটাৰ গুণফল $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ধ্ৰুৱক পদ}}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

আমি কেইটামান উদাহৰণ লওঁ ঃ

উদাহৰণ 2 ঃ $x^2 + 7x + 10$ দ্বিঘাত বহুপদটোৰ শূন্যবোৰ উলিওৱা আৰু এই শূন্য আৰু সহগবোৰৰ মাজৰ সম্পৰ্ক পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ, $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

গতিকে $x^2 + 7x + 10$ ৰ মান শূন্য হ'ব যেতিয়া $x + 2 = 0$ বা $x + 5 = 0$, অৰ্থাৎ যেতিয়া $x = -2$ বা $x = -5$। গতিকে $x^2 + 7x + 10$ৰ শূন্য দুটা -2 আৰু -5।

এতিয়া শূন্য দুটাৰ সমষ্টি $= -2 + (-5) = -7 = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x\text{ৰ সহগ})}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

শূন্য দুটাৰ গুণফল $= (-2) \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{ধ্ৰুৱক পদ}}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

উদাহৰণ 3 ঃ $x^2 - 3$ বহুপদটোৰ শূন্য উলিওৱা আৰু এই শূন্যবোৰ আৰু সহগবোৰৰ মাজৰ সম্পৰ্ক পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান ঃ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ অভেদটো মনত পেলোৱা। এইটো ব্যৱহাৰ কৰি আমি লিখিব পাৰোঁ

$$x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

গতিকে $x^2 - 3$ৰ মান শূন্য হ'ব যেতিয়া $x = \sqrt{3}$ বা $x = -\sqrt{3}$.

সেয়ে $x^2 - 3$ৰ শূন্যদুটা $\sqrt{3}$ আৰু $-\sqrt{3}$.

এতিয়া, শূন্য দুটাৰ সমষ্টি $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \dfrac{-(x\text{ৰ সহগ})}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

শূন্য দুটাৰ গুণফল $= \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{ধ্ৰুৱক পদ}}{x^2\text{ৰ সহগ}}$

উদাহৰণ 4 ঃ এটা দ্বিঘাত বহুপদ উলিওৱা যাৰ শূন্য দুটাৰ সমষ্টি আৰু গুণফল দুটা যথাক্ৰমে -3 আৰু 2।

সমাধান ঃ ধৰা দ্বিঘাত বহুপদটো $ax^2 + bx + c$ আৰু ইয়াৰ শূন্য দুটা α আৰু β। আমি পাওঁ,

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

আৰু $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

যদি $a = 1$, তেন্তে $b = 3$ আৰু $c = 2$। গতিকে প্ৰদত্ত চৰ্ত সিদ্ধ কৰা এটা বহুপদ হ'ব $x^2 + 3x + 2$।

তোমালোকে পৰীক্ষা কৰিব পাৰা যে এইবোৰ চৰ্ত পূৰ কৰা অইন যিকোনো দ্বিঘাত বহুপদেই $k(x^2 + 3x + 2)$ আকাৰৰ হ'ব, য'ত k এটা বাস্তৱ সংখ্যা।

আমি এতিয়া ত্ৰিঘাত বহুপদবোৰলৈ চাওঁ। তোমালোকে এই ত্ৰিঘাত বহুপদবোৰৰ শূন্য আৰু সহগবোৰৰ মাজতো একে ধৰণৰ সম্পৰ্কই খাটিব বুলি ভাবানে?

আমি লওঁ, $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$।

পৰীক্ষা কৰা যে, $p(x) = 0$ হ'ব, যেতিয়া $x = 4, -2$ আৰু $\frac{1}{2}$। যিহেতু $p(x)$ৰ খুব বেছি তিনিটাহে শূন্য থাকিব পাৰে, এইকেইটাই $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ৰ শূন্য হ'ব।

এতিয়া শূন্য তিনিটাৰ সমষ্টি $= 4 + (-2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} = -\dfrac{(-5)}{2}\ \dfrac{-(x^2\text{ৰ সহগ})}{x^3\text{ৰ সহগ}}$

শূন্য তিনিটাৰ গুণফল $= 4 \times (-2) \times \dfrac{1}{2} = -4 = \dfrac{-8}{2} = \dfrac{-(\text{ধ্ৰুৱক পদ})}{x^3\text{ৰ সহগ}}$

হ'লেও, ইয়াত আৰু এটা সম্পৰ্ক আছে। শূন্যবোৰ এবাৰত দুটা দুটাকৈ লৈ কৰা গুণফলকেইটাৰ সমষ্টি লোৱা। আমি পাওঁ,

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x\text{ৰ সহগ}}{x^3\text{ৰ সহগ}}$$

সাধাৰণতে, এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি যে, যদি α, β, γ বোৰ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ত্ৰিঘাত বহুপদটোৰ শূন্য হয়, তেন্তে

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha \beta \gamma = \frac{-d}{a}.$$

এটা উদাহৰণ লওঁ

উদাহৰণ 5* ঃ সত্যাপন কৰা যে, 3, –1, $-\frac{1}{3}$ সংখ্যাকেইটা $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ত্ৰিঘাত বহুপদটোৰ শূন্য। পিছত এই শূন্য আৰু সহগবোৰৰ মাজৰ সম্পৰ্ক সত্যাপন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বহুপদটোক $ax^3 + bx^2 + cx + d$ৰ লগত ৰিজাই আমি পাওঁ,

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3.$

তদুপৰি $p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

সেয়ে 3, –1 আৰু $-\frac{1}{3}$ সংখ্যাকেইটা $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ৰ শূন্য।

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

গতিকে আমি ল'ম $\alpha = 3, \beta = -1$ আৰু $\gamma = -\frac{1}{3}$ ।

এতিয়া, $\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

অনুশীলনী 2.2

1. তলৰ দ্বিঘাত বহুপদবোৰৰ শূন্য উলিওৱা আৰু এই শূন্যবোৰ আৰু সহগবোৰৰ মাজৰ সম্পৰ্ক সত্যাপন কৰা।

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. তলৰ যোৰকেইটাৰ সংখ্যা দুটাক ক্ৰমে শূন্যবোৰৰ সমষ্টি আৰু গুণফল হিচাপে ধৰি প্ৰত্যেকৰ ক্ষেত্ৰত একোটা দ্বিঘাত বহুপদ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$ (iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

3. দ্বিঘাত বহুপদবোৰ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শূন্যকেইটা তলত দিয়া ধৰণৰ ঃ

(i) -4 আৰু $\frac{3}{2}$ (ii) 5 আৰু 2 (iii) $\frac{1}{3}$ আৰু -1 (iv) $\frac{3}{2}$ আৰু -2

2.4 বহুপদৰ বিভাজন কলনবিধি (Division Algorithm for Polynomials)

তোমালোকে জানা যে এটা ত্ৰিঘাত বহুপদৰ খুব বেছি তিনিটা শূন্য থাকে। যদি তোমাক মাত্ৰ এটা শূন্য দিয়া থাকে, তুমি বাকী দুটা উলিয়াব পাৰিবানে? এইটো চাবলৈ, $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ত্ৰিঘাত বহুপদটো বাচি লওঁ। যদি আমি তোমাক কৈ দিওঁ ইয়াৰ শূন্যবোৰৰ এটা 1, তেন্তে তুমি জানা যে $x^3 - 3x^2 - x + 3$ৰ এটা উৎপাদক হ'ব $x - 1$। গতিকে তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত শিকি অহাৰ দৰে $x^3 - 3x^2 - x + 3$ক $x - 1$ৰে হৰণ কৰিব পাৰা যাতে ভাগফল $x^2 - 2x - 3$ পোৱা।

পিছত $x^2 - 2x - 3$ৰ মধ্যপদটো ভাগ কৰিলে ইয়াৰ উৎপাদক $(x + 1)(x - 3)$ হিচাপে পাবা।

ইয়ে তোমাক দিব, $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)$$

গতিকে এতিয়া ত্ৰিঘাত বহুপদটোৰ গোটেই তিনিটা শূন্যই $1, -1, 3$ বুলি তুমি জানিলা।

আমি এতিয়া অলপ বিতংভাবে এটা বহুপদক অইন এটা বহুপদেৰে ভাগ কৰা পদ্ধতি আলোচনা কৰোঁ। ইয়াৰ সোপানবোৰ বিধিগতভাৱে মন কৰাৰ আগতে, এটা উদাহৰণ লোৱা।

উদাহৰণ 6 ঃ $x + 2$ ৰে $2x^2 + 3x + 1$ ক হৰণ কৰা।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x - 1 \\ \hline x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\ & \underline{\overset{-}{}2x^2 \overset{-}{+} 4x} \\ & \quad -x + 1 \\ & \quad \underline{\overset{+}{-}x \overset{+}{-} 2} \\ & \qquad\quad 3 \end{array}$$

সমাধান ঃ মন কৰা যে এটা হৰণ প্ৰণালীত আমি ভাগক্ৰিয়া শেষ কৰোঁ যদি ভাগশেষ শূন্য হয় নাইবা যদি ভাজকটোৰ মাত্ৰাতকৈ ভাগশেষৰ মাত্ৰা কম হয়। গতিকে ইয়াত ভাগফল $2x - 1$ আৰু ভাগশেষ 3। আকৌ

$$(2x-1)(x+2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3$$
$$= 2x^2 + 3x + 1$$

অৰ্থাৎ $\quad 2x^2 + 3x + 1 = (x+2)(2x-1) + 3$

গতিকে, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

আমি এতিয়া এই প্ৰণালীটোক এটা বহুপদক এটা দ্বিঘাত বহুপদেৰে হৰণ কৰালৈকে বিস্তাৰ কৰো আঁহা।

উদাহৰণ 7 ঃ $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ক $1 + 2x + x^2$ ৰে হৰণ কৰা।

$$\begin{array}{r|l} & \qquad 3x - 5 \\ \hline x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ & \underline{\overset{-}{}3x^3 \overset{-}{+} 6x^2 \overset{-}{+} 3x} \\ & \qquad -5x^2 - x + 5 \\ & \qquad \underline{\overset{+}{-}5x^2 \overset{+}{-} 10x \overset{+}{-} 5} \\ & \qquad\qquad 9x + 10 \end{array}$$

সমাধান ঃ আমি প্ৰথমে ভাজ্য আৰু ভাজক পদবোৰ সিহঁতৰ মাত্ৰাৰ অধঃক্ৰম অনুসৰি সজাই লওঁ। মনত পেলোৱা যে পদবোৰক এইদৰে ক্ৰমত সজাই লোৱাকেই বহুপদবোৰক আদৰ্শ ঠাঁচত লিখা বুলি কোৱা হয়। এই উদাহৰণত ভাজ্যটো ইতিমধ্যে আদৰ্শ ঠাঁচত আছেই আৰু ভাজকটোৰ আদৰ্শ ঠাঁচ হ'ল $x^2 + 2x + 1$।

সোপান 1 ঃ ভাগফলৰ প্ৰথমটো পদ পাবলৈ ভাজ্যৰ উচ্চতম মাত্ৰাৰ পদটোক (অৰ্থাৎ $3x^3$) ভাজকৰ উচ্চতম ঘাতৰ পদটোৰে (অৰ্থাৎ x^2) হৰণ কৰা। এইটো $3x$। পিছত হৰণ প্ৰণালীটো চলাই যোৱা। যি বাকী থাকে সেইটো $-5x^2 - x + 5$।

সোপান 2 ঃ এতিয়া, ভাগফলৰ দ্বিতীয়টো পদ পাবলৈ, নতুন ভাজ্যৰ উচ্চতম ঘাত থকা পদটোক (অৰ্থাৎ $-5x^2$ক) ভাজকৰ উচ্চতম ঘাত থকা পদটোৰে (অৰ্থাৎ x^2ৰে) হৰণ কৰা। ইয়েই দিব -5। আকৌ হৰণ প্ৰণালীটো $-5x^2 - x + 5$ৰ সৈতে চলাই থাকা।

সোপান 3 : যি বাকী থাকে সেইটো $9x + 10$। এতিয়া $9x + 10$ৰ মাত্ৰা ভাজক $x^2 + 2x + 1$ৰ মাত্ৰাতকৈ কম। গতিকে আমি হৰণ ক্ৰিয়া ইয়াৰ পিছলৈকে চলাই থাকিব নোৱাৰিম।

গতিকে, ভাগফল হ'ল $3x - 5$, ভাগশেষ হ'ল $9x + 10$। আকৌ

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$$
$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

ইয়াৰপৰা আকৌ, আমি দেখিবলৈ পালো যে,

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

ইয়াত আমি যি প্ৰয়োগ কৰিলো সি তোমালোকে অধ্যায়-1 ত অধ্যয়ন কৰি অহা ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধিৰ সদৃশ। ইয়ে কয় যে—

যদি $p(x)$ আৰু $g(x)$ দুটা বহুপদ যাতে $g(x) \neq 0$, তেন্তে আমি বহুপদ $q(x)$ আৰু $r(x)$ উলিয়াব পাৰো যাতে,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$,

য'ত $r(x) = 0$ বা $r(x)$ৰ মাত্ৰা $< g(x)$ৰ মাত্ৰা।

এই ফলনটোক বহুপদৰ ক্ষেত্ৰত **বিভাজন কলনবিধি** বোলা হয়।

ইয়াৰ ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ আমি এতিয়া কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আহা ঃ

উদাহৰণ 8 ঃ $x - 1 - x^2$ৰে $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ক হৰণ কৰা আৰু বিভাজন কলনবিধিটো সত্যাপন কৰা।

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & + \quad - \quad + \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \\ & - \quad + \quad - \\ \hline & 3 \end{array}$$

সমাধান ঃ লক্ষ্য কৰা যে প্ৰদত্ত বহুপদকেইটা আদৰ্শ ঠাঁচত নাই। হৰণ ক্ৰিয়া চলাবলৈ, আমি প্ৰথমে ভাজ্য আৰু ভাজক উভয়কে সিহঁতৰ মাত্ৰাৰ অধঃক্ৰমত লিখি ল'ম।

গতিকে ভাজ্য $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ আৰু ভাজক $= -x^2 + x - 1$।

হৰণ প্ৰণালীটো সোঁহাতে দেখুওৱা হ'ল। আমি ইয়াতেই বন্ধ কৰিম কাৰণ 3ৰ মাত্ৰা $= 0 < 2$

$= (-x^2 + x - 1)$ৰ মাত্ৰা

গতিকে ভাগফল $= x - 2$, ভাগশেষ $= 3$।

এতিয়া, ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 =$ ভাজ্য

এইদৰে বিভাজন কলনবিধি সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 9 ঃ $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ৰ আটাইবোৰ শূন্য উলিওৱা, যদি তুমি জানা যে ইয়াৰ দুটা শূন্য $\sqrt{2}$ আৰু $-\sqrt{2}$ ।

সমাধান ঃ যিহেতু দুটা শূন্য $\sqrt{2}$ আৰু $-\sqrt{2}$, গতিকে $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ প্ৰদত্ত বহুপদটোৰ এটা উৎপাদক। এতিয়া আমি প্ৰদত্ত বহুপদটোক $x^2 - 2$ৰে হৰণ কৰিম।

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\ & \underline{\overset{-}{2x^4} \qquad\quad \overset{+}{-4x^2}} \\ & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\ & \underline{\overset{+}{-3x^3} \qquad\quad \overset{-}{+6x}} \\ & x^2 - 2 \\ & \underline{\overset{-}{x^2} \quad \overset{+}{-2}} \\ & 0 \end{array}$$

ভাগফলৰ প্ৰথমপদ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ভাগফলৰ দ্বিতীয় পদ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ভাগফলৰ তৃতীয় পদ $\frac{x^2}{x^2} = 1$

গতিকে $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$।

এতিয়া $-3x$ক ভাগ কৰি আমি $2x^2 - 3x + 1$ ক উৎপাদক কৰি পাওঁ $(2x - 1)(x - 1)$। গতিকে ইয়াৰ শূন্যকেইটা $x = \frac{1}{2}$ আৰু $x = 1$। সেয়ে প্ৰদত্ত বহুপদটোৰ শূন্যবোৰ হ'ব $\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \frac{1}{2}$ আৰু 1।

অনুশীলনী 2.3

1. $p(x)$ বহুপদটোক $g(x)$ বহুপদটোৰে হৰণ কৰা আৰু প্ৰতিটোৰে ক্ষেত্ৰত ভাগফল আৰু ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$

(iv) $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 12$ $g(x) = x^2 - 3$

(v) $p(x) = x^6 + 3x^2 + 10$ $g(x) = x^3 + 1$

(vi) $p(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 10x + 11$ $g(x) = x^3 + 2$

2. দ্বিতীয় বহুপদটোক প্ৰথম বহুপদেৰে হৰণ কৰি প্ৰথম বহুপদটো দ্বিতীয় বহুপদটোৰ এটা উৎপাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা ঃ

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. যদি দুটা শূন্য $\sqrt{\frac{5}{3}}$ আৰু $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, তেন্তে $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ৰ বাকী আটাইবোৰ শূন্য উলিওৱা।

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ক এটা বহুপদ $g(x)$ৰে হৰণ কৰাত ভাগফল $x - 2$ আৰু ভাগশেষ $-2x + 4$ পোৱা গ'ল। $g(x)$ উলিওৱা।

5. কেইটামান বহুপদ $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ আৰু $r(x)$ৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে ইহঁতে বিভাজন কলনবিধি সিদ্ধ কৰে আৰু

(i) $p(x)$ৰ মাত্ৰা = $q(x)$ৰ মাত্ৰা (ii) $q(x)$ৰ মাত্ৰা = $r(x)$ৰ মাত্ৰা (iii) $r(x)$ৰ মাত্ৰা = 0

6. (i) $3x^3 - x^2 - 3x + 1$ বহুপদটোৰ এটা শূন্য 1। ইয়াৰ বাকীকেইটা শূন্য নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) $x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18$ বহুপদটোৰ দুটা শূন্য $\sqrt{3}$ আৰু $-\sqrt{3}$। ইয়াৰ বাকীকেইটা শূন্য নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) $x^4 - 2x^3 - 26x^2 + 54x - 27$ বহুপদটোৰ দুটা শূন্য $3\sqrt{3}$ আৰু $-3\sqrt{3}$। ইয়াৰ বাকীকেইটা শূন্য নিৰ্ণয় কৰা।

7. (i) $6x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 15x - 50$ বহুপদটোক আন এটা বহুপদ $3x + 7$ ৰে হৰণ কৰাত ভাগশেষ -15 পোৱা গ'ল। ভাগফল কি?

(ii) এটা বহুপদক $x^2 - 2$ ৰে ভাগ কৰাত ভাগফল আৰু ভাগশেষ ক্ৰমে $2x^2 + 5x - 2$ আৰু $-x + 14$ পোৱা গ'ল। বহুপদটো নিৰ্ণয় কৰা।

অনুশীলনী 2.4 (ঐচ্ছিক)* (Optional)

1. সত্যাপন কৰা যে তলত ত্ৰিঘাত বহুপদৰ লগে লগে দিয়া সংখ্যাকেইটা ইহঁতৰ শূন্য হ'ব। আকৌ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে শূন্য আৰু সহগৰ মাজৰ সম্পৰ্কও সত্যাপন কৰা।

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\ 2, 1, 1$

2. এটা ত্ৰিঘাত বহুপদ উলিওৱা যাৰ শূন্যবোৰৰ সমষ্টি, শূন্যবোৰ দুটা দুটাকৈ লৈ কৰা গুণফলবোৰৰ সমষ্টি আৰু শূন্যবোৰৰ গুণফলটো যথাক্ৰমে 2, –7 আৰু –14 হয়।

3. যদি $x^3–3x^2+x+1$ বহুপদটোৰ শূন্য তিনিটা $a– b$, a আৰু $a + b$ হয় তেন্তে a আৰু b কিমান?

4. যদি $x^4–6x^3–26x^2+138x–35$ বহুপদটোৰ দুটা শূন্য $2 \pm \sqrt{3}$, তেন্তে অইন শূন্যবোৰ উলিওৱা।

5. যদি $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ বহুপদটোক আন এটা বহুপদ $x^2 - 2x + k$ ৰে হৰণ কৰা হয়, তেন্তে ভাগশেষ ওলায় $x + a$। k আৰু a উলিওৱা।

2.5 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাবোৰ পঢ়িলা ঃ

1. 1, 2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ বহুপদবোৰক যথাক্ৰমে ৰৈখিক, দ্বিঘাত আৰু ত্ৰিঘাত বহুপদ বোলে।

2. বাস্তৱ সহগৰ, x অত দ্বিঘাত এটা বহুপদ $ax^2 + bx + c$ আৰ্হিৰ, য'ত a, b আৰু c বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a \neq 0$।

3. এটা বহুপদ $p(x)$ ৰ শূন্যকেইটা সঠিকভাৱে $y = p(x)$ৰ লেখটোৰে x-অক্ষক কটা বিন্দুবোৰৰ x-স্থানাংক।

4. এটা দ্বিঘাত বহুপদৰ শূন্য খুব বেছি 2টা থাকিব পাৰে আৰু এটা ত্ৰিঘাত বহুপদৰ শূন্য খুব বেছি 3 টা থাকিব পাৰে।

5. যদি α আৰু β দ্বিঘাত বহুপদ $ax^2 + bx + c$ৰ শূন্য, তেন্তে $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$।

6. যদি α, β, γ ত্ৰিঘাত বহুপদ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ৰ শূন্য তেন্তে

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$ আৰু $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$.

7. বিভাজন কলনবিধিয়ে বৰ্ণনা কৰে যে— যিকোনো বহুপদ $p(x)$ আৰু এটা অশূন্য বহুপদ $g(x)$ দিয়া থাকিলে, এনে বহুপদ $q(x)$ আৰু $r(x)$ পোৱা যায়, যাতে

$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$$

য'ত $r(x) = 0$ নাইবা মাত্ৰা $r(x) <$ মাত্ৰা $g(x)$.

* এই অনুশীলনীটো পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰপৰা নহয়।

M5Q7S7

দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ (Pair of Linear Equations in Two Variables)

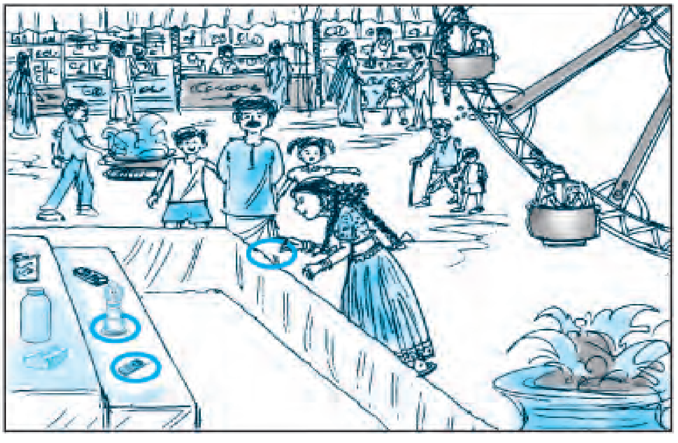
তৃতীয় অধ্যায়

3.1. অৱতাৰণা (Introduction)

তোমালোকে নিশ্চয় তলত দিয়াটোৰ দৰে পৰিস্থিতি কিছুমানৰ মাজেৰে আহিছা ঃ

গীতাই তাইৰ গাঁৱৰ মেলা এখনলৈ গৈছিল। তাই এটা বৃহৎ চকাত উঠি হুপলা নামৰ খেল এটা খেলি উপভোগ কৰিব বিচাৰিলে (ই এটা খেল য'ত এখন ডাঙৰ মেজত ৰখা কিছুমান বস্তুত এটা ৰিং দলিওৱা হয় আৰু ৰিঙটোৱে যদি বস্তুটো আৱৰিব পাৰে তুমি তাক পাবা)। তাই যিমানবাৰ বৃহৎ চক্ৰটোত উঠিছিল তাৰ আধা সংখ্যক বাৰ হুপলা খেলিছিল। প্ৰতিবাৰ চক্ৰ বগাওঁতে 3 টকা খৰচ পৰে। প্ৰতিবাৰ হুপলা খেলাৰ খৰচ 4 টকা। তাইৰ যদি খৰচ 20 টকা হয়, তেন্তে তাই কেইবাৰ চক্ৰ বগাইছিল আৰু কেইবাৰ হুপলা খেলিছিল তুমি কিদৰে উলিয়াবা ?

হয়তো তুমি বিভিন্ন ধৰণে খেলি চেষ্টা কৰিবা ? যদি তাই মাত্ৰ এবাৰহে উঠিছিল এইটো সম্ভৱনে ? যদি দুবাৰ কৰা হয় সম্ভৱনে ? আৰু ইত্যাদি। নাইবা তুমি নৱম শ্ৰেণীৰ জ্ঞান ব্যৱহাৰ কৰি এনেবোৰ পৰিস্থিতিক দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণত প্ৰকাশ কৰিব পাৰা।



আমি এনে পদ্ধতিকে চেষ্টা কৰোঁ আহা।

গীতাই চক্ৰত কিমানবাৰ বগাইছে সেই সংখ্যাটোক xৰে বুজোৱা আৰু তাই হুপলা কিমানবাৰ খেলিছে সেই সংখ্যাটোক yৰে বুজোৱা। এতিয়া পৰিস্থিতিটোক আমি দুটা সমীকৰণেৰে বৰ্ণাব পাৰোঁঃ

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

এই সমীকৰণযোৰৰ ক্ষেত্ৰত আমি সমাধান উলিয়াব পাৰোনে? এইটো কৰাৰ অনেক উপায় আছে, যিবোৰ আমি এই অধ্যায়ত আলোচনা কৰিম।

3.2 দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ (Pair of Linear Equations in Two Variables)ঃ

নৱম শ্ৰেণীৰপৰা মনত পেলোৱা যে তলৰবোৰ দুটা চলকৰ ৰৈখিক সমীকৰণ ঃ

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

আৰু $x - 0y = 2$, অৰ্থাৎ $x = 2$

তোমালোকে আকৌ জানা যে, যদি a, b আৰু c বাস্তৱ সংখ্যা আৰু a, b উভয়ে শূন্য নহয়, তেন্তে $ax + by + c = 0$ আৰ্হিত লিখিব পৰা সমীকৰণবোৰক x আৰু y চলক দুটাত এটা ৰৈখিক সমীকৰণ বোলা হয়। (a আৰু b উভয়ে শূন্য নহয় এই চৰ্তটোক আমি প্ৰায়েই $a^2 + b^2 \neq 0$ ৰে বুজাওঁ)। তোমালোকে এইটোও অধ্যয়ন কৰিছা যে এনে এটা সমীকৰণৰ সমাধান এযোৰ মান হয়, এটা xৰ বাবে আৰু এটা yৰ বাবে, যি মানে সমীকৰণটোৰ দুয়োপক্ষকে সমান কৰিব।

উদাহৰণস্বৰূপে, $2x + 3y = 5$ সমীকৰণটোৰ বাওঁপক্ষত আমি $x = 1$ আৰু $y = 1$ বহাওঁ আহা। তেন্তে

বাওঁপক্ষ $= 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5$,

যিটো সমীকৰণটোৰ সোঁপক্ষৰ সমান।

গতিকে $x = 1$ আৰু $y = 1$ এটা $2x + 3y = 5$ৰ সমাধান।

এতিয়া আমি $x = 1$ আৰু $y = 7$, $2x + 3y = 5$ সমীকৰণটোত বহাওঁ আহা। তেন্তে

বাওঁপক্ষ $= 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$

যি সোঁপক্ষটোৰ সমান নহয়।

গতিকে $x = 1$ আৰু $y = 7$ এই সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান নহয়।

লৈখিকভাৱে, ইয়াৰ অৰ্থ কি? ইয়ে বুজায় যে (1, 1) বিন্দুটো $2x + 3y = 5$ সমীকৰণটোক প্ৰকাশ কৰা সৰল ৰেখাটোৰ ওপৰত থাকে আৰু (1, 7) বিন্দুটো ইয়াৰ ওপৰত নাথাকে। গতিকে,

সমীকৰণটোৰ প্ৰতিটো সমাধানেই ইয়াক বুজোৱা ৰেখাটোৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দু।

প্ৰকৃততে এইটো যিকোনো ৰৈখিক সমীকৰণৰ ক্ষেত্ৰতেই সত্য, অৰ্থাৎ, $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ **এনে দুটা চলকত থকা এটা ৰৈখিক সমীকৰণৰ প্ৰতিটো সমাধান (*x*, *y*) য়ে সেই সমীকৰণটোক বুজোৱা সৰলৰেখাটোৰ ওপৰৰ অনুৰূপ বিন্দুটো হ'ব আৰু বিপৰীতভাৱে।**

এতিয়া ওপৰত দিয়া (1) আৰু (2) সমীকৰণ দুটা চোৱা। এই সমীকৰণ **দুয়োটা একেলগে ল'লে,** মেলাখনত গীতাৰ বিষয়ে তথ্য দিব।

এই দুটা ৰৈখিক সমীকৰণ **একে দুটা *x* আৰু *y* চলকত** আছে। এনেধৰণৰ সমীকৰণবোৰ **দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা যোৰ।**

এনেধৰণৰ যোৰবোৰক বীজগাণিতিকভাৱে কেনে দেখা হয় আমি চাওঁ আহা।

দুটা চলক x আৰু y ত এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ সাধাৰণ আৰ্হি হ'ল—

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

আৰু $$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

য'ত a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 এই আটাইবোৰ বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$।

দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ কিছুমানৰ উদাহৰণ হ'ল

$2x + 3y - 7 = 0$ আৰু $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ আৰু $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ আৰু $17 = y$

তোমালোকে জানানে, জ্যামিতিকভাৱে (লৈখিকভাৱে) এইবোৰক কেনে যেন দেখি?

মনত পেলোৱা, তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰিছিলা যে দুটা চলকত এটা ৰৈখিক সমীকৰণৰ জ্যামিতিক প্ৰদৰ্শনটো (অৰ্থাৎ লেখটো) এটা সৰলৰেখা। গতিকে দুটা চলকত এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ জ্যামিতিক প্ৰদৰ্শন কেনে দেখা যাব? তাত দুটা সৰলৰেখা থাকিব আৰু দুয়োটাকে একেলগে, বিবেচনা কৰিব লাগিব।

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে এইটোও পাইছিলা যে, এখন সমতলত দুটা সৰলৰেখা দিয়া থাকিলে, তলৰ তিনিটা সম্ভাৱনাৰ ভিতৰত মাত্ৰ এটাহে ঘটিব পাৰে ঃ

(i) দুয়োটা সৰলৰেখাই এটা বিন্দুত কটাকটি কৰিব।

(ii) দুয়োটা সৰলৰেখাই কটাকটি নকৰে, অৰ্থাৎ ইহঁত সমান্তৰাল।

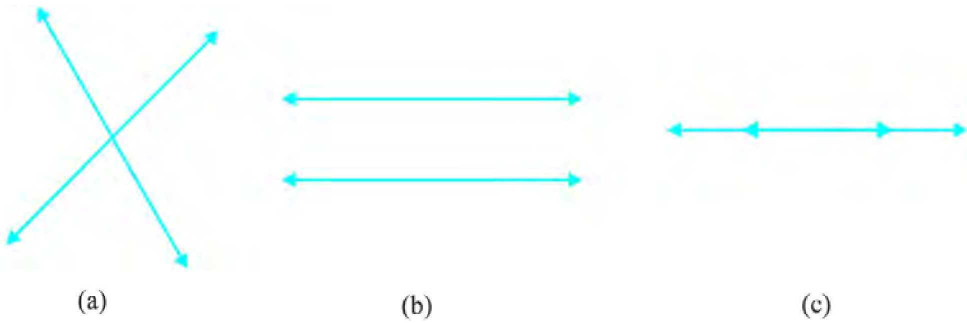
(iii) দুয়োটা সৰলৰেখাই মিলি যাব।

চিত্ৰ 3.1 ত আমি এই তিনিটা সম্ভাৱনা দেখুৱাইছোঁ।

চিত্ৰ 3.1 (a)ত সিহঁতে কটাকটি কৰিছে।

চিত্ৰ 3.1 (b)ত সিহঁত সমান্তৰাল হৈছে।

চিত্ৰ 3.1 (c)ত সিহঁত এটাৰ সৈতে আনটো মিলি গৈছে।



চিত্ৰ 3.1

এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণক বীজীয় (বীজগাণিতিক) আৰু জ্যামিতিক এই দুই ধৰণে কৰা প্ৰদৰ্শনকেইটা একেলগে হাতে হাতে যায়। আমি কেইটামান উদাহৰণ চাওঁ আহা।

উদাহৰণ 1 ঃ অনুচ্ছেদ 3.1ত দিয়া উদাহৰণটোকে লোৱা। গীতা 20 টকা লৈ মেলালৈ যায় আৰু বৃহৎ চক্ৰটো বগাবলৈ মন কৰে আৰু হুপলা খেলে। এই পৰিস্থিতিটোক বীজগাণিতিক আৰু লেখীয়ভাৱে (জ্যামিতিকভাৱে) প্ৰদৰ্শন কৰা।

সমাধান ঃ গঠন কৰা সমীকৰণযোৰ হ'ল—

$$y = \frac{1}{2}x$$

অৰ্থাৎ $x - 2y = 0$ ....(1)

$3x + 4y = 20$ ....(2)

সমীকৰণকেইটাক আমি লেখীয়ভাৱে বৰ্ণাও আহা। ইয়াৰ বাবে আমি প্ৰতিটো সমীকৰণৰ অন্ততঃ দুটাকৈ সমাধান পাব লাগিব। 3.1 তালিকাত আমি এই সমাধানকেইটা দিছো।

তালিকা 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

(i)

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

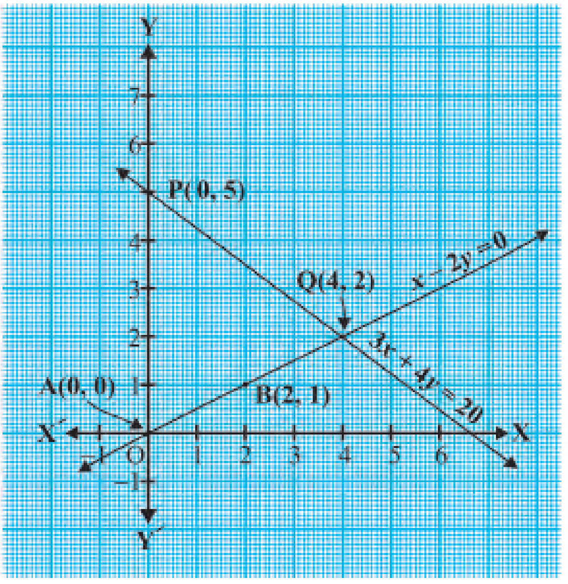
(ii)

নৱম শ্ৰেণীৰ পৰা মনত পেলোৱা যে এই বৈখিক সমীকৰণবোৰৰ প্ৰতিটোৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। সেয়ে তোমালোকৰ প্ৰত্যেকে দুটাকৈ মান বাচিব পাৰিবা, যিকেইটা আমি বচাতকৈ বেলেগ। তোমালোকে মন কৰিছানে আমি কিয় প্ৰথম সমীকৰণ আৰু দ্বিতীয় সমীকৰণত $x = 0$ বাচি লৈছোঁ? যেতিয়া চলকবোৰৰ এটা শূন্য হয়, সমীকৰণটো এটা চলকৰ সমীকৰণত পৰিণত হয়, যাক সহজে সমাধান কৰিব পাৰি। উদাহৰণ স্বৰূপে, সমীকৰণ (2)ত $x = 0$ বহুৱাই আমি পাওঁ $4y = 20$, অৰ্থাৎ $y = 5$।

একেদৰে $y = 0$ বহুৱাই আমি পাওঁ—

$3x = 20$, অৰ্থাৎ $x = \frac{20}{3}$। কিন্তু যিহেতু $\frac{20}{3}$ এটা অখণ্ড সংখ্যা নহয় গতিকে ইয়াক লেখ কাকতত সঠিকভাৱে স্থাপন কৰাটো সহজ নহয়। গতিকে আমি পচন্দ কৰিম $y = 2$ যিয়ে $x = 4$ এটা অখণ্ড মান দিব।

তালিকা 3.1ত দেখুওৱা সমাধানবোৰৰ অনুৰূপে পোৱা A(0, 0), B(2, 1) আৰু P(0, 5), Q(4, 2) বিন্দুবোৰ বহুওৱা। এতিয়া চিত্ৰ 3.2ত দেখুওৱাৰ দৰে $x - 2y = 0$ আৰু $3x + 4y = 20$ সমীকৰণ দুটাক প্ৰদৰ্শন কৰা AB আৰু PQ ৰেখা দুটা আঁকা।



চিত্ৰ 3.2

চিত্ৰ 3.2ত লক্ষ্য কৰা যে সমীকৰণ দুটাক বুজোৱা ৰেখা দুটাই (4, 2) বিন্দুত কটাকটি কৰিছে। ইয়ে কি বুজাইছে পিছৰ অনুচ্ছেদত আমি আলোচনা কৰিম।

উদাহৰণ 2 ঃ গীতা এখন লেখন মনোহাৰী দোকানলৈ গ'ল আৰু দুডাল পেঞ্চিল আৰু তিনিডাল ৰবৰ 9 টকাত কিনিলে। তাইৰ বান্ধৱী সোণালীয়ে গীতাৰ লগত গৈ নতুন বিভিন্ন তৰহৰ পেঞ্চিল আৰু ৰবৰ দেখিলে আৰু তায়ো একে ধৰণৰ চাৰিডাল পেঞ্চিল আৰু ছয়ডাল ৰবৰ 18 টকাত কিনিলে। এই পৰিস্থিতিটোক বীজগাণিতিক আৰু লৈখিকভাৱে প্ৰদৰ্শন কৰা।

সমাধান ঃ আমি পেঞ্চিল এডালৰ দামক x টকা আৰু ৰবৰ এডালৰ দামক y টকাৰে সূচাও। তেতিয়া বীজগাণিতিক প্ৰদৰ্শন তলৰ সমীকৰণেৰে দিয়া হ'ব

$$2x + 3y = 9 \qquad ....(1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad ....(2)$$

সমতুল্য জ্যামিতিক প্ৰদৰ্শন পাবলৈ আমি প্ৰতিটো সমীকৰণকে বৰ্ণনা কৰা ৰেখাটোৰ ওপৰত দুটাকৈ বিন্দু উলিয়াই লওঁ। ইয়াৰ অৰ্থ, আমি প্ৰতিটো সমীকৰণৰে দুটাকৈ সমাধান পাওঁ। তলত তালিকা 3.2ত এই সমাধানবোৰ দেখুওৱা হৈছে।

তালিকা 3.2

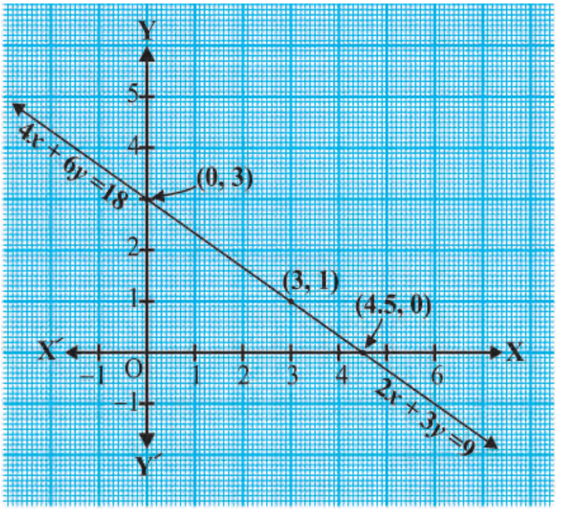
x	0	4.5
$y = \frac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \frac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

এখন লেখ কাকতত এই বিন্দুবোৰ বহুৱাই ৰেখা দুটা আঁকা। আমি দেখিলো যে এই দুয়োটা ৰেখাই সম্পূৰ্ণ মিলি গৈছে (চিত্ৰ 3.3 চোৱা)। ইয়াৰ কাৰণ এয়ে যে দুয়োটা সমীকৰণেই সমতুল্য অৰ্থাৎ এটাক আনটোৰ পৰা পাব পাৰি।



চিত্ৰ 3.3

উদাহৰণ 3 ঃ দুটা ৰেলপথ এই সমীকৰণ দুটাৰে প্ৰদৰ্শন কৰা হৈছে ঃ $x + 2y - 4 = 0$ আৰু $2x + 4y - 12 = 0$, এই পৰিস্থিতিটো জ্যামিতিকভাৱে প্ৰদৰ্শন কৰা।

সমাধান ঃ $x + 2y - 4 = 0$ আৰু $2x + 4y - 12 = 0$ সমীকৰণ দুটাৰ প্ৰতিটোৰে দুটাকৈ সমাধান তালিকা 3.3ত দিয়া হৈছে।

তালিকা 3.3

x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

(i)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

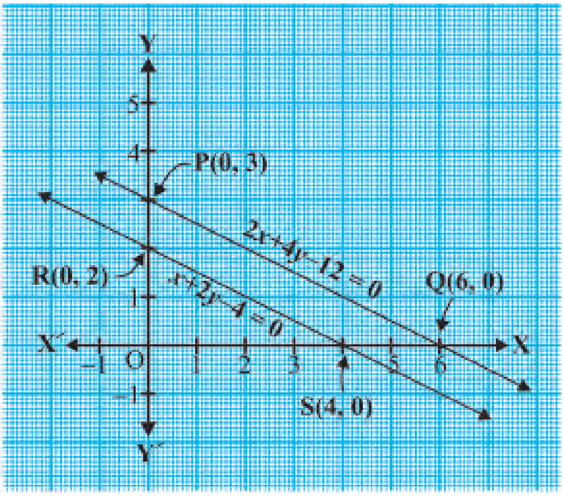
(ii)

সমীকৰণ দুটা লেখত বুজাবলৈ আমি R(0, 2) আৰু S(4, 0) বিন্দুকেইটা বহুৱাই RS ৰেখাটো

আৰু P(0, 3) আৰু Q(6, 0) বিন্দুকেইটা বহুৱাই PQ ৰেখাটো পাওঁ।

চিত্ৰ 3.4ত আমি লক্ষ্য কৰোঁ যে ৰেখা দুটাই কতো কটাকটি নকৰে। অৰ্থাৎ ইহঁত সমান্তৰাল।

গতিকে আমি কেইবাটাও পৰিস্থিতি দেখিলো যাক এযোৰ বৈখিক সমীকৰণেৰে প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰি। আমি সিহঁতৰ বীজীয় আৰু জ্যামিতিক প্ৰদৰ্শনো দেখিলো। ইয়াৰ কেইটামান পিছৰ অনুচ্ছেদত এনে বৈখিক সমীকৰণ যোৰবোৰৰ সমাধান বিচাৰ কৰিবলৈ এই প্ৰদৰ্শনবোৰ কিদৰে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি আমি আলোচনা কৰিম।



চিত্ৰ 3.4

অনুশীলনী 3.1

1. ৰহিমে জীয়েকক ক'লে, 'সাত বছৰ আগতে মোৰ বয়স তোমাৰ তেতিয়াৰ বয়সৰ সাতগুণ আছিল। আকৌ আজিৰ পৰা তিনি বছৰ পিছত তুমি যিমান ডাঙৰ হ'বা মই তাৰ তিনিগুণ হ'ম'। (এইটো আমোদজনক নহয়নে?)। এই পৰিস্থিতিটোক বীজীয়ভাৱে আৰু জ্যামিতিকভাৱে (লৈখিকভাৱে) প্ৰদৰ্শন কৰা।
2. এটা ক্ৰিকেট দলৰ প্ৰশিক্ষকে 3খন বেট আৰু 6টা বল কিনে 3900 টকাত। পিছত তেওঁ 1300 টকাত একেধৰণৰ এখন বেট আৰু 3টা বল কিনে। এই পৰিস্থিতিটোক বীজীয় আৰু লৈখিকভাৱে (জ্যামিতিকভাৱে) বৰ্ণনা কৰা।
3. দুই কে.জি. আপেল আৰু 1 কে.জি. আঙুৰৰ দাম এদিন আছিল 160 টকা। এমাহৰ পিছত 4 কে.জি. আপেল আৰু 2 কে.জি. আঙুৰৰ দাম হ'ল 300 টকা। এই পৰিস্থিতিটোক বীজীয়ভাৱে আৰু লৈখিকভাৱে বৰ্ণনা কৰা।

3.3 বৈখিক সমীকৰণ এযোৰৰ সমাধানৰ লৈখিক পদ্ধতি (Graphical Method of Solution of a Pair of Linear Equations)

আগৰ অনুচ্ছেদত বৈখিক সমীকৰণ এযোৰক কিদৰে দুটা সৰলৰেখা হিচাপে লৈখিকভাৱে বৰ্ণনা কৰিব পাৰি তোমালোকে দেখিছা। তোমালোকে এইটোও দেখিছা যে এই ৰেখা দুটাই কটাকটি

কৰিব পাৰে নাইবা ইহঁত সমান্তৰাল নাইবা ইহঁতে মিলি যায়। আমি প্ৰতি ক্ষেত্ৰতে ইহঁতক সমাধান কৰিব পাৰোনে? আৰু যদি পাৰো, কেনেকৈ? আমি এই অনুচ্ছেদত এই প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণৰ পৰা দিবলৈ চেষ্টা কৰিম।

আমি এটা এটাকৈ আগৰ উদাহৰণকেইটালৈ চাওঁ আহা।

- উদাহৰণ-1ৰ পৰিস্থিতিত গীতাই কিমানবাৰ বৃহৎ চক্ৰটোৰ ওপৰত উঠিছিল আৰু কিমানবাৰ তাই হুপলা খেলিছিল উলিওৱা।

চিত্ৰ 3.2ত তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছিলা যে পৰিস্থিতিটোক বৰ্ণনা কৰা সমীকৰণ দুটাক (4, 2) বিন্দুটোত ছেদ কৰা দুটা সৰলৰেখাৰে জ্যামিতিকভাৱে দেখুওৱা হৈছে। গতিকে (4, 2) বিন্দুটো $x - 2y = 0$ আৰু $3x + 4y = 20$ সমীকৰণ দুটা বুজোৱা দুয়োটা সৰলৰেখাৰ ওপৰতে থাকে। আৰু এইটোৱে একমাত্ৰ সাধাৰণ বিন্দু।

প্ৰদত্ত সমীকৰণযোৰৰ সমাধান যে $x = 4$, $y = 2$ হয়, আমি বীজীয়ভাৱে পৰীক্ষা কৰোঁ আহা। প্ৰতিটো সমীকৰণতে x আৰু yৰ মান দুটা বহুৱাই আমি পাওঁ, $4 - 2 \times 2 = 0$ আৰু $3(4) + 4(2) = 20$। গতিকে আমি পৰীক্ষা কৰিলো যে $x = 4$, $y = 2$ দুয়োটা সমীকৰণৰে এটা সমাধান। **যিহেতু দুয়োটা ৰেখাৰ ওপৰত (4, 2) একমাত্ৰ সাধাৰণ বিন্দু, গতিকে দুটা চলকত এই ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে সমাধান আছে।**

সেয়েহে, গীতাই বৃহৎ চক্ৰটোৰ ওপৰত উঠনৰ সংখ্যা 4 আৰু হুপলা খেলাৰ মুঠ বাৰৰ সংখ্যা 2।

- উদাহৰণ 2ৰ পৰিস্থিতিত, তোমালোকে প্ৰতিডাল পেঞ্চিল আৰু প্ৰতিডাল ৰবৰৰ দাম উলিয়াব পাৰিবানে?

চিত্ৰ 3.3ত এই পৰিস্থিতিটো জ্যামিতিকভাৱে এযোৰ মিলি যোৱা ৰেখাৰে দেখুওৱা হৈছে। সমীকৰণ দুটাৰ সমাধান সাধাৰণ বিন্দুবোৰেৰে দিয়া হৈছে।

এই ৰেখা দুটাৰ ওপৰত কিবা সাধাৰণ বিন্দু আছেনে? লেখৰপৰা, আমি লক্ষ্য কৰোঁ যে ৰেখাটোৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুয়ে দুয়োটা সমীকৰণৰ এটা সাধাৰণ সমাধান। গতিকে $2x + 3y = 9$ আৰু $4x + 6y = 18$ সমীকৰণ দুটাৰ অসীমভাৱে বহুত সমাধান আছে। এইটো একো আচৰিত কথা নহয়, কাৰণ আমি যদি $4x + 6y = 18$ সমীকৰণটোক 2ৰে ভাগ কৰোঁ, আমি $2x + 3y = 9$ পাম যিটো সমীকৰণ (1)ৰ সৈতে একে। অৰ্থাৎ দুয়োটা সমীকৰণ সমতুল্য। লেখৰপৰা, আমি দেখো যে ৰেখাটোৰ ওপৰত থকা যি কোনো বিন্দুৱে আমাক প্ৰতিডাল পেঞ্চিল আৰু প্ৰতিডাল ৰবৰৰে একোটা সম্ভৱপৰ দাম দিব। উদাহৰণস্বৰূপে প্ৰতিডাল পেঞ্চিলৰ দাম 3.75 আৰু প্ৰতিডাল ৰবৰৰ দাম 0.50 টকা, ইত্যাদিও হ'ব পাৰে।

- উদাহৰণ 3ৰ পৰিস্থিতিত, ৰে'লপথ দুটাৰ এটাই আনটোক অতিক্ৰম কৰিব পাৰেনে?

  চিত্ৰ 3.4ত পৰিস্থিতিটো জ্যামিতিকভাৱে দুটা সমান্তৰাল ৰেখাৰে বৰ্ণোৱা হৈছে। যিহেতু ৰেখাদুটাই মুঠেই কটাকটি নকৰে, ৰে'লপথ দুটাই এটাই আনটোক অতিক্ৰম নকৰে। ই এইটোও বুজায় যে, সমীকৰণ দুটাৰ কোনো সমাধান নাই।

সমাধান নথকা ৰৈখিক সমীকৰণ এযোৰক **অসংগত** (inconsistent) বোলে। দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণ এযোৰ যাৰ এটা সমাধান আছে তাক **সংগত** (consistent) যোৰৰ ৰৈখিক সমীকৰণ বোলে। এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণ যি সমতুল্য তাৰ অসীম সংখ্যক স্পষ্ট (distinct) সাধাৰণ সমাধান আছে। এনে এটা যোৰক দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা **পৰতন্ত্ৰ** (dependent) যোৰ বোলে। লক্ষ্য কৰা যে ৰৈখিক সমীকৰণৰ পৰতন্ত্ৰ যোৰ এটা সদায়ে সংগত।

আমি এতিয়া দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা যোৰ বুজোৱা সৰলৰেখাৰ আচৰণ (behaviour) আৰু ইহঁতৰ সমাধানৰ অস্তিত্ব (existence) সম্বন্ধে তলত দিয়াৰ দৰে চমুকৈ ক'ম ঃ

(i) ৰেখা দুটাই মাত্ৰ এটা বিন্দুত কটাকটি কৰে। এই ক্ষেত্ৰত সমীকৰণৰ যোৰটোৰ এটা অদ্বিতীয় সমাধান আছে (সংগত সমীকৰণৰ যোৰ)।

(ii) ৰেখা দুটা সমান্তৰাল হ'ব পাৰে। এই ক্ষেত্ৰত, সমীকৰণ দুটাৰ কোনো সমাধান নাই (অসংগত সমীকৰণৰ যোৰ)।

(iii) ৰেখা দুটা মিলি যাব পাৰে। এই ক্ষেত্ৰত সমীকৰণ দুটাৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে পৰতন্ত্ৰ (সংগত) সমীকৰণৰ যোৰ।

উদাহৰণ 1, 2 আৰু 3ত গঠন কৰা ৰৈখিক সমীকৰণ কেইযোৰলৈ আমি উভতি যাওঁ ব'লা আৰু সেইবোৰ জ্যামিতিকভাৱে কেনে ধৰণৰ যোৰ আমি লক্ষ্য কৰোঁহক।

(i) $x - 2y = 0$ আৰু $3x + 4y - 20 = 0$ (ৰেখা দুটাই ছেদ কৰে)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ আৰু $4x + 6y - 18 = 0$ (ৰেখা দুটা মিলি যায়)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ আৰু $2x + 4y - 12 = 0$ (ৰেখা দুটা সমান্তৰাল)

এতিয়া আমি লিখি লওঁ আৰু $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ আৰু $\frac{c_1}{c_2}$ মানবোৰ তিনিওটা উদাহৰণতে তুলনা কৰি চাওঁ। ইয়াত a_1, b_1, c_1 আৰু a_2, b_2, c_2 য়ে অনুচ্ছেদ 3.2ত সাধাৰণ আৰ্হিত দেখুওৱা সমীকৰণবোৰৰ সহগ বুজাইছে।

তালিকা 3.4

ক্রমিক নম্বৰ	সৰল ৰেখাৰ যোৰ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	অনুপাতবোৰৰ ৰিজনি	লৈখিক প্ৰদৰ্শন	বীজীয় বিশ্লেষণ
1.	$x - 2y = 0$ $3x+4y-20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	কটাকটি কৰা দুটা ৰেখা	সঠিককৈ এটা সমাধান (অদ্বিতীয়)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	মিলি যোৱা দুটা ৰেখা	অসীম সংখ্যক সমাধান
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	সমান্তৰাল দুটা ৰেখা	সমাধান নাই

ওপৰৰ তালিকাৰপৰা লক্ষ্য কৰিব পাৰা যে,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

আৰু $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকৰণ দুটাই বুজোৱা ৰেখাবোৰে যদি

(i) পৰস্পৰ কটাকটি কৰে, তেন্তে $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

(ii) মিলি যায়, তেন্তে $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

(iii) সমান্তৰাল, তেন্তে $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

প্ৰকৃততে, যিকোনো ৰেখাৰ যোৰৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ বিপৰীতটোও সত্য। কিছুমান আৰু উদাহৰণ নিজে বাচি লৈ তুমি সেইবোৰ পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰিবা।

এইবোৰ বৰ্ণনা কৰাৰ বাবে আমি আৰু কেইটামান উদাহৰণ বাচি লওঁ আহা।

উদাহৰণ 4 ঃ ৰৈখিকভাৱে পৰীক্ষা কৰা,

$x + 3y = 6$ ....(1)

আৰু $2x - 3y = 12$ ....(2) ৰেখাযোৰ সংগত হয়নে নহয়,

যদি হয়, সিহঁতক লৈখিকভাৱে সমাধান কৰা।

সমাধান ঃ আমি (1) আৰু (2) সমীকৰণ দুটাৰ লেখ আঁকো আহা। ইয়াৰ বাবে, আমি প্ৰতিটো সমীকৰণৰে তালিকা 3.5ত দিয়াৰ দৰে, দুটাকৈ সমাধান বিচাৰি লওঁ।

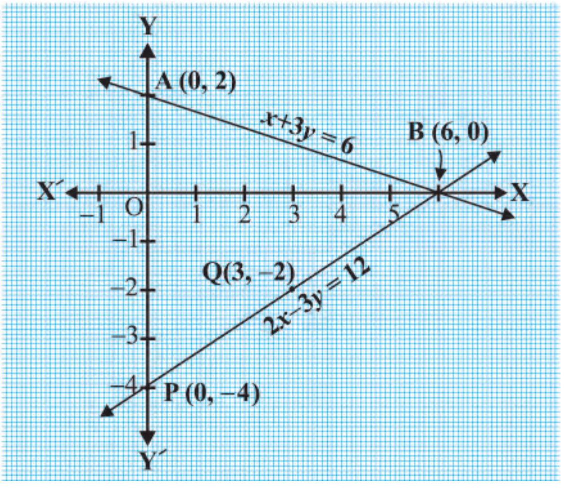
তালিকা 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	– 4	–2

লেখ কাকতত A(0, 2), B(6, 0), P(0, – 4) আৰু Q(3, – 2) বিন্দুকেইটা পাতি লোৱা আৰু এইকেইটা চিত্ৰ 3.5ত দিয়াৰ দৰে সংযোগ কৰি AB আৰু PQ ৰেখাদুটা আঁকা।

আমি লক্ষ্য কৰো যে AB আৰু PQ এই দুয়োটা ৰেখাৰ এটা সাধাৰণ বিন্দু B(6, 0) আছে। গতিকে $x = 6$ আৰু $y = 0$য়ে ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ সমাধান হয়। অৰ্থাৎ প্ৰদত্ত সমীকৰণযোৰ সংগত।



চিত্ৰ 3.5

উদাহৰণ 5 ঃ লেখৰ সহায়ত বিচাৰ কৰা— তলৰ সমীকৰণ যোৰৰ সমাধান হয়তো নাই, নাইবা অদ্বিতীয় সমাধান আছে, নাইবা অসীম সংখ্যক সমাধান আছে ঃ

$5x - 8y + 1 = 0$ ....(1)

$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0$ ....(2)

সমাধান ঃ সমীকৰণ (2)ক $\frac{5}{3}$ ৰে পূৰণ কৰি, আমি পাওঁ

$$5x - 8y + 1 = 0$$

কিন্তু ই সমীকৰণ (1)ৰ সৈতে একে। গতিকে সমীকৰণ (1) আৰু (2) য়ে বুজোৱা ৰেখা দুটা মিলি যায়। গতিকে সমীকৰণ (1) আৰু (2)ৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে।

লেখটোৰ ওপৰত কেইটামান বিন্দু বহাই তুমি নিজে পৰীক্ষা কৰা।

উদাহৰণ 6 ঃ কেইটামান পেণ্ট আৰু স্কাৰ্ট কিনাৰ বাবে চম্পা এখন দোকানলৈ গ'ল। বান্ধৱী এগৰাকীয়ে তাই প্ৰতিবিধৰে কেইটাকৈ কিনিলে সুধিলত তাই উত্তৰ দিলে— 'পেণ্ট যিমানটা কিনিলো তাৰ দুগুণতকৈ স্কাৰ্টৰ সংখ্যা দুটা কম। আকৌ পেণ্ট যিমানটা কিনিলো তাৰ চাৰিগুণতকৈ স্কাৰ্টৰ সংখ্যা চাৰিটা কম।'

চম্পাই পেণ্ট আৰু স্কাৰ্ট কেইটাকৈ কিনিলে উলিয়াবলৈ তাইৰ বন্ধুক সহায় কৰা।

সমাধান ঃ আমি পেণ্টৰ সংখ্যাক x আৰু স্কাৰ্টৰ সংখ্যাক yৰে সূচাওঁ। তেন্তে সমীকৰণ গঠন কৰিলে হ'ব—

$$y = 2x - 2 \qquad \text{..... (1)}$$

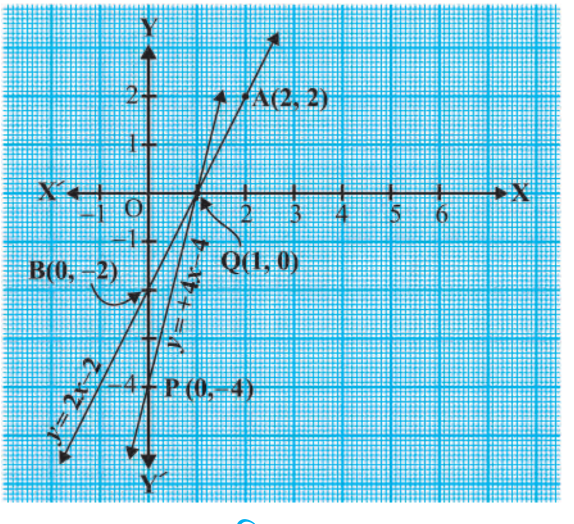
আৰু $$y = 4x - 4 \qquad \text{..... (2)}$$

প্ৰতিটো সমীকৰণৰ দুটাকৈ সমাধান উলিয়াই সমীকৰণ (1) আৰু (2)ৰ লেখ দুটা আঁকা হ'ল। তালিকা 3.6 ত সমাধান কেইটা দিয়া হৈছে।

তালিকা 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	– 2

x	0	1
$y = 4x - 4$	– 4	0



চিত্ৰ 3.6

বিন্দুবোৰ বহুওৱা আৰু চিত্ৰ 3.6ত দেখুওৱাৰ দৰে সমীকৰণকেইটাক বুজাবলৈ বিন্দুবোৰৰ মাজেৰে

যোৰা ৰেখা দুটা আঁকা।

ৰেখাদুটাই (1, 0) বিন্দুটোত কটাকটি কৰিছে। গতিকে ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ $x = 1, y = 0$ য়ে উলিয়াবলগীয়া সমাধান, অৰ্থাৎ তাই কিনা পেণ্টৰ সংখ্যা 1 আৰু তাই কোনো স্কাৰ্ট কিনা নাছিল। সমাধানটোৱে প্ৰদত্ত সমস্যাটোৰ চৰ্তবোৰ সিদ্ধ কৰিছেনে নাই **পৰীক্ষা কৰা**।

অনুশীলনী 3.2

1. তলৰ সমস্যাবোৰত ৰৈখিক সমীকৰণ যোৰ গঠন কৰা আৰু লৈখিকভাৱে সেইবোৰৰ সমাধান উলিওৱা।

(i) এটা গণিত কুইজত দশম শ্ৰেণীৰ 10 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে অংশ গ্ৰহণ কৰিছিল। যদি ছাত্ৰতকৈ ছাত্ৰীৰ সংখ্যা 4 বেছি, তেন্তে অংশ গ্ৰহণ কৰা ছাত্ৰ আৰু ছাত্ৰীৰ সংখ্যা উলিওৱা।

(ii) 5 ডাল পেঞ্চিল আৰু 7টা পেনৰ দাম একেলগে 50 টকা আৰু 7 ডাল পেঞ্চিল আৰু 5 টা পেনৰ দাম একেলগে 46 টকা। এডাল পেঞ্চিল আৰু এটা পেনৰ দাম উলিওৱা।

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ আৰু $\frac{c_1}{c_2}$ অনুপাতকেইটা ৰিজাই তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰকেইটাই বুজোৱা ৰেখা দুটাই এটা বিন্দুত কাটিব, নে সমান্তৰাল হ'ব নে লগলগা, তাক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ আৰু $\frac{c_1}{c_2}$ অনুাপতকেইটা ৰিজাই নিৰ্ণয় কৰা তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰকেইটা সংগত নে অসংগত।

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. তলৰ কোনবোৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ সংগত/অসংগত? যদি সংগত, লেখৰ সহায়ত সমাধান উলিওৱা।

(i) $x + y = 5,\qquad 2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8,\qquad 3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0,\qquad 4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0,\qquad 4x - 4y - 5 = 0$

5. এখন আয়তাকাৰ বাগিচাৰ প্ৰস্থতকৈ দীঘ 4 মিটাৰ বেছি। ইয়াৰ পৰিসীমাৰ আধা 36 মিটাৰ। বাগিচাখনৰ দীঘ, প্ৰস্থ নিৰ্ণয় কৰা।

6. $2x + 3y - 8 = 0$ ৰৈখিক সমীকৰণটো দিয়া আছে। দুটা চলকত অইন এটা ৰৈখিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যাতে এইদৰে গঠন হোৱা ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰটোৰ জ্যামিতিক প্ৰদৰ্শনটো হ'ব—

(i) কটাকটি ৰেখা (ii) সমান্তৰাল ৰেখা

(iii) মিলি যোৱা ৰেখা।

7. $x - y + 1 = 0$ আৰু $3x + 2y - 12 = 0$ সমীকৰণ দুটাৰ লেখ অংকন কৰা। এই ৰেখা দুটাই x-অক্ষৰ লগত কৰা ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটাৰ স্থানাংক উলিওৱা। ত্ৰিভুজীয় ক্ষেত্ৰটো প্ৰচ্ছাদিত কৰা।

3.4 এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণ সমাধান কৰা বীজীয় পদ্ধতি (Algebraic Methods of Solving a Pair of Linear Equations)

আগৰ অনুচ্ছেদত এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণক লৈখিকভাৱে কিদৰে সমাধান কৰিব পাৰি আমি আলোচনা কৰিছিলো। কিন্তু যেতিয়া ৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধান দিয়া বিন্দুটোৰ $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$, ইত্যাদি ধৰণৰ অনা-অখণ্ড সংখ্যাৰ স্থানাংক থাকে, সেই ক্ষেত্ৰত লৈখিক পদ্ধতিটো সুবিধাজনক নহয়। এই স্থানাংকবোৰ পঢ়োতে প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে ভুল কৰাৰ সম্ভাৱনা থাকে। সমাধান নিৰ্ণয় কৰাৰ অইন কিবা বেলেগ পদ্ধতি জানো আছে? এনে বীজীয় পদ্ধতি অনেক আছে যিবোৰ আমি এতিয়া আলোচনা কৰিম।

3.4.1 প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতি (Substitution Method) ঃ কেইটামান উদাহৰণ লৈ আমি প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিটো ব্যাখ্যা কৰিম।

উদাহৰণ 7 ঃ তলৰ সমীকৰণযোৰ প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিৰে সমাধা কৰা ঃ

$7x - 15y = 2$ ....(1)

$x + 2y = 3$ ....(2)

সমাধান ঃ

সোপান 1 ঃ আমি যিকোনো এটা সমীকৰণ ল'ম আৰু ইয়াৰ এটা চলকক আনটোৰ পদত থকাকৈ লিখিম। আমি সমীকৰণ (2) ল'ম

$$x + 2y = 3$$

ইয়াক লিখো $x = 3 - 2y$ ....(3)

সোপান 2 ঃ xৰ মান সমীকৰণ (1)ত বহুৱাই, পাওঁ

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

অৰ্থাৎ $21 - 14y - 15y = 2$

অৰ্থাৎ $-29y = -19$

গতিকে $y = \frac{19}{29}$

সোপান 3 ঃ yৰ মান সমীকৰণ (3)ত বহুৱাই, পাওঁ

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

গতিকে সমাধানটো হ'ব, $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$

সত্যাপন (Verification) ঃ $x = \frac{49}{29}$ আৰু $y = \frac{19}{29}$ দুয়োটা সমীকৰণ (1) আৰু (2) ত বহুৱাই পৰীক্ষা কৰি চালে দেখিবা যে ইহঁত সিদ্ধ হৈছে। প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিক বেছি স্পষ্টভাৱে বুজিবলৈ আমি এতিয়া পৰ্যায়ক্ৰমে বিবেচনা কৰিম ঃ

সোপান 1 ঃ যিকোনো এটা সমীকৰণৰপৰা সুবিধাজনক হোৱা ধৰণে এটা চলকৰ যেনে yৰ, মান অইনটো চলকৰ পদত লিখা, অৰ্থাৎ x।

সোপান 2 ঃ yৰ এই মানটো অইনটো সমীকৰণত বহুৱা আৰু ইয়াক এটা চলকৰ পদত লিখি, যেনে xৰ এটা চলকৰ সমীকৰণলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰা। তলৰ উদাহৰণ 9 আৰু 10ৰ দৰে, কেতিয়াবা তুমি কোনো চলক নোহোৱা বিবৃতি (উক্তি) পাব পাৰা। যদি এই বিবৃতিটো সত্য, তুমি সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰা যে ৰৈখিক সমীকৰণযোৰটোৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। যদি এই বিবৃতিটো অসত্য, তেন্তে ৰৈখিক সমীকৰণযোৰ অসংগত।

সোপান 3 ঃ অইনটো চলকৰ মান পাবলৈ সোপান-1ত ব্যৱহাৰ কৰা সমীকৰণটোত সোপান- 2ত পোৱা x (বা y)ৰ মানটো বহুৱা।

মন্তব্য (Remark) ঃ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰ সমাধা কৰিবলৈ আমি এটা চলকৰ মানটোক আনটো চলকৰ পদত উলিয়াই লৈ প্ৰতিষ্ঠা (বহুৱাই) কৰিছিলো। সেয়ে এই পদ্ধতিটোৰ নাম প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতি।

উদাহৰণ 8 ঃ অনুশীলনী 3.1ৰ প্ৰশ্ন-1টো প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা ৰহিম আৰু তেওঁৰ জীয়েকৰ বয়স (বছৰত) অনুক্ৰমে s আৰু t। তেন্তে এই পৰিস্থিতিটোক বৰ্ণোৱা ৰৈখিক সমীকৰণযোৰ হ'ব,

$s - 7 = 7\ (t - 7)$, অৰ্থাৎ $s - 7t + 42 = 0$ ....(1)

আৰু $s + 3 = 3\ (t + 3)$, অৰ্থাৎ $s - 3t = 6$ ....(2)

বা $s = 6 + 3t$

sৰ এই মানটো সমীকৰণ (1)ত বহুৱাই, আমি পাওঁ—

$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$

অৰ্থাৎ $4t = 48$, যাৰ পৰা $t = 12$

tৰ মানটো সমীকৰণ (2)ত বহুৱাই, আমি পাওঁ,

$s = 3\ (12) + 6 = 42$

গতিকে, ৰহিম আৰু তেওঁৰ জীয়েকৰ বয়স ক্ৰমে 42 আৰু 12 বছৰ।

উদাহৰণ 9 ঃ অনুচ্ছেদ 3.3ত থকা উদাহৰণ-2টো আমি লওঁ আহা। 2 ডাল পেঞ্চিল আৰু 3 ডাল ৰবৰৰ দাম 9 টকা; আৰু 4 ডাল পেঞ্চিল আৰু 3 ডাল ৰবৰৰ দাম 18 টকা। প্ৰতিডাল পেঞ্চিল আৰু ৰবৰৰ দাম উলিওৱা।

সমাধান ঃ গঠন কৰা ৰৈখিক সমীকৰণযোৰ আছিল—

$2x + 3y = 9$ (1)

$4x + 6y = 18$ (2)

$2x + 3y = 9$ সমীকৰণটোৰ পৰা আমি প্ৰথমে xৰ মান yৰ পদত প্ৰকাশ কৰি পাওঁ—

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \qquad (3)$$

এতিয়া আমি xৰ এই মানটো সমীকৰণ (2)ত বহুৱাই পাওঁ,

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

অৰ্থাৎ $18 - 6y + 6y = 18$

অৰ্থাৎ $18 = 18$

এই উক্তিটো yৰ সকলো মানৰ ক্ষেত্ৰত সত্য। তথাপিও, আমি সমাধান হিচাপে yৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট মান পাব নোৱাৰো। সেয়েহে আমি xৰো কোনো নিৰ্দিষ্ট মান পাব নোৱাৰো। এই পৰিস্থিতিটো উদ্ভৱ হোৱাৰ কাৰণ হ'ল প্ৰকৃততে দুয়োটা সমীকৰণে একে। সেয়ে সমীকৰণ (1) আৰু (2)ৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। লক্ষ্য কৰা যে আমি এই একেটা সমাধান লৈখিকভাৱেও পাইছো (অনুচ্ছেদ 3.2ৰ চিত্ৰ 3.3 চোৱা) আমি পেঞ্চিল আৰু ৰবৰৰ একোটা অদ্বিতীয় দাম পাব নোৱাৰো। কাৰণ প্ৰদত্ত পৰিস্থিতিটোত বহুতো উমৈহতীয়া সমাধান আছে।

উদাহৰণ 10 ঃ অনুচ্ছেদ 3.2ৰ উদাহৰণ 3টো আমি লওঁ আহা। ৰেলপথ দুটাই কটাকটি কৰিবনে ?

সমাধান ঃ গঠন কৰা ৰৈখিক সমীকৰণযোৰ আছিল ঃ

$x + 2y - 4 = 0$ ....(1)

$2x + 4y - 12 = 0$ ....(2)

সমীকৰণ (1)ৰ পৰা xক yৰ পদত প্ৰকাশ কৰি আমি পাওঁ,

$$x = 4 - 2y$$

সমীকৰণ (2)ত xৰ এই মানটো বহুৱাই পাওঁ,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

বা $8 - 12 = 0$

বা $-4 = 0$

যিটো উক্তি অসত্য।

গতিকে সমীকৰণযোৰৰ এটা উমৈহতীয়া সমাধান নাই। গতিকে ৰেলপথ দুটাই পৰস্পৰ কটাকটি নকৰে।

অনুশীলনী 3.3

1. প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিৰে তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণ যোৰবোৰ সমাধা কৰা ঃ

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$, $\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ আৰু $2x - 4y = -24$ক সমাধা কৰা। ইয়াৰপৰা 'm'ৰ মান উলিওৱা যাতে $y = mx + 3$।

3. তলৰ সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ গঠন কৰা আৰু প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিৰে সিহঁতৰ সমাধান উলিওৱা।

(i) দুটা সংখ্যাৰ পাৰ্থক্য 26। এটা সংখ্যা আনটোৰ তিনিগুণ হ'লে সংখ্যা দুটা উলিওৱা।

(ii) দুটা সম্পূৰক (supplementary) কোণৰ ডাঙৰটো সৰুটোতকৈ 18 ডিগ্ৰী বেছি। কোণ দুটা নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) এটা ক্ৰিকেট দলৰ প্ৰশিক্ষকজনে 7 খন বেট আৰু 6 টা বল কিনে 3800 টকাত। পিছত তেওঁ 3 খন বেট আৰু 5টা বল কিনে 1750 টকাত। প্ৰতিখন বেট আৰু প্ৰতিটো বলৰ দাম উলিওৱা।

(iv) এখন চহৰৰ টেক্সি ভাড়াত এটা নিৰ্দিষ্ট ভাড়াৰ লগত অতিক্ৰম কৰা দূৰত্বৰ ভাড়াটো লগলাগি থাকে। 10 কি.মি. দূৰত্বৰ বাবে দিবলগীয়া ভাড়া 105 টকা আৰু 15 কি.মি. ভ্ৰমণ এটাৰ বাবে দিবলগীয়া ভাড়া 155 টকা। নিৰ্দিষ্ট আৰু প্ৰতি কি.মি. ভ্ৰমণ এটাৰ ভাড়া কিমান? 25 কি.মি. দূৰত্ব ভ্ৰমণ কৰিবলগীয়া মানুহ এজনে ভাড়া কিমান দিবলগীয়া হ'ব?

(v) এটা ভগ্নাংশত যদি লব আৰু হৰ উভয়তে 2 যোগ কৰা হয় তেন্তে ভগ্নাংশটো হয় $\frac{9}{11}$। যদি লব আৰু হৰ উভয়তে 3 যোগ কৰা হয়, তেন্তে ভগ্নাংশটো হয় $\frac{5}{6}$। ভগ্নাংশটো উলিওৱা।

(vi) আজিৰপৰা পাঁচ বছৰ পিছত জেকবৰ বয়স তেওঁৰ পুত্ৰতকৈ তিনিগুণ হ'ব। পাঁচ বছৰ আগতে জেকবৰ বয়স তেওঁৰ পুত্ৰতকৈ সাতগুণ আছিল। তেওঁলোকৰ বৰ্তমান বয়স কিমান?

3.4.2. অপনয়ন পদ্ধতি (Elimination Method)

এতিয়া আমি এটা চলক অপনয়ন (আতৰোঁৱা) কৰা অইন পদ্ধতি এটা বিবেচনা কৰোঁ। প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিতকৈ কেতিয়াবা এই পদ্ধতিটো বেছি সুবিধাজনক। এই পদ্ধতিটোৱে কেনেকৈ কাম কৰে আমি চাওঁ আহা।

উদাহৰণ 11 ঃ দুজন মানুহৰ আয়ৰ অনুপাত 9 : 7 আৰু তেওঁলোকৰ খৰচৰ অনুপাত 4 : 3। যদি তেওঁলোকৰ প্ৰত্যেকে প্ৰতিমাহে 2000 টকা ৰাহি কৰিবলৈ সক্ষম হয়, তেওঁলোকৰ মাহিলী আয় কিমান?

সমাধান ঃ মানুহ দুজনৰ আয়ক আমি $9x$ টকা আৰু $7x$ টকাৰে সূচাওঁ। তেওঁলোকৰ খৰচক আমি $4y$ টকা আৰু $3y$ টকাৰে (যথাক্ৰমে) সূচাওঁ আহা। তেন্তে এই পৰিস্থিতিত গঠন কৰিবলগীয়া সমীকৰণ দুটা হ'ব—

$$9x - 4y = 2000 \quad ....(1)$$

আৰু
$$7x - 3y = 2000 \quad ....(2)$$

সোপান 1 ঃ সমীকৰণ (1)ক 3ৰে আৰু সমীকৰণ (2)ক 4 ৰে পূৰণ কৰোঁ যাতে yৰ সহগ দুয়োটাতে সমান হয়। তেতিয়া আমাৰ সমীকৰণ দুটা হ'ব—

$$27x - 12y = 6000 \quad ....(3)$$
$$28x - 12y = 8000 \quad ....(4)$$

সোপান 2 ঃ সমীকৰণ (3)ক সমীকৰণ (4)ৰ পৰা বিয়োগ কৰিলে, y অপনয়ন হ'ব, কাৰণ yৰ সহগবোৰ একে। তেন্তে আমি পাম,

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

বা,
$$x = 2000$$

সোপান 3 ঃ xৰ এই মানটো (1)ত বহুৱাই পাওঁ—

$$9(2000) - 4y = 2000$$

বা
$$y = 4000$$

গতিকে সমীকৰণ দুটাৰ সমাধান $x = 2000$, $y = 4000$। গতিকে মানুহ দুজনৰ মাহিলী আয় যথাক্ৰমে 18,000 টকা আৰু 14,000 টকা।

সত্যাপন (Verification) ঃ 18000 : 14000 = 9 : 7 । আকৌ তেওঁলোকৰ খৰচৰ অনুপাত

= 18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3

মন্তব্য (Remarks) ঃ

1. ওপৰৰ উদাহৰণটোক সমাধা কৰিবলৈ লোৱা পদ্ধতিটোক **অপনয়ন পদ্ধতি** (elimination method) বোলে। কাৰণ এটা চলকৰ এটা ৰৈখিক সমীকৰণ পাবলৈ আমি প্ৰথমে এটা

চলক আঁতৰাইছো (অপনয়ন কৰিছোঁ)। ওপৰৰ উদাহৰণটোত আমি yক অপনয়ন কৰিছোঁ। আমি xকো অপনয়ন কৰিব পাৰিলোহেঁতেন। তেনে ধৰণে কৰিববলৈ চেষ্টা কৰা।

2. এই সমস্যাটো সমাধা কৰিববলৈ তোমালোকে প্ৰতিস্থাপন নাইবা লৈখিক পদ্ধতিও ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিলাহেঁতেন। তেনেদৰে কৰিববলৈ চেষ্টা কৰা আৰু চোৱা কোনটো পদ্ধতি বেছি সুবিধাজনক।

অপনয়ন পদ্ধতিৰ এই সোপানবোৰ আমি লিখি লওঁ আঁহা ঃ

সোপান 1 ঃ প্ৰথমতে এটা চলকৰ (x নাইবা yৰ) সহগবোৰ সাংখ্যিকভাৱে সমান কৰিববলৈ দুয়োটা সমীকৰণকে এটা উপযুক্ত অশূন্য সংখ্যাৰে পূৰণ কৰা।

সোপান 2 ঃ পিছত এটা সমীকৰণক আনটোৰ পৰা বিয়োগ কৰা বা যোগ কৰা যাতে এটা চলকৰ অপনয়ন হয়। যদি তুমি এটা চলকৰ এটা সমীকৰণ পোৱা, তেন্তে সোপান-3 লৈ যোৱা।

যদি আমি সোপান-2ত কোনো চলক নথকা এটা সত্য উক্তি পাওঁ, তেন্তে মূল সমীকৰণযোৰৰ অসীম সংখ্যক সমাধান থাকিব।

যদি আমি সোপান-2ত কোনো চলক নথকা এটা অসত্য উক্তি পাওঁ, তেতিয়া মূল সমীকৰণযোৰৰ কোনো সমাধান নাথাকে। অৰ্থাৎ সমীকৰণযোৰ অসংগত।

সোপান 3 ঃ এটা চলকত (x বা y) থকা এনেদৰে পোৱা সমীকৰণটোক তাৰ মান পাববলৈ সমাধা কৰা।

সোপান 4 ঃ x (বা y)ৰ এই মানটো মূল সমীকৰণযোৰৰ যিকোনো এটাত বহুৱা যাতে অইনটো চলকৰ মান পোৱা।

এইবোৰ বৰ্ণনাৰ বাবে আৰু কেইটামান উদাহৰণ আমি সমাধা কৰিম।

উদাহৰণ 12 ঃ তলৰ ৰৈখিক সমীৰণযোৰৰ আটাইবোৰ সম্ভৱপৰ সমাধান পাববলৈ অপনয়ন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা ঃ

$$2x + 3y = 8 \quad ....(1)$$
$$4x + 6y = 7 \quad ....(2)$$

সমাধান ঃ

সোপান 1 ঃ সমীকৰণ (1)ক 2ৰে আৰু সমীকৰণ (2)ক 1ৰে পূৰণ কৰি লোৱা যাতে xৰ সহগবোৰ সমান হয়। তেতিয়া আমি সমীকৰণবোৰ এনেদৰে পাম ঃ

$$4x + 6y = 16 \quad ....(3)$$
$$4x + 6y = 7 \quad ....(4)$$

সোপান 2 ঃ সমীকৰণ (4)ক সমীকৰণ (3)ৰ পৰা বিয়োগ কৰিলে,

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

বা $0 = 9$, যিটো এটা অসত্য উক্তি।

গতিকে সমীকৰণযোৰৰ কোনো সমাধান নাই।

উদাহৰণ 13 ঃ দুটা অংক বিশিষ্ট এটা সংখ্যা আৰু সেই সংখ্যাটোৰ অংক দুটা সালসলনি কৰি পোৱা সংখ্যাটো যোগ কৰিলে 66 হয়। যদি সংখ্যাটোৰ অংক দুটাৰ পাৰ্থক্য 2, সংখ্যাটো উলিওৱা। এনে সংখ্যা কিমানটা আছে?

সমাধান ঃ ধৰা প্ৰথম সংখ্যাটোৰ দহকৰ অংকটো x আৰু এককৰ অংকটো y। গতিকে সংখ্যাটোক $10x + y$ ধৰণে বিস্তৃত আকাৰত লিখিব পাৰি [যেনে $56 = 10(5) + 6$]

যেতিয়া অংক দুটা সালসলনি কৰা হয়, তেতিয়া x এককৰ অংক আৰু y দহকৰ অংক হ'ব। বিস্তৃত আকাৰত এই সংখ্যাটো হ'ব $10y + x$ [যেনে 56 যেতিয়া ওলোটাই লিখা হয়, তেন্তে পাম $65 = 10(6) + 5$]।

দিয়া চৰ্ত অনুসৰি,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

বা $11(x + y) = 66$

বা $x + y = 6$ ....(1)

আকৌ দিয়া আছে যে সংখ্যা দুটাৰ পাৰ্থক্য 2। গতিকে

হয় $x - y = 2$ ....(2)

বা $y - x = 2$ ....(3)

যদি $x - y = 2$, তেন্তে (1) আৰু (2) ক অপনয়ন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰি পাওঁ $x = 4$ আৰু $y = 2$।

এই ক্ষেত্ৰত আমি সংখ্যাটো পাওঁ, 42।

যদি $y - x = 2$, তেন্তে (1) আৰু (3) অপনয়নেৰে সমাধা কৰি পাওঁ, $x = 2$ আৰু $y = 4$।

এইক্ষেত্ৰত আমি সংখ্যাটো পাওঁ 24।

গতিকে এনে সংখ্যা দুটা আছে 42 আৰু 24।

সত্যাপন (Verification)ঃ ইয়াত $42 + 24 = 66$ আৰু $4 - 2 = 2$। আকৌ $24 + 42 = 66$ আৰু $4 - 2 = 2$।

অনুশীলনী 3.4

1. তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণকেইযোৰ অপনয়ন পদ্ধতিৰে আৰু প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতিৰে সমাধা কৰাঃ

(i) $x + y = 5$ আৰু $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ আৰু $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ আৰু $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ আৰু $x - \frac{y}{3} = 3$

(v) $\frac{3y}{2} - \frac{5x}{3} = -2$ আৰু $\frac{y}{3} + \frac{x}{3} = \frac{13}{16}$ (vi) $x - y = 3$ আৰু $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6$

(vii) $\frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 1$ আৰু $\frac{10}{x} + \frac{6}{y} = 7$

2. তলৰ সমস্যাবোৰৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰ গঠন কৰা আৰু সিহঁতৰ সমাধান (যদি থাকে) অপনয়ন পদ্ধতিৰে উলিওৱা ঃ

(i) যদি আমি লবত 1 যোগ কৰোঁ আৰু হৰৰ পৰা 1 বিয়োগ কৰো এটা ভগ্নাংশ হয়গৈ 1। আমি যদি অকল হৰটোতহে 1 যোগ কৰো তেন্তে ই হয়গৈ $\frac{1}{2}$ । ভগ্নাংশটো কি?

(ii) পাঁচ বছৰ আগতে নুৰৰ বয়স চুনুৰ তিনিগুণ আছিল। দহ বছৰ পিছত নুৰ চুনুৰ দুগুণ ডাঙৰ হ'ব। নুৰ আৰু চুনুৰ বৰ্তমান বয়স কিমান?

(iii) দুটা অংকৰ সংখ্যা এটাৰ অংক দুটাৰ সমষ্টি 9। আকৌ এই সংখ্যাটোৰ ন গুণ ল'লে সংখ্যাটোৰ অংক দুটাক সালসলনি কৰি পোৱা সংখ্যাটোৰ দুগুণৰ সমান হয়। সংখ্যাটো উলিওৱা।

(iv) মীনাই 2000 টকা উলিয়াবলৈ এটা বেংকলৈ গ'ল। তাই ধনভৰালীক মাত্ৰ 50 টকীয়া আৰু 100 টকীয়া নোটহে দিবলৈ ক'লে। মীনাই মুঠতে 25 খন নোট পালে। তাই 50 টকীয়া আৰু 100 টকীয়া নোট কেইখনকৈ পালে?

(v) কিতাপ ধাৰলৈ দিয়া এটা লাইব্ৰেৰীত প্ৰথম তিনিদিনৰ কাৰণে এটা নিৰ্দিষ্ট মাচুল আৰু পিছৰ প্ৰতিটো দিনৰ কাৰণে এটা ওপৰঞ্চি মাচুল লয়। ৰিতাই এখন কিতাপ সাত দিন ৰখাৰ বাবে মাচুল দিয়ে 27 টকা আৰু শচীয়ে এখন কিতাপ পাঁচদিন ৰখাৰ বাবে মাচুল দিয়ে 21 টকা। নিৰ্দিষ্ট মাচুল আৰু প্ৰতিদিনে দিবলগীয়া ওপৰঞ্চি মাচুলৰ নিৰিখ কিমান উলিওৱা।

3.4.3 তিৰ্যক গুণন (বা বজ্ৰ-গুণন) পদ্ধতি (Cross - Multiplication Method)

এতিয়ালৈকে তোমালোকে দুটা চলকৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ এটাক কিদৰে লৈখিক, প্ৰতিষ্ঠাপন আৰু অপনয়ন পদ্ধতিৰে সমাধা কৰিব পাৰি তাক শিকিলা। ইয়াত আমি এই সমীকৰণবোৰ সমাধা

কৰাৰ আৰু এটা বীজীয় পদ্ধতি তোমালোকক পৰিচিত কৰি দিম যিটো বিভিন্ন কাৰণত উপকাৰী। বেছি আগবঢ়াৰ আগতে আমি তলৰ পৰিস্থিতি এটা বিচাৰ কৰি চাওঁ আহা।

5 টা কমলা আৰু 3টা আপেলৰ দাম 35 টকা, আৰু 2 টা কমলা আৰু 4 টা আপেলৰ দাম 28 টকা। এটা কমলা আৰু এটা আপেলৰ দাম আমি উলিয়াওঁ আহা।

ধৰা আমি এটা আপেলৰ দামক x টকা আৰু এটা কমলাৰ দামক y টকাৰে সূচাওঁ। তেন্তে, গঠন কৰিবলগীয়া সমীকৰণ দুটা হ'ব,

$5x + 3y = 35$, বা $5x + 3y - 35 = 0$ ....(1)

$2x + 4y = 28$, বা $2x + 4y - 28 = 0$ ....(2)

সমীকৰণ দুটা সমাধা কৰিবলৈ আমি অপনয়ন প্ৰণালী লওঁ আহা।

সমীকৰণ (1)ক 4ৰে আৰু সমীকৰণ (2)ক 3ৰে পূৰণ কৰি পাওঁ,

$$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \quad ....(3)$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \quad ....(4)$$

সমীকৰণ (3)ৰ পৰা সমীকৰণ (4) বিয়োগ কৰিলে,

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

গতিকে $x = \dfrac{-[(4)(-35) - (3)(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$

বা $x = \dfrac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)}$ ....(5)

যদি (1) আৰু (2) সমীকৰণ দুটাক $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ আৰু $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ হিচাপে লিখো, তেন্তে আমি পাওঁ,

$a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = -35, a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = -28.$

তেন্তে সমীকৰণ (5)ক আমি লিখিব পাৰোঁ, $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$,

একেদৰে $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

সমীকৰণ (5)ক সৰল কৰিলে আমি পাওঁ,

$$x = \frac{-84 + 140}{20 - 6} = 4$$

এতেকেদৰে $y = \frac{(-35)(2)-(5)(-28)}{20-6} = \frac{-70+140}{14} = 5$

গতিকে $x = 4, y = 5$ য়ে প্ৰদত্ত সমীকৰণযোৰৰ সমাধান।

তেতিয়া, কমলাৰ দাম 4 টকা আৰু আপেলৰ দাম 5 টকা।

সত্যাপন (Verification)ঃ কমলা 5টাৰ দাম + আপেল 3 টাৰ দাম = 20টকা + 15 টকা =35টকা

2টা কমলাৰ দাম + 4টা আপেলৰ দাম = 8 টকা + 20 টকা = 28 টকা

আমি এতিয়া চাওঁ, দুটা চলকত তলত দিয়া যিকোনো ৰৈখিক সমীকৰণ এযোৰৰ সমাধানৰ কাৰণে এই পদ্ধতিটোৱে কিদৰে কাম কৰে ঃ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

আৰু $$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

ওপৰত দেখুওৱাৰ দৰে x আৰু yৰ মান পাবলৈ, আমি তলৰ সোপানকেইটা অনুসৰণ কৰিম ঃ

সোপান 1 ঃ সমীকৰণ (1)ক b_2 আৰু সমীকৰণ (2)ক b_1 ৰে পূৰণ কৰি পাওঁ,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \qquad ....(3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \qquad ....(4)$$

সোপান 2 ঃ সমীকৰণ (4)ক (3)ৰ পৰা বিয়োগ কৰি, আমি পাওঁ—

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

অৰ্থাৎ $$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

গতিকে $$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \text{ ধৰি}) \qquad ....(5)$$

সোপান 3 ঃ xৰ এই মানটো (1) নাইবা (2)ত বহুৱাই পাওঁ,

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad ....(6)$$

এতিয়া দুটা ক্ষেত্ৰ ওলাব ঃ

ক্ষেত্ৰ-1 ঃ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, যদি আমি লিখোঁ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ । তেতিয়া ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ এটা অদ্বিতীয় সমাধান থাকিব।

ক্ষেত্ৰ-2 ঃ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, যদি আমি লিখোঁ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, তেন্তে $a_1 = k\,a_2$, $b_1 = k\,b_2$.

a_1, b_1ৰ এই মান সমীকৰণ (1)ত বহুৱাই আমি পাওঁ—

$$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \qquad ....(7)$$

লক্ষ্য কৰিব পাৰি যে সমীকৰণ (7) আৰু (2) উভয়ে সিদ্ধ হ'ব পাৰে যদিহে $c_1 = k\,c_2$, অৰ্থাৎ $\frac{c_1}{c_2} = k$.

যদি $c_1 = k\,c_2$, সমীকৰণ (2)ৰ যিকোনো সমাধানেই সমীকৰণ (1)ক সিদ্ধ কৰিব আৰু বিপৰীতভাৱেও হ'ব। গতিকে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, তেন্তে (1) আৰু (2) ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে।

যদি $c_1 \neq k\,c_2$, তেন্তে সমীকৰণ (1)ৰ কোনো সমাধানেই সমীকৰণ (2)ক সিদ্ধ নকৰিব আৰু বিপৰীতভাৱেও হ'ব। সেয়ে সমীকৰণযোৰৰ কোনো সমাধান নাই।

আমি সমীকৰণ (1) আৰু (2)ৰ ক্ষেত্ৰত তলত দিয়াৰ দৰে ওপৰৰ আলোচনাখিনিৰ সাৰাংশ এটা এইদৰে পাম ঃ

(i) যেতিয়া $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, আমি এটা অদ্বিতীয় সমাধান পাম।

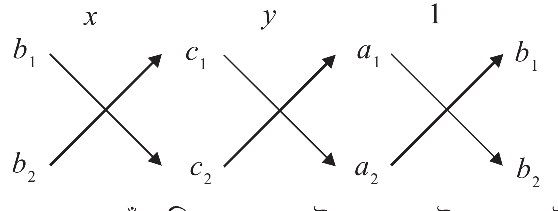
(ii) যেতিয়া $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, অসীম সংখ্যক সমাধান থাকে।

(iii) যেতিয়া $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, কোনো সমাধান নাথাকে।

লক্ষ্য কৰা যে সমীকৰণ (5) আৰু (6)য়ে দিয়া সমাধানটো তোমালোকে তলত দিয়া ধৰণে লিখিব পাৰা ঃ

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad ....(8)$$

এই ফলটো মনত ৰাখিবলৈ তোমালোকৰ তলৰ চিত্ৰটো সহায়ক হ'ব ঃ



দুটা সংখ্যাৰ মাজত থকা কাঁড় চিনডালে বুজাইছে যে সেই সংখ্যা দুটাক পূৰণ কৰি দ্বিতীয়

পূৰণফলটোক প্ৰথমটোৰ পৰা বিয়োগ কৰিব লাগে।

এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণক এই পদ্ধতিৰে সমাধা কৰিবলৈ হ'লে আমি তলৰ সোপানবোৰ অনুসৰণ কৰিম ঃ

সোপান 1 ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণ দুটাক (1) আৰু (2)ৰ আৰ্হিত লিখি লোৱা।

সোপান 2 ঃ ওপৰৰ চিত্ৰৰ সহায় লৈ (8)ত দিয়াৰ দৰে সমীকৰণ দুটা লিখা।

সোপান 3 ঃ যদি $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, তেন্তে x আৰু y উলিওৱা।

ওপৰৰ সোপান-2য়ে তোমাক এটা সংকেত দিব এই পদ্ধতিটোক কিয় **তিৰ্যক-গুণন প্ৰণালী** বুলি কোৱা হয়।

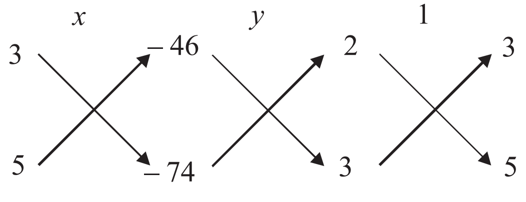
উদাহৰণ 14 ঃ গুৱাহাটীৰ বাছষ্টেণ্ডৰ পৰা আমি যদি আজাৰালৈ 2টা টিকট আৰু চাংসাৰিলৈ 3টা টিকট কিনো, মুঠ খৰছ হয় 46 টকা; কিন্তু যদি আজাৰালৈ 3টা টিকট আৰু চাংসাৰিলৈ 5টা টিকট কিনো, তেন্তে মুঠ খৰছ হয় 74 টকা। গুৱাহাটী বাছষ্টেণ্ডৰ পৰা আজাৰালৈ আৰু চাংসাৰিলৈ ভাড়া দুটা উলিওৱা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল গুৱাহাটীৰ বাছষ্টেণ্ডৰ পৰা আজাৰালৈ ভাড়া x টকা আৰু চাংসাৰিলৈ y টকা। দিয়া তথ্যমতে, আমি পাওঁ,

$$2x + 3y = 46, \quad \text{বা} \quad 2x + 3y - 46 = 0 \qquad ....(1)$$

$$3x + 5y = 74, \quad \text{বা} \quad 3x + 5y - 74 = 0 \qquad ....(2)$$

তিৰ্যক-গুণন প্ৰণালীৰে সমীকৰণ দুটা সমাধা কৰিবলৈ, আমি তলত দিয়াৰ দৰে চিত্ৰটো আঁকি লওঁ ঃ



তেন্তে $$\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$$

বা $$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

বা $$\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

বা $\frac{x}{8} = \frac{1}{1}$ আৰু $\frac{y}{10} = \frac{1}{1}$

বা $x = 8$ আৰু $y = 10$

গতিকে গুৱাহাটীৰ বাছষ্টেণ্ডৰপৰা আজাৰালৈ ভাড়া 8 টকা আৰু চাংসাৰিলৈ ভাড়া 10 টকা।

সত্যাপন (Verification) ঃ সমস্যাটোৰপৰা তুমি পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা যে আমি পোৱা সমাধানটো শুদ্ধ।

উদাহৰণ 15 ঃ pৰ কি মানৰ বাবে তলত দিয়া সমীকৰণযোৰৰ এটা অদ্বিতীয় সমাধান আছে?

$$4x + py + 8 = 0$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

সমাধান ঃ ইয়াত, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$।

এতিয়া সমীকৰণযোৰৰ এটা অদ্বিতীয় সমাধান থাকিবলৈ হ'লে ঃ

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

বা $\frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$

বা $p \neq 4$

গতিকে pৰ 4ৰ বাহিৰে সকলো মানৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰদত্ত সমীকৰণযোৰৰ এটা অদ্বিতীয় সমাধান থাকিব।

উদাহৰণ 16 ঃ kৰ কি মানৰ বাবে তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ অসীম সংখ্যক সমাধান থাকিব?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

সমাধান ঃ ইয়াত, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$

ৰৈখিক সমীকৰণ এযোৰৰ অসীম সংখ্যক সমাধান থাকিবলৈ হ'লে, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

গতিকে আমাক লাগে, $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

বা $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$

য'ৰ পৰা $k^2 = 36$, অৰ্থাৎ $k = \pm 6$

আকৌ $\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$ ৰ পৰা $3k = k^2 - 3k$,

বা $6k = k^2$, ইয়ে বুজায় $k = 0$ বা $k = 6$।

গতিকে দুয়োটা চৰ্ত পূৰণ কৰিববলৈ kৰ মান হ'ব 6। এই মানটোৰ ক্ষেত্ৰত ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ অসীম সংখ্যক সমাধান থাকিব।

অনুশীলনী 3.5

1. তলৰ কোনকেইটা ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰৰ অদ্বিতীয় সমাধান আছে, সমাধান নাই, নাইবা অসীম সংখ্যক সমাধান আছে? যদি অদ্বিতীয় সমাধান আছে, সেই ক্ষেত্ৰত বজ্ৰ-গুণন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধা কৰা।

(i) $x - 3y - 3 = 0$
$3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$
$3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$
$6x - 10y = 40$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$
$3x - 3y - 15 = 0$

(v) $2x + 3y = 6$
$4x + 6y = 12$

(vi) $x - 2y = 6$
$3x - 6y = 0$

(vii) $\frac{3a}{x} - \frac{2b}{y} = -5$
$\frac{a}{x} + \frac{3b}{y} = 2$

(viii) $2x + y - 15 = 0$
$3x - y - 5 = 0$

2. (i) a আৰু bৰ কি মানৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণ যোৰৰ অসীম সংখ্যক সমাধান থাকিব?
$2x + 3y = 7$
$(a - b)\,x + (a + b)\,y = 3a + b - 2$

(ii) kৰ কি মানৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ কোনো সমাধান নাই?
$3x + y = 1$
$(2k - 1)\,x + (k - 1)\,y = 2k + 1$

(iii) pৰ কি মানৰ বাবে $px - y = 2$, $6x - 2y = 3$ সমীকৰণযোৰৰ একমাত্ৰ সমাধান থাকিব?

(iv) kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাতে তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ কোনো সমাধান নাথাকে।
$(3k + 1)x + 3y - 2 = 0, (k^2 + 1)x + (k - 2)y - 5 = 0$

(v) mৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাতে তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ অসীম সমাধান থাকে।
$mx + 4y = m - 4, 16x + my = m$

3. প্ৰতিষ্ঠাপন আৰু বজ্ৰগুণন পদ্ধতিৰে তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ সমাধান উলিওৱা ঃ

(i) $8x + 5y = 9$
$3x + 2y = 4$

(ii) $4x - 3y = 23$
$3x + 4y = 11$

(iii) $2x + 3y - 11 = 0$
$4x - 3y + 5 = 0$

(iv) $5x + 7y = 19$
$3x + 2y = 7$

4. তলৰ সমস্যাবোৰক লৈ ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ গঠন কৰা আৰু যিকোনো বীজীয় পদ্ধতিৰে সিহঁতৰ সমাধান উলিওৱা (যদি বৰ্তে)।

(i) কোনো ছাত্ৰাবাসৰ মাহেকীয়া মাচুলৰ এটা অংশ নিৰ্দিষ্ট আৰু বাকীখিনি এজনে মেচত কিমান দিন খাদ্য গ্ৰহণ কৰিলে তাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। যেতিয়া এজন ছাত্ৰ Aই 20 দিন খাদ্য খায় তেন্তে তেওঁ ছাত্ৰাবাসৰ মাচুল দিব লাগে 1000 টকা। আকৌ এজন ছাত্ৰ Bয়ে যদি 26 দিন খাদ্য খায় তেওঁ মাচুল দিব লাগে 1180 টকা। নিৰ্দিষ্ট মাচুল আৰু প্ৰতিদিনত খাদ্যৰ দাম কি উলিওৱা।

(ii) এটা ভগ্নাংশৰ লবৰ পৰা 1 বিয়োগ কৰিলে ই হয়গৈ $\frac{1}{3}$; আৰু ইয়াৰ হৰৰ লগত 8 যোগ কৰিলে হয়গৈ $\frac{1}{4}$। ভগ্নাংশটো নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) এটা পৰীক্ষাত যশোদাই লাভ কৰে 40 নম্বৰ, য'ত তেওঁ প্ৰতিটো শুদ্ধ উত্তৰৰ বাবে পায় 3 নম্বৰ আৰু প্ৰতিটো অশুদ্ধ উত্তৰৰ বাবে হেৰুৱায় 1 নম্বৰ। যদি প্ৰতিটো শুদ্ধ উত্তৰৰ বাবে 4 নম্বৰ দিলেহেঁতেন আৰু প্ৰতিটো অশুদ্ধ উত্তৰৰ বাবে 2 নম্বৰ কাটিলেহেঁতেন, তেন্তে যশোদাই 50 নম্বৰ লাভ কৰিলেহেঁতেন। পৰীক্ষাটোত কিমানটা প্ৰশ্ন আছিল ?

(iv) ঘাইপথ এটাৰ ওপৰৰ দুখন ঠাই A আৰু Bৰ দূৰত্ব 100 কি.মি.; এখন গাড়ী Aৰ পৰা আৰু একে সময়তে আন এখন গাড়ী Bৰ পৰা ৰাওনা হয়। যদি গাড়ী দুখনে একে দিশলৈ বেলেগ বেলেগ দ্ৰুতিৰে যাত্ৰা কৰে, তেন্তে ইহঁত 5 ঘণ্টাৰ পিছত লগ হয়। যদি সিহঁতৰ এখনে আনখনৰ দিশলৈ যাত্ৰা কৰে, তেন্তে সিহঁত 1 ঘণ্টা পিছত লগ হয়। গাড়ী দুখনৰ প্ৰত্যেকৰে দ্ৰুতি কিমান ?

(v) এটা আয়তৰ যদি দৈৰ্ঘ্যক 5 একক হ্ৰাস আৰু প্ৰস্থক 3 একক বৃদ্ধি কৰা হয় তেন্তে ইয়াৰ কালি 9 বৰ্গ একক হ্ৰাস হয়। যদি ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্যক 3 একক আৰু প্ৰস্থক 2 একক বৃদ্ধি কৰা হয় তেন্তে কালি 67 বৰ্গ একক বৃদ্ধি পায়। আয়তটোৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ উলিওৱা।

3.5 দুটা চলকৰ ৰৈখিক সমীকৰণযোৰত পৰিণত কৰিব পৰা সমীকৰণবোৰ (Equations Reducible to a Pair of Linear Equations in Two Variables)

এই অনুচ্ছেদত আমি সেইবোৰ সমীকৰণৰযোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম, যিবোৰ ৰৈখিক নহয়। কিন্তু কিছুমান উপযুক্ত প্ৰতিস্থাপনৰ সহায়ত ৰৈখিক আৰ্হিলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি। আমি এতিয়া এই প্ৰণালীটো কেইটামান উদাহৰণৰ মাজেৰে ব্যাখ্যা কৰিম।

উদাহৰণ 17 ঃ সমীকৰণযোৰ সমাধান কৰা ঃ

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণ দুটাক আমি এইদৰে লিখো আহা ঃ

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \qquad .... (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad .... (2)$$

সমীকৰণ দুটা $ax + by + c = 0$ আৰ্হিত নাই। পিছে, যদি আমি $\frac{1}{x} = p$ আৰু $\frac{1}{y} = q$ ধৰো তেন্তে সমীকৰণ (1) আৰু (2) হ'ব,

$$2p + 3q = 13 \qquad .... (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad .... (4)$$

গতিকে আমি সমীকৰণ দুটাক এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিলো। এতিয়া তুমি যিকোনো পদ্ধতি অৱলম্বন কৰি এই সমীকৰণ দুটাৰ সমাধান পাবা; এইদৰে $p = 2$, $q = 3$।

তুমি জানা যে $p = \frac{1}{x}$ আৰু $q = \frac{1}{y}$.

p আৰু qৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{x} = 2 \text{ অৰ্থাৎ } x = \frac{1}{2}$$

আৰু $\frac{1}{y} = 3$ অৰ্থাৎ $y = \frac{1}{3}$।

সত্যাপন ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণ দুটাত $x = \frac{1}{2}$ আৰু $y = \frac{1}{3}$ বহুৱাই আমি দেখো যে দুয়োটা সমীকৰণেই সিদ্ধ হৈছে।

উদাহৰণ 18 ঃ এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণলৈ পৰিৱৰ্তন কৰি তলৰ সমীকৰণযোৰ সমাধা কৰা ঃ

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

সমাধান ঃ আমি বহুৱাওঁ $\frac{1}{x-1} = p$ আৰু $\frac{1}{y-2} = q$। তেন্তে, প্ৰদত্ত সমীকৰণ দুটা

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \qquad ....(1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \qquad ....(2)$$

ইহঁতক এইদৰে লিখিব পাৰি ঃ $5p + q = 2$ ....(3)

$6p - 3q = 1$ ....(4)

সমীকৰণ (3) আৰু (4)য়ে সাধাৰণ আৰ্হিত এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণ গঠিত হৈছে। এতিয়া তুমি যিকোনো পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি ইহঁতক সমাধা কৰিব পাৰিবা। আমি পাম, $p = \frac{1}{3}$ আৰু $q = \frac{1}{3}$।

এতিয়া pৰ সলনি $\frac{1}{x-1}$ বহুৱাই পাওঁ,

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$ অৰ্থাৎ $x - 1 = 3$, বা $x = 4$।

একেদৰে qৰ সলনি $\frac{1}{y-2}$ বহুৱাই পাওঁ,

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$ অৰ্থাৎ $3 = y - 2$, বা $y = 5$

গতিকে, $x = 4$, $y = 5$ য়ে প্ৰদত্ত সমীকৰণযোৰৰ নিৰ্ণেয় সমাধান।

সত্যাপন ঃ (i) আৰু (ii)ত $x = 4$ আৰু $y = 5$ বহুৱাই সিহঁত সিদ্ধ হৈছে নে নাই পৰীক্ষা কৰা।

উদাহৰণ 19 ঃ নাও এখন 10 ঘণ্টাত উজনি সোঁতত 30 কি.মি. আৰু ভটিয়নী সোঁতত 44 কি.মি. যায়। 13 ঘণ্টাত ই উজনি সোঁতত যাব পাৰে 40 কি.মি. আৰু ভটিয়নী সোঁতত যাব পাৰে 55 কি.মি.। পানীৰ সোঁতৰ দ্ৰুতি আৰু স্থিৰ পানীত নাওখনৰ দ্ৰুতি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা স্থিৰ পানীত নাওখনৰ দ্ৰুতি x কি.মি./ঘণ্টা আৰুপানীৰ সোঁতৰ দ্ৰুতিত y কি.মি./ঘণ্টা। তেন্তে ভটিয়নী সোঁতত নাওখনৰ দ্ৰুতি $(x + y)$ কি.মি./ঘণ্টা; আৰু উজনি সোঁতত নাওখনৰ দ্ৰুতি $(x - y)$ কি.মি./ঘণ্টা।

আকৌ $\qquad$ $\text{সময়} = \dfrac{\text{দূৰত্ব}}{\text{দ্ৰুতি}}$

প্ৰথম ক্ষেত্ৰত, নাওখনে যেতিয়া উজনিত 30 কি.মি. যায়, ধৰা সময় লয় (ঘণ্টাত) t_1।

তেন্তে $\qquad$ $t_1 = \dfrac{30}{x - y}$

ধৰা নাওখনে যেতিয়া ভটিয়নীত 44 কি.মি. যায়, ধৰা সময় লয় t_2 (ঘণ্টা)। তেন্তে $t_2 = \dfrac{44}{x + y}$.।

মুঠ সময় লয়, $t_1 + t_2 = 10$ ঘণ্টা। গতিকে আমি সমীকৰণটো পাওঁ,

$$\frac{30}{x - y} + \frac{44}{x + y} = 10 \qquad ....(1)$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত, নাওখনে উজনিলৈ 40 কি.মি. আৰু ভটিয়নীলৈ 55 কি.মি. যায় 13 ঘণ্টাত। আমি সমীকৰণটো পাওঁ,

$$\frac{40}{x - y} + \frac{55}{x + y} = 13 \qquad ....(2)$$

$$\frac{1}{x - y} = u \text{ আৰু } \frac{1}{x + y} = v \text{ বহুৱা} \qquad ....(3)$$

এই মানবোৰ সমীকৰণ (1) আৰু (2) ত বহুৱাই আমি এই ৰৈখিক সমীকৰণযোৰ পাওঁ ঃ

$30u + 44v = 10$ বা $30u + 44v - 10 = 0$ ....(4)

$40u + 55v = 13$ বা $40u + 55v - 13 = 0$ ....(5)

তিৰ্যক-গুণন প্ৰণালীৰে আমি পাওঁ,

$$\frac{u}{44(-13) - 55(-10)} = \frac{v}{40(-10) - 30(-13)} = \frac{1}{30(55) - 44(40)}$$

অৰ্থাৎ $\dfrac{u}{-22} = \dfrac{v}{-10} = \dfrac{1}{-110}$

অৰ্থাৎ $u = \dfrac{1}{5}$, $v = \dfrac{1}{11}$

এতিয়া এই u আৰু vৰ মানবোৰ সমীকৰণ (3)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$\dfrac{1}{x - y} = \dfrac{1}{5}$ আৰু $\dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{11}$

অৰ্থাৎ $x - y = 5$ আৰু $x + y = 11$ ....(6)

সমীকৰণ দুটা যোগ কৰি পাওঁ,

$2x = 16$ অৰ্থাৎ $x = 8$

(6)ৰ সমীকৰণ দুটা বিয়োগ কৰি পাওঁ,

$2y = 6$ অৰ্থাৎ $y = 3$

গতিকে, স্থিৰ পানীত নাওখনৰ দ্ৰুতি 8 কি.মি./ঘণ্টা আৰু বোৱঁতী পানীৰ সোঁতৰ দ্ৰুতি 3 কি.মি./ঘণ্টা।

সত্যাপন ঃ পৰীক্ষা কৰি চোৱা যে সমাধানটোৱে সমস্যাটোৰ চৰ্তকেইটা সিদ্ধ কৰিছে।

অনুশীলনী 3.6

1. ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰলৈ পৰিৱৰ্তন কৰি তলৰ সমীকৰণ যোৰকেইটা সমাধা কৰা ঃ

(i) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = 2$

$\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} = \dfrac{13}{6}$

(ii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$

$\frac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

(v) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$

$\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. তলৰ সমস্যাবোৰক একোটা সমীকৰণৰ যোৰত সূত্ৰবদ্ধ কৰা আৰু সিহঁতৰ সমাধান উলিওৱা।

(i) ঋতুৱে 2 ঘণ্টাত ভটিয়নী সোঁতত 20 কি.মি. নাও বাব পাৰে আৰু 2 ঘণ্টাত উজনি সোঁতত 4 কি.মি. যাব পাৰে। তেওঁৰ স্থিৰ পানীত নাওৰ দ্ৰুতি আৰু সোঁতৰ দ্ৰুতি উলিওৱা।

(ii) 2 জনী মহিলা আৰু 5 জন পুৰুষে একেলগে 4 দিনত কাপোৰত ডিজাইন কৰা কাম এটা কৰে। এই কামটো 3 জনী মহিলা আৰু 6 জন পুৰুষে 3 দিনত শেষ কৰে। 1 জনী মহিলাই অকলে কামটো শেষ কৰিবলৈ কিমান সময় ল'ব আৰু 1 জন পুৰুষেও অকলে কিমান সময় ল'ব?

(iii) গীতুয়ে তেওঁৰ ঘৰলৈ 300 কি.মি. পথৰ এক অংশ ৰে'লগাড়ীৰে আৰু এক অংশ বাছেৰে ভ্ৰমণ কৰে। তেওঁ 60 কি.মি. ৰে'লগাড়ীৰে আৰু বাকীখিনি বাছেৰে যাওঁতে 4 ঘণ্টা সময় লয়। তেওঁক 10 মিনিট বেছি লাগে যদি তেওঁ 100 কি.মি. ৰে'লগাড়ীৰে আৰু বাকীখিনি বাছেৰে যায়। ৰে'লগাড়ীৰ দ্ৰুতি আৰু বাছৰ দ্ৰুতি কিমান বেলেগে বেলেগে উলিওৱা।

অনুশীলনী 3.7 (ঐচ্ছিক)*

1. অলি আৰু বিজুৰ বয়সৰ পাৰ্থক্য 3 বছৰ। অলিৰ দেউতাক বৰ্মন অলিতকৈ দুগুণ ডাঙৰ আৰু বিজু তাৰ ভনীয়েক মিলিতকৈ দুগুণ ডাঙৰ। মিলি আৰু বৰ্মনৰ বয়সৰ পাৰ্থক্য 30 বছৰ। অলি আৰু বিজুৰ বয়সবোৰ উলিওৱা।

* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

2. এজনে কয়, ‘মোক এটা এশ দিয়া, বন্ধু! মই তোমাতকৈ দুগুণ ধনী হ’ম।’ আনজনে উত্তৰ দিলে, ‘মোক যদি এটা দহ দিয়া, মই তোমাতকৈ ছগুণ ধনী হ’ম।’ মোক কোৱা তেওঁলোকৰ মূলধনৰ পৰিমাণ (যথাক্রমে) কিমান? (দ্বিতীয় ভাস্কৰৰ বীজগণিতৰ পৰা)

[ইংগিত ঃ $x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$]

3. এখন ৰে’লগাড়ীয়ে এটা নিৰ্দিষ্ট দূৰত্ব সমদ্রুতিত ভ্রমি যায়। ৰে’লগাড়ীখনে যদি, ঘণ্টাত 10 কি.মি. বেছি গ’লহেঁতেন ই নিৰ্দিষ্ট সময়তকৈ 2 ঘণ্টা সময় কম ল’লেহেঁতেন। আকৌ, যদি ৰে’লগাড়ীখন ঘণ্টাত 10 কি.মি. কমকৈ গ’লহেঁতেন, তেন্তে ই নিৰ্দিষ্ট সময়তকৈ 3 ঘণ্টা বেছিকৈ ল’লেহেঁতেন। ৰে’লগাড়ীখনে অতিক্রম কৰা দূৰত্বটো উলিওৱা।

4. এটা শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰসকলক কেইটামান শাৰীত থিয় কৰোৱা হ’ল। একোটা শাৰীত 3 জনকৈ ছাত্ৰ বেছি থকাহেতেঁন 1 শাৰী কম হ’লহেঁতেন। একোটা শাৰীত 3 জনকৈ ছাত্ৰ কম থকাহেঁতেন, 2 টা শাৰী বেছি লাগিলহেঁতেন। শ্ৰেণীত ছাত্ৰৰ সংখ্যা কিমান উলিওৱা।

5. ABC ত্রিভুজ এটাত $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$। কোণ তিনিটা উলিওৱা।

6. $5x - y = 5$ আৰু $3x - y = 3$ সমীকৰণ দুটাৰ লেখ আঁকা। এই ৰেখাদুটাই আৰু yঅক্ষই গঠন কৰা ত্রিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটাৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

7. তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণ যোৰকেইটা সমাধা কৰা ঃ

(i) $px + qy = p - q$
$qx - py = p + q$

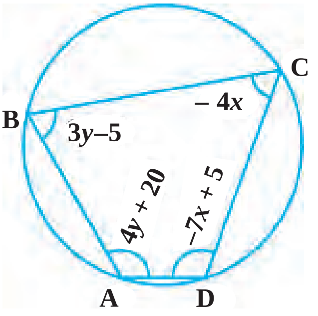
(ii) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2.$

(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$
$-378x + 152y = -604$

8. ABCD এটা চক্রীয় চতুৰ্ভুজ (চিত্ৰ 3.7 চোৱা)। চক্রীয় চতুৰ্ভুজটোৰ কোণকেইটা উলিওৱা।



চিত্ৰ 3.7

3.6 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা অধ্যয়ন কৰিছা ঃ

1. একে দুটা চলকত দুটা ৰৈখিক সমীকৰণক দুটা চলকত এটা ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ বোলে। এটা ৰৈখিক সমীকৰণযোৰৰ সাধাৰণ আৰ্হি হ'ল ঃ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ য'ত a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা যাতে, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

2. দুটা চলকত ৰৈখিক সমীকৰণ যোৰ এটাক প্ৰদৰ্শন আৰু সমাধা কৰিব পাৰি—

(i) লৈখিক পদ্ধতিৰে

(ii) বীজীয় পদ্ধতিৰে

3. লৈখিক পদ্ধতি ঃ

দুটা চলকত এযোৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ লেখক দুটা সৰলৰেখাৰে প্ৰদৰ্শন কৰা হয়।

(i) যদি ৰেখা দুটাই এটা বিন্দুত কাটে, তেতিয়া সেই বিন্দুটোৱে সমীকৰণ দুটাৰ অদ্বিতীয় সমাধানটো দিব। এই ক্ষেত্ৰত সমীকৰণ যোৰটো **সংগত**।

(ii) যদি ৰেখা দুটা মিলি যায়, তেতিয়া অসীম সংখ্যক সমাধান থাকিব— ৰেখাটোৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৱে এটা সমাধান হ'ব। এই ক্ষেত্ৰত সমীকৰণ যোৰটো **পৰতন্ত্ৰ (সংগত)**।

(iii) যদি ৰেখা দুটা সমান্তৰাল, তেতিয়া সমীকৰণ যোৰৰ কোনো সমাধান নাই। এই ক্ষেত্ৰত সমীকৰণযোৰ **অসংগত**।

4. **বীজীয় পদ্ধতি ঃ** ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ এটাৰ সমাধান নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত আমি তলৰ পদ্ধতিকেইটা আলোচনা কৰিছো।

(i) প্ৰতিস্থাপন পদ্ধতি

(ii) অপনয়ন পদ্ধতি

(iii) তিৰ্যক পদ্ধতি।

5. ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ এটাক যদি এইদৰে লিখা হয় $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ আৰু $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, তেতিয়া তলৰ অৱস্থাকেইটা দেখা দিব পাৰে ঃ

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; এই ক্ষেত্ৰত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰটো সংগত।

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; এই ক্ষেত্ৰত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰটো অসংগত।

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ এই ক্ষেত্ৰত ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰটো পৰতন্ত্ৰ আৰু সংগত।

6. এনে বহুতো পৰিস্থিতি আছে যাক গাণিতিকভাৱে দুটা সমীকৰণত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি যি আৰম্ভণীতে দেখাত ৰৈখিক নহয়। কিন্তু আমি সেইবোৰক পৰিবৰ্তন কৰি ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ এটাত পৰিণত কৰিব পাৰোঁ।

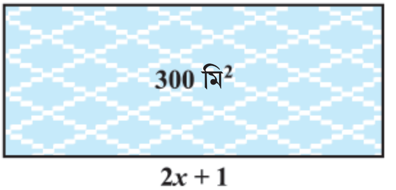
H2Z9L7

দ্বিঘাত সমীকৰণ (Quadratic Equations)

চতুৰ্থ অধ্যায়

4.1 অৱতাৰণা (Introduction)

দ্বিতীয় অধ্যায়ত তোমালোকে বিভিন্ন ধৰণৰ বহুপদ অধ্যয়ন কৰিছা। ইয়াৰ এটা ধৰণ আছিল $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ আৰ্হিৰ দ্বিঘাত বহুপদ। এই বহুপদটোক যেতিয়া আমি 0ৰে সমান কৰোঁ, আমি এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ পাওঁ। বাস্তৱ জীৱনৰ বহু পৰিস্থিতিৰ সন্মুখীন হওঁতে এনে দ্বিঘাত সমীকৰণবোৰ আহি পৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰা এটা জনকল্যাণ ন্যাসে প্ৰাৰ্থনা সভাঘৰ বান্ধিবৰ সিদ্ধান্ত লৈছে, যাৰ দৈৰ্ঘ্য প্ৰস্থৰ দুগুণতকৈ এক মিটাৰ বেছি আৰু মজিয়াৰ কালি 300 বৰ্গ মিটাৰ। সভাঘৰটোৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ কিমান হ'ব লাগিব?



চিত্ৰ 4.1

ধৰা ঘৰটোৰ প্ৰস্থ x মিটাৰ। তেন্তে ইয়াৰ দীঘ হ'ব লাগিব $(2x + 1)$ মিটাৰ। আমি এই তথ্যখিনি চিত্ৰ 4.1ত দেখুওৱাৰ দৰে চিত্ৰ আঁকি প্ৰকাশ কৰিব পাৰোঁ।

এতিয়া, সভাঘৰটোৰ কালি $= (2x + 1).x$ বৰ্গমিটাৰ $= (2x^2 + x)$ বৰ্গমিটাৰ

গতিকে $2x^2 + x = 300$ (দিয়া আছে)

সেয়েহে $2x^2 + x - 300 = 0$

গতিকে ঘৰটোৰ প্ৰস্থই $2x^2 + x - 300 = 0$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰিব লাগিব, যিটো এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ।

বহুত মানুহেই ভাবে যে দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান প্ৰথমে বেবিলনীয়সকলেই কৰিছিল। উদাহৰণস্বৰূপে, দুটা যোগাত্মক সংখ্যাৰ যোগফল আৰু পূৰণফল দিয়া থাকিলে সংখ্যা দুটা কিদৰে উলিয়াব লাগে তেওঁলোকে জানিছিল। এই সমস্যাটো $x^2 - px + q = 0$ আৰ্হিৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ এটা

সমাধান কৰাৰ সমতুল্য। গ্ৰীক গণিতজ্ঞ ইউক্লিডে দীঘ নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে এটা জ্যামিতিক উপায় উদ্ভাৱন কৰিছিল, যিটো আমাৰ আজিৰ দিনৰ পৰিভাষাত দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান। সাধাৰণ আৰ্হিৰ দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান কাৰ্যক প্ৰায়েই আদিম ভাৰতীয় গণিতজ্ঞসকলৰ কৃতিত্ব বুলি কোৱা হয়। প্ৰকৃততে $ax^2 + bx = c$ আৰ্হিৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ স্পষ্ট সূত্ৰ এটা ব্ৰহ্মগুপ্তই (খ্ৰীষ্টাব্দ 598–665) দিছিল। পিছলৈ বৰ্গ-সম্পূৰণ পদ্ধতিৰে দ্বিঘাত সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ পদ্ধতি এটা শ্ৰীধৰ আচাৰ্যই (খ্ৰীষ্টাব্দ 1025) উদ্ভাৱন কৰিছিল, যি আজিকালি দ্বিঘাত সূত্ৰৰূপে জনাজাত (দ্বিতীয় ভাস্কৰাচাৰ্যই উল্লেখ কৰা মতে)। আৰবী গণিতজ্ঞ অল্-খোৱাৰিজ্মিয়েও (খ্ৰীষ্টাব্দ প্ৰায় 800) বিভিন্ন ধৰণৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ অধ্যয়ন কৰিছিল। 1145 খ্ৰীষ্টাব্দত ইউৰোপত প্ৰকাশিত 'লিবাৰ এম্বাডোৰাম' (Liber embadorum) নামৰ তেওঁৰ কিতাপত আব্ৰাহাম বৰ হিস্যা হা-লাচিয়ে বিভিন্ন দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সম্পূৰ্ণ সমাধান দিছিল।

এই অধ্যায়ত, তোমালোকে দ্বিঘাত সমীকৰণ আৰু সিহঁতৰ মূল নিৰ্ণয় কৰাৰ বিভিন্ন উপায় সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিব পাৰিবা। দৈনন্দিন জীৱনৰ পৰিস্থিতিত দ্বিঘাত সমীকৰণৰ কিছুমান প্ৰয়োগো তোমালোকে দেখিবলৈ পাবা।

4.2 দ্বিঘাত সমীকৰণ (Quadratic Equations)

x চলকত এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ হ'ল $ax^2 + bx + c = 0$ আৰ্হিত থকা এটা সমীকৰণ য'ত a, b, c বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a \neq 0$।

উদাহৰণস্বৰূপে $2x^2 + x - 300 = 0$ এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ। একেদৰে $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ আৰু $1 - x^2 + 300 = 0$ আদিও দ্বিঘাত সমীকৰণ।

প্ৰকৃততে যদি $p(x)$ এটা 2 মাত্ৰাৰ বহুপদ, তেন্তে $p(x) = 0$ আৰ্হিৰ যি কোনো এটা সমীকৰণেই দ্বিঘাত সমীকৰণ। কিন্তু যেতিয়া আমি $p(x)$ৰ পদবোৰক সিহঁতৰ মাত্ৰাৰ অধঃক্ৰমত লিখোঁ, তেতিয়া আমি সমীকৰণটোক আদৰ্শ ঠাঁচত পাওঁ; অৰ্থাৎ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ক এটা **দ্বিঘাত সমীকৰণৰ আদৰ্শ ঠাঁচ** বুলি কোৱা হয়।

আমাৰ পৃথিৱীৰ কেউফালে থকা অনেক পৰিস্থিতিত আৰু গণিতৰ বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত দ্বিঘাত সমীকৰণৰ প্ৰৱেশ ঘটে। আমি কেইটামান উদাহৰণ বিবেচনা কৰোঁ আহা।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ অৱস্থিতি কেইটাৰ গাণিতিকভাৱে প্ৰদৰ্শন কৰা ঃ

(i) জন আৰু জয়ন্তী দুয়োৰে 45 টা মাৰ্বল আছে। তেওঁলোকৰ প্ৰত্যেকে 5 টাকৈ মাৰ্বল হেৰালে আৰু এতিয়া তেওঁলোকৰ হাতত থকা মাৰ্বলৰ সংখ্যাৰ গুণফল 124। আমি উলিয়াব লাগে, আৰম্ভণিতে তেওঁলোকৰ কেইটাকৈ মাৰ্বল আছিল।

(ii) এটা কুটীৰ শিল্পই এদিনত এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক পুতলা তৈয়াৰ কৰে। দেখা গ'ল প্ৰতিটো পুতলা উৎপাদনৰ খৰছ (টকাত) 55 বিয়োগ এদিনত উৎপাদিত পুতলাৰ সংখ্যা। এটা বিশেষ দিনত সমুদায় উৎপাদনৰ খৰচ আছিল 750। আমি নিৰ্ণয় কৰিব লাগে সিদিনাখন উৎপাদন হোৱা পুতলাৰ সংখ্যা কিমান।

সমাধান ঃ

(i) জনৰ মাৰ্বলৰ সংখ্যা ধৰা x,

গতিকে জয়ন্তীৰ মাৰ্বলৰ সংখ্যা $= 45 - x$ (কিয় ?)

জনে যেতিয়া 5 টা মাৰ্বল হেৰায়, তেওঁৰ হাতত থকা মাৰ্বলৰ সংখ্যা $= x - 5$

জয়ন্তীয়ে যেতিয়া 5 টা মাৰ্বল হেৰায়, তেওঁৰ হাতত থকা মাৰ্বলৰ সংখ্যা $= 45 - x - 5$

$$= 40 - x$$

এতেকে সিহঁতৰ গুণফল $= (x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

গতিকে $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (পূৰণফলটো 124 বুলি দিয়া আছে)

অৰ্থাৎ $-x^2 + 45x - 324 = 0$

অৰ্থাৎ $x^2 - 45x + 324 = 0$

গতিকে জনৰ হাতত থকা মাৰ্বলৰ সংখ্যাই $x^2 - 45x + 324 = 0$ এই দ্বিঘাত সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে, যিটো সমীকৰণ সমস্যাটোৰ গাণিতিকভাৱে দেখুৱাবলগীয়া নিৰ্ণেয় প্ৰদৰ্শন।

(ii) ধৰা সেই দিনটোত উৎপাদন কৰা পুতলাৰ সংখ্যা $= x$

গতিকে, প্ৰতিটো পুতলাৰ সেইদিনত উৎপাদনৰ খৰচ (টকাত) $= 55 - x$

গতিকে, সেইদিনত উৎপাদনৰ মুঠ খৰচ (টকাত) $= x(55 - x)$

সেয়েহে, $x(55 - x) = 750$

বা $55x - x^2 = 750$

বা $-x^2 + 55x - 750 = 0$

বা $x^2 - 55x + 750 = 0$

গতিকে সিদিনা উৎপাদিত পুতলাৰ সংখ্যাই

$x^2 - 55x + 750 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে, যিটো সমীকৰণ সমস্যাটোৰ গাণিতিকভাৱে দেখুৱাবলগীয়া নিৰ্ণেয় প্ৰদৰ্শন।

উদাহৰণ 2 ঃ তলৰবোৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

(i) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3) = x^2 + 1$ (iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

সমাধান ঃ

(i) বাওঁপক্ষ $= (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

গতিকে $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$, ইয়াক লিখিব পাৰি

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$

বা $x^2 - 6x + 8 = 0$

এইটো $ax^2 + bx + c = 0$ আৰ্হিৰ।

গতিকে, প্ৰদত্ত সমীকৰণটো এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ।

(ii) যিহেতু $x(x+1) + 8 = x^2 + x + 8$ আৰু $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$

গতিকে $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

বা $x + 12 = 0$

এইটো $ax^2 + bx + c = 0$ আৰ্হিৰ নহয়

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটো দ্বিঘাত সমীকৰণ নহয়।

(iii) ইয়াত, বাওঁপক্ষ $= x(2x+3) = 2x^2 + 3x$

গতিকে, $x(2x+3) = x^2 + 1$ ক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$

গতিকে আমি পাওঁ, $x^2 + 3x - 1 = 0$

এইটো $ax^2 + bx + c = 0$ আৰ্হিৰ।

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটো এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ।

(iv) ইয়াত, বাওঁপক্ষ = $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

গতিকে $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ক এইদৰে লিখিব পাৰি

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$$

বা $6x^2 + 12x + 12 = 0$ বা $x^2 + 2x + 2 = 0$

ই $ax^2 + bx + c = 0$ আৰ্হিৰ।

গতিকে প্রদত্ত সমীকৰণটো এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ।

মন্তব্য ঃ সাৱধান হোৱা! ওপৰৰ (ii)ত প্রদত্ত সমীকৰণটো দেখাত এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ যেন লাগে, কিন্তু ই দ্বিঘাত সমীকৰণ নহয়।

ওপৰৰ (iv)ত প্রদত্ত সমীকৰণটো এটা ঘনক সমীকৰণ (3 মাত্রাৰ এটা সমীকৰণ) যেন লাগে আৰু দ্বিঘাত সমীকৰণ নহয় যেন লাগে। কিন্তু ই দ্বিঘাত সমীকৰণত পৰিণত হ'ল। তুমি চাব পাৰা যে, এটা প্রদত্ত সমীকৰণ দ্বিঘাত হয়নে নহয় তাক সিদ্ধান্ত কৰাৰ আগেয়ে আমি প্রায়েই ইয়াক সৰল কৰিবলগীয়াত পৰে।

অনুশীলনী 4.1

1. তলৰবোৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ হয়নে পৰীক্ষা কৰা ঃ

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. তলৰ পৰিস্থিতিকেইটাক দ্বিঘাত সমীকৰণৰ আৰ্হিত প্রদৰ্শন কৰা ঃ

(i) আয়তাকাৰ মাটি এটুকুৰাৰ কালি 528 বৰ্গ মিটাৰ। মাটি টুকুৰাৰ দীঘ ইয়াৰ পথালিৰ দুগুণতকৈ 1 (মিটাৰত) বেছি। আমি মাটি টুকুৰাৰ দীঘ আৰু প্রস্থ উলিয়াব লাগে।

(ii) দুটা ক্ৰমিক যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফল 306। আমি সংখ্যা দুটা উলিয়াব লাগে।

(iii) ৰামৰ মাক তেওঁতকৈ 26 বছৰ ডাঙৰ। তেওঁলোকৰ বয়সৰ গুণফল (বছৰত) আজিৰ পৰা 3 বছৰ পিছত হ'বগৈ 360। ৰামৰ বৰ্তমান বয়স আমি উলিয়াব লাগে।

(iv) এখন ৰে'লগাড়ীয়ে 480 কিলোমিটাৰ পথ এটা সমান দ্ৰুতিত ভ্ৰমণ কৰে। যদি এই দ্ৰুতি প্ৰতি ঘণ্টাত 8 কি.মি. কম হ'লহেঁতেন, তেন্তে একে সমান দূৰত্ব আগুৰিবলৈ 3 ঘণ্টা বেছি ল'লেহেঁতেন। আমি ৰে'লগাড়ীখনৰ দ্ৰুতি উলিয়াব লাগে।

4.3 উৎপাদকীকৰণেৰে দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান (Solution of a Quadratic Equation by Factorisation)

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটো লোৱা। যদি এই সমীকৰণটোৰ বাওঁহাতে x ৰ ঠাইত 1 বহুৱাও, আমি পাওঁ, বাওঁপক্ষ $= (2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ সমীকৰণটোৰ সোঁপক্ষ। আমি ক'ম যে $2x^2 - 3x + 1 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ 1 এটা মূল। ইয়ে এইটোও সূচায় যে $2x^2 - 3x + 1$ দ্বিঘাত বহুপদটোৰ 1 এটা শূন্য।

সাধাৰণতে এটা বাস্তৱ সংখ্যা αক $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ এই দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল বোলে যদি $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$। আমি এইটোও কওঁ যে, **দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ $x = \alpha$ এটা সমাধান, বা α ই দ্বিঘাত সমীকৰণটোক সিদ্ধ কৰে। মন কৰা যে, $ax^2 + bx + c$ বহুপদটোৰ শূন্য আৰু $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ একে।**

দ্বিতীয় অধ্যায়ত তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছা যে এটা দ্বিঘাত বহুপদৰ খুব বেছি দুটা শূন্য থাকিব পাৰে। সেয়ে যিকোনো দ্বিঘাত সমীকৰণৰ খুব বেছি দুটা মূল থাকিব পাৰে।

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে শিকিছা, কিদৰে মধ্যপদটোক দুভাগ কৰি দ্বিঘাত বহুপদবোৰৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিব লাগে। দ্বিঘাত সমীকৰণৰ মূল নিৰ্ণয়ৰ বাবে আমি এই জ্ঞান ব্যৱহাৰ কৰিম।

উদাহৰণ 3 ঃ উৎপাদক পদ্ধতিৰে $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি মধ্যপদ $-5x$ক $-2x$ $-3x$ হিচাপে ভাঙো আহা

[কাৰণ $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$]

গতিকে $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$

এতিয়া $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ক $(2x-3)(x-1) = 0$ হিচাপে লিখিব পাৰি।

গতিকে xৰ যিবোৰ মানৰ বাবে $2x^2 - 5x + 3 = 0$, সেইবোৰ $(2x-3)(x-1) = 0$ ৰ বাবেও একে অৰ্থাৎ হয়, $2x - 3 = 0$ বা $x - 1 = 0$।

এতিয়া $2x - 3 = 0$ য়ে দিয়ে $x = \frac{3}{2}$ আৰু $x - 1 = 0$ য়ে দিয়ে $x = 1$।

গতিকে, $x = \frac{3}{2}$ আৰু $x = 1$ দুয়ো সমীকৰণটোৰ সমাধান।

অন্য ভাষাত, 1 আৰু $\frac{3}{2}$ দুয়ো সমীকৰণটোৰ মূল।

সত্যাপন কৰা যে ইহঁত সমীকৰণটোৰ মূল।

মন কৰা যে আমি $2x^2 - 5x + 3$ক দুটা ৰৈখিক উৎপাদকত বিশ্লেষণ কৰি আৰু প্ৰতিটো উৎপাদককে শূন্যৰ সমান কৰি $2x^2 - 5x + 3= 0$ ৰ মূলবোৰ পাইছোঁ।

উদাহৰণ 4 ঃ $6x^2 - x - 2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ,

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ৰ মূল xৰ সেইবোৰ মান যাৰ ক্ষেত্ৰত $(3x - 2)(2x + 1) = 0$

গতিকে, $3x - 2 = 0$ নাইবা $2x + 1 = 0$

অৰ্থাৎ $x = \frac{2}{3}$ নাইবা $x = -\frac{1}{2}$

গতিকে $6x^2 - x - 2 = 0$ ৰ মূল $\frac{2}{3}$ আৰু $-\frac{1}{2}$। $\frac{2}{3}$ আৰু $-\frac{1}{2}$ য়ে $6x^2 - x - 2 = 0$ক যে সিদ্ধ কৰে সেইটো পৰীক্ষা কৰি আমি মূল দুটা সত্যাপন কৰিম।

উদাহৰণ 5 ঃ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল উলিওৱা।

সমাধান ঃ
$$\begin{aligned} 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 &= 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2 \\ &= \sqrt{3}\,x\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

গতিকে সমীকৰণটোৰ মূল xৰ সেই মানবোৰ হ'ব যাৰ ক্ষেত্ৰত,

$$\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) = 0$$

এতিয়া, $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$ যদি $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$

গতিকে এই মূলটো দুবাৰকৈ পুনৰাবৃত্তি কৰিব, এবাৰ প্ৰতিটো $\sqrt{3}x-\sqrt{2}$ উৎপাদকৰ ক্ষেত্ৰত।

গতিকে $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ ৰ মূলবোৰ $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ।

উদাহৰণ 6 ঃ অনুচ্ছেদ 4.1ত আলোচনা কৰা প্ৰাৰ্থনা সভাঘৰটোৰ দীঘ প্ৰস্থ উলিওৱা।

সমাধান ঃ অনুচ্ছেদ 4.1ত আমি পাইছিলোঁ যে যদি সভাঘৰটোৰ প্ৰস্থ x মি., তেন্তে xয়ে $2x^2 + x - 300 = 0$ সমীকৰণটোক সিদ্ধ কৰে। উৎপাদক পদ্ধতিৰে, আমি এই সমীকৰণটো লিখোঁ,

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

বা $\quad 2x(x-12) + 25(x-12) = 0$

বা $\quad (x-12)(2x+25) = 0$

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ হ'ব $x = 12$ বা $x = -\frac{25}{2}$ । যিহেতু x ঘৰটোৰ প্ৰস্থ, ই বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে।

গতিকে ঘৰটোৰ প্ৰস্থ 12 মি.। ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্য $= 2x + 1 = 25$ মি.।

অনুশীলনী 4.2

1. উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে তলৰ দ্বিঘাত সমীকৰণবোৰৰ মূলবোৰ উলিওৱা।

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$ (vi) $2x^2 - 7x + 6$

(vii) $x^2 - 10x - 96$ (viii) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 7\sqrt{3} = 0$

(ix) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ (x) $14x + 5 - 3x^2 = 0$

2. উদাহৰণ 1ত দিয়া সমস্যা দুটা সমাধান কৰা।

3. দুটা সংখ্যা উলিওৱা যাৰ সমষ্টি 27 আৰু গুণফল 182।

4. দুটা ক্ৰমিক যোগাত্মক সংখ্যা উলিওৱা যাৰ বৰ্গৰ যোগফল 365।

5. এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ উচ্চতা ইয়াৰ ভূমিতকৈ 7 চে.মি. কম। যদি অতিভুজটো 13 চে.মি., অইন বাহু দুটা উলিওৱা।

6. এটা কুটীৰ শিল্পই দৈনিক এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক মাটিৰ বাচন তৈয়াৰ কৰে। এদিন দেখা গ'ল যে প্ৰতিটো বস্তুৰ উৎপাদনৰ খৰছ (টকাত) সিদিনাৰ উৎপাদিত বস্তুৰ সংখ্যাৰ দুগুণতকৈ 3 বেছি। যদি সিদিনা উৎপাদনৰ মুঠ ব্যয় 90 টকা, উৎপাদিত বস্তুৰ সংখ্যা আৰু প্ৰতিটো বস্তুৰ ব্যয় কিমান হ'ব উলিওৱা।

4.4 বৰ্গ-সম্পূৰণ পদ্ধতিৰে দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান (Solution of a Quadratic Equation by Completing the Square)

আগৰ অনুচ্ছেদত তোমালোকে দ্বিঘাত সমীকৰণৰ মূল নিৰ্ণয়ৰ এটা পদ্ধতি শিকিলা। এই অনুচ্ছেদত আমি অইন এটা পদ্ধতি অধ্যয়ন কৰিম।

তলৰ পৰিস্থিতিটো বিবেচনা কৰা ঃ

আজিৰপৰা দুবছৰ আগৰ সুনীতাৰ বয়স (বছৰত) আৰু আজিৰ পৰা চাৰিবছৰ পিছত তাইৰ বয়সৰ পূৰণফলটো বৰ্তমান বয়সৰ দুগুণতকৈ 1 বেছি। তাইৰ বৰ্তমান বয়স কিমান?

ইয়াৰ উত্তৰ দিবলৈ, ধৰা তাইৰ বৰ্তমান বয়স (বছৰত) x। তেন্তে আজিৰপৰা দুবছৰ আগৰ আৰু চাৰিবছৰ পিছৰ বয়সৰ পূৰণফল হয় $(x-2)(x+4)$

গতিকে $\quad (x-2)(x+4) = 2x+1$

অৰ্থাৎ $\quad x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

অৰ্থাৎ $\quad x^2 - 9 = 0$

গতিকে সুনীতাৰ বৰ্তমান বয়সে $x^2 - 9 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

আমি ইয়াক $x^2 = 9$ হিচাপে লিখিব পাৰোঁ। বৰ্গমূল লৈ আমি পাওঁ $x = 3$ বা $x = -3$। যিহেতু বয়সটো যোগাত্মক সংখ্যা, গতিকে $x = 3$।

গতিকে সুনীতাৰ বৰ্তমান বয়স 3 বছৰ।

এতিয়া $(x+2)^2 - 9 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটো বিবেচনা কৰা। এইটো সমাধান কৰিবলৈ, আমি ইয়াক $(x+2)^2 - 9 = 0$ হিচাপে লিখিব পাৰোঁ। বৰ্গমূল লৈ আমি পাওঁ, $x+2 = 3$ বা $x+2 = -3$
গতিকে $x = 1$ বা $x = -5$।

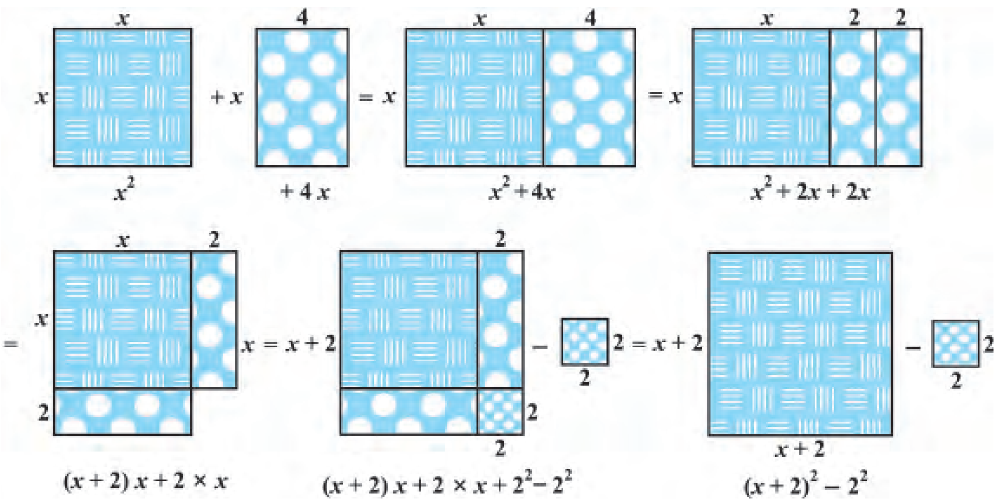
গতিকে $(x+2)^2 - 9 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলকেইটা 1 আৰু -5।

ওপৰৰ দুয়োটা উদাহৰণতে, x ধাৰণ কৰা পদটো সম্পূৰ্ণভাৱে এটা বৰ্গৰ ভিতৰত আছে, আৰু আমি মূলকেইটা বৰ্গমূল লৈ সহজে উলিয়াব পাৰিছিলোঁ। কিন্তু আমাক যদি সোধা হয় $x^2 + 4x - 5=0$ সমীকৰণটো সমাধা কৰিবলৈ, তেন্তে কি হ'ব? সম্ভৱতঃ আমি উৎপাদকীকৰণ প্ৰয়োগ কৰি সেইটো

কৰিবলৈ চাম, যেতিয়ালৈকে আমি অনুভৱ (কেনেবাকৈ) কৰোঁ যে $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$।

গতিকে $x^2 + 4x - 5 = 0$ সমাধান কৰাটো $(x + 2)^2 - 9 = 0$ক সমাধান কৰাৰ সমতুল্য, যাক আমি অতি বেগেৰে কৰিব পৰাটো দেখিছোঁ। আচলতে, আমি যিকোনো দ্বিঘাত সমীকৰণকে $(x + a)^2 - b^2 = 0$ আৰ্হিলৈ পৰিৱৰ্তন কৰিব পাৰোঁ, আৰু পিছত ইয়াৰ মূলবোৰ সহজে উলিয়াব পাৰোঁ। এইটো সম্ভৱ হয়নে আমি চাওঁ আহা। চিত্ৰ 4.2 লৈ চোৱা।

এই চিত্ৰটোত, আমি দেখা পাওঁ $x^2 + 4x$ ক কিদৰে $(x + 2)^2 - 4$লৈ পৰিৱৰ্তন কৰা হৈছে।



চিত্ৰ 4.2

প্ৰণালীটো তলত দিয়াৰ দৰে ঃ

$$x^2 + 4x = \left(x^2 + \frac{4}{2}x\right) + \frac{4}{2}x$$
$$= x^2 + 2x + 2x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

গতিকে, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

গতিকে, $x^2 + 4x - 5 = 0$ বৰ্গ সম্পূৰণ প্ৰণালীৰে $(x + 2)^2 - 9 = 0$ হিচাপে লিখিব পাৰি। এইটো **বৰ্গ সম্পূৰণ পদ্ধতি** বুলি জনা হয়।

চমুকৈ, এইটোক তলৰ দৰে দেখুৱাব পাৰি ঃ

$$x^2 + 4x = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

গতিকে, $x^2 + 4x - 5 = 0$ ক

$\left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$ হিচাপে

অৰ্থাৎ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ হিচাপে লিখিব পাৰি।

এতিয়া $3x^2 - 5x + 2 = 0$ সমীকৰণটো বিচাৰ কৰা। মন কৰা যে x^2 ৰ সহগটো এটা পূৰ্ণবৰ্গ নহয়। গতিকে সমীকৰণটোক দুয়োপিনে 3ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ।

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

এতিয়া, $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

গতিকে, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ক

$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$ হিচাপে

অৰ্থাৎ $\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ হিচাপে লিখিব পাৰি।

গতিকে $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ৰ সমাধানবোৰ $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ৰ সৈতে একে, অৰ্থাৎ

$$3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ বা } 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(আমি ইয়াক এইদৰেও চুটিকৈ লিখিব পাৰোঁ $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$, য'ত '±'য়ে 'যোগ-বিয়োগ' বুজাইছে।)

সেয়ে, $3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ বা $3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

গতিকে, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ বা $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

সেয়েহে $x = 1$ নাইবা $x = \frac{4}{6}$

অৰ্থাৎ $x = 1$ নাইবা $x = \frac{2}{3}$

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ মূল দুটা 1 আৰু $\frac{2}{3}$ ।

মন্তব্য ঃ এই প্ৰণালীটো তলত দিয়াৰ দৰে অইন এক ধৰণেও দেখুৱাব পাৰি।

সমীকৰণটো $3x^2 - 5x + 2 = 0$

এইটো $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ ৰ সৈতে একে।

এতিয়া, $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

গতিকে $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ৰ সমাধানকেইটা $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ ৰ সৈতে একেই,

যিকেইটা $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$ অৰ্থাৎ $x = \frac{5}{6}+\frac{1}{6} = 1$ আৰু $x = \frac{5}{6}-\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

ওপৰৰ প্ৰণালীটো বৰ্ণনা কৰাৰ বাবে আমি কেইটামান উদাহৰণ বিবেচনা কৰোঁ ঃ

উদাহৰণ 7 ঃ উদাহৰণ-3ত দিয়া সমীকৰণটো বৰ্গ-সম্পূৰণ পদ্ধতিৰে সমাধা কৰা।

সমাধান ঃ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকৰণটো $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ৰ সৈতে একে।

এতিয়া, $$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

গতিকে, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ক $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ হিচাপে লিখিব পাৰি।

সেয়ে $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ সঠিকভাৱে $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ৰ মূলবোৰৰ সৈতে একে।

এতিয়া, $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ সমীকৰণটো $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ৰ সৈতে একে।

গতিকে $\quad x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$

অৰ্থাৎ $\quad x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$

অৰ্থাৎ $\quad x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$ বা $x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$

অৰ্থাৎ $\quad x = \frac{3}{2}$ বা $x = 1$

গতিকে সমীকৰণটোৰ সমাধান $x = \frac{3}{2}$ আৰু 1।

আমাৰ সমাধানবোৰ **সত্যাপন** কৰোঁ আহা ঃ

$2x^2 - 5x + 3 = 0$ত $x = \frac{3}{2}$ বহুৱাই আমি পাওঁ,

$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$, যিটো শুদ্ধ। একেদৰে তুমি পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা যে, $x = 1$ য়েও প্ৰদত্ত সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰিছে।

উদাহৰণ-7ত আমি $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকৰণটোক কেওপিনে 2ৰে হৰণ কৰি পাইছিলো, $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ যাতে প্ৰথম পদটো পূৰ্ণবৰ্গ হয় আৰু পিছত বৰ্গটো সম্পূৰ্ণ কৰিছিলোঁ। ইয়াৰ পৰিৱৰ্তে আমি কেওপিনে 2ৰে পূৰণ কৰি প্ৰথম পদটো $4x^2 = (2x)^2$ কৰি বৰ্গটো সম্পূৰ্ণ কৰিবও পাৰোঁ।

এই পদ্ধতিটো পিছৰ উদাহৰণত বৰ্ণনা কৰা হ'ল ঃ

উদাহৰণ 8 ঃ বৰ্গ সম্পূৰণ পদ্ধতিৰে $5x^2 - 6x - 2 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলকেইটা উলিওৱা।

সমাধান ঃ সমীকৰণটোৰ দুয়োপিনে 5ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ,

$$25x^2 - 30x - 10 = 0$$

এইটো তলৰটোৰ সৈতে একে,

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

অৰ্থাৎ $(5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$

অৰ্থাৎ $(5x - 3)^2 - 19 = 0$

অৰ্থাৎ $(5x - 3)^2 = 19$

অৰ্থাৎ $5x - 3 = \pm\sqrt{19}$

অৰ্থাৎ $5x = 3 \pm \sqrt{19}$

গতিকে $x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$

গতিকে মূলকেইটা হ'ব $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ আৰু $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$

সত্যাপন কৰা যে মূলদুটা $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ আৰু $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ ।

উদাহৰণ 9 ঃ বৰ্গ সম্পূৰণ পদ্ধতিৰে $4x^2 + 3x + 5 = 0$ৰ মূলবোৰ উলিওৱা।

সমাধান ঃ মন কৰা যে, $4x^2 + 3x + 5 = 0$ তলৰটোৰ সৈতে একে ঃ

$$(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

অৰ্থাৎ $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$

বা $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$

বা $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{6} < 0$

কিন্তু xৰ কোনো বাস্তৱ মানৰ ক্ষেত্ৰতেই $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$ বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে (কিয়?)। গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক সিদ্ধ কৰা xৰ কোনো বাস্তৱ মান নাই। সেয়ে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ কোনো বাস্তৱ মূল নাই।

এতিয়ালৈকে তোমালোকে বৰ্গ-সম্পূৰণ পদ্ধতিটোৰ ব্যৱহাৰৰ কেইবাটাও উদাহৰণ দেখিলা। এতিয়া,

$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$, দ্বিঘাত সমীকৰণটো বিবেচনা কৰা। aৰে দুয়োপিনে হৰণ কৰিলে আমি পাওঁ, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, যিটো তলৰটোৰ দৰে একে,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

অৰ্থাৎ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ মূল,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0,\text{ৰ সৈতে একে,}$$

অৰ্থাৎ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ৰ সৈতে একে ....(1)

যদি $b^2 - 4ac \geq 0$, তেন্তে (1)ত বৰ্গমূল লৈ আমি পাওঁ,

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

গতিকে, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

সেয়েহে $ax^2 + bx + c = 0$ৰ মূলবোৰ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ আৰু $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ যদিহে $b^2 - 4ac \geq 0$।

যদি $b^2 - 4ac < 0$, তেন্তে সমীকৰণটোৰ কোনো বাস্তৱ মূল নাথাকিব (কিয় ?)

এতেকে, **যদি $b^2 - 4ac \geq 0$, তেন্তে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল দুটা $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$।**

দ্বিঘাত সমীৰণৰ মূল নিৰ্ণয় কৰা এই সূত্ৰটোক **দ্বিঘাত সূত্ৰ (quadratic formula)** বুলি কোৱা হয়।

দ্বিঘাত সূত্ৰ ব্যৱহাৰৰ বৰ্ণনা কৰাৰ বাবে আমি কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আহা।

উদাহৰণ 10 ঃ অনুশীলনী 4.1ৰ প্ৰশ্ন 2(i)টো দ্বিঘাত সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি সমাধা কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা মাটি টুকুৰাৰ প্ৰস্থ x মিটাৰ। তেন্তে দৈৰ্ঘ্য হ'ব $(2x + 1)$ মিটাৰ। আমাক দিয়া আছে যে,

$$x(2x + 1) = 528, \text{ অৰ্থাৎ } 2x^2 + x - 528 = 0 \text{।}$$

এই সমীকৰণটো $ax^2 + bx + c = 0$ আৰ্হিৰ, য'ত $a = 2, b = 1, c = -528$

গতিকে দ্বিঘাত সূত্ৰই আমাক সমাধানটো এইদৰে দিব,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

অৰ্থাৎ $$x = \frac{64}{4} \text{ বা } x = \frac{-66}{4}$$

অৰ্থাৎ $$x = 16 \quad \text{বা} \quad x = -\frac{33}{2}$$

যিহেতু x এটা মাত্ৰা (dimension) (প্ৰস্থ),ই বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে, গতিকে মাটি টুকুৰাৰ প্ৰস্থ 16 মিটাৰ। গতিকে মাটি টুকুৰাৰ দৈৰ্ঘ্য 33 মিটাৰ।

তোমালোকে সত্যাপন কৰিব লাগে যে এই মানবোৰে সমস্যাটোৰ চৰ্তসমূহ সিদ্ধ কৰে।

উদাহৰণ 11 ঃ দুটা ক্ৰমিক অযুগ্ম যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা উলিওৱা যাৰ বৰ্গৰ যোগফল 290।

সমাধান ঃ ধৰা অযুগ্ম যোগাত্মক ক্ৰমিক সংখ্যা দুটাৰ সৰুটো x। তেতিয়া পিছৰটো হ'ব $x + 2$।

প্ৰশ্নমতে, $$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

অৰ্থাৎ $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

বা $2x^2 + 4x - 286 = 0$

বা $x^2 + 2x - 143 = 0$; যিটো এটা xঅত দ্বিঘাত সমীকৰণ।

দ্বিঘাত সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

অৰ্থাৎ $x = 11$ বা $x = -13$

কিন্তু দিয়ামতে x যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

সেয়ে $x \neq -13$, অৰ্থাৎ $x = 11$.

গতিকে অযুগ্ম অখণ্ড ক্ৰমিক সংখ্যা দুটা 11 আৰু 13।

পৰীক্ষা ঃ $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$.

উদাহৰণ 12 ঃ এখন আয়তাকাৰ উদ্যানৰ চানেকি প্ৰস্তুত কৰিব লাগে যাৰ প্ৰস্থ দীঘতকৈ 3 মিটাৰ কম। এইখন উদ্যানৰ কালি ইতিমধ্যে বনোৱা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ অইন এখন উদ্যানৰ কালিতকৈ 4 বৰ্গ মিটাৰ বেছি হ'ব লাগিব, যিটো ত্ৰিভুজৰ ভূমি আয়তাকাৰ উদ্যানখনৰ প্ৰস্থৰ সমান আৰু উচ্চতা 12 মিটাৰ (চিত্ৰ 4.3 চোৱা)

সমাধান ঃ ধৰা আয়তাকাৰ উদ্যানৰ প্ৰস্থ x মিটাৰ

গতিকে ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্য = $(x + 3)$ মিটাৰ।

গতিকে আয়তাকাৰ উদ্যানৰ কালি = $x(x + 3)$ বৰ্গমিটাৰ = $(x^2 + 3x)$বৰ্গমিটাৰ

এতিয়া সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজটোৰ ভূমি = x মিটাৰ।

গতিকে ইয়াৰ কালি = $\frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ বৰ্গ মিটাৰ

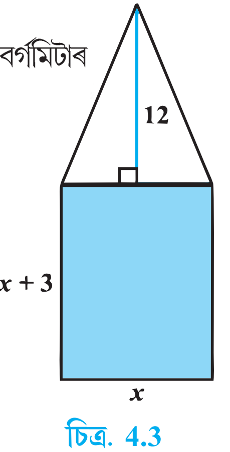
প্ৰশ্নমতে,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

অৰ্থাৎ $x^2 - 3x - 4 = 0$

দ্বিঘাত সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি, আমি পাওঁ,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ বা } -1$$



চিত্ৰ. 4.3

কিন্তু $x \neq -1$ (কিয় ?)। গতিকে $x = 4$।

গতিকে উদ্যানখনৰ প্ৰস্থ = 4 মিটাৰ আৰু ইয়াৰ দীঘ = 7 মিটাৰ।

সত্যাপন ঃ আয়তীয় উদ্যানৰ কালি = 28 বৰ্গ মিটাৰ।

ত্ৰিভুজীয় উদ্যানৰ কালি = 24 বৰ্গমিটাৰ = (28 – 4) বৰ্গ মিটাৰ

উদাহৰণ 13 ঃ দ্বিঘাত সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ দ্বিঘাত সমীকৰণবোৰৰ মূল নিৰ্ণয় কৰা, যদি মূল বৰ্তে।

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

সমাধান ঃ

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$. ইয়াত, $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$

গতিকে $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$.

এতেকে, $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \dfrac{5 \pm 1}{6}$, অৰ্থাৎ $x = 1$ বা $x = \dfrac{2}{3}$

গতিকে মূল দুটা $\dfrac{2}{3}$ আৰু 1।

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$, ইয়াত, $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

গতিকে, $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

যিহেতু এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গ বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে, গতিকে $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ৰ কোনো বাস্তৱ মান থাকিব নোৱাৰে।

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ কোনো বাস্তৱ মূল নাথাকে।

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$. ইয়াত, $a = 2$, $b = -2\sqrt{2}$, $c = 1$.

গতিকে $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

এতেকে, $x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ অৰ্থাৎ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

গতিকে মূল দুটা $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

উদাহৰণ 14 ঃ তলৰ সমীকৰণকেইটাৰ মূল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

সমাধান ঃ

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$, দুয়োপিনে xৰে পূৰণ কৰিলে আমি পাওঁ

$x^2 + 1 = 3x$

বা $x^2 - 3x + 1 = 0$, যিটো এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ।

ইয়াত, $a = 1, b = -3, c = 1$

গতিকে, $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

এতেকে, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (কিয়?)

গতিকে মূলদুটা হ'ব $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ আৰু $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0,\ 2.$

যিহেতু $x \neq 0, 2$, সমীকৰণটোক $x\ (x - 2)$ৰে পূৰণ কৰি পাওঁ,

$$(x - 2) - x = 3x\ (x - 2) = 3x^2 - 6x$$

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ব $3x^2 - 6x + 2 = 0$, যিটো এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ।

ইয়াত, $a = 3, b = -6, c = 2.$

গতিকে, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

এতেকে, $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$

গতিকে মূল দুটা $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ আৰু $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ ।

উদাহৰণ 15 ঃ এখন মটৰ নাও স্থিৰ পানীত প্ৰতি ঘণ্টাত 18 কি.মি. যায়। ই উজনি সোঁতত 24 কি.মি. যোৱা সময়টো, ভটিয়নীত একেখন ঠাইলৈ ঘূৰি অহা সময়তকৈ 1 ঘণ্টা বেছি। পানীৰ সোঁতৰ দ্ৰুতি উলিওৱা।

সমাধান ঃ ধৰা পানীৰ সোঁতৰ দ্ৰুতি প্ৰতি ঘণ্টাত x কি.মি.

এতেকে, উজনি সোঁতত নাওৰ দ্ৰুতি = $(18 - x)$ কি.মি./ঘণ্টা

আৰু ভটিয়নী সোঁতত নাওঁৰ দ্ৰুতি = $(18 + x)$ কি.মি./ঘণ্টা

উজনিলৈ যাওঁতে লোৱা সময় = $\frac{\text{দূৰত্ব}}{\text{দ্ৰুতি}} = \frac{24}{18 - x}$ ঘণ্টা

একেদৰে ভাটিলৈ যাওঁতে লোৱা সময় = $\frac{24}{18 + x}$ ঘণ্টা

প্ৰশ্নমতে, $\frac{24}{18 - x} - \frac{24}{18 + x} = 1$

অৰ্থাৎ $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$

অৰ্থাৎ $x^2 + 48x - 324 = 0$

দ্বিঘাত সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ,

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ বা } -54$$

যিহেতু x সোঁতৰ দ্ৰুতি, ই বিয়োগাত্মক হ'ব নোৱাৰে। গতিকে $x = -54$ মূলটো উপেক্ষা কৰিম। এতেকে, $x = 6$ য়ে পানীৰ সোঁতৰ দ্ৰুতি 6 কি.মি./ঘণ্টা দিয়ে।

অনুশীলনী 4.3

1. বৰ্গ সম্পূৰণ পদ্ধতিৰে তলৰ দ্বিঘাত সমীকৰণবোৰৰ মূল (যদি বৰ্তে) উলিওৱা।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$ (iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$ (v) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (vi) $4x^2 + x - 3 = 0$

2. দ্বিঘাত সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি ওপৰৰ প্ৰশ্ন-1ত দিয়া দ্বিঘাত সমীকৰণবোৰৰ মূল নিৰ্ণয় কৰা।

3. তলৰ সমীকৰণবোৰৰ মূল উলিওৱা ঃ

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

(iii) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$ (iv) $2x^2 + \frac{1}{2} = 2x$

(v) $x + \frac{1}{x} = 2$ (vi) $\frac{5x-6}{4x-1} = \frac{2x+3}{3x+2}$

4. আজিৰপৰা 3 বছৰ আগৰ আৰু 5 বছৰ পিছৰ ৰহমানৰ বয়সৰ প্ৰতিক্ৰমবোৰৰ যোগফল $\frac{1}{3}$ । তেওঁৰ বৰ্তমান বয়স উলিওৱা।

5. এটা শ্ৰেণী-পৰীক্ষাত শেৱালিৰ গণিতৰ নম্বৰ আৰু ইংৰাজীৰ নম্বৰ দুটাৰ যোগফল 30। তাই যদি গণিতত আৰু 2 নম্বৰ বেছি আৰু ইংৰাজীত 3 নম্বৰ কম পালেহেঁতেন, এই নম্বৰ দুটাৰ পূৰণ ফল 210 হ'লহেঁতেন। তাইৰ বিষয় দুটাত পোৱা নম্বৰবোৰ উলিওৱা।

6. এখন আয়তাকাৰ পথাৰৰ কৰ্ণৰ দীঘ ইয়াৰ চুটি বাহুটোতকৈ 60 মিটাৰ বেছি। যদি দীঘল বাহুটো চুটি বাহুটোতকৈ 30 মিটাৰ বেছি, পথাৰখনৰ বাহু দুটাৰ দীঘ উলিওৱা।

7. দুটা সংখ্যাৰ বৰ্গৰ পাৰ্থক্য 180। সৰু সংখ্যাটোৰ বৰ্গ ডাঙৰ সংখ্যাটোৰ 8 গুণ। সংখ্যা দুটা উলিওৱা।

8. এখন ৰে'লগাড়ীয়ে সমান দ্ৰুতিত 360 কি.মি. ভ্ৰমণ কৰে। যদি ইয়াৰ দ্ৰুতি ঘণ্টাত 5 কি.মি. বেছি হ'লহেঁতেন, ই একেটা ভ্ৰমণৰ সময় 1 ঘণ্টা কম ল'লেহেঁতেন। ৰে'লগাড়ীখনৰ দ্ৰুতি উলিওৱা।

9. দুটা পানীৰ নলীয়ে এটা চৌবাচ্চা $9\frac{3}{8}$ ঘণ্টাত পূৰ কৰে। চৌবাচ্চাটো বেলেগে বেলেগে পূৰ কৰিবলৈ হ'লে ডাঙৰ ব্যাসৰ নলীটোৱে সৰু ব্যাসৰ নলীটোতকৈ 10 ঘণ্টা সময় কম লয়। প্ৰত্যেকটো নলীয়ে বেলেগে বেলেগে কিমান সময়ত চৌবাচ্চাটো পূৰ কৰিব পাৰিব উলিওৱা।

10. মহীশূৰ আৰু বাংগালোৰৰ মাজত 132 কি.মি. পথ ভ্ৰমণ কৰিবলৈ এখন দ্ৰুতবেগী ৰে'লগাড়ী এখন যাত্ৰীবাহী ৰে'লগাড়ীতকৈ 1 ঘণ্টা সময় কম লয় (মাজৰ ষ্টেছনবোৰত সিহঁতে ৰোৱা সময়খিনি নধৰাকৈ)। যদি দ্ৰুতবেগী ৰে'লগাড়ীখনৰ গড় দ্ৰুতি যাত্ৰীবাহী ৰে'লগাড়ীখনতকৈ ঘণ্টাত 11 কি.মি. বেছি, ৰে'লগাড়ী দুখনৰ গড় দ্ৰুতি উলিওৱা।

11. দুটা বৰ্গৰ কালিৰ যোগফল 468 বৰ্গমিটাৰ। যদি সিহঁতৰ পৰিসীমাৰ পাৰ্থক্য 24 মিটাৰ, বৰ্গ দুটাৰ বাহুৰ পৰিমাণ উলিওৱা।

4.5 মূলৰ প্ৰকৃতি (Nature of Roots)

আগৰ অনুচ্ছেদত তোমালোকে দেখিছা যে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ এনেদৰে দিয়া হয়,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

যদি $b^2 - 4ac > 0$, আমি দুটা স্পষ্ট বাস্তৱ মূল পাওঁ, $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ আৰু $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

যদি $b^2 - 4ac = 0$, তেন্তে $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, অৰ্থাৎ $x = -\frac{b}{2a}$ বা $x = -\frac{b}{2a}$

গতিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকৰণটোৰ দুয়োটা মূল $\frac{-b}{2a}$.

এতেকে এই ক্ষেত্ৰত আমি ক'ম যে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ দুটা সমান বাস্তৱ মূল আছে।

যদি $b^2 - 4ac < 0$, তেন্তে কোনো বাস্তৱ সংখ্যা নাথাকে যাৰ বৰ্গ $b^2 - 4ac$। এতেকে, এই ক্ষেত্ৰত প্ৰদত্ত দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ কোনো বাস্তৱ মূল নাথাকে।

যিহেতু $b^2 - 4ac$ টোৱে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ বাস্তৱ মূল থকা বা নথকাটো নিৰ্ণয় কৰে, গতিকে $b^2 - 4ac$ক এই দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ **বিবেচিকা বা ভেদ নিৰূপক (discriminant)** বুলি কোৱা হয়।

গতিকে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণৰ,

(i) দুটা স্পষ্ট (ভিন্ন) বাস্তৱ মূল আছে, যদি $b^2 - 4ac > 0$,

(ii) দুটা সমান বাস্তৱ মূল আছে, যদি $b^2 - 4ac = 0$,

(iii) কোনো বাস্তৱ মূল নাই, যদি $b^2 - 4ac < 0$.

আমি কেইটামান উদাহৰণ বিবেচনা কৰো ঃ

উদাহৰণ 16 ঃ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ ভেদনিৰূপক উলিওৱা আৰু ইয়াৰপৰা মূল দুটাৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা।

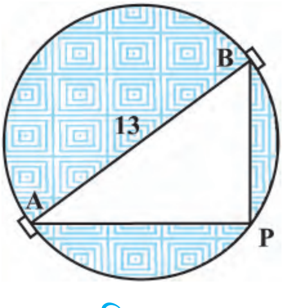
সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো $ax^2 + bx + c = 0$, য'ত $a = 2$, $b = -4$ আৰু $c = 3$। এতেকে, ভেদ নিৰূপকটো $b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$. গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ কোনো বাস্তৱ মূল নাই।

উদাহৰণ 17 ঃ 13 মিটাৰ ব্যাসৰ এখন বৃত্তাকাৰ উদ্যানৰ সীমাৰেখাৰ এটা বিন্দুত এটা খুঁটা এইদৰে নিৰ্মাণ কৰিব লাগে যে ইয়াৰপৰা এটা ব্যাসৰ বিপৰীত মূৰে থকা A আৰু B দুখন নিৰ্দিষ্ট গেটৰ দূৰত্বৰ পাৰ্থক্য 7 মিটাৰ হয়। এনেদৰে নিৰ্মাণ কৰাটো সম্ভৱনে? যদি সম্ভৱ, তেন্তে গেট দুখনৰপৰা কিমান দূৰত্বত খুঁটাটো বান্ধিব লাগিব?

সমাধান ঃ আমি প্ৰথমে চিত্ৰটো আঁকি লওঁ। (চিত্ৰ 4.4 চোৱা)।

ধৰা খুটাটোৰ নিৰ্ণেয় স্থান P। ধৰা খুটাটোৰ দূৰত্ব B গেটৰপৰা x মিটাৰ; অৰ্থাৎ BP = x মিটাৰ। এতিয়া গেট দুখনৰপৰা খুটাটোৰ দূৰত্বৰ পাৰ্থক্য = AP – BP (নাইবা BP – AP) = 7 মিটাৰ।

এতেকে, AP = $(x + 7)$ মিটাৰ।



চিত্ৰ 4.4

এতিয়া, AB = 13 মিটাৰ। যিহেতু AB এটা ব্যাস

$\angle APB = 90°$ (কিয়?)

এতেকে, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (পাইথাগোৰাছৰ উপপাদ্য)

অৰ্থাৎ $(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

বা $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

বা $2x^2 + 14x - 120 = 0$

বা $x^2 + 7x - 60 = 0$

গতিকে, গেট Bৰ পৰা খুটাৰ দূৰত্ব 'x'য়ে $x^2 + 7x - 60 = 0$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। সেয়ে যদি এই সমীকৰণটোৰ বাস্তৱ মূল থাকে, তেতিয়া খুটাটোক স্থাপন কৰাটো সম্ভৱ হ'ব। এইটো হয় নে নহয় চাবলৈ আমি ইয়াৰ ভেদনিৰূপক বিচাৰ কৰি চাওঁ আহা। ভেদনিৰূপকটো—

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$$

গতিকে এই দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ দুটা বাস্তৱ মূল আছে; আৰু উদ্যানৰ সীমাৰেখাত খুটাটো নিৰ্মাণ কৰাটো সম্ভৱ।

দ্বিঘাত সূত্ৰৰ সহায়ত $x^2 + 7x - 60 = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটো সমাধা কৰি, আমি পাওঁ,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

এতেকে $x = 5$ বা -12

যিহেতু B গেট আৰু খুটাৰ মাজত x এটা দূৰত্ব, ই যোগাত্মক হ'ব লাগিব। এতেকে, $x = -12$ক বাদ দিব লাগিব। গতিকে $x = 5$।

এতেকে, গেট Bৰ পৰা 5 মিটাৰ দূৰত্বত আৰু গেট Aৰ পৰা 12 মিটাৰ দূৰত্বত উদ্যানৰ সীমাৰেখাত খুটাটো নিৰ্মাণ কৰিব লাগিব।

উদাহৰণ 18 ঃ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ সমীকৰণটোৰ ভেদ নিৰূপক উলিওৱা আৰু ইয়াৰপৰা মূলবোৰৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা। যদি সিহঁত বাস্তৱ, তেন্তে মূলকেইটা উলিওৱা।

সমাধান ঃ ইয়াত $a = 3$, $b = -2$ আৰু $c = \frac{1}{3}$

গতিকে ভেদনিৰূপক $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

ইয়াৰপৰা, প্ৰদত্ত দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ দুটা সমান বাস্তৱ মূল আছে। মূলকেইটা

$\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ অৰ্থাৎ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ অৰ্থাৎ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$।

অনুশীলনী 4.4

1. তলৰ দ্বিঘাত সমীকৰণবোৰৰ মূলবোৰৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা। যদি বাস্তৱ মূল থাকে, তেন্তে সেইবোৰ উলিওৱা।

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ (iv) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

(v) $3x^2 - 5x + 12 = 0$ (vi) $x^2 + x + 1 = 0$

(vii) $x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 9 = 0$

2. তলৰ দ্বিঘাত সমীকৰণবোৰৰ প্ৰতিটোৰে ক্ষেত্ৰত kৰ মান উলিওৱা, যাতে সিহঁতৰ দুটাকৈ (সমান) বাস্তৱ মূল থাকে।

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx\,(x - 2) + 6 = 0$

(iii) $x^2 - (k + 4)x + 2k + 5 = 0$ (iv) $2x^2 + 8x - k^3 = 0$

(v) $(k - 3)x^2 + 6x + 9 = 0$ (vi) $(k - 12)x^2 + 2(k - 12)x + 2 = 0$

3. প্ৰস্থতকৈ দীঘ দুগুণ হোৱাকৈ এখন আয়তাকাৰ আমৰ বাগিছাৰ চানেকি প্ৰস্তুত কৰাটো সম্ভৱ হ'বনে যাতে ইয়াৰ কালি 800 বৰ্গমিটাৰ হয়? যদি সম্ভৱ, ইয়াৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ উলিওৱা।

4. তলৰ পৰিস্থিতিটো সম্ভৱ হয়নে? যদি হয়, তেওঁলোকৰ বৰ্তমান বয়স নিৰ্ণয় কৰা।
দুজন বন্ধুৰ বয়সৰ সমষ্টি 20 বছৰ। চাৰি বছৰ আগতে তেওঁলোকৰ বয়সৰ পূৰণফল (বছৰত) আছিল 48।

5. পৰিসীমা 80 মিটাৰ আৰু কালি 400 বৰ্গ মিটাৰ হোৱাকৈ এখন আয়তাকাৰ উদ্যানৰ চানেকি কৰাটো সম্ভৱনে? যদি হয়, ইয়াৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ উলিওৱা।

4.6 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি অধ্যয়ন কৰিছা

1. x চলকত এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ $ax^2 + bx + c = 0$ আৰ্হিৰ, য'ত a, b, c বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a \neq 0$।

2. দ্বিঘাত সমীকৰণ $ax^2 + bx + c = 0$ৰ মূল এটা বাস্তৱ সংখ্যা α, যদি $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$। $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত বহুপদটোৰ শূন্যকেইটা আৰু $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূলকেইটা একে।

3. যদি আমি $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ক দুটা ৰৈখিক উৎপাদকৰ পূৰণফল হিচাপে উৎপাদকত ভাঙিব পাৰোঁ, তেন্তে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল দুটা প্ৰতিটো উৎপাদকক শূন্যৰ সমান কৰি উলিয়াব পাৰি।

4. দ্বিঘাত সমীকৰণ এটাক বৰ্গ-সম্পূৰণ পদ্ধতিৰেও সমাধা কৰিব পাৰি।

5. দ্বিঘাত সূত্ৰ ঃ $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল দুটা এইদৰে দিয়া হয়—

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, এই চৰ্তত যে $b^2 - 4ac \geq 0$।

6. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকৰণ এটাৰ

(i) দুটা স্পষ্ট (ভিন্ন) বাস্তৱ মূল থাকে, যদি $b^2 - 4ac > 0$,

(ii) দুটা সমান মূল থাকে (অৰ্থাৎ একে সমান মূল), যদি $b^2 - 4ac = 0$, আৰু

(iii) কোনো বাস্তৱ মূল নাথাকে, যদি $b^2 - 4ac < 0$।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

বৰ্ণনাজড়িত প্ৰশ্নৰ ক্ষেত্ৰত, প্ৰাপ্ত সমাধানকেইটা সদায় মূল সমস্যাৰ চৰ্তবোৰৰ সৈতে সত্যাপন কৰা উচিত, গঠন কৰা সমীকৰণটোত নহয় (অধ্যায় 3ৰ উদাহৰণ 11, 13, 19 আৰু অধ্যায় 4ৰ উদাহৰণ 10, 11, 12 চোৱা।)

E3U2F8

সমান্তৰ প্ৰগতি (Arithmetic Progression)

পঞ্চম অধ্যায়

5.1 অৱতাৰণা (Introduction)

তোমালোকে নিশ্চয় মন কৰিছা যে প্ৰকৃতিত বহুতো বস্তুৱে একোটা নিৰ্দিষ্ট আৰ্হি (pattern) মানি চলে। উদাহৰণস্বৰূপে— সূৰ্যমুখী ফুলৰ পাহিবিলাক, মৌচাকৰ বিন্ধাসমূহ, মাকৈৰ ডিলটোত থকা গুটিবোৰ, আনাৰসৰ চকুসমূহ আৰু সৰল গছৰ গুটিৰ থুপটো ইত্যাদি।

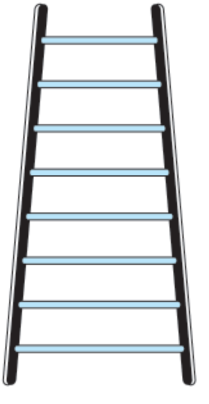
এতিয়া আমি আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত পোৱা তেনেকুৱা আৰ্হি কিছুমান লক্ষ্য কৰিম। তেনেকুৱা উদাহৰণ কিছুমান হ'ল ঃ

(i) ৰীণাই এটা চাকৰিৰ বাবে আবেদন জনালে আৰু নিযুক্তিৰ বাবে নিৰ্বাচিত হ'ল। তেওঁক প্ৰাৰম্ভিক দৰমহা মাহে 8000 টকা আৰু দৰমহাৰ বছৰেকীয়া বৃদ্ধি (increment) 500 টকা হিচাপে চাকৰিত মকৰল কৰা হ'ল। তেওঁৰ দৰমহা (টকাৰ হিচাপত) প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়.... বছৰত হ'ব ক্ৰমে—

8000, 8500, 9000, ...

(ii) জখলা এডালৰ শলিবিলাকৰ দৈৰ্ঘ্য তলৰপৰা ওপৰলৈ সমভাৱে 2 চে.মি.কৈ (চিত্ৰ 5.1 চোৱা) কমি যায়। একেবাৰে তলৰ শলিডাল 45 চে.মি. দীঘল। তলৰপৰা ওপৰলৈ ক্ৰমে প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়.... অষ্টম শলিকেইডালৰ দৈৰ্ঘ্য (চে.মি.ত) হ'ব—

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31



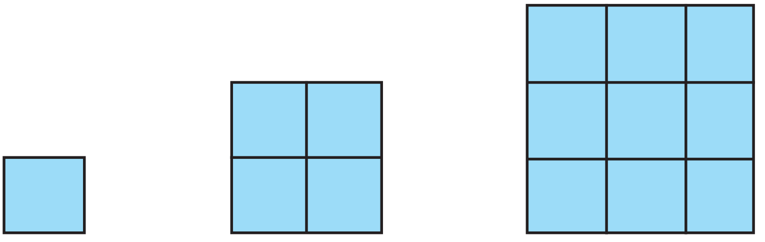
চিত্ৰ 5.1

(iii) কোনো এটা সঞ্চয় আঁচনিত প্ৰতি তিনি বছৰৰ মূৰত সবৃদ্ধিমূলৰ পৰিমাণ মূলধনৰ $\frac{5}{4}$ গুণ হয়। 3, 6, 9 আৰু 12 বছৰৰ পিছত 8000 টকা বিনিয়োগৰ বাবে ম্যাদপূৰ্ণ সবৃদ্ধিমূল (maturity

amount) ক্ৰমে (টকাৰ হিচাপত) ঃ

10000, 12500, 15625, 19531.25

(iv) 1, 2, 3, ... একক দৈৰ্ঘ্যৰ বাহু বিশিষ্ট বৰ্গত থকা (চিত্ৰ 5.2 চোৱা) এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ বৰ্গৰ সংখ্যা ক্ৰমে ঃ $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$



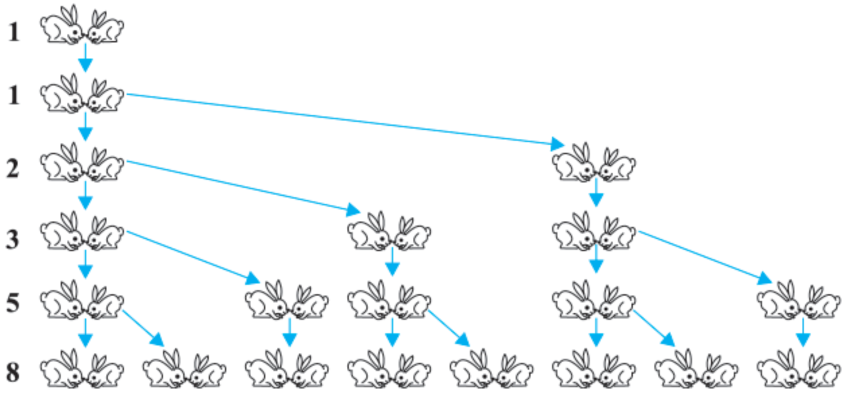
চিত্ৰ 5.2

(v) চিত্ৰলেখাই তেওঁৰ জীয়েকৰ সঞ্চয় বাকচত জীয়েকৰ বয়স এবছৰ হওঁতে 100 টকা জমা থলে আৰু প্ৰতিবছৰে জমা ধনৰ পৰিমাণ 50 টকাকৈ বঢ়াই গ'ল। প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুৰ্থ.... জন্মদিনবিলাকত সঞ্চয় বাকচত থকা ধনৰ পৰিমাণ (টকাৰ হিচাপত) ক্ৰমে ঃ

100, 150, 200, 250,....

(vi) এযোৰ শহা ইমান সৰু যে সিহঁতৰ প্ৰথম মাহত পোৱালি জন্ম দিব নোৱাৰে। কিন্তু দ্বিতীয় মাহৰ পৰা আৰু তাৰ পৰৱৰ্তী প্ৰতিমাহে এযোৰকৈ নতুন শহা পোৱালি জন্ম দিয়ে। জন্ম হোৱা প্ৰতিযোৰ নতুন শহায়ো সিহঁতৰ দ্বিতীয় মাহৰপৰা এযোৰকৈ শহাৰ জন্ম দিয়ে আৰু পৰৱৰ্তী প্ৰতি মাহে মাহে এযোৰকৈ শহাৰ জন্ম দি থাকে (চিত্ৰ 5.3 চোৱা)। কোনো শহাৰ মৃত্যু নোহোৱা বুলি ধৰিলে, যোৰ হিচাপে শহাৰ সংখ্যা প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়.... ষষ্ঠ মাহৰ আৰম্ভণিতে হ'ব ক্ৰমে ঃ

1, 1, 2, 3, 5, 8



চিত্ৰ 5.3

ওপৰৰ উদাহৰণসমূহত আমি কিছুমান নিৰ্দিষ্ট আৰ্হি দেখা পালো। কিছুমান আৰ্হিত আনুক্ৰমিক পদবোৰ (succeeding terms) এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা যোগ কৰি পোৱা যায়, কিছুমানত এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা পূৰণ কৰি পোৱা যায়, আকৌ আন কিছুমানত পদবোৰ ক্ৰমিক সংখ্যাৰ বৰ্গ।

এই অধ্যায়ত আমি এই আৰ্হিবোৰৰ এনে এটাৰ বিষয়েহে আলোচনা কৰিম য'ত পূৰ্বৱৰ্তী সংখ্যাবোৰৰ লগত এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা যোগ কৰি পৰৱৰ্তী সংখ্যাবোৰ পোৱা যায়। তদুপৰি কেনেকৈ সিহঁতৰ nতম পদ আৰু nটা ক্ৰমিক পদৰ যোগফলক উলিয়াব পাৰি চাম আৰু এই জ্ঞানৰ সহায়ত দৈনন্দিন জীৱনৰ সমস্যা কিছুমান সমাধান কৰিম।

5.2 সমান্তৰ প্ৰগতি (Arithmetic Progressions) ঃ

তলত দিয়া সংখ্যাৰ তালিকাসমূহ মন কৰা।

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

এই তালিকাত থকা প্ৰতিটো সংখ্যাকে ‘পদ’ (term) বোলে। এতিয়া এই তালিকাৰপৰা এটা পদ দিলে তাৰ পিছৰ পদটো তুমি লিখিব পাৰিবানে? সম্ভৱতঃ কোনো আৰ্হি বা নিয়ম অনুসৰণ কৰি পাৰিবা। বাৰু এতিয়া আমি পৰ্যবেক্ষণ কৰো আৰু নিয়মবোৰ লিখোঁ।

(i)ৰ ক্ষেত্ৰত, প্ৰতিটো পদ তাৰ আগৰ পদটোতকৈ 1 বেছি।

(ii)ৰ ক্ষেত্ৰত, প্ৰতিটো পদ তাৰ আগৰ পদটোতকৈ 30 সৰু।

(iii)ৰ ক্ষেত্ৰত, প্ৰতিটো পদ তাৰ আগৰ পদটোৰ লগত 1 যোগ কৰি পোৱা যায়।

(iv)ৰ ক্ষেত্ৰত, তালিকাৰ সকলো পদেই 3 অৰ্থাৎ, প্ৰতিটো পদেই তাৰ আগৰ পদটোৰ লগত 0 যোগ (বা বিয়োগ) কৰি পোৱা যায়।

(v)ৰ ক্ষেত্ৰত, প্ৰতিটো পদেই তাৰ আগৰ পদটোৰ লগত বা পৰা –0.5 যোগ (বা 0.5 বিয়োগ) কৰি পোৱা যায়।

ওপৰৰ সকলো তালিকাতে আমি দেখিলো যে আগৰ পদটোৰ লগত এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা যোগ কৰি পিচৰ পদটো পোৱা যায়। এই ধৰণৰ এখন তালিকাত থকা সংখ্যাবোৰে এটা **সমান্তৰ প্ৰগতি** (Arithmetic Progression, চমুকৈ AP) গঠন কৰে বুলি কোৱা হয়।

গতিকে, **এটা সমান্তৰ প্ৰগতি এনে কিছুমান সংখ্যাৰ এখন তালিকা যিখনৰ প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে আন আটাইবোৰ পদেই আগৰ পদটোৰ লগত এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা যোগ কৰি পোৱা যায়।**

এই নিৰ্দিষ্ট সংখ্যাটোকে সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ ‘**সাধাৰণ অন্তৰ**’ (Common difference) বোলে।

মনত ৰাখিবা যে এই সংখ্যাটো ধনাত্মক, ঋনাত্মক বা শূন্য হ'ব পাৰে।

এতিয়া এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদক a_1 ৰে, দ্বিতীয় পদটোক a_2 ৰে,..... nতম পদক a_n ৰে আৰু সাধাৰণ অন্তৰক dৰে সূচিত কৰা হ'ল। তেতিয়া সমান্তৰ প্ৰগতিটো হ'ব $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$।

গতিকে, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$

সমান্তৰ প্ৰগতিৰ আৰু কিছুমান উদাহৰণ হ'ল—

(a) ৰাতিপুৱাৰ প্ৰাৰ্থনা সভাত এটা শাৰীত থিয় হোৱা এখন বিদ্যালয়ৰ কিছু সংখ্যক শিক্ষাৰ্থীৰ উচ্চতা (চে.মি.ত) হ'ল— 147, 148, 149, ..., 157

(b) জানুৱাৰী মাহৰ এটা সপ্তাহত এখন চহৰৰ সৰ্বনিম্ন উষ্ণতা (ডিগ্ৰী চেলচিয়াচত) লিপিবদ্ধ কৰি উৰ্দ্ধক্ৰমত সজালে পোৱা গ'ল—

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) মুঠ 1000 টকা ঋণৰ 5 % কৈ টকা আদায় দি থকাৰ পিছত প্ৰতিমাহে বাকী থকা ধনৰ পৰিমাণ (টকাত) 950, 900, 850, 800, ..., 50

(d) এখন স্কুলে ক্লাছ I ৰ পৰা XII লৈ প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ সৰ্বোচ্চ নম্বৰ পাওঁতা শিক্ষাৰ্থীজনক দিয়া নগদ ধনৰ পৰিমাণ (টকাত) ক্ৰমে 200, 250, 300, 350, ..., 750

(e) প্ৰতি মাহে 50 টকাকৈ দহ মাহলৈ সঞ্চয় কৰা টকাৰ পৰিমাণ প্ৰতিমাহৰ অন্তত 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500

এতিয়া ওপৰত দিয়া প্ৰতিখন তালিকা সমান্তৰ প্ৰগতিত কিয় আছে তাৰ ব্যাখ্যা আগবঢ়োৱা কামটো তোমালোকলৈ থোৱা হ'ল।

তোমালোকে দেখা পাবা যে, $a, a + d, a + 2d, a + 3d$, ...য়ে এটা সমান্তৰ প্ৰগতি নিৰ্দেশ কৰে যাৰ প্ৰথম পদ a আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d। এইটোকেই সমান্তৰ প্ৰগতি এটাৰ সাধাৰণ আৰ্হি (General form) বোলে।

মন কৰিবা যে ওপৰৰ (a) ৰ পৰা (e)লৈকে উদাহৰণকেইটাত প্ৰতিটোতে সীমিত সংখ্যক পদ আছে। এনেকুৱা এটা সমান্তৰ প্ৰগতিক **সসীম সমান্তৰ প্ৰগতি** (Finite AP.) বোলে। তদুপৰি মন কৰিবা যে ইহঁতৰ প্ৰতিটোৰে এটা অন্তিম পদ আছে। এই অনুচ্ছেদৰ (i) ৰ পৰা (v)লৈ দিয়া সমান্তৰ প্ৰগতিৰ উদাহৰণকেইটা সসীম নহয় আৰু সেই কাৰণে সেইকেইটাক **অসীম সমান্তৰ প্ৰগতি** (Infinite AP) বোলে। এনেকুৱা সমান্তৰ প্ৰগতিবিলাকৰ অন্তিম পদ নাথাকে।

এতিয়া, এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ বিষয়ে জানিবলৈ তোমালোকক অতি কমেও কি কি তথ্যৰ প্ৰয়োজন হ'ব? অকল প্ৰথম পদটো জানিলেই যথেষ্ট নে? অথবা, মাত্ৰ সাধাৰণ অন্তৰটো জানিলেই যথেষ্ট হ'ব নেকি? তোমালোকে জানিব পাৰিবা যে এই ক্ষেত্ৰত তোমালোকক প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ দুয়োটাৰে প্ৰয়োজন হ'ব।

উদাহৰণস্বৰূপে যদি প্ৰথম পদ aৰ মান 6 আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d ৰ মান 3 হয়, তেন্তে সমান্তৰ

প্ৰগতিটো হ'ব— 6, 9,12, 15, ...

যদি $a = 6$ আৰু $d = -3$ হয় তেন্তে APটো হ'ব— 6, 3, 0, –3, ...

একেদৰে যেতিয়া

$a = -7$, $d = -2$, তেতিয়া AP টো হ'ব $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$, তেতিয়া AP টো হ'ব $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, তেতিয়া AP টো হ'ব $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$, তেতিয়া AP টো হ'ব $2, 2, 2, 2, \ldots$

গতিকে যদি তোমালোকে a আৰু d ৰ মান জানা, তেন্তে সমান্তৰ প্ৰগতিটো গঠন কৰিব পাৰিবা। ইয়াৰ বিপৰীত অৱস্থাটোনো কি? যদি তোমালোকক কিছু সংখ্যক নম্বৰৰ তালিকা এখন দিয়া হয় তেনেহ'লে সেইখন সমান্তৰ প্ৰগতিত যে আছে ক'ব পাৰিবানে আৰু তাৰ পৰা a আৰু d ৰ মান উলিয়াব পাৰিবানে? যিহেতু a টো প্ৰথম পদ তাক সহজে নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবা। আমি জানো যে সমান্তৰ প্ৰগতি এটাৰ আগৰ পদটোৰ লগত d যোগ কৰিলে পিছৰ পদটো পোৱা যায়। গতিকে যিকোনো পদ এটা লৈ তাক তাৰ ঠিক পাছৰ পদটোৰপৰা বিয়োগ কৰিলেই d ৰ মান পোৱা যায়। এই মানটো এটা APৰ ক্ষেত্ৰত সদায় একে।

উদাৰণস্বৰূপে তলৰ তালিকাখন লোৱা

$$6, 9, 12, 15, \ldots,$$

ইয়াত,

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

ইয়াত প্ৰতি ক্ষেত্ৰতে যিকোনো দুটা ওচৰা-উচৰি পদৰ পাৰ্থক্য 3। গতিকে প্ৰদত্ত তালিকাখনে এটা AP গঠন কৰিছে যাৰ প্ৰথম পদ aৰ মান 6 আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d ৰ মান 3।

6, 3, 0, – 3, ... এই তালিকাখনৰ বাবে

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

একেদৰে ইয়ো এটা AP যাৰ প্ৰথম পদ 6 আৰু সাধাৰণ অন্তৰ –3।

সাধাৰণতে, এটা সমান্তৰ প্ৰগতি $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ৰ বাবে আমি পাওঁ

$d = a_{k+1} - a_k$ ইয়াত, a_{k+1} আৰু a_k ক্রমে (k + 1)তম আৰু kতম পদ।

এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ d নিৰ্ণয় কৰিবৰ কাৰণে $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, ... আদি আটাইবোৰ নিৰ্ণয় কৰাৰ প্ৰয়োজন নাই। ইয়াৰ যিকোনো এটাৰ পৰা উলিয়ালেই যথেষ্ট।

এতিয়া, 1, 1, 2, 3, 5, ... এই তালিকাখন লোৱা। এইখন চাই ক'ব পাৰিবা যে যিকোনো দুটা ওচৰা-উচৰি পদৰ অন্তৰ একে নহয়। গতিকে এইখন সমান্তৰ প্ৰগতিত নাই।

মন কৰিবা যে, 6, 3, 0, – 3, ... এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ d উলিয়াবৰ বাবে আমি 3ৰ পৰা 6 বিয়োগ কৰিছিলোঁ, কিন্তু 6 ৰ পৰা 3 বিয়োগ কৰা নাছিলোঁ। অৰ্থাৎ সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয়ৰ বাবে (k + 1)তম পদটো সৰু হ'লেও (k + 1)তম পদটোৰপৰাহে kতম পদটো বিয়োগ কৰা উচিত।

আমি আৰু কিছুমান উদাহৰণৰ সহায়ত এই ধাৰণাটো অধিক স্পষ্ট কৰি লওঁ।

উদাহৰণ 1 ঃ $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, ... এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম পদ a আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d কিমান লিখা।

সমাধান ঃ ইয়াত, $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$

মনত ৰাখিবা যে যিকোনো দুটা ওচৰা-উচৰি পদৰপৰা আমি d উলিয়াব পাৰিম, যদিহে আমি জানো যে সংখ্যাবিলাক সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে।

উদাহৰণ 2 ঃ তলৰ সংখ্যাৰ তালিকাবিলাকৰ কোনবিলাকে সমান্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰিছে? যদি এই বিলাকে সমান্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰিছে, তেনেহ'লে প্ৰতিটোৰে দুটাকৈ পশ্চাদৱৰ্তী পদ লিখা।

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . . (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

সমাধান ঃ (i) ইয়াত, $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

অৰ্থাৎ, প্ৰতিবাৰতে $a_{k+1} - a_k$ সমান। গতিকে প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ তালিকাখনে এটা AP গঠন কৰিছে আৰু ইয়াত সাধাৰণ অন্তৰ $d = 6$।

ইয়াৰ পশ্চাদৱৰ্তী পদ দুটা 22 + 6 = 28 আৰু 28 + 6 = 34.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

অৰ্থাৎ প্ৰতিবাৰতে $a_{k+1} - a_k$ সমান। গতিকে প্ৰদত্ত তালিকাখনে এটা AP গঠন কৰিছে আৰু ইয়াত সাধাৰণ অন্তৰ $d = -2$

পৰৱৰ্তী পদ দুটা হ'ল $-5 + (-2) = -7$ আৰু $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

যিহেতু $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, গতিকে প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ তালিকাই এটা AP গঠন নকৰে।

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ইয়াত, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

গতিকে প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ তালিকাই এটা AP গঠন নকৰে।

অনুশীলনী 5.1

1. তলৰ পৰিস্থিতিবিলাকৰ লগত জড়িত সংখ্যাৰ তালিকাবিলাকৰ কোনবিলাকে সমান্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰিব আৰু কিয় কৰিব?

(i) প্ৰথম কিলোমিটাৰত টেক্সি ভাড়া 15 টকা আৰু তাৰ পিছৰ প্ৰতি অতিৰিক্ত কিলোমিটাৰত 8 টকাকৈ হ'লে প্ৰতি কিলোমিটাৰৰ অন্তত টেক্সিৰ ভাড়া।

(ii) এটা গেছ চিলিণ্ডাৰৰ পৰা ভেকুৱাম পাম্প এটাই এবাৰত চিলিণ্ডাৰত থকা বায়ুৰ $\frac{1}{4}$ অংশ নিষ্কাশন কৰিলে সেই চিলিণ্ডাৰটোত প্ৰতিবাৰ নিষ্কাশনৰ পিছত ৰৈ যোৱা বায়ুৰ পৰিমাণ।

(iii) এটা কুঁৱা খান্দোতে প্ৰথম মিটাৰৰ খৰচ 150 টকা আৰু তাৰ পিছৰ প্ৰতিমিটাৰত 50 টকাকৈ লাগিলে প্ৰতি মিটাৰ খন্দাৰ পিছত কুঁৱা খন্দাৰ খৰচ।

(iv) 10000 টকা বছৰি 8 % মিশ্ৰ সুতৰ (compound interest) হাৰত জমা কৰিলে সেই একাউণ্টত প্ৰতি বছৰে থাকিব লগা ধনৰ পৰিমাণ।

2. যদি প্ৰথম পদ a আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d তলত দিয়া ধৰণৰ, তেন্তে প্ৰতিটো APৰে প্ৰথম চাৰিটা পদ লিখাঃ

(i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. তলত দিয়া সমান্তৰ প্ৰগতিসমূহৰ প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. তলৰ কোনবোৰ সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে? যিবিলাকে সমান্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰিছে তাৰ প্ৰতিটোৰে সাধাৰণ অন্তৰ d নিৰ্ণয় কৰা আৰু পৰৱৰ্তী তিনিটাকৈ পদ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 সমান্তৰ প্ৰগতিৰ nতম পদ (nth Term of an AP)

অনুচ্ছেদ 5.1ত উল্লেখ থকা ৰীণাই চাকৰিৰ বাবে আবেদন জনাই নিযুক্তি পোৱা সেই উদাহৰণটো আকৌ লোৱা হ'ল। তেওঁক প্ৰাৰম্ভিক দৰমহা মাহে 8000 টকা আৰু বছৰি 500 টকাৰ বছৰেকীয়া বৃদ্ধিৰ ভিত্তিত চাকৰিটো দিয়া হৈছিল। পঞ্চম বছৰত তেওঁৰ মাহিলী দৰমহা কিমান হ'ব?

এই প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ দিবলৈ যাওঁতে তেওঁৰ দ্বিতীয় বছৰত মাহিলী দৰমহা কিমান হ'ব প্ৰথমে চোৱা যাওঁক।

এই দৰমহা হ'ব = Rs (8000 + 500) = Rs 8500। একেদৰে তৃতীয়, চতুৰ্থ আৰু পঞ্চম বছৰৰ মাহিলী দৰমহা নিৰ্ণয়ৰ বাবে প্ৰতিটোৰে আগৰ বছৰৰ মাহিলী দৰমহাৰ লগত 500 টকাকৈ যোগ কৰি উলিয়াব পাৰিম।

গতিকে তৃতীয় বছৰৰ মাহিলী দৰমহা = (8500 + 500) টকা

= (8000 + 500 + 500) টকা

= (8000 + 2 × 500) টকা

= [8000 + **(3 – 1)** × 500] টকা (for the **3rd year**)

= 9000 টকা

চতুৰ্থ বছৰৰ মাহিলী দৰমহা = (9000 + 500) টকা

= (8000 + 500 + 500 + 500) টকা

= (8000 + 3 × 500) টকা

= [8000 + **(4 – 1)** × 500] টকা (for the **4th year**)

= 9500 টকা

পঞ্চম বছৰৰ মাহিলী দৰমহা = (9500 + 500) টকা

= (8000+500+500+500 + 500) টকা

= (8000 + 4 × 500) টকা

= [8000 + **(5 – 1)** × 500] টকা (for the **5th year**)

= 10000 টকা

মন কৰা যে এইদৰে আমি পোৱা সংখ্যাৰ তালিকাখন হ'ল

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

এই সংখ্যাবোৰ সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে। (কিয় ?)

এতিয়া ওপৰৰ এই আৰ্হিটো চাই তোমালোকে ৰীণাৰ ষষ্ঠ বছৰত মাহিলী দৰমহা কিমান উলিয়াব পাৰিবানে? 15তম বছৰত কিমান? তেওঁ সেই সময়লৈকে চাকৰি কৰি থকা বুলি ধৰিলে 25তম বছৰত মাহিলী দৰমহা কিমান হ'ব? ইয়াৰ উত্তৰ পাবলৈ প্ৰতিবাৰতে আগৰ বছৰৰ দৰমহাৰ লগত 500 টকাকৈ যোগ কৰিব লাগিব। এই প্ৰক্ৰিয়াটো চমু কৰিব পাৰিবানে? চাওঁচোন আঁহা। ইতিমধ্যে তোমালোকে ওপৰত দিয়া পদ্ধতিৰপৰা কিছু ধাৰণা নিশ্চয় কৰিব পাৰিছা।

15তম বছৰৰ মাহিলী দৰমহা = 14তম বছৰৰ মাহিলী দৰমহা + 500 টকা

$$= \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ বাৰ}}\right] \text{টকা} + 500 \text{টকা}$$

$= [8000 + 14 \times 500]$ টকা

$= [8000 + \mathbf{(15 - 1)} \times 500]$ টকা $= 15000$ টকা

অৰ্থাৎ প্ৰথম দৰমহা + $(15 - 1) \times$ বছৰেকীয়া বৃদ্ধি

একেদৰে তেওঁৰ 25তম বছৰৰ মাহিলী দৰমহা হ'ব

$= [8000 + \mathbf{(25 - 1)} \times 500]$ টকা $= 20000$ টকা

= প্ৰথম দৰমহা + $\mathbf{(25 - 1)} \times$ বছৰেকীয়া বৃদ্ধি

এই উদাহৰণকেইটাই নিশ্চয় তোমালোকক কিদৰে 15তম পদটো বা 25তম পদটো লিখিব পাৰি তাৰ এটা ধাৰণা দিলে আৰু সাধাৰণভাৱে, এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ nতম পদ লিখাৰ এটা ধাৰণা দিলে।

ধৰা হ'ল, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ এটা সমান্তৰ প্ৰগতি যাৰ প্ৰথম পদ a_1 হ'ল a আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d।

এতিয়া, **দ্বিতীয়** পদ $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\, d$

তৃতীয় পদ $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

চতুৰ্থ পদ $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

. . . .

. . . .

এই আৰ্হিটো চাই ক'ব পাৰো যে, ***n*তম** পদ $a_n = a + (n - 1)\, d$

গতিকে এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ a আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d হ'লে nতম পদ a_n হ'ব

$$\boldsymbol{a_n = a + (n - 1)\, d.}$$

a_nক সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ **সাধাৰণ পদ (general term)** বুলিও কোৱা হয়। যদি সমান্তৰ প্ৰগতিটোত mটা পদ থাকে তেন্তে a_m য়ে অন্তিম পদটো বুজাব যিটোক কেতিয়াবা lৰেও বুজোৱা হয়।

কিছুমান উদাহৰণ লোৱা যাওঁক।

উদাহৰণ 3 ঃ 2, 7, 12, . . . এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ 10তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ আৰু $n = 10$.

আমি জানো যে, $a_n = a + (n - 1)\, d$

গতিকে, $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

গতিকে প্ৰদত্ত সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ 10তম পদটো হ'ল 47।

উদাহৰণ 4 ঃ 21, 18, 15, . . . এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ –81টো কিমান সংখ্যক পদ? তদুপৰি, ইয়াৰ কোনো এটা পদ 0 হ'বনে? তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে কাৰণ দৰ্শোৱা।

সমাধান ঃ ইয়াত, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ আৰু $a_n = -81$, এতিয়া nৰ মান উলিয়াব লাগে।

যিহেতু, $a_n = a + (n - 1) d$,

আমি পালো, $-81 = 21 + (n - 1)(-3)$

$-81 = 24 - 3n$

$-105 = -3n$

গতিকে, $n = 35$

এতেকে সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ 35তম পদটো – 81।

ইয়াৰ পিছত আমি জানিব লাগে যে, যিকোনো nৰ বাবে $a_n = 0$ হ'ব নেকি। যদি তেনে এটা n থাকে তেনেহ'লে পাম যে

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

অৰ্থাৎ $3(n - 1) = 21$

অৰ্থাৎ $n = 8$

গতিকে অষ্টম পদটো 0।

উদাহৰণ 5 ঃ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ তৃতীয় পদ 5 আৰু সপ্তম পদ 9 হ'লে সমান্তৰ প্ৰগতিটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

$$a_3 = a + (3 - 1) d = a + 2d = 5 \quad ....(1)$$

আৰু $a_7 = a + (7 - 1) d = a + 6d = 9 \quad ....(2)$

(1) আৰু (2)সহ সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$a = 3, \quad d = 1$$

গতিকে উলিয়াব লগা সমান্তৰ প্ৰগতিটো হ'ব 3, 4, 5, 6, 7, . . .

উদাহৰণ 6 ঃ 301 সংখ্যাটো 5, 11, 17, 23, ... এই সংখ্যাৰ তালিকাখনৰ এটা পদ হ'বনে পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ যে,

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

যিহেতু $k = 1, 2, 3, ...$ ইত্যাদিৰ বাবে $a_{k+1} - a_k$ ৰ মান সমান, গতিকে প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ তালিকাখন সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে।

এতিয়া, $a = 5$ আৰু $d = 6$.

ধৰা হ'ল, 301 সংখ্যাটো এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ nতম পদ।

আমি জানো যে, $a_n = a + (n - 1)\, d$

গতিকে, $301 = 5 + (n - 1) \times 6$

অৰ্থাৎ $301 = 6n - 1$

গতিকে $n = \dfrac{302}{6} = \dfrac{151}{3}$

কিন্তু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'ব লাগিব (কিয় ?)।

গতিকে 301 সংখ্যাটো প্ৰদত্ত তালিকাখনৰ এটা পদ নহয়।

উদাহৰণ 7 ঃ দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ কিমানটা 3ৰে বিভাজ্য ?

সমাধান ঃ 3ৰে বিভাজ্য দুটা অংকযুক্ত সংখ্যাসমূহ হ'ল—

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

ইহঁত সমান্তৰ প্ৰগতিত আছেনে ? হয় আছে।

ইয়াত, $a = 12, \; d = 3, \; a_n = 99.$

যিহেতু $a_n = a + (n - 1)\, d,$

গতিকে আমি পাওঁ $99 = 12 + (n - 1) \times 3$

অৰ্থাৎ $87 = (n - 1) \times 3$

অৰ্থাৎ $n - 1 = \dfrac{87}{3} = 29$

অৰ্থাৎ $n = 29 + 1 = 30$

গতিকে 3ৰে বিভাজ্য 2টা অংকযুক্ত সংখ্যা 30টা আছে।

উদাহৰণ 8 : 10, 7, 4, . . ., – 62 এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ শেষৰ ফালৰপৰা (প্ৰথম পদটোৰ ফাললৈ) 11তম পদটো উলিওৱা।

সমাধান : ইয়াত, $a = 10,\ d = 7 - 10 = -3,\ l = -62,$

আৰু $l = a + (n - 1)\, d$

শেষৰ ফালৰপৰা 11তম পদটো নিৰ্ণয় কৰিবলৈ হ'লে আমি প্ৰগতিটোৰ মুঠ পদৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

গতিকে $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

অৰ্থাৎ $-72 = (n - 1)(-3)$

অৰ্থাৎ $n - 1 = 24$

বা $n = 25$

গতিকে APটোত 25টা পদ আছে।

সেয়ে, শেষৰ ফালৰপৰা 11তম পদটো প্ৰগতিটোৰ 15তম পদ হ'ব। (মন কৰিবা, এইটো কিন্তু 14তম পদটো হ'ব নোৱাৰে। কিয়?)

গতিকে, $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

∴ শেষৰফালৰপৰা 11তম পদটো হ'ল – 32।

বিকল্প সমাধান (Alternative Solution) :

যদি আমি প্ৰদত্ত সমান্তৰ প্ৰগতিটো ওলোটাকৈ লিখোঁ, তেতিয়া $a = -62$ আৰু $d = 3$ (কিয়?)

গতিকে এতিয়া প্ৰশ্নটো হ'ব a আৰু dৰ এই মানৰ সহায়ত 11তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

গতিকে, $a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

গতিকে 11তম পদটো, যিটো উলিয়াবলগীয়া পদ, হ'ল –32।

উদাহৰণ 9 : 1000 টকা বছৰি 8% সৰল সুতৰ হাৰত বিনিয়োগ কৰা হ'ল। প্ৰতিবছৰৰ অন্তত সুত কিমান হ'ব গণনা কৰা। সুতৰ এই পৰিমাণসমূহে এটা সমান্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰেনে? যদি কৰে, এই তথ্যখিনিৰ সহায়ত 30 বছৰৰ অন্তত সুতৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ আমি জানো যে সৰল সুত গণনা কৰাৰ সূত্ৰটো হ'ল

$$I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

গতিকে প্ৰথম বছৰৰ অন্তত সুত $= \frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ টকা = 80 টকা

দ্বিতীয় বছৰৰ অন্তত সুত $= \frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ টকা = 160 টকা

তৃতীয় বছৰৰ অন্তত সুত $= \frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ টকা = 240 টকা

একেদৰে আমি চতুৰ্থ আৰু পঞ্চম, ... আদি বছৰৰ অন্তত সুত নিৰ্ণয় কৰিব পাৰো। গতিকে প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ..... বছৰৰ অন্ত সুত হ'ব (টকাৰ হিচাপত) ক্ৰমে

80, 160, 240, ...

ইয়াত ওচৰা-উচৰি দুটা পদৰ পাৰ্থক্য 80 অৰ্থাৎ $d = 80$, গতিকে সংখ্যাৰ এই তালিকাখনে এটা AP গঠন কৰে। তদুপৰি $a = 80$

এতিয়া 30 বছৰৰ অন্তত সুতৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি a_{30} নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

এতিয়া, $a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

গতিকে 30 বছৰৰ অন্তত সুত হ'ব 2400 টকা।

উদাহৰণ 10 ঃ ফুলনি এডৰাত প্ৰথম শাৰীত 23 জোপা, দ্বিতীয় শাৰীত 21 জোপা, তৃতীয় শাৰীত 19 জোপা ইত্যাদিকৈ গোলাপ ফুলৰ গছ আছে। শেষৰ শাৰীত 5 জোপা গোলাপ ফুলৰ গছ আছে। ফুলনি ডৰাত মুঠতে গোলাপৰ শাৰী কিমান আছে?

সমাধান ঃ প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়.... শাৰীত থকা গোলাপ ফুলৰ গছৰ সংখ্যা ক্ৰমে

23, 21, 19, . . ., 5

ইহঁত সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে (কিয়?)। ধৰা হ'ল ফুলনি ডৰাত থকা গোলাপৰ শাৰীৰ সংখ্যা n।

এতিয়া $a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

যিহেতু $a_n = a + (n - 1)\, d$, গতিকে আমি পাওঁ যে

$5 = 23 + (n - 1)(-2)$

অৰ্থাৎ $-18 = (n - 1)(-2)$

অৰ্থাৎ $n = 10$

গতিকে ফুলনিডৰাত মুঠতে 10 শাৰী গোলাপৰ গছ আছে।

অনুশীলনী 5.2

1. দিয়া আছে যে সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ a, সাধাৰণ অন্তৰ d আৰু nতম পদ a_n। তলৰ তালিকাখনৰ খালী ঠাইসমূহ পূৰণ কৰা—

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0
(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. তলৰ প্ৰতিটোৰে শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা আৰু কাৰণ দৰ্শোৱা—

(i) 10, 7, 4, . . . , এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ 30তম পদটো

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) –87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$, এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ 11তম পদটো

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. তলৰ সমান্তৰ প্ৰগতিসমূহৰ খালীঘৰ কেইটাৰ লুপ্ত পদসমূহ (missing terms) নিৰ্ণয় কৰা—

(i) 2, $\square$, 26

(ii) $\square$, 13, $\square$, 3

(iii) 5, $\square$, $\square$, $9\frac{1}{2}$

(iv) -4, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 6

(v) $\square$, 38, $\square$, $\square$, $\square$, -22

4. 3, 8, 13, 18, . . . , সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কোনটো পদ 78?

5. তলৰ প্ৰতিটো সমান্তৰ প্ৰগতিৰ পদৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13, . . . , -47

6. 11, 8, 5, 2 ..... এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ -150 সংখ্যাটো কোনো এটা পদ হ'ব পাৰেনে পৰীক্ষা কৰা।

7. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ 11তম পদটো 38 আৰু 16তম পদটো 73 হ'লে তাৰ 31তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

8. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিত 50 টা পদ আছে যাৰ তৃতীয় পদটো 12 আৰু শেষ পদটো 106। 29তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

9. যদি এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ তৃতীয় আৰু নৱম পদ দুটা ক্ৰমে 4 আৰু -8 হয় তেন্তে ইয়াৰ কোনটো পদ শূন্য হ'ব?

10. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ 17তম পদটো 10তম পদটোতকৈ 7 ডাঙৰ। সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

11. 3, 15, 27, 39, . . . সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কোনটো পদ 54তম পদতকৈ 132 ডাঙৰ?

12. দুটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ অন্তৰ একে। সিহঁতৰ 100তম পদ দুটাৰ পাৰ্থক্য 100। সিহঁতৰ 1000তম পদ দুটাৰ পাৰ্থক্য কিমান?

13. কিমানটা তিনি অংকযুক্ত সংখ্যা 7ৰে বিভাজ্য?

14. 10 আৰু 250ৰ মাজত 4ৰ গুণিতক কিমানটা আছে?

15. nৰ কি মানৰ বাবে 63, 65, 67, . . . আৰু 3, 10, 17, . . . এই সমান্তৰ প্ৰগতি দুটাৰ nতম পদ দুটা সমান?

16. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ তৃতীয় পদটো 16 আৰু সপ্তম পদটো পঞ্চম পদটোতকৈ 12 ডাঙৰ। সমান্তৰ প্ৰগতিটো নিৰ্ণয় কৰা।

17. 3, 8, 13, . . ., 253 এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ শেষৰ ফালৰপৰা 20তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

18. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ চতুৰ্থ আৰু অষ্টম পদ দুটাৰ যোগফল 24 আৰু ষষ্ঠ আৰু দশম পদ দুটাৰ যোগফল 44। সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম তিনিটা পদ নিৰ্ণয় কৰা।

19. 1995 চনত চন্দনাই 5000 টকা বছৰেকীয়া দৰমহাত চাকৰি আৰম্ভ কৰিলে আৰু প্ৰতি বছৰে 200 টকাকৈ বৃদ্ধি (Increment) লাভ কৰিলে। কোন বছৰত তেওঁৰ দৰমহা 7000 টকা হ'ব?

20. ৰামচৰণে কোনো এটা বছৰৰ প্ৰথম সপ্তাহত 5টকা সঞ্চয় কৰিলে আৰু প্ৰতি সপ্তাহত সঞ্চয়ৰ ধন 1.75 টকাকৈ বঢ়াই গৈ থাকিল। nতম সপ্তাহত তেওঁৰ সাপ্তাহিক সঞ্চয়ৰ পৰিমাণ 20.75 টকা হ'লে nৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

5.4 সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল (Sum of First n Terms of an AP)

আমি 5.1 অনুচ্ছেদত দিয়া সেই উদাহৰণটো আকৌ লৈছো যিটোত চিত্ৰলেখাই তেওঁৰ জীয়েকৰ সঞ্চয় বাকচত তাইৰ বয়স এবছৰ হওঁতে 100 টকা থৈছিল আৰু তাৰ পিছত দ্বিতীয় জন্মদিনত 150 টকা, তৃতীয় জন্মদিনত 200 টকা ইত্যাদি ধৰণেৰে প্ৰতি বছৰে জমা কৰি গৈছিল। ছোৱালীজনীৰ বয়স 21 বছৰ হওঁতে সেই সঞ্চয় বাকচত কিমান টকা জমা হ'ব?

ছোৱালীজনীৰ প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুৰ্থ.... জন্মদিনত সঞ্চয় বাকচত থোৱা টকাৰ পৰিমাণ 21তম জন্মদিনলৈকে ক্ৰমে 100, 150, 200, 250, ...। এতিয়া তাইৰ 21তম জন্মদিনত সঞ্চয় বাকচত থকা মুঠ ধনৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ হ'লে এই 21টা সংখ্যা পাতি লৈ যোগ কৰিব লাগিব। এই পদ্ধতিটো আমনিদায়ক আৰু সময়ব্যয়ী বুলি নাভাবানে? এই কামটো চমু উপায়েৰে কৰিব পাৰিবানে? এইটো সম্ভৱ হ'ব যদিহে আমি এই যোগফলটো উলিওৱাৰ এটা নিয়ম উলিয়াব পাৰো। ইয়াকে আমি চাওঁ আহাঁ।

গাউছৰ (এওঁৰ বিষয়ে তোমালোকে প্ৰথম অধ্যায়ত পঢ়িছিলা) বয়স মাত্ৰ 10 বছৰ থাকোতেই তেওঁক সমাধান কৰিবলৈ দিয়া অংকটোকে আমি লৈছো। তেওঁক 1ৰ পৰা 100লৈ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাসমূহৰ যোগফল উলিয়াবলৈ কোৱা হৈছিল। তেওঁ তৎক্ষণাৎ যোগফল 5050 হ'ব বুলি উত্তৰ দিছিল। তোমালোকে অনুমান কৰিব পাৰিছানে তেওঁনো কেনেকৈ এই কামটো কৰিছিল? তেওঁ লিখিছিল ঃ

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

আৰু তাৰ পিছত সংখ্যাবোৰ ওলোটাই পাতি লিখিছিল

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

এই দুটা যোগ কৰি পাইছিলো

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$
$$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101 \quad (100 \text{ বাৰ})$$

গতিকে, $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$, অৰ্থাৎ যোগফলটো = 5050

এই একেটা কৌশলকে আমি এতিয়া $a, a + d, a + 2d, ...$ এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল উলিয়াবলৈ ব্যৱহাৰ কৰিম।

এই AP টোৰ nতম পদটো $a + (n - 1)d$। ধৰা হ'ল, এই AP টোৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল S। গতিকে আমি পাওঁ

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + . . . + [a + (n - 1) d] \qquad ....(1)$$

পদসমূহ ওলোটাই লৈ পুনৰ লিখিলে পাওঁ

$$S = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2) d] + . . . + (a + d) + a \qquad ....(2)$$

(1) আৰু (2)ক পদানুক্ৰমে যোগ কৰিলে পাওঁ—

$$2S = \underbrace{[2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + ... + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]}_{(n \text{ বাৰ আছে})}$$

বা $\quad 2S = n [2a + (n - 1) d] \qquad$ (যিহেতু n টা পদ আছে)

বা $\quad S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

গতিকে এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল হ'ব

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]}$$

ইয়াকে আমি এইদৰেও লিখিব পাৰো যে, $S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d]$

অৰ্থাৎ $\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + a_n)} \qquad ....(3)$

এতিয়া, যদি সমান্তৰ প্ৰগতিটোত মাত্ৰ nটা পদেই থাকে তেতিয়া হ'লে $a_n = l$, ইয়াত l অন্তিম পদ।

গতিকে (3)ৰ পৰা দেখা যায় যে

$$\mathbf{S = \frac{n}{2} (a + l)} \qquad ....(4)$$

যদি সমান্তৰ প্ৰগতি এটাৰ প্ৰথম পদ আৰু অন্তিম পদ দিয়া থাকে, কিন্তু সাধাৰণ অন্তৰ দিয়া নেথাকে, তেতিয়া এই আৰ্হিটো বৰ দৰকাৰী।

এতিয়া আমি প্ৰথমতেই দিয়া প্ৰশ্নটোলৈ উভতি যাওঁ। চিত্ৰলেখাই জীয়েকৰ সঞ্চয় বাকচত প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুৰ্থ.... জন্মদিনবিলাকত জমা হোৱা ধনৰাশি (টকাৰ হিচাপত) ক্ৰমে 100, 150, 200, 250, ...।

এইটো এটা সমান্তৰ প্ৰগতি। আমি তাইৰ 21তম জন্মদিনত গোট খোৱা মুঠ টকা উলিয়াব লাগে অৰ্থাৎ এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম 21টা পদৰ যোগফল উলিয়াব লাগে।

ইয়াত $a = 100$, $d = 50$ আৰু $n = 21$।

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ সূত্ৰৰ সহায়ত পাওঁ যে

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

গতিকে তাইৰ 21তম জন্মদিনত গোট খোৱা সমুদায় ধনৰ পৰিমাণ 12600।

সূত্ৰটোৰ ব্যৱহাৰে সমস্যাটোৰ সমাধান অধিক সহজ নকৰিলেনে বাৰু?

সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল বুজাবলৈ Sৰ সলনি S_n কো ব্যৱহাৰ কৰো। সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম 20টা পদৰ যোগফল বুজাবলৈ S_{20} লিখোঁ। প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল উলিওৱা সূত্ৰটোত S, a, d আৰু n এই চাৰিটা ৰাশি জড়িত হৈ আছে। যদি এইকেইটাৰ যিকোনো তিনিটা আমি জানো, তেতিয়া আমি চতুৰ্থটো উলিয়াব পাৰিম।

মন্তব্য ঃ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল আৰু প্ৰথম $(n-1)$ টা পদৰ যোগফলৰ পাৰ্থক্যটো সেই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ nতম পদটো, অৰ্থাৎ $a_n = S_n - S_{n-1}$।

এতিয়া আমি কিছুমান উদাহৰণ লওঁ।

উদাহৰণ 11 ঃ 8, 3, –2, ... এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম 22 টা পদৰ যোগফল উলিওৱা।

সমাধান ঃ ইয়াত, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

আমি জানো যে,

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

গতিকে, $$S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

সেয়ে, প্ৰদত্ত APটোৰ প্ৰথম 22টা পদৰ যোগফল –979।

উদাহৰণ 12 ঃ এটা APৰ প্ৰথম 14টা পদৰ যোগফল 1050 আৰু প্ৰথম পদ 10, তাৰ 20তম পদটো উলিওৱা।

সমাধান ঃ ইয়াত, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

যিহেতু, $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$,

গতিকে, $1050 = \frac{14}{2}[20+13d] = 140 + 91d$

অৰ্থাৎ $910 = 91d$ বা $d = 10$

সেই কাৰণে, $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$, অৰ্থাৎ 20তম পদটো 200।

উদাহৰণ 13 ঃ 24, 21, 18, ... এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কিমানটা পদ ল'লে সিহঁতৰ যোগফল 78 হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$,

আমি এতিয়া n উলিয়াব লাগে।

আমি জানো যে, $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

সেয়ে, $78 = \frac{n}{2}[48+(n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$

বা $3n^2 - 51n + 156 = 0$

বা $n^2 - 17n + 52 = 0$

বা $(n - 4)(n - 13) = 0$

বা $n = 4$ বা 13

nৰ এই দুয়োটা মানেই গ্ৰহণযোগ্য। গতিকে পদৰ সংখ্যা 4 অথবা 13।

মন্তব্য ঃ

1. এই ক্ষেত্ৰত, প্ৰথম 4টা পদৰ যোগফল = প্ৰথম 13টা পদৰ যোগফল = 78
2. ইয়াত দুয়োটা উত্তৰেই সম্ভৱ হৈছে কাৰণ পঞ্চম পদৰ পৰা 13তম পদলৈ যোগফল শূন্য। এইটো হোৱাৰ কাৰণ হ'ল যে ইয়াত a ধনাত্মক আৰু d ঋণাত্মক হোৱাত কিছুমান পদ ধনাত্মক হ'ব আৰু কিছুমান ঋণাত্মক হৈ পৰস্পৰ কটাকটি যাব।

উদাহৰণ 14 ঃ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) প্ৰথম 1000টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ (ii) প্ৰথম nটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ

সমাধান ঃ

(i) ধৰা হ'ল $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$

এতিয়া, এটা APৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফলৰ সূত্ৰ $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

গতিকে প্ৰথম 1000টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল 500500।

(ii) ধৰা হ'ল, $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

ইয়াত $a = 1$ আৰু অন্তিম পদ lৰ মান n।

সেইকাৰণে, $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ বা $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

গতিকে প্ৰথম nটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল হ'ব

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

উদাহৰণ 15 ঃ এখন সংখ্যাৰ তালিকাৰ প্ৰথম 24টা পদৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা যাৰ nতম পদটো

$$a_n = 3 + 2n$$

সমাধান ঃ যিহেতু, $a_n = 3 + 2n$,

গতিকে $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

গতিকে সংখ্যাৰ তালিকাখন হ'ব 5, 7, 9, 11, . . .

ইয়াত, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ আৰু এইদৰে গৈ থাকিব।

সেয়ে তালিকাখনে এটা AP গঠন কৰিছে আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ অন্তৰ $d = 2$

এতিয়া, S_{24} নিৰ্ণয় কৰিবৰ বাবে ইয়াত $n = 24$, $a = 5$, $d = 2$

গতিকে, $S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12[10 + 46] = 672$

সেয়ে সংখ্যাৰ তালিকাখনৰ প্ৰথম 24টা পদৰ যোগফল 672।

উদাহৰণ 16 ঃ এটা টিভি ছেট উৎপাদনকাৰী উদ্যোগে তৃতীয় বছৰত 600 টা আৰু সপ্তম বছৰত 700 টা ছেট উৎপাদন কৰিলে। প্ৰতিবছৰে উৎপাদন এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যাত সুষমভাৱে বাঢ়ি যোৱা বুলি ধৰি তলত দিয়াবিলাক নিৰ্ণয় কৰাঃ

(i) প্ৰথম বছৰৰ উৎপাদন

(ii) দশম বছৰৰ উৎপাদন

(iii) প্ৰথম সাত বছৰৰ মুঠ উৎপাদন

সমাধান ঃ (i) যিহেতু প্ৰতি বছৰে উৎপাদন এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যাত সুষমভাৱে বাঢ়ি যায়, গতিকে প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়,.... ইত্যাদি বছৰবিলাকত টিভি ছেট উৎপাদনৰ সংখ্যাই এটা AP গঠন কৰিব।

ধৰো nতম বছৰত টিভি ছেট উৎপাদনৰ সংখ্যা a_n।

তেতিয়াহ'লে, $a_3 = 600$ আৰু $a_7 = 700$

বা $a + 2d = 600$

আৰু $a + 6d = 700$

এই সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰিলে পাওঁ, $d = 25$ আৰু $a = 550$.

$\therefore$ প্ৰথম বছৰত উৎপাদন হোৱা টিভি ছেটৰ সংখ্যা 550।

(ii) এতিয়া $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

গতিকে দশম বছৰত উৎপাদন হোৱা টিভি ছেটৰ সংখ্যা 775

(iii) তদুপৰি, $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$

$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$

এতেকে প্ৰথম সাত বছৰত উৎপাদিত মুঠ টিভি ছেটৰ সংখ্যা 4375।

অনুশীলনী 5.3

1. তলৰ সমান্তৰ প্ৰগতিসমূহৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) 2, 7, 12, ... (10 টা পদলৈ) (ii) –37, –33, –29, . . ., (12 টা পদলৈ)

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., (100 টা পদলৈ)(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, . . ., (11টা পদলৈ)

2. তলৰ যোগফলবিলাক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ

(i) দিয়া আছে $a = 5, d = 3, a_n = 50$, n আৰু S_n উলিওৱা

(ii) দিয়া আছে $a = 7, a_{13} = 35$, d আৰু S_{13} উলিওৱা

(iii) দিয়া আছে $a_{12} = 37, d = 3$, a আৰু S_{12} উলিওৱা

(iv) দিয়া আছে $a_3 = 15, S_{10} = 125$, d আৰু a_{10} উলিওৱা

(v) দিয়া আছে $d = 5, S_9 = 75$, a আৰু a_9 উলিওৱা

(vi) দিয়া আছে $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$, n আৰু a_n উলিওৱা

(vii) দিয়া আছে $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$, n আৰু d উলিওৱা

(viii) দিয়া আছে $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$, n আৰু a উলিওৱা

(ix) দিয়া আছে $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$, d উলিওৱা

(x) দিয়া আছে $l = 28$, $S = 144$, আৰু মুঠ পদৰ সংখ্যা 9; a উলিওৱা।

4. 9, 17, 25, ... এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কিমানটা পদৰ যোগফল 636 হ'ব?

5. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 5, অন্তিম পদ 45 আৰু যোগফল 400। মুঠ পদৰ সংখ্যা আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

6. এটা APৰ প্ৰথম পদ আৰু অন্তিম পদ ক্ৰমে 17 আৰু 350। যদি ইয়াৰ সাধাৰণ অন্তৰ 9, তেন্তে APটোত কিমান পদ আৰু সিহঁতৰ যোগফল কিমান?

7. এটা APৰ $d = 7$ আৰু 22তম পদটো 149 হ'লে ইয়াৰ প্ৰথম 22 টা পদৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

8. এটা APৰ দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় পদ ক্ৰমে 14 আৰু 18 হ'লে প্ৰথম 51টা পদৰ যোগফল উলিওৱা।

9. এটা APৰ প্ৰথম 7টা পদৰ যোগফল 49 আৰু প্ৰথম 17টা পদৰ যোগফল 289, APটোৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল উলিওৱা।

10. দেখুওৱা যে, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ পদসমূহে এটা AP গঠন কৰে যাৰ a_n ক তলত দিয়াৰ দৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

লগতে, প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰথম 15টা পদৰ যোগফল উলিওৱা।

11. যদি এটা APৰ প্ৰথম nটা পদৰ যোগফল $4n - n^2$, তেন্তে ইয়াৰ প্ৰথম পদ (S_1) কি? প্ৰথম পদ দুটাৰ যোগফল কিমান? দ্বিতীয় পদটো কি? একেদৰে, তৃতীয়, দশম আৰু nতম পদকেইটা নিৰ্ণয় কৰা।

12. 6ৰে বিভাজ্য প্ৰথম 40টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

13. প্ৰথম 15টা 8ৰ গুণিতকৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

14. 0 আৰু 50ৰ মাজৰ অযুগ্ম সংখ্যাবিলাকৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

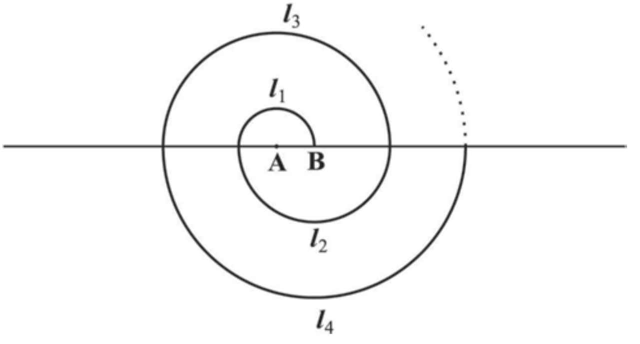
15. এটা নিৰ্মাণ কাৰ্যৰ ঠিকাত নিৰ্মাণৰ কাম এটা নিৰ্ধাৰিত তাৰিখতকৈ পলম হ'লে দিব লগা জৰিমনা এনেধৰণৰ ঃ প্ৰথম দিনা 200 টকা, দ্বিতীয় দিনা 250 টকা, তৃতীয় দিনা 300 টকা

ইত্যাদি। অর্থাৎ প্ৰতিটো পৰৱৰ্তী দিনৰ জৰিমনা তাৰ পূৰ্বৱৰ্তী দিনতকৈ 50 টকা বেছি। ঠিকাদাৰ এজনে কামটো 30 দিন পলমকৈ সম্পূৰ্ণ কৰিলে। তেওঁ মুঠ কিমান টকা জৰিমনা ভৰিব লাগিব।

16. এখন বিদ্যালয়ৰ শিক্ষাৰ্থীসকলক বিদ্যায়তনিক ক্ষেত্ৰত দেখুওৱা পাৰদৰ্শিতাৰ বাবে মুঠ 700 টকাৰ সাতটা নগদ ধনৰ পুৰস্কাৰ দিব লগা হ'ল। যদি প্ৰতিটো পুৰস্কাৰৰ ধন তাৰ আগৰটোতকৈ 20 টকা কম হয়, তেনেহ'লে প্ৰতিটো পুৰস্কাৰৰ মূল্য নিৰ্ণয় কৰা।

17. এখন বিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে বায়ু প্ৰদূষণ ৰোধৰ উদ্দেশ্যে বিদ্যালয়ৰ চৌপাশে বৃক্ষৰোপণ কৰিবলৈ মনস্থ কৰিলে। এইটো সিদ্ধান্ত লোৱা হ'ল যে প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ প্ৰতিটো শাখাৰপৰা তেওঁলোক পঢ়া শ্ৰেণীটোৰ সমসংখ্যক বৃক্ষৰোপণ কৰিব। উদাহৰণস্বৰূপে প্ৰথম শ্ৰেণীৰ এটা শাখাই এজোপা, দ্বিতীয় শ্ৰেণীৰ এটা শাখাই দুজোপা ইত্যাদিকৈ গৈ সেইদৰে দ্বাদশ শ্ৰেণীলৈকে বৃক্ষ ৰোপণ কৰিব। প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰে তিনিটাকৈ শাখা আছে। ছাত্ৰ-ছাত্ৰীবিলাকে মুঠতে কিমান জোপা গছ ৰোপণ কৰিব?

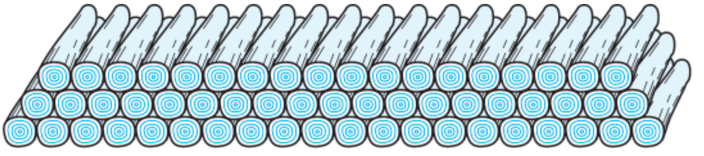
18. চিত্ৰ 5.4ত দেখুওৱাৰ দৰে 0.5 ছে.মি., 1.0 চে.মি., 1.5 চে.মি., 2.0 চে.মি. ..... ব্যাসাৰ্ধৰ আনুক্ৰমিকভাৱে থকা কিছুমান অৰ্ধবৃত্তৰ দ্বাৰা এটি কুণ্ডলী সজোৱা হ'ল। এই অৰ্ধবৃত্তবোৰৰ কেন্দ্ৰ Aত আৰম্ভ। ই এটাৰ পিছত এটাকৈ ক্ৰমে A, Bকৈ আছে। 13টা একাদিক্ৰমে থকা অৰ্ধবৃত্তৰদ্বাৰা গঠিত এনে এটা কুণ্ডলীৰ মুঠ দৈৰ্ঘ্য কিমান? (ধৰা $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্ৰ 5.4

[ইংগিত ঃ আনুক্ৰমিকভাৱে থকা অৰ্ধবৃত্তসমূহৰ দৈৰ্ঘ্য l_1, l_2, l_3, l_4, ... আৰু ইহঁতৰ কেন্দ্ৰ ক্ৰমে A, B, A, B, ...]

19. 200 টুকুৰা কাঠ এনেদৰে সজোৰা হ'ল ঃ 20 টুকুৰা একেবাৰে তলৰ শাৰীত, তাৰ পিছৰ শাৰীত 19 টুকুৰা, তাৰ পিছত 18 টুকুৰা ইত্যাদি। (চিত্ৰ 5.5 চোৱা)। 200 টুকুৰা কাঠ কিমান শাৰীত সজোৰা হ'ল আৰু একেবাৰে ওপৰৰ শাৰীত কেইটুকুৰা কাঠ আছে?



চিত্ৰ 5.5

20. এটা আলু দৌৰ প্ৰতিযোগিতাত এটা বাল্টি আৰম্ভণী বিন্দুত থোৱা আছে আৰু বাল্টিটো প্ৰথম আলুটোৰপৰা 5 মি. আঁতৰত আছে। এডাল সৰলৰেখাত 3 মি. আঁতৰে আঁতৰে আনবিলাক আলু আছে। ৰেখাডালত মুঠতে 10 টা আলু আছে। (চিত্ৰ 5.6 চোৱা)।

চিত্ৰ 5.6

এজন প্ৰতিযোগীয়ে বাল্টিটোৰ কাষৰপৰা দৌৰি গৈ একেবাৰে ওচৰতে পোৱা আলুটো বুটলি লৈ উভতি দৌৰি আহি আলুটো বাল্টিটোত ভৰাই থৈ পুনৰ দৌৰি গৈ ওচৰতে থকা পিছৰ আলুটো বুটলি লৈ আকৌ উভতি দৌৰি আহি একেদৰে বাল্টিটোত থয়। এইদৰে তেওঁ দৌৰি দৌৰি শেষৰ আলুটোও বাল্টিটোত থয়। প্ৰতিযোগীজনে মুঠতে কিমান দূৰত্ব দৌৰিব লগা হ'ল?

[**ইংগিত** ঃ প্ৰথমটো আৰু দ্বিতীয়টো আলু বুটলিবলৈ প্ৰতিযোগীজনে মুঠতে দৌৰিব লগা দূৰত্ব (মিটাৰত) হ'ল $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

অনুশীলনী 5.4 (ঐচ্ছিক)*

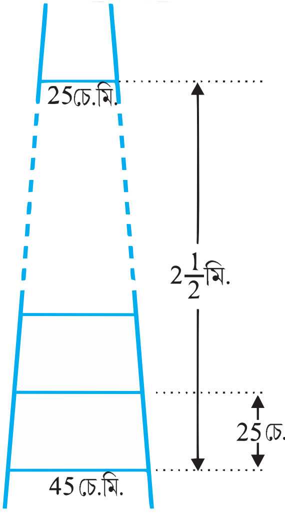
1. 121, 117, 113, ..., এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম ঋণাত্মক পদটো কিমান সংখ্যক পদ? [**ইংগিত** ঃ n উলিওৱা যেতিয়া $a_n < 0$]

2. এটা APৰ তৃতীয় আৰু সপ্তম পদৰ যোগফল 6 আৰু সিহঁতৰ পূৰণফল 8; এই APটোৰ প্ৰথম 16 টা পদৰ যোগফল উলিওৱা।

*এই অনুশীলনীটো পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰপৰা নহয়।

3. এডাল জখলাৰ শলাবিলাক 25 চে.মি. আঁতৰে আঁতৰে আছে (চিত্ৰ 5.7 চোৱা)। একেবাৰে তলত থকা শলিডালৰ দীঘ 45 চে.মি. আৰু পিছৰ শলিবিলাকৰ দীঘ সুষমভাৱে কমি কমি গৈ একেবাৰে ওপৰৰ শলিডালৰ দীঘ হয় 25 চে.মি.। যদি একেবাৰে ওপৰৰ শলিডালৰ পৰা একেবাৰে তলৰ শলিডালৰ দূৰত্ব $2\frac{1}{2}$ মি. হয় তেনেহ'লে শলিবিলাকৰ বাবে লগা কাঠৰ মুঠ দৈৰ্ঘ্য কিমান?

(ইংগিত ঃ শলিৰ সংখ্যা = $\frac{250}{25}+1$)



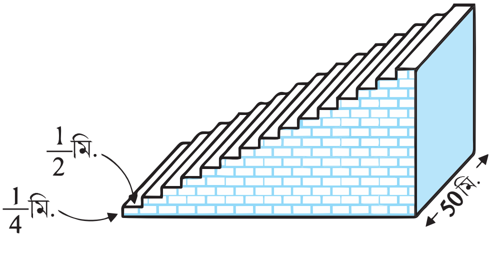
চিত্ৰ 5.7

4. এটা শাৰীত থকা ঘৰবিলাকত 1 ৰ পৰা 49লৈ ক্ৰমিকভাৱে নম্বৰ দিয়া হ'ল। দেখুওৱা যে xৰ এনেকুৱা এটা মান আছে যাতে x নম্বৰ দিয়া ঘৰটোৰ পূৰ্বৱৰ্তী ঘৰৰ নম্বৰবিলাকৰ যোগফল তাৰ পৰৱৰ্তী ঘৰৰ নম্বৰবিলাকৰ যোগফলৰ সমান। xৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

[**ইংগিত ঃ** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. এখন ফুটবল খেলপথাৰত কংক্ৰিটেৰে বনোৱা এটা গেলাৰীত 15টা ঢাপ আছে আৰু প্ৰতিটো ঢাপৰ দৈৰ্ঘ্য 50 মি.। প্ৰতিটো ঢাপৰে উচ্চতা $\frac{1}{4}$ মি. আৰু বহল $\frac{1}{2}$ মি. (চিত্ৰ 5.8 চোৱা)। এই গেলাৰীটো সাজিবলৈ লগা কংক্ৰিটৰ মুঠ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা।

[**ইংগিত ঃ** প্ৰথম ঢাপটো সাজিবলৈ লগা কংক্ৰিটৰ আয়তন = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50\ m^3$]



চিত্ৰ 5.8

5.5 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাকেইটা অধ্যয়ন কৰিলা ঃ

1. এটা সমান্তৰ প্ৰগতি কিছুমান সংখ্যাৰ এখন তালিকা যাৰ প্ৰথম পদটোক বাদ দি আন প্ৰতিটো পদেই আগৰ পদটোৰ লগত এটা সংখ্যা d যোগ কৰি পোৱা যায়। এই নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা dক সাধাৰণ অন্তৰ বোলে। এটা APৰ সাধাৰণ আৰ্হি হ'ল $a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, ...$

2. $a_1, a_2, a_3, ...$ সংখ্যাবিলাকৰ তালিকাখন AP হ'ব যদিহে $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ...$ৰ মান একে হয়, অৰ্থাৎ kৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে $a_{k+1} - a_k$ একে হয়।

3. এটা APৰ প্ৰথম পদ a আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d হ'লে তাৰ nতম পদটো (বা সাধাৰণ পদটো) হ'ব $a_n = a + (n - 1)\,d.$

4. এটা APৰ nটা পদৰ যোগফলটো হ'ল $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

5. যদি এটা APৰ অন্তিম পদটো (ধৰি লোৱা nতম পদটো) l হয় তেন্তে APটোৰ সকলো পদৰ যোগফলটো হ'ব, $S = \frac{n}{2}(a + l)$

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

যদি a, b, c সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকে তেন্তে $b = \frac{a+c}{2}$ আৰু bক a আৰু cৰ সমান্তৰ মাধ্য (Arithmetic mean) বোলে।

C5D8I3

ত্ৰিভুজ (Triangles)

ষষ্ঠ অধ্যায়

6.1. অৱতাৰণা (Introduction)

বিভিন্ন ত্ৰিভুজ আৰু এইসমূহৰ ধৰ্ম সম্পৰ্কে তোমালোক পূৰ্বৰ শ্ৰেণীৰপৰাই সুপৰিচিত। নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা সম্পৰ্কে বিস্তাৰিতভাৱে অধ্যয়ন কৰিছা। মনত পেলোৱা যে দুটা নক্সা বা চিত্ৰ সৰ্বসম বুলি কোৱা হ'ব যদিহে সিহঁত একে আকৃতি আৰু একে আকাৰৰ হয়। এই অধ্যায়ত আমি সেই চিত্ৰ বিলাকৰ বিষয়েহে অধ্যয়ন কৰিম যিবিলাকৰ আকৃতি একে, কিন্তু আকাৰ একে হোৱাটো প্ৰয়োজনীয় নহয়। দুটা চিত্ৰৰ যদি আকৃতি একে (কিন্তু আকাৰ একে হোৱাটো প্ৰয়োজনীয় নহয়) তেনেহ'লে সিহঁতক সদৃশ চিত্ৰ (*similar figures*) বুলি কোৱা হয়। বিশেষকৈ, আমি ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্য সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম আৰু এই জ্ঞান প্ৰয়োগ কৰি আগতে শিকি অহা পাইথাগোৰাছৰ উপপাদ্যৰ এটা সৰল প্ৰমাণ আগবঢ়াম।

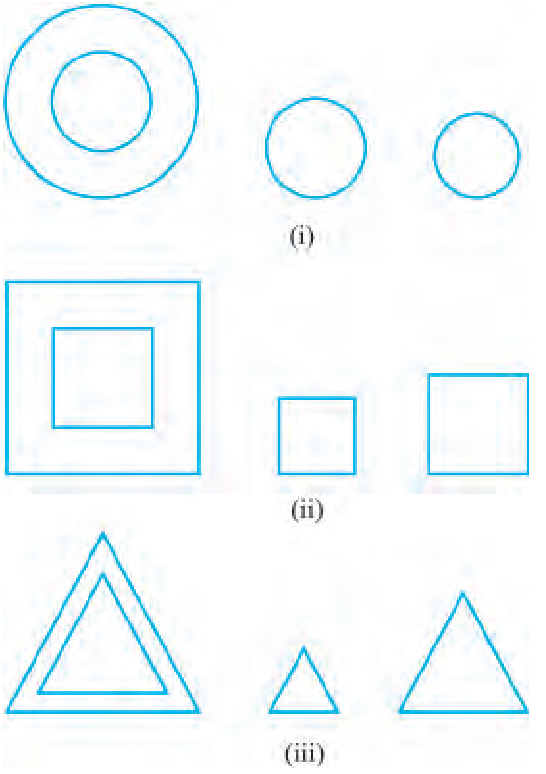
তোমালোকে বাৰু অনুমান কৰিব পাৰানে কেনেকৈনো পৰ্বতবিলাকৰ উচ্চতা (ধৰা মাউণ্ট এভাৰেষ্ট) বা বহু আঁতৰত থকা বস্তুৰ (ধৰা চন্দ্ৰ) দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰে?

তোমালোকে ভাবা নেকি যে জোখ লোৱা ফিটাৰে এইবিলাক পোনছাটে জোখে? দৰাচলতে, এই ধৰণৰ উচ্চতা আৰু দূৰত্ববিলাক পৰোক্ষ জোখ-মাপৰ ধাৰণাৰে উলিওৱা হয়, যিটো চিত্ৰৰ সাদৃশ্যৰ ধৰ্মৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত (উদাহৰণ 7 আৰু অনুশীলনী 6.3ৰ Q.15 চোৱা। লগতে এই কিতাপৰ অষ্টম আৰু নৱম অধ্যায় চোৱা।)

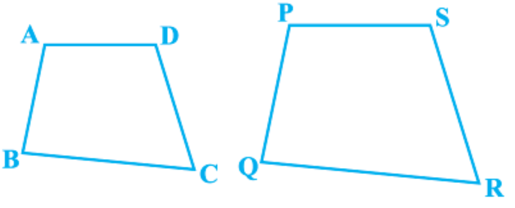
6.2 সদৃশ চিত্ৰ (Similar Figures)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে দেখিছা যে একে ব্যাসাৰ্ধৰ সকলোবোৰ বৃত্ত, একে দৈৰ্ঘ্যৰ বাহুৰ সকলোবোৰ বৰ্গ আৰু একে দৈৰ্ঘ্যৰ বাহু থকা সকলোবোৰ সমবাহু ত্ৰিভুজ সৰ্বসম।

যিকোনো দুটা (বা তাতকৈ বেছি) বৃত্ত লোৱা। [চিত্ৰ 6.1 (i) চোৱা]। ইহঁত সৰ্বসম হয়নে? যিহেতু ইহঁতৰ সকলোৰে ব্যাসাৰ্ধ একে নহয়, গতিকে ইহঁত ইটোৰ লগত সিটো সদৃশ নহয়। মন কৰিবা যে ইহঁতৰ কিছুমান সৰ্বসম হয় আৰু কিছুমান নহয়। কিন্তু ইহঁতৰ সকলোৰে আকৃতি একে। ইহঁত সকলোবোৰ সদৃশ। দুটা সদৃশ চিত্ৰৰ আকৃতি একে, কিন্তু আকাৰ একে হোৱাটো প্ৰয়োজনীয় নহয়। সেইকাৰণে, সকলোবোৰ বৃত্তই সদৃশ। দুটা (বা ততোধিক) বৰ্গৰ ক্ষেত্ৰত অথবা দুটা (বা ততোধিক) সমবাহু ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত এই কথাটো কেনে ধৰণৰ [চিত্ৰ 6.1ৰ (ii) আৰু (iii) চোৱা]? বৃত্তৰ ক্ষেত্ৰত লক্ষ্য কৰাৰ দৰে ইয়াতো ক'ব পাৰি যে, সকলোবোৰ বৰ্গই সদৃশ আৰু সেইদৰে সকলোবোৰ সমবাহু ত্ৰিভুজেই সদৃশ।



চিত্ৰ 6.1



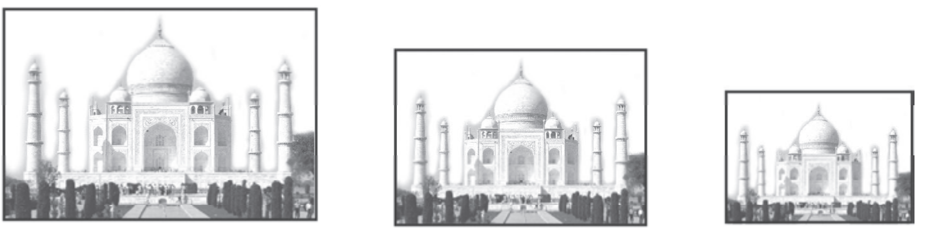
চিত্ৰ 6.2

ওপৰৰ আলোচনাৰপৰা ক'ব পাৰো যে সকলোবোৰ সৰ্বসম চিত্ৰই সদৃশ, কিন্তু

সদৃশ চিত্ৰবোৰ সৰ্বসম নহবও পাৰে।

এটা বৃত্ত আৰু এটা বৰ্গ সদৃশ হ'ব পাৰেনে? এটা ত্ৰিভুজ আৰু এটা বৰ্গ সদৃশ হ'ব পাৰেনে? চিত্ৰবোৰলৈ মন কৰিলেই এই প্ৰশ্নবিলাকৰ উত্তৰ দিব পাৰি (চিত্ৰ 6.1 চোৱা)। স্পষ্টভাৱে এই চিত্ৰবোৰ সদৃশ নহয়। (কিয়?)

ABCD আৰু PQRS এই চতুৰ্ভুজ দুটাৰ বিষয়ে তোমালোকে কি ক'বা (চিত্ৰ 6.2 চোৱা)? ইহঁত সদৃশ হয়নে? দেখাত ইহঁতক সদৃশ যেনেই লাগে, কিন্তু আমি নিশ্চিত নহয়। সেই কাৰণে আমাক চিত্ৰৰ সাদৃশ্য সম্পৰ্কে কেতবোৰ সংজ্ঞা লাগে আৰু এই সংজ্ঞাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি কিছুমান নিয়মৰ প্ৰয়োজন যাতে দুটা চিত্ৰ সদৃশ হয়নে নহয় ক'ব পৰা যায়। এই কাৰণে চিত্ৰ 6.3 ত দিয়া ফটোবিলাক মন কৰোঁ আঁহা।



চিত্ৰ 6.3

তোমালোকে তৎক্ষণাৎ ক'ব পাৰিবা যে এই ফটোবিলাক একেটা কীৰ্তিস্তম্ভৰে (তাজমহল)। কিন্তু ইহঁতৰ আকাৰ বেলেগে বেলেগ। তোমালোকে ক'বানে যে এই ফটো তিনিখন সদৃশ। নিশ্চয় হয়, ইহঁত সদৃশ।

এতিয়া তোমালোকে একেজন মানুহৰে একে আকাৰৰ দুখন ফটো সম্পৰ্কত কি ক'বা যদিহে এখন ফটো মানুহজনৰ 10 বছৰ বয়সত আৰু আনখন মানুহজনৰ 40 বছৰ বয়সত তোলা হৈছিল? এই ফটো দুখন সদৃশনে? এই ফটো দুখনৰ আকাৰ একে যদিও কিন্তু আকৃতি নিশ্চয় একে নহয়। সেয়ে এই দুখন সদৃশ নহয়।

এজন ফটোগ্ৰাফাৰে একেখন নিগেটিভৰপৰা বেলেগ বেলেগে আকাৰৰ ফটো প্ৰিণ্ট কৰোতে কি কৰে? তোমালোকে নিশ্চয় 'ষ্টাম্প চাইজ', 'পাছপ'ৰ্ট চাইজ' আৰু 'প'ষ্টকাৰ্ড চাইজ' ফটোৰ বিষয়ে শুনিছা। সাধাৰণতে ফটোগ্ৰাফাৰ গৰাকীয়ে প্ৰথমতে এখন সৰু আকাৰৰ ধৰা 35mm, ফিল্মত ফটোখন তোলে। তাৰ পিছত তেওঁ ইয়াকে 45mm বা 55mm আকাৰলৈ ডাঙৰ কৰে। গতিকে, যদি তোমালোকে সৰু ফটোখনৰ এডাল ৰেখাখণ্ড লোৱা, তেনেহ'লে ডাঙৰ ফটোখনত এই ৰেখাখণ্ডৰ অনুৰূপ ৰেখাখণ্ডডাল প্ৰথমডালৰ $\frac{45}{35}\left(\text{বা } \frac{55}{35}\right)$ গুণ হ'ব। ইয়াৰ প্ৰকৃত অৰ্থ হ'ল যে ফটোখনৰ সকলোবোৰ ৰেখাখণ্ড 35:45 (বা 35:55) অনুপাতত ডাঙৰ কৰা (এন্‌লাৰ্জ কৰা)

হয়। ইয়াকে এইদৰেও ক'ব পাৰি যে ডাঙৰ ফটোখনৰ সকলোবোৰ ৰেখাখণ্ড 45:35 (বা 55:35) অনুপাতত হ্ৰাস কৰা হয়। তদুপৰি তোমালেকে যদি বেলেগ আকাৰৰ দুয়োখন ফটোৰে পৰস্পৰ এযোৰ ৰেখাখণ্ড মাজৰ হেলন (বা কোণ) লোৱা, তেন্তে তোমালোকে দেখিছা যে এই হেলনবোৰ (বা কোণবোৰ) সদায় সমান। এয়েই হৈছে দুটা চিত্ৰৰ, বিশেষতঃ দুটা বহুভুজৰ, সাদৃশ্যৰ মূল কথা। আমি কওঁ যে—

সমসংখ্যক বাহুৰ দুটা বহুভুজ সদৃশ হ'ব যদিহে—

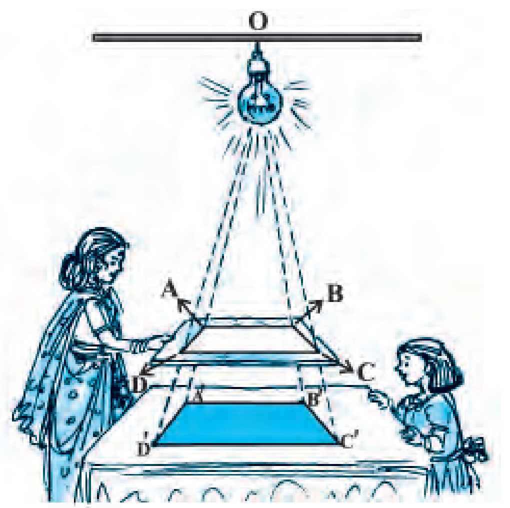
(*i*) সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান আৰু

(*ii*) সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহুবোৰ একে অনুপাতত (বা সমানুপাতত) থাকে।

মন কৰিবা যে অনুৰূপ বাহুবিলাকৰ একে অনুপাতটোক বহুভুজবিলাকৰ ক্ষেত্ৰত স্কেল গুণনীয়ক বা প্ৰতিনিধিত্বমূলক ভগ্নাংশ (*scale factor* বা *Representative Fraction*) বুলি উল্লেখ কৰা হয়। তোমালোকে নিশ্চয় শুনিছা যে পৃথিৱীৰ মানচিত্ৰ (অৰ্থাৎ গোলকীয় মানচিত্ৰ) বা অট্টালিকা নিৰ্মাণৰ ব্লু প্ৰিণ্ট উপযোগী স্কেল গুণনীয়ক আৰু কিছুমান নিৰ্দিষ্ট পৰম্পৰা মানি তৈয়াৰ কৰা হয়।

চিত্ৰৰ সাদৃশ্যৰ বিষয়ে অধিক স্পষ্টকৈ বুজিবৰ কাৰণে আমি তলত দিয়া কাৰ্যৰ বিধিটো কৰি চাওঁ আহা ঃ

কাৰ্য্যবিধি- 1 ঃ তোমাৰ শ্ৰেণীকোঠাৰ চিলিঙৰ পৰা এটা লাইটৰ বাল্ব ওলোমাই দিয়া (ধৰা O বিন্দুৰ পৰা) আৰু ইয়াৰ ঠিক তলতে এখন টেবুল থোৱা। এতিয়া এটা বহুভুজ, ধৰা এটা চতুৰ্ভুজ ABCD, সমান ডাঠবকলা এচটাৰ পৰা কাটি লোৱা হ'ল আৰু এই খনক ভূমিৰ সমান্তৰালকৈ টেবুল আৰু বাল্বটোৰ মাজত ধৰা হ'ল। এনে অৱস্থাত ABCD ৰ এটা ছাঁ টেবুলৰ ওপৰত পৰিব। এই ছাঁটোৰ বাহিৰটো A′B′C′D′ হিচাপে চিহ্নিত কৰা (চিত্ৰ 6.4 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.4

মন কৰা যে A′B′C′D′ চতুৰ্ভুজটো ABCD চতুৰ্ভুজৰ বৰ্ধিতৰূপ বা বিবৰ্ধন। এইটো পোহৰৰ ৰশ্মি সৰলৰেখাত গতি কৰা ধৰ্মৰ বাবে ঘটিছে। তোমালোকে এইটোও মন কৰিব পাৰা যে A′ বিন্দুটো OA ৰশ্মিৰ ওপৰত, B′ বিন্দুটো OB ৰশ্মিৰ ওপৰত, C′ বিন্দুটো OC ৰশ্মিৰ ওপৰত আৰু D′ বিন্দুটো OD ৰশ্মিৰ ওপৰত আছে। গতিকে A′B′C′D′ আৰু ABCDৰ আকৃতি একেই, কিন্তু আকাৰ বেলেগ।

গতিকে, A′B′C′D′ চতুৰ্ভুজটো ABCD চতুৰ্ভুজটোৰ সৈতে সদৃশ। আমি এইদৰেও ক'ব পাৰো যে ABCD চতুৰ্ভুজটো A′B′C′D′ চতুৰ্ভুজটোৰ সৈতে সদৃশ।

ইয়াত তোমালোকে এইটোও মন কৰিছা নিশ্চয় যে এটা চতুৰ্ভুজৰ এটা শীৰ্ষৰ লগত আনটো চতুৰ্ভুজৰ অনুৰূপ শীৰ্ষটো সম্পৰ্কিত অৰ্থাৎ A′ ৰ লগত A, B′ ৰ লগত B, C′ ৰ লগত C আৰু D′ ৰ লগত D সম্পৰ্কিত। এই সম্পৰ্কক প্ৰতীকৰ সহায়ত এইদৰে দেখুওৱা হয়, যেনে ঃ $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ আৰু $D' \leftrightarrow D$। প্ৰকৃতপক্ষে যদি দুয়োটা চতুৰ্ভুজৰ কোণ আৰু বাহুবিলাকৰ জোখ লোৱা হয়, তেন্তে তোমালোকে দেখুৱাব পাৰিবা যে

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ আৰু

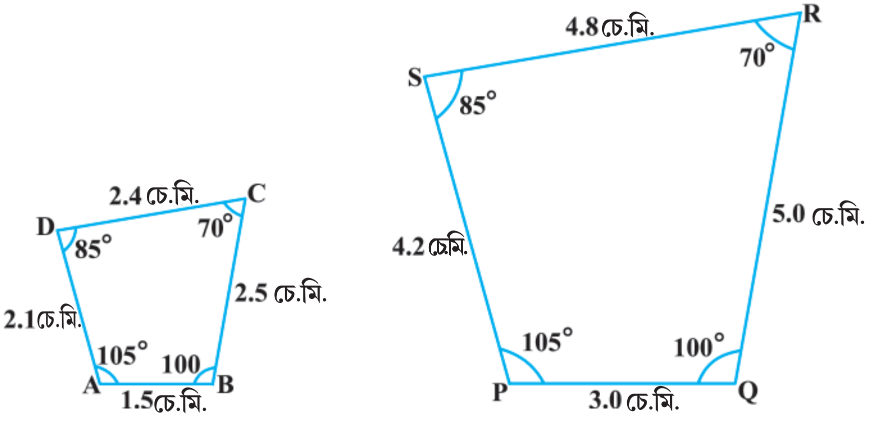
(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

ইয়াৰদ্বাৰা এইটো পুনৰ নিশ্চিত হ'ল যে সমসংখ্যক বাহুৰ দুটা বহুভুজ সদৃশ হ'ব যদিহে

(*i*) দুয়োটাৰে অনুৰূপ কোণবিলাক সমান আৰু

(*ii*) অনুৰূপ বাহুবোৰ একে অনুপাতত (বা সমানুপাতত) থাকে।

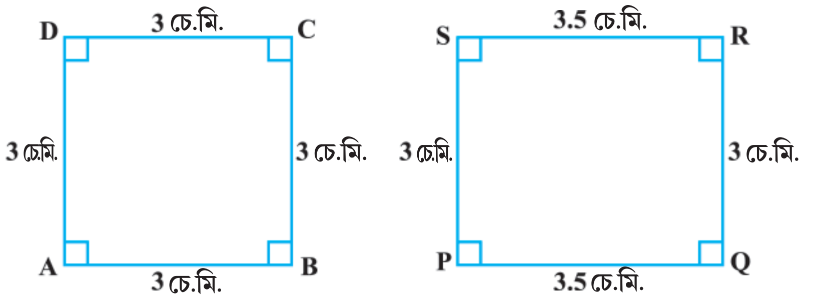
ওপৰৰ এই কথাখিনিৰ ভিত্তিত তোমালোকে সহজে ক'ব পাৰিবা যে চিত্ৰ 6.5 ত দিয়া ABCD আৰু PQRS চতুৰ্ভুজ দুটা সদৃশ।



চিত্ৰ 6.5

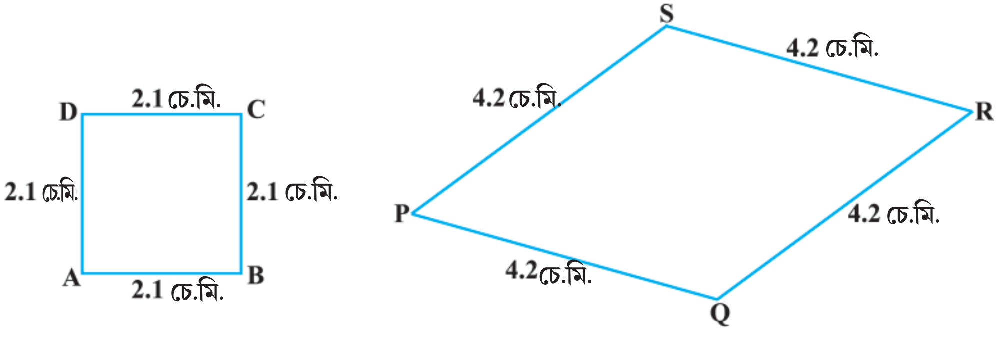
মন্তব্য ঃ তোমালোকে এইটো সত্যাপন কৰিব পাৰিবা যে যদি এটা বহুভুজ দ্বিতীয় এটা বহুভুজৰ সদৃশ আৰু এই দ্বিতীয় বহুভুজটো তৃতীয় এটা বহুভুজৰ সদৃশ তেনেহ'লে প্ৰথম বহুভুজটো তৃতীয় বহুভুজৰ সদৃশ হ'ব।

তোমালোকে মন কৰিছা নিশ্চয় যে চিত্ৰ 6.6 ত দিয়া চতুৰ্ভুজ দুটাৰ (এটা বৰ্গ আৰু আনটো আয়ত) অনুৰূপ কোণ বিলাক সমান। কিন্তু সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহু বিলাক একে অনুপাতত নাই।



চিত্ৰ 6.6

সেইকাৰণে, এই চতুৰ্ভুজ দুটা সদৃশ নহয়। একেদৰে তোমালোকে মন কৰিছা নিশ্চয় যে চিত্ৰ 6.7 ত দিয়া চতুৰ্ভুজ দুটাৰ (এটা বৰ্গ আৰু আনটো ৰম্বাচ) অনুৰূপ বাহুবিলাক একে অনুপাতত আছে, কিন্তু সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান নহয়।



চিত্ৰ 6.7

গতিকে ইয়াৰপৰা বুজা গ'ল যে ওপৰত দিয়া বহুভুজৰ সাদৃশ্য সম্পৰ্কীয় চৰ্ত (*i*) আৰু (*ii*) ৰ যিকোনো এটা হ'লেই বহুভুজ দুটা সদৃশ হ'বৰ বাবে যথেষ্ট নহয়।

অনুশীলনী ঃ 6.1

1. কাষৰ বন্ধনীত দিয়া শুদ্ধ শব্দৰ সহায়ত খালী ঠাই পূৰ কৰা—

(i) সকলোবোৰ বৃত্তই ________. (সৰ্বসম, সদৃশ)

(ii) সকলোবোৰ বৰ্গই ________. (সদৃশ, সৰ্বসম)

(iii) সকলো ________ ত্ৰিভুজ সদৃশ (সমদ্বিবাহু, সমবাহু)

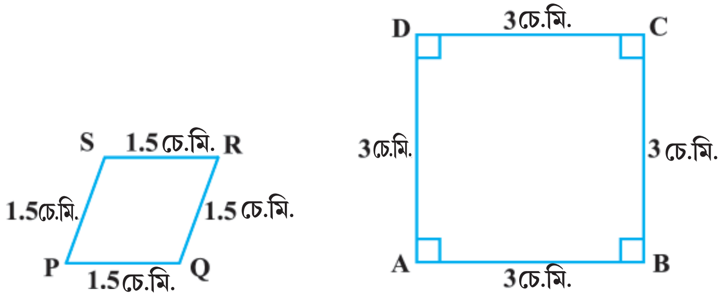
(iv) সমসংখ্যক বাহু থকা দুটা বহুভুজ সদৃশ হ'ব যদিহে (a) সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবিলাক ________ আৰু (b) সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহু বিলাক ________. (সমান, সমানুপাতিক)

2. তলত উল্লেখ কৰা বিলাকৰ দুটা ভিন্ন উদাহৰণ দিয়া ঃ

(i) এযোৰ সদৃশ চিত্ৰৰ

(ii) এযোৰ অসদৃশ চিত্ৰৰ

3. তলত দিয়া চতুৰ্ভুজ দুটা সদৃশ হয়নে নহয় উল্লেখ কৰা—



চিত্ৰ 6.8

6.3. ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্য (Similarity of Triangles)

দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্য সম্পৰ্কে তোমালোকে কি ক'বা?

তোমালোকে মনত পেলোৱা যে ত্ৰিভুজো হৈছে এটা বহুভুজ। গতিকে তোমালোকে দুটা ত্ৰিভুজ সদৃশ হ'বৰ কাৰণে একে কেইটা চৰ্তকেই উল্লেখ কৰিব পাৰিবা অৰ্থাৎ, দুটা ত্ৰিভুজ সদৃশ হ'ব, যদিহে—

(*i*) সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান আৰু

(*ii*) সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহুবোৰ একে অনুপাতত (বা সমানুপাতত) থাকে।

মনত ৰাখিবা যে যদি দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণবিলাক সমান তেন্তে সিহঁতক সমান কোণী (বা সমকৌণীক) ত্ৰিভুজ (*equiangular triangles*) বোলে। বিখ্যাত গ্ৰীক গণিতজ্ঞ থেল্‌ছে দুটা সমানকোণী ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত এটা গুৰুত্বপূৰ্ণ সত্য উল্লেখ কৰিছিল। এইটো হ'ল

দুটা সমানকোণী ত্ৰিভুজৰ যিকোনো দুটা অনুৰূপ বাহুৰ অনুপাত সদায় একে।

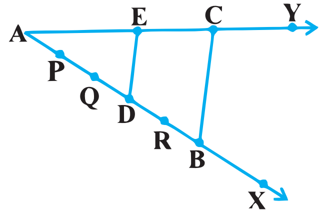
কোৱা হয় যে তেওঁ ইয়াৰ বাবে এটা উপপাদ্যৰ ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰিছিল যিটোক **মৌলিক সমানুপাতিকতা উপপাদ্য** (*Basic Proportionality Theorem*) বোলা হয়। ইয়াক

Thales
(640 – 546 B.C.)

আজি কালি **থেল্‌ছ উপপাদ্য** (*Thales Theorem*) বুলি জনা যায়।

'মৌলিক সমানুপাতিকতা উপপাদ্য'টো বুজিবৰ কাৰণে তলত দিয়া কাৰ্য্যবিধিটো কৰোঁ আঁহা।

কাৰ্য্যবিধি - 2 ঃ এটা কোণ XAY অংকন কৰা আৰু ইয়াৰ এটা বাহু AX ৰ ওপৰত কেইটামান বিন্দু (ধৰা 5 টা বিন্দু) P, Q, D, R আৰু B লোৱা যাতে AP = PQ = QD = DR = RB হয়।

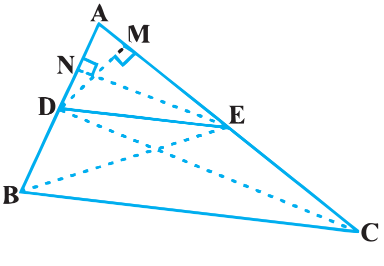


চিত্ৰ 6.9

এতিয়া B বিন্দুৱেদি AY ৰেখাক ছেদ কৰাকৈ C বিন্দুলৈ যিকোনো এডাল ৰেখা অংকন কৰা (চিত্ৰ 6.9 চোৱা।) আকৌ D বিন্দুৰেদি BCৰ সমান্তৰালকৈ ACৰ E বিন্দুত ছেদ কৰাকৈ এডাল ৰেখা টানা। আমাৰ অংকনৰপৰা বাৰু তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছানে যে $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? তোমালোকে AE আৰু EC ৰ জোখ লোৱা। $\frac{AE}{EC}$ নো কিমান? মন কৰিবা যে $\frac{AE}{EC}$ ৰ মানো $\frac{3}{2}$ ৰ সমান। গতিকে ΔABCৰ পৰা তোমালোকে দেখিবা যে DE || BC আৰু $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ । এইটো বাৰু বাস্তৱিক কোনো কাৰণ নথকাকৈ ঘটা ঘটনানে? নহয়, ই তলৰ উপপাদ্যটোৰ কাৰণেহে ঘটিছে (উপপাদ্যটো মৌলিক সমানুপাতিকতা উপপাদ্য হিচাপে জনাজাত)

উপপাদ্য 6.1 ঃ যদি এডাল ৰেখা কোনো ত্ৰিভুজৰ এটা বাহুৰ সমান্তৰালকৈ টনা হয় আৰু ৰেখাডালে আন দুটা বাহুক দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুত ছেদ কৰে, তেনেহ'লে সেই বাহু দুটা একে অনুপাততে বিভক্ত হ'ব।

প্ৰমাণ ঃ আমাক ABC এটা ত্ৰিভুজ দিয়া আছে আৰু ইয়াৰ BC ৰেখাৰ সমান্তৰালকৈ টনা ৰেখাডালে আন দুটা বাহু AB আৰু AC ক ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত ছেদ কৰিছে। (চিত্ৰ 6.10 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.10

এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

এতিয়া BE আৰু CD সংযোগ কৰা হ'ল আৰু DM ⊥ AC আৰু EN ⊥ AB টনা হ'ল।

এতিয়া, ΔADE ৰ কালি = ($\frac{1}{2}$ ভূমি × প্ৰস্থ) = $\frac{1}{2}$ AD × EN

মনত পেলোৱা যে নৱম শ্ৰেণীত ΔADE ৰ কালিক ar(ADE)ৰে বুজোৱা হৈছিল।

গতিকে, $ar(ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$

একেদৰে, $ar(BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN$, $ar(ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM$ আৰু

$ar(DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM.$

গতিকে, $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \quad ..... (1)$$

আৰু $$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad ..... (2)$$

মন কৰা যে ΔBDE আৰু ΔDEC একে ভূমি DE ৰ ওপৰত আছে আৰু লগতে BC আৰু DE সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ মাজত অৱস্থিত।

গতিকে, $ar(BDE) = ar(DEC)$ ..... (3)

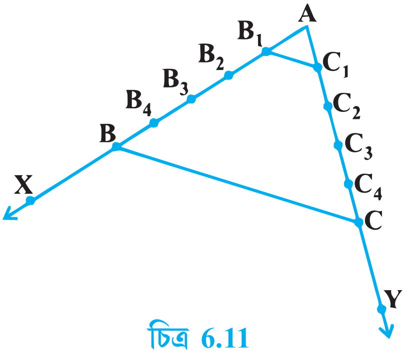
গতিকে, (1), (2) আৰু (3) ৰ পৰা আমি পাওঁ যে

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \blacksquare$$

এই উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য হয়নে? (বিপৰীতৰ অৰ্থৰ বাবে তোমালোকে পৰিশিষ্ট 1 চোৱা)। এইটো পৰীক্ষা কৰি চাবৰ বাবে আমি তলৰ কাৰ্য্যবিধিটো কৰি চাওঁ আঁহা।

কাৰ্য্যবিধি - 3 ঃ তোমালোকৰ বহীত XAY কোণ এটা আঁকা আৰু ইয়াৰ AX ৰশ্মিৰ ওপৰত B_1, B_2, B_3, B_4 আৰু B বিন্দুকেইটা দাগ দিয়া যাতে $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

একেদৰে, AY ৰশ্মিৰ ওপৰত C_1, C_2, C_3, C_4 আৰু C বিন্দুকেইটা দাগ দিয়া যাতে $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ হয়। এতিয়া B_1C_1 আৰু BC সংযোগ কৰা। (চিত্ৰ 6.11চোৱা)।



চিত্ৰ 6.11

মন কৰিবা যে, $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (প্ৰতিটোৱেই $\frac{1}{4}$ৰ সমান)

তোমালোকে এইটোও দেখিছা যে B_1C_1 আৰু BC পৰস্পৰ সমান্তৰাল,

অৰ্থাৎ, $B_1C_1 \parallel BC$ ..... (1)

একেদৰে B_2C_2, B_3C_3 আৰু B_4C_4 সংযোগ কৰিলে দেখিবা যে

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(=\frac{2}{3}\right) \text{ আৰু } B_2C_2 \parallel BC \quad ..... (2)$$

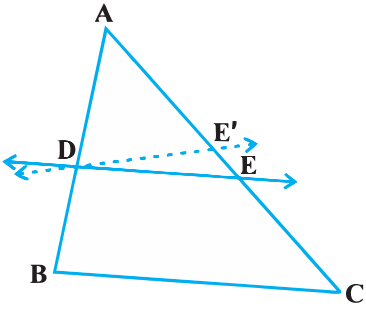
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(=\frac{3}{2}\right) \text{ আৰু } B_3C_3 \parallel BC \quad ..... (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(=\frac{4}{1}\right) \text{ আৰু } B_4C_4 \parallel BC \quad ..... (4)$$

(1), (2), (3) আৰু (4)ৰ পৰা দেখা পোৱা যাব যে যদি এডাল ৰেখাই এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহুক একে অনুপাতত ভাগ কৰে তেন্তে সেই ৰেখাডাল তৃতীয় বাহুটোৰ সমান্তৰাল হয়।

তোমালোকে বেলেগ বেলেগ মাপৰ XAY কোণ লৈ আৰু AX আৰু AY বাহুত যিকোনো সংখ্যক সমান খণ্ড লৈ এই কাৰ্য্যটো কেইবাবাৰো কৰি চাব পাৰা। প্ৰতিবাৰতেই তোমালোকে ফলাফল একেই পাবা। গতিকে আমি তলৰ উপপাদ্যটো পালো আৰু এইটোৱেই উপপাদ্য 6.1ৰ বিপৰীত উপপাদ্য।

উপপাদ্য - 6.2 : যদি এডাল ৰেখাই এটা ত্ৰিভুজৰ যিকোনো দুটা বাহু একে অনুপাতত ভাগ কৰে, তেনেহ'লে সেই ৰেখাডাল তৃতীয় বাহুৰ সমান্তৰাল।



চিত্ৰ 6.12

এই উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিবলৈ এডাল ৰেখা DE এনেভাৱে লোৱা হ'ল যাতে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ আৰু ধৰি লোৱা যে DE, BC ৰ সমান্তৰাল নহয়। (চিত্ৰ 6.12 চোৱা)।

যদি DE, BC ৰ সমান্তৰাল নহয় তেন্তে DE′ ৰেখাডাল BC ৰ সমান্তৰালকৈ টানা।

গতিকে, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (কিয়?)

সেইবাবে, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (কিয় ?)

ওপৰৰ দুয়োপক্ষতে 1 যোগ কৰিলে তোমালোকে দেখা পাবা যে E আৰু E′ মিলি যাব। (কিয় ?)

ওপৰত দিয়া উপপাদ্যবিলাকৰ ব্যৱহাৰ বুজিবৰ কাৰণে এতিয়া আমি কিছুমান উদাহৰণ লম।

উদাহৰণ 1 ঃ যদি এডাল ৰেখাই ΔABC ৰ AB আৰু AC বাহুক ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত ছেদ কৰে আৰু ৰেখাডাল BCৰ সমান্তৰাল, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (চিত্ৰ 6.13 চোৱা)।

সমাধান ঃ DE ∥ BC (দিয়া আছে)

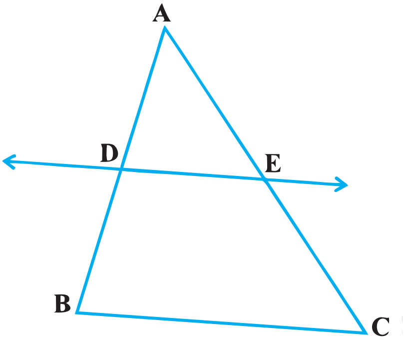
সেয়ে, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (উপপাদ্য 6.1)

বা, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

বা, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

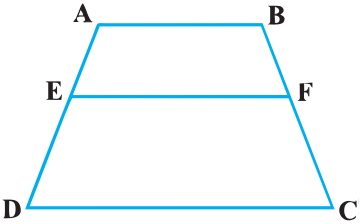
বা, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

গতিকে, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



চিত্ৰ 6.13

উদাহৰণ 2 ঃ ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ AB ∥ DC । ইয়াৰ অসমান্তৰাল বাহু AD আৰু BC ৰ ওপৰত ক্ৰমে E আৰু F দুটা বিন্দু এনেদৰে লোৱা হ'ল যাতে EF আৰু AB সমান্তৰাল। (চিত্ৰ 6.14 চোৱা)। দেখুওৱা যে $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$



চিত্ৰ 6.14

সমাধান ঃ AC সংযোগ কৰা হ'ল যাতে ৰেখাডালে EF ক G বিন্দুত ছেদ কৰে। (চিত্ৰ 6.15 চোৱা)

AB ∥ DC আৰু EF ∥ AB (দিয়া আছে)

সেয়ে, EF ∥ DC (কোনো ৰেখাৰ সমান্তৰালকৈ থকা ৰেখাবিলাক পৰস্পৰ সমান্তৰাল)

এতিয়া, ΔADC ৰ পৰা EG ∥ DC (যিহেতু EF ∥ DC)

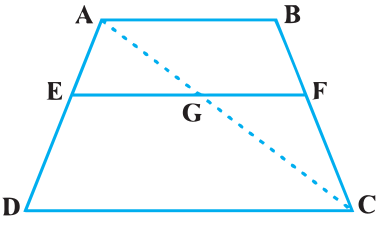
সেয়ে, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (উপপাদ্য 6.1) ..... (1)

একেদৰে, ΔCAB ৰ পৰা, $\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

অৰ্থাৎ, $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ..... (2)

গতিকে, (1) আৰু (2) ৰ পৰা পাওঁ—

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$



চিত্ৰ 6.15

উদাহৰণ 3 ঃ চিত্ৰ 6.16 ত, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ আৰু $\angle PST = \angle PRQ$. প্ৰমাণ কৰা যে PQR এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$.

সেয়ে, $ST \parallel QR$ (উপপাদ্য 6.2)

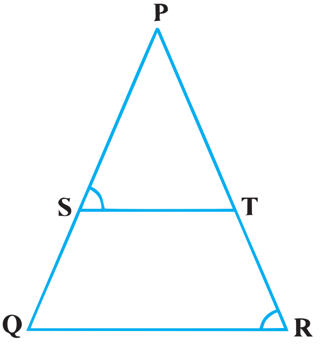
এতেকে, $\angle PST = \angle PQR$ (অনুৰূপ কোণ) ... (1)

আকৌ দিয়া আছে যে, $\angle PST = \angle PRQ$ ... (2)

সেয়ে, $\angle PRQ = \angle PQR$ [(1) আৰু (2) ৰ পৰা]

গতিকে, PQ = PR (সমান কোণৰ বিপৰীত বাহু)

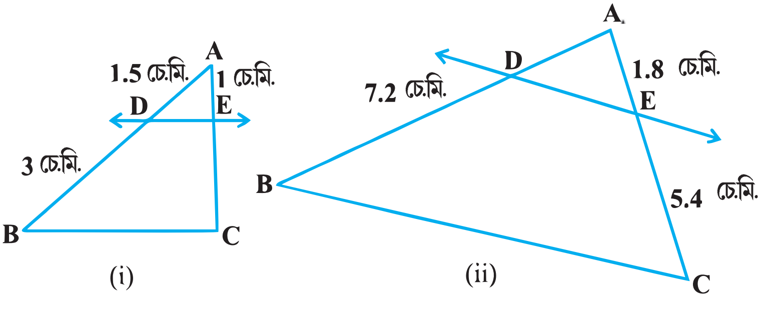
অৰ্থাৎ, PQR এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ।



চিত্ৰ 6.16

অনুশীলনী ঃ 6.2

1. চিত্ৰ 6.17ৰ (i) আৰু (ii)ত, $DE \parallel BC$. এতিয়া (i) ৰ পৰা EC আৰু (ii) ৰ পৰা AD উলিওৱা।



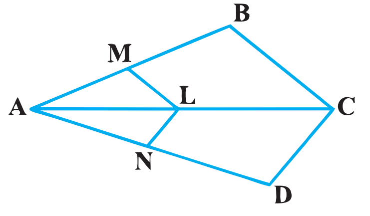
চিত্ৰ 6.17

2. ΔPQR ৰ PQ আৰু PR বাহুৰ ওপৰত ক্রমে E আৰু F দুটা বিন্দু। তলৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে EF ∥ QR হয়নে উল্লেখ কৰা

(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm আৰু FR = 2.4 cm

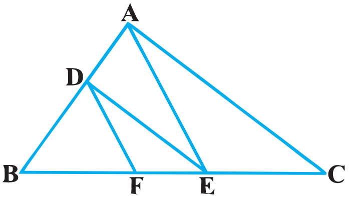
(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm আৰু RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm আৰু PF = 0.36 cm



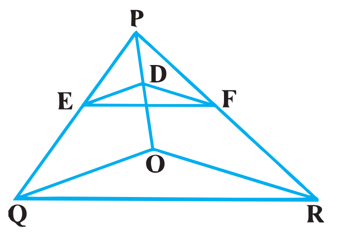
চিত্ৰ 6.18

3. চিত্ৰ 6.18ত, যদি LM ∥ CB আৰু LN ∥ CD, প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}$.



চিত্ৰ 6.19

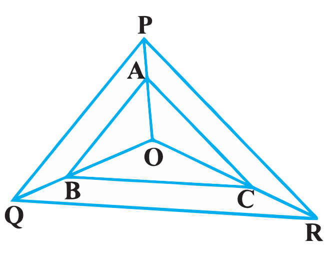
4. চিত্ৰ 6.19ত, DE ∥ AC আৰু DF ∥ AE. প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{BF}{FE}=\frac{BE}{EC}$.



চিত্ৰ 6.20

5. চিত্ৰ 6.20ত, DE ∥ OQ আৰু DF ∥ OR। দেখুওৱা যে EF ∥ QR.

6. চিত্ৰ 6.21ত, A, B আৰু C বিন্দু তিনিটা ক্রমে OP, OQ আৰু OR ৰ ওপৰত আছে যাতে AB ∥ PQ আৰু AC ∥ PR. দেখুওৱা যে, BC ∥ QR.



চিত্ৰ 6.21

7. উপপাদ্য 6.1ৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বাহুৰ মধ্যবিন্দুৰে যোৱাকৈ টনা ৰেখাডাল যদি আন এটা বাহুৰ সমান্তৰাল হয়, তেনেহ'লে ৰেখাডালে তৃতীয় বাহুটোক দ্বিখণ্ডিত কৰিব। (মনত পোলোৱা, এইটো তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত প্ৰমাণ কৰিছিলা)

8. উপপাদ্য 6.2ৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহুৰ মধ্যবিন্দু সংযোগী ৰেখাডাল তৃতীয় বাহুৰ সমান্তৰাল। (মনত পেলোৱা, এইটো তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত প্ৰমাণ কৰিছা)

9. ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ AB ∥ DC আৰু ইয়াৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ O বিন্দুত ছেদিত হয়। দেখুওৱা যে $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$

10. ABCD চতুৰ্ভুজটোৰ কৰ্ণদুডালে পৰস্পৰক O বিন্দুত এনেভাৱে ছেদ কৰে যে $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$। দেখুওৱা যে ABCD এটা ট্ৰেপিজিয়াম।

6.4. ত্ৰিভুজৰ সদৃশতাৰ চৰ্ত (Criteria for Similarity of Triangles)

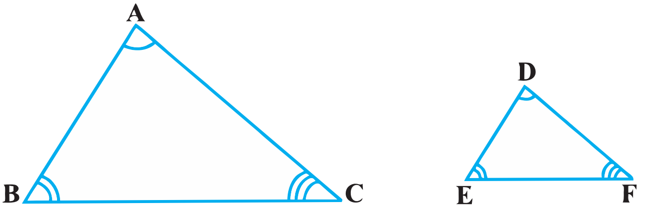
আগৰ অনুচ্ছেদত আমি কৈছিলো যে দুটা ত্ৰিভুজ সদৃশ হ'ব যদিহে

(i) সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণ বিলাক সমান

(ii) সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহুবোৰ একে অনুপাতত (বা সমানুপাতত) থাকে। অৰ্থাৎ, যদি ΔABC আৰু ΔDEF ৰ

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ আৰু

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ (চিত্ৰ 6.22 চোৱা)



চিত্ৰ 6.22

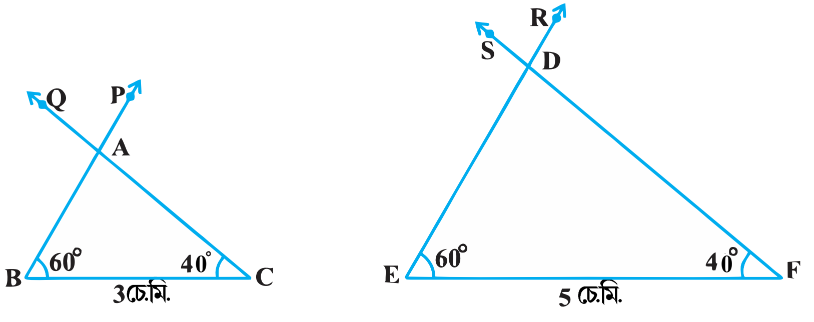
ইয়াত দেখিছা যে A ৰ লগত D সম্পৰ্কিত, B ৰ লগত E আৰু C ৰ লগত F সম্পৰ্কিত। প্ৰতীকৰ সহায়ত এই ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ হ'লে '$\Delta ABC \sim \Delta DEF$' বুলি লিখো আৰু ইয়াক "$\Delta ABC$ similar to ΔDEF" বুলি পঢ়া হয়। 'similar to' ৰ বাবে '$\sim$' প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। মনত পেলোৱা যে নৱম শ্ৰেণীত "congruent to" ৰ বাবে '$\cong$' প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হৈছিল।

> মনত ৰাখিবা যে দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম হঁওতে লিখাৰ দৰে দুটা ত্ৰিভুজ সদৃশ হওঁতেও শীৰ্ষবিন্দুৰ শুদ্ধ সম্পৰ্ক দেখুৱাইহে প্ৰতীকত প্ৰকাশ কৰিব লাগে। উদাহৰণস্বৰূপে চিত্ৰ 6.22 ৰ ABC আৰু DEF ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত আমি $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ বা $\Delta\ ABC \sim \Delta\ FED$ বুলি লিখিব নোৱাৰো। আমি $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ বুলি লিখিব পাৰো।

এতিয়া স্বাভাৱিকতে এটা প্ৰশ্ন উদ্ভৱ হয় ঃ দুটা ত্ৰিভুজৰ, ধৰা ABC আৰু DEFৰ সাদৃশ্যৰ বাবে আমি সদায় সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণৰ সমতা ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) আৰু অনুৰূপ বাহুবিলাকৰ অনুপাতৰ সমতা $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব নেকি? ইয়াকে

পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওঁক। তোমালোকৰ মনত থাকিব পাৰে যে, নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে দুটা ত্ৰিভুজৰ সৰ্বসমতা চাবৰ বাবে ত্ৰিভুজদুটাৰ মাত্ৰ তিনিযোৰ অনুৰূপ অংশৰ (parts বা elements) মাজত কিছুমান চৰ্ত উলিয়াইছিলা। ইয়াতো আমি যত্ন কৰি চাওঁ যে অনুৰূপ অংশৰ 6 যোৰ নলৈ তাতকৈ কম সংখ্যক অনুৰূপ অংশৰ যোৰৰ মাজৰ সম্বন্ধৰদ্বাৰা দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্য চাবলৈ কোনো চৰ্ত উলিয়াব পৰা যাব নে নেযায়। ইয়াৰ বাবে তলৰ কাৰ্যবিধিটো কৰোঁ আঁহা।

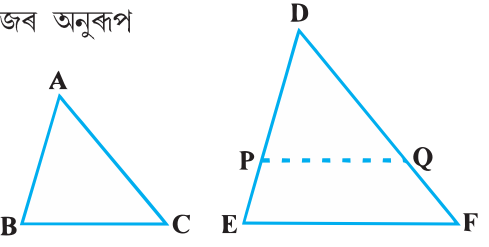
কাৰ্যবিধি - 4 : দুটা ভিন্ন দৈৰ্ঘ্যৰ, ধৰা 3cm আৰু 5cm, দুডাল ৰেখাখণ্ড BC আৰু EF টনা হ'ল। এতিয়া B আৰু C বিন্দুত কোনো জোখৰ, ধৰা 60° আৰু 40°, দুটা কোণ ক্ৰমে PBC আৰু QCB অংকন কৰা হ'ল। সেইদৰে E আৰু F বিন্দুত 60° আৰু 40° জোখৰ দুটা কোণ ক্ৰমে REF আৰু SFE অংকন কৰা হ'ল। (চিত্ৰ 6.23 চোৱা)



চিত্ৰ 6.23

ধৰাহ'ল BP আৰু CQ ৰশ্মি দুটাই A বিন্দুত আৰু ER আৰু FS ৰশ্মি দুটাই D বিন্দুত কটাকটি কৰে। ABC আৰু DEF ত্ৰিভুজ দুটাত দেখিছা যে $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ আৰু $\angle A = \angle D$। অৰ্থাৎ ত্ৰিভুজ দুটাৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান। সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহুবিলাকৰ বিষয়ে কি কবা? মন কৰা যে $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6.$। $\frac{AB}{DE}$ আৰু $\frac{CA}{FD}$ কিমান? AB, DE, CA আৰু FD ৰ জোখ লৈ পাবা যে $\frac{AB}{DE}$ আৰু $\frac{CA}{FD}$ ৰ মান 0.6 ৰ সমান (বা 0.6ৰ প্ৰায় সমান। কাৰণ ইয়াত জোখ লওঁতে সামান্য প্ৰমাদ ঘটিব পাৰে)। গতিকে $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$। তোমালোকে অনুৰূপ কোণবিলাক সমান কৈ বেলেগ বেলেগ যোৰৰ ত্ৰিভুজলৈ এই কাৰ্য্যটো কৰি চাব পাৰা। প্ৰতিবাৰতে তোমালোকে পাবা যে, সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহু বিলাকৰ অনুপাত সমান (বা সমানুপাতিক)। এই কাৰ্যবিধিৰ পৰা দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্যৰ চৰ্তটো পোৱা যায়।

উপপাদ্য (Theorem) 6.3 ঃ যদি দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণবিলাক সমান তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহুবিলাকৰ অনুপাত সমান (বা সমানুপাতিক) আৰু সেয়ে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ।



চিত্ৰ 6.24

এই চৰ্তটোক দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্যৰ AAA চৰ্ত (কোণ কোণ কোণ চৰ্ত) বুলি কোৱা হয়।

এই উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিবৰ বাবে ABC আৰু DEF দুটা ত্ৰিভুজ লোৱা হ'ল যাৰ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ আৰু $\angle C = \angle F$ (চিত্ৰ 6.24 চোৱা)

AB ৰ সমানকৈ DP আৰু AC ৰ সমানকৈ DQ কাটি লোৱা হ'ল। PQ সংযোগ কৰা হ'ল।

গতিকে, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (কিয়?)

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\angle B = \angle P = \angle E$ আৰু $PQ \parallel EF$ (কিয়?)

সেইবাবে, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (কিয়?)

অৰ্থাৎ, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (কিয়?)

একেদৰে, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ আৰু সেইবাবে $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

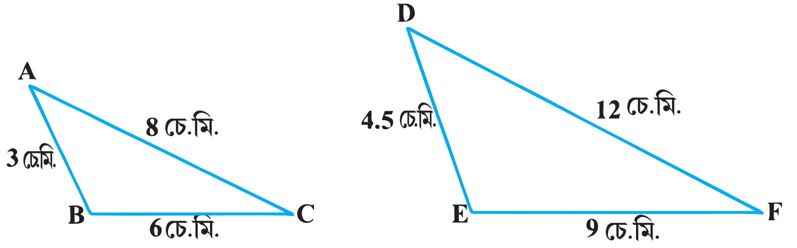
মন্তব্য ঃ যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা কোণ একাদিক্ৰমে আন এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা কোণৰ সৈতে সমান, তেন্তে যিকোনো ত্ৰিভুজৰ কোণবিলাকৰ সমষ্টিৰ ধৰ্মৰ পৰা পোৱা যায় যে ত্ৰিভুজ দুটাৰ তৃতীয় কোণ দুটাও সমান হ'ব। সেই কাৰণে AAA সাদৃশ্য চৰ্তটো তলত দিয়াৰ দৰে ল'ব পাৰি ঃ

'যদি এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা কোণ ক্ৰমে আন এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা কোণৰ সমান, তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ।'

ইয়াকে দুটা ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত AA সাদৃশ্য চৰ্ত বুলি ক'ব পৰা যায়।

তোমালোকে ওপৰৰ আলোচনাত দেখিছা যে যদি এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা কোণ ক্ৰম অনুসৰি আন এটা ত্ৰিভুজৰ তিনিটা কোণৰ সমান তেনেহ'লে সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহু বিলাক সমানুপাতিক (অৰ্থাৎ সমান অনুপাতত থাকে)। এই উক্তিটোৰ বিপৰীতটো কি হ'ব? বিপৰীতটো সত্য হ'ব নে? অন্য ধৰণেৰে ক'বলৈ হ'লে, এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুতিনিটা যদি ক্ৰম অনুসৰি আন এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুতিনিটাৰ সমানুপাতিক, তেন্তে এইটো সত্য নে যে সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবিলাক সমান? এটা কাৰ্য্যবিধিৰ সহায়ত এইটো কৰি চোৱা যাওঁক।

কাৰ্যবিধি 5 ঃ ABC আৰু DEF ত্ৰিভুজ দুটা এনেকৈ আঁকা যাতে AB = 3 cm, BC = 6 cm, CA = 8 cm, DE = 4.5 cm, EF = 9 cm আৰু FD = 12 cm (চিত্ৰ 6.25ত চোৱা)।



চিত্ৰ 6.25

গতিকে, তোমালোকে পালা, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (প্ৰতিটো $\frac{2}{3}$ ৰ সমান)।

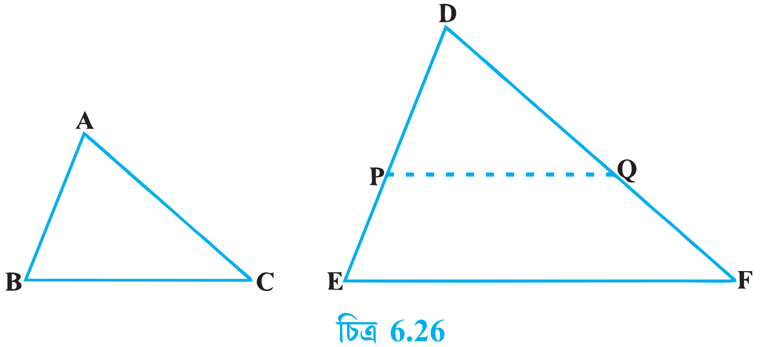
এতিয়া, ∠A, ∠B, ∠C, ∠D, ∠E আৰু ∠F ৰ জোখ লোৱা। তোমালোকে দেখা পাবা যে ∠A = ∠D, ∠B = ∠E আৰু ∠C = ∠F, অৰ্থাৎ, ত্ৰিভুজ দুটাৰ অনুৰূপ কোণবিলাক সমান।

তোমালোকে এনেধৰণৰ বহু ত্ৰিভুজ আঁকি লৈ (সিহঁতৰ বাহুবোৰৰ অনুপাত একে ৰাখি) এই কাৰ্য্যটো কেইবাবাৰো কৰি চাব পাৰা। প্ৰতিবাৰেই তোমালোকে দেখা পাবা যে সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবিলাক সমান। এইটো তলত উল্লেখ কৰা দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্যৰ চৰ্তৰ বাবে হয়।

উপপাদ্য (Theorem) 6.4 ঃ যদি এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুবিলাক আন এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুবিলাকৰ সমানুপাতিক (অৰ্থাৎ একে অনুপাতত থাকে), তেন্তে সিহঁত দুটাৰ অনুৰূপ কোণ বিলাক সমান আৰু সেয়ে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ।

এই চৰ্তটোকে দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্যৰ SSS (বাহু - বাহু - বাহু) সাদৃশ্য চৰ্ত বুলি কোৱা হয়।

এই উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিবৰ কাৰণে দুটা ত্ৰিভুজ ABC আৰু DEF এনেদৰে লোৱা হ'ল যাতে $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (চিত্ৰ 6.26 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.26

AB ৰ সমানকৈ DP আৰু AC ৰ সমানকৈ DQ অংকন কৰা হ'ল আৰু PQ সংযোগ কৰা হ'ল।

এতিয়া দেখুৱাব পৰা যায় যে $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ আৰু $PQ \parallel EF$ (কিয়?)

সেয়ে, $\angle P = \angle E$ আৰু $\angle Q = \angle F$.

গতিকে, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

সেয়ে, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (কিয়?)

গতিকে, $BC = PQ$ (কিয়?)

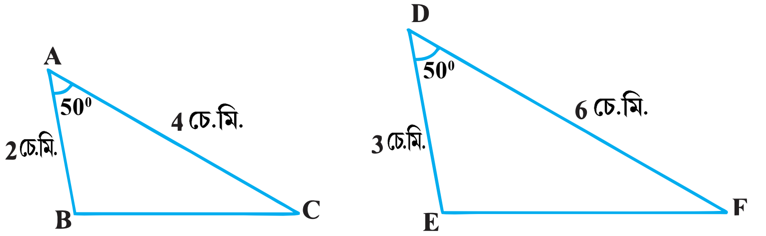
এতেকে, $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DPQ$ (কিয়?)

সেয়ে, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ আৰু $\angle C = \angle F$ (কিয়?)

মন্তব্য ঃ তোমালোকৰ নিশ্চয় মনত আছে যে দুটা চৰ্তৰ, যথা— (i) অনুৰূপ কোণবিলাক সমান আৰু (ii) অনুৰূপ বাহুবিলাক একে অনুপাতত থকা, এই চৰ্তদুটাৰ যিকোনো এটা হ'লেই দুটা বহুভুজ সদৃশ হ'বৰ বাবে যথেষ্ট নহয়। সেয়ে হলেও, উপপাদ্য 6.3 আৰু 6.4 ৰ ভিত্তিত তোমালোকে কব পাৰা যে দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্যৰ বাবে, এই দুয়োটা চৰ্তই পৰীক্ষা কৰাৰ প্ৰয়োজন নাই। কাৰণ ইয়াৰ এটাই আনটো সূচায়।

নৱম শ্ৰেণীত পঢ়া দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম হোৱাৰ বিভিন্ন চৰ্তবোৰ মনত পেলোৱা। তোমালোকে মন কৰিছা নিশ্চয় যে SSS সাদৃশ্য ধৰ্মটোক SSS সৰ্বসম ধৰ্মৰ লগত তুলনা কৰিব পাৰি। ই আমাক SAS সৰ্বসম চৰ্তৰ লগত তুলনা কৰিব পৰাকৈ এটা সাদৃশ্য ধৰ্ম বিচাৰিবৰ বাবে প্ৰেৰণা যোগাইছে। সেয়ে এটা কাৰ্যবিধি কৰি চাওঁ আঁহা।

কাৰ্যবিধি 6 ঃ ABC আৰু DEF দুটা ত্ৰিভুজ অঁকা হ'ল যাতে AB = 2 cm, $\angle A = 50°$, AC = 4 cm, DE = 3 cm, $\angle D = 50°$ আৰু DF = 6 cm (চিত্ৰ 6.27 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.27

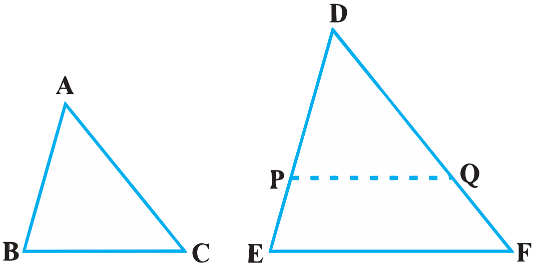
ইয়াত মন কৰিছা নিশ্চয় যে $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (প্ৰতিটোৰেই $\frac{2}{3}$ ৰ সমান) আৰু $\angle A$ (AB আৰু AC বাহুৰ মাজৰ কোণ) = $\angle D$ (DE আৰু DF বাহুৰ মাজৰ কোণ) অৰ্থাৎ এটা ত্ৰিভুজৰ এটা কোণ আনটো ত্ৰিভুজৰ এটা কোণৰ লগত সমান আৰু এই কোণ কেইটা গঠন কৰা বাহুবিলাক একে অনুপাতত (সমানুপাতিক) আছে। এতিয়া $\angle B$, $\angle C$, $\angle$ E আৰু $\angle$ F জোখা হ'ল।

তোমালোকে পাবা যে, $\angle B = \angle E$ আৰু $\angle C = \angle F$। অৰ্থাৎ, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ আৰু $\angle C = \angle F$। গতিকে সাদৃশ্য চৰ্ত AAA মতে $\Delta ABC \sim \Delta DEF$। তোমালোকে এনে ধৰণৰ বিভিন্ন ত্ৰিভুজৰ যোৰ লৈ যাতে এটাৰ এটা কোণ আনটোৰ এটা কোণৰ সমান হয় আৰু কোণ গঠন কৰা বাহুবিলাক একে অনুপাতত থাকে এই কাৰ্য্যটো কেইবাবাৰো কৰি চাব পাৰা। প্ৰতিবাৰতেই তোমালোকে পাবা যে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ। ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্যৰ তলত দিয়া চৰ্তটোৰ বাবে এইটো হয়।

উপপাদ্য (Theorem) 6.5 ঃ যদি এটা ত্ৰিভুজৰ এটা কোণ আন এটা ত্ৰিভুজৰ এটা কোণৰ সমান হয় আৰু সেই কোণকেইটা গঠন কৰা বাহুকেইটা সমানুপাতিক তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ।

এই ধৰ্মটোক দুটা ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্যৰ SAS (বাহু - কোণ - বাহু) সাদৃশ্য চৰ্ত বোলে।

আগৰ নিচিনাকৈ এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰিবা। ABC আৰু DEF দুটা ত্ৰিভুজ লোৱা যাতে $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) আৰু $\angle A = \angle D$ (চিত্ৰ 6.28 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.28

এতিয়া AB ৰ সমানকৈ DP আৰু AC ৰ সমানকৈ DQ কাটি লোৱা আৰু PQ সংযোগ কৰা।

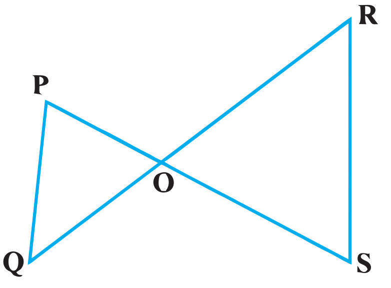
এতিয়া, $PQ \parallel EF$ আৰু $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (কেনেকৈ?)

গতিকে, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ আৰু $\angle C = \angle Q$

গতিকে, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (কিয়?)

এতিয়া এই চৰ্তবিলাকৰ ব্যৱহাৰ দেখুৱাবৰ কাৰণে কিছুমান উদাহৰণ ল'ম।

উদাহৰণ 4 ঃ চিত্ৰ 6.29ত, যদি PQ || RS হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\Delta POQ \sim \Delta SOR$



চিত্ৰ 6.29

সমাধান ঃ PQ || RS (দিয়া আছে)

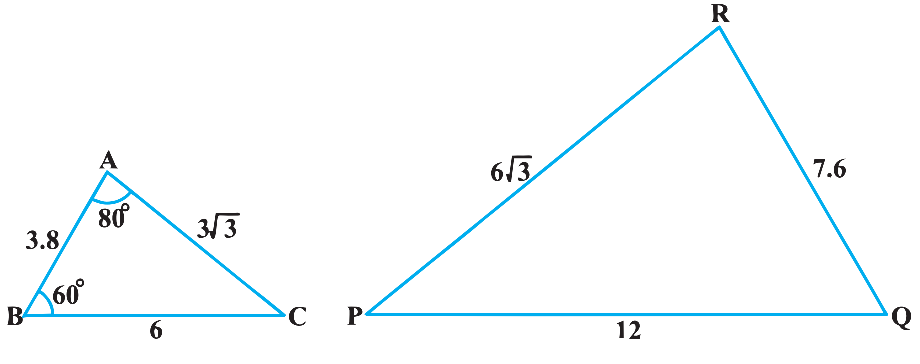
সেয়ে $\angle P = \angle S$ (একান্তৰ কোণ)

আৰু $\angle Q = \angle R$

তদুপৰি, $\angle POQ = \angle SOR$ (বিপ্ৰতীপ কোণ)

গতিকে, $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (AAA সাদৃশ্য চৰ্ত)

উদাহৰণ 5 ঃ চিত্ৰ 6.30 চোৱা আৰু তাৰ সহায়ত $\angle$ P নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 6.30

সমাধান ঃ ΔABC আৰু ΔPQR ৰ পৰা, $\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ আৰু

$\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

অৰ্থাৎ, $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$, গতিকে $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS সাদৃশ্য চৰ্ত)

গতিকে, $\angle C = \angle P$ (সদৃশ ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণ)

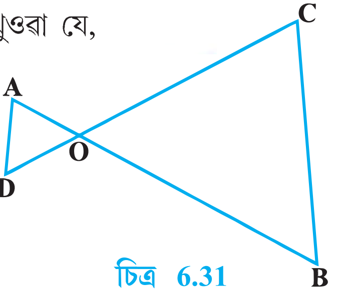
কিন্তু, $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি ধৰ্ম)

$= 180° - 80° - 60° = 40°$

গতিকে, $\angle P = 40°$

উদাহৰণ - 6 ঃ চিত্ৰ 6.31অত, OA.OB = OC.OD। দেখুওৱা যে,

$\angle A = \angle C$ আৰু $\angle B = \angle D$



চিত্ৰ 6.31

সমাধান ঃ OA.OB = OC.OD (দিয়া আছে)

গতিকে, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ .... (1)

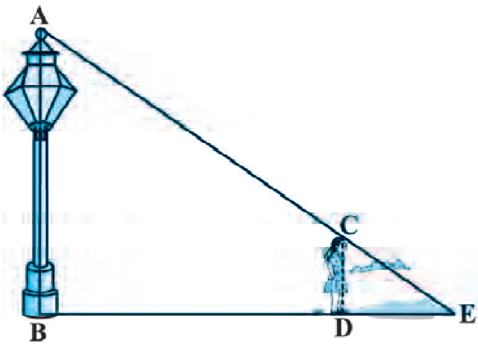
তদুপৰি আমি পাওঁ,

$\angle AOD = \angle COB$ (বিপ্ৰতীপ কোণ) .... (2)

গতিকে (1) আৰু (2)ৰ পৰা $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS সাদৃশ্য চৰ্ত)

গতিকে, $\angle A = \angle C$ আৰু $\angle D = \angle B$ (সদৃশ ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণ)

উদাহৰণ 7 ঃ 90 cm ওখ এজনী ছোৱালী এটা লাইটৰ খুটাৰ গুৰিৰ পৰা 1.2 m/s. দ্ৰুতিত খোজ কাঢ়ি আঁতৰি গৈ আছে। যদি লাইটটো ভূমিৰ পৰা 3.6 m ওখত আছে তেন্তে 4 ছেকেণ্ড পিছত তাইৰ ছাঁটোৰ দীঘ উলিওৱা।



চিত্ৰ 6.32

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল লাইটৰ খুটাটো AB আৰু 4 চেকেণ্ড পিছত ছোৱালীজনী লাইটৰ খুটাটোৰ পৰা আঁতৰি গৈ পোৱা অৱস্থান CD (চিত্ৰ 6.32 চোৱা)।

চিত্ৰৰ পৰা তোমালোকে দেখিছা যে ছোৱালীজনীৰ ছাঁটো DE। ধৰাহ'ল DE = x মিটাৰ।

এতিয়া, BD = 1.2 m × 4 = 4.8 m.

মনকৰা যে, ΔABE আৰু ΔCDE,ৰ পৰা, $\angle B = \angle D$ (ইয়াৰ প্ৰতিটোৱেই 90° কাৰণ ছোৱালীজনী আৰু লাইটৰ খুটাটো ভূমিত উলম্বভাৱে আছে।) আৰু $\angle E = \angle E$ (একেকোণ) সেয়ে $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA সাদৃশ্য চৰ্ত)

গতিকে, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

অৰ্থাৎ, $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left(90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9 \text{ m}\right)$

অৰ্থাৎ, $4.8 + x = 4x$

অৰ্থাৎ, $3x = 4.8$

অৰ্থাৎ, $x = 1.6$

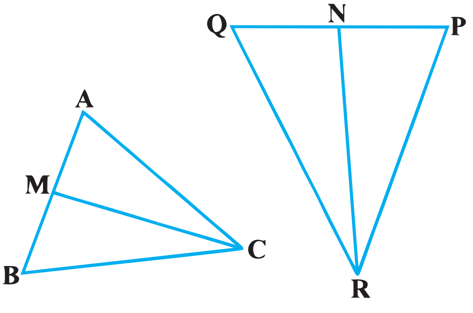
গতিকে, 4 ছেকেণ্ড যোৱাৰ পিছত ছোৱালীজনীৰ ছাঁৰ দীঘ হয় 1.6 মি.

উদাহৰণ 8 ঃ চিত্ৰ 6.33ত, CM আৰু RN ক্ৰমে ΔABC আৰু ΔPQR ৰ মধ্যমা। যদি $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $\Delta\ AMC \sim \Delta\ PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta\ CMB \sim \Delta\ RNQ$



চিত্ৰ 6.33

সমাধান ঃ (i) $\Delta\ ABC \sim \Delta\ PQR$ (দিয়া আছে)

গতিকে, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ ..... (1)

আৰু $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ আৰু

$\angle C = \angle R$ ..... (2)

কিন্তু $AB = 2AM$ আৰু $PQ = 2PN$ (যিহেতু CM আৰু RN মধ্যমা)

গতিকে, (1) ৰ পৰা, $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

অৰ্থাৎ, $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ ..... (3)

তদুপৰি, $\angle\ MAC = \angle\ NPR$ [(2) ৰ পৰা] ..... (4)

গতিকে, (3) আৰু (4) ৰ পৰা

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS সাদৃশ্য চৰ্ত) ..... (5)

(ii) ইয়াত $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$, (5)ৰ পৰা ..... (6)

কিন্তু $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1) ৰ পৰা] ..... (7)

গতিকে, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) আৰু (7) ৰ পৰা] ..... (8)

(iii) আকৌ, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) ৰ পৰা]

গতিকে, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8)ৰ পৰা] ..... (9)

তদুপৰি, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\ BM}{2\ QN}$,

অৰ্থাৎ, $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ ..... (10)

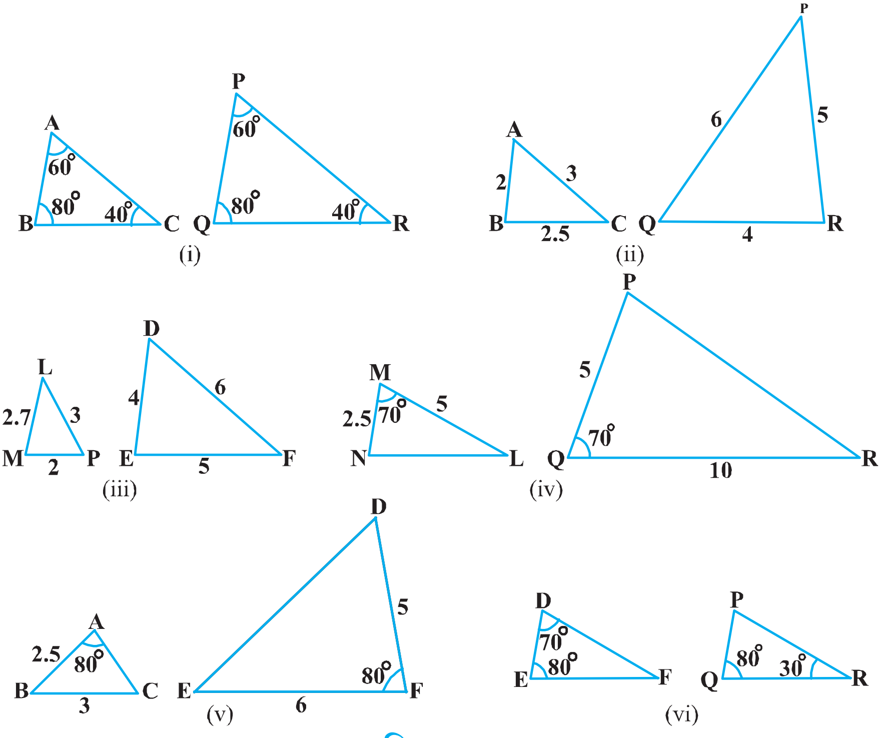
অৰ্থাৎ, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) আৰু (10) ৰ পৰা]

গতিকে, Δ CMB $\sim \Delta$ RNQ (SSS সাদৃশ্য চৰ্ত)

[টোকা ঃ (i)টো প্ৰমাণ কৰাৰ দৰে একেপদ্ধতিৰে তোমালোকে (iii) টো নিজে কৰিব পাৰিবা]

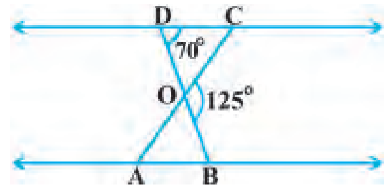
অনুশীলনী ঃ 6.3

1. চিত্ৰ 6.34 ত দিয়া ত্ৰিভুজবিলাকৰ কোণবিলাক যোৰ সদৃশ উল্লেখ কৰা। উত্তৰটো দিয়াৰ ক্ষেত্ৰত কি সাদৃশ্য চৰ্ত ব্যৱহাৰ কৰিলা লিখা আৰু সদৃশ হোৱা ত্ৰিভুজবিলাক প্ৰতীকেৰে প্ৰকাশ কৰা।



চিত্ৰ 6.34

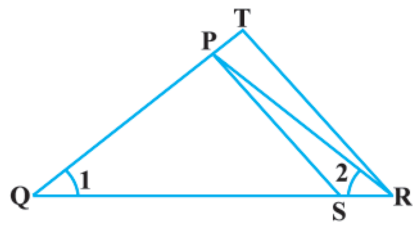
2. চিত্ৰ 6.35 ত, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ আৰু $\angle CDO = 70°$। $\angle DOC$, $\angle DCO$ আৰু $\angle OAB$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 6.35

3. ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ $AB \parallel DC$ আৰু AC আৰু BD কৰ্ণ দুডালে পৰস্পৰক O বিন্দুত ছেদ কৰে। দুটা ত্ৰিভুজৰ কোনো সাদৃশ্য চৰ্ত ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$।

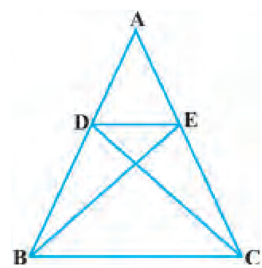
4. চিত্ৰ 6.36ত, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ আৰু $\angle 1 = \angle 2$. দেখুওৱা যে $\Delta PQS \sim \Delta TQR$।



চিত্ৰ 6.36

5. ΔPQRৰ PR আৰু QR বাহুৰ ওপৰত S আৰু T দুটা বিন্দু যাতে $\angle P = \angle RTS$. দেখুওৱা যে $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$.

6. চিত্ৰ 6.37ত যদি $\Delta ABE \cong \Delta ACD$, দেখুওৱা যে $\Delta ADE \sim \Delta ABC$।



চিত্ৰ 6.37

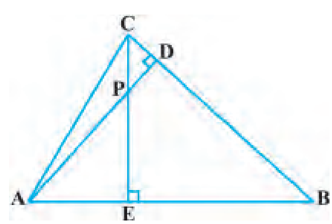
7. চিত্ৰ 6.38ত ΔABC ৰ AD আৰু CE উন্নতি দুডালে পৰস্পৰক P বিন্দুত ছেদ কৰে। দেখুওৱা যে

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$



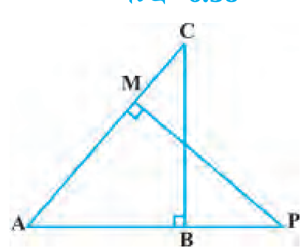
চিত্ৰ 6.38

8. ABCD সামান্তৰিকৰ AD বাহুৰ বৰ্ধিত অংশত E টা বিন্দু আৰু BE ৰেখাই CD ক F বিন্দুত ছেদ কৰে। দেখুওৱা যে $\Delta ABE \sim \Delta CFB$।

9. 6.39 চিত্ৰত ABC আৰু AMP দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজ। ইহঁতৰ সমকোণ দুটা ক্ৰমে B আৰু M। প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



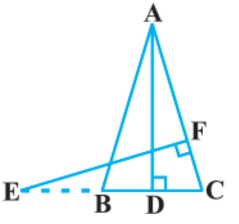
চিত্ৰ 6.39

10. ΔABC আৰু ΔEFG ৰ AB আৰু FE বাহুত ক্ৰমে D আৰু H দুটা বিন্দু। CD আৰু GH ক্ৰমে $\angle ACB$ আৰু $\angle EGF$ৰ সমদ্বিখণ্ডক।
যদি $\Delta ABC \sim \Delta FEG$, দেখুওৱা যে

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

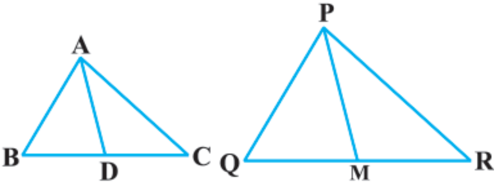
(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$



চিত্ৰ 6.40

11. চিত্ৰ 6.40ত, ABC সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ $AB = AC$ আৰু CB ৰ বৰ্ধিত অংশত E এটা বিন্দু। যদি $AD \perp BC$ আৰু $EF \perp AC$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\Delta ABD \sim \Delta ECF$.

12. ABC ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহু AB আৰু BC আৰু মধ্যমা AD ৰ লগত PQR ত্ৰিভুজৰ ক্ৰমে দুটা বাহু PQ আৰু QR আৰু মধ্যমা PM সমানুপাতিক। (চিত্ৰ 6.41 চোৱা)। দেখুওৱা যে $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



চিত্ৰ 6.41

13. ABC ত্ৰিভুজৰ BC বাহুৰ ওপৰত D এটা বিন্দু আৰু $\angle ADC = \angle BAC$. দেখুওৱা যে $CA^2 = CB.CD$.

14. ত্ৰিভুজ ABC ৰ দুটা বাহু AB আৰু AC আৰু মধ্যমা AD আন এটা ত্ৰিভুজ PQR ৰ ক্ৰমে দুটা বাহু PQ আৰু PR আৰু মধ্যমা PM ৰ লগত সমানুপাতিক। দেখুওৱা যে $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

15. 6 m ওখ এটা উলম্ব খুটাঁৰ ভূমিত হোৱা ছাঁৰ দীঘ 4 m আৰু একে সময়তে এটা টাৱাৰৰ ছাঁৰ দীঘ 28 m। টাৱাৰটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

16. ABC আৰু PQR ত্ৰিভুজ দুটাৰ মধ্যমা ক্ৰমে AD আৰু PM। যদি $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

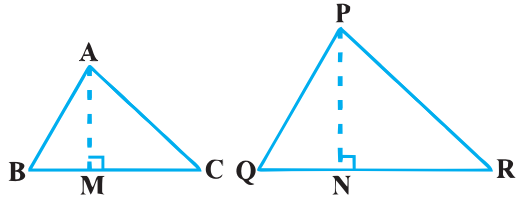
6.5. সদৃশ ত্ৰিভুজৰ কালি (Areas of Similar Triangles)

তোমালোকে ইতিমধ্যে শিকিছা যে দুটা সদৃশ ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ বাহুবিলাকৰ অনুপাত একে। সদৃশ ত্ৰিভুজ দুটাৰ কালিৰ অনুপাত আৰু সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহুৰ অনুপাতৰ মাজত কিবা সম্পৰ্ক আছে বুলি তোমালোকে ভাবানে? তোমালোকে জানা যে কালিৰ জোখ বৰ্গ এককত লোৱা হয়।

গতিকে তোমালোকে এই অনুপাত অনুৰূপ বাহুৰ অনুপাতৰ বৰ্গ হ'ব পাৰে বুলি আশা কৰিব পাৰা। প্ৰকৃততে এইটো সঁচা আৰু আমি তাকে তলৰ উপপাদ্যটোত প্ৰমাণ কৰিম।

উপপাদ্য (Theorem)6.6 ঃ দুটা সদৃশ ত্ৰিভুজৰ কালিৰ অনুপাত সিঁহতৰ অনুৰূপ বাহুৰ অনুপাতৰ বৰ্গৰ সমান।

প্ৰমাণ ঃ দিয়া আছে যে ABC আৰু PQR দুটা ত্ৰিভুজ আৰু সিহঁত সদৃশ, অৰ্থাৎ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (চিত্ৰ 6.42 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.42

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে

$$\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

ত্ৰিভুজৰ কালি উলিয়াবৰ বাবে আমি AM আৰু PN উন্নতি দুটা টানিলো।

এতিয়া, $ar(ABC) = \frac{1}{2} BC \times AM$ আৰু $ar(PQR) = \frac{1}{2} QR \times PN$

সেয়ে, $$\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN}$$

$$= \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad \text{..... (1)}$$

এতিয়া, ΔABM আৰু ΔPQNত,

$\angle B = \angle Q$ ($\because \Delta ABC \sim \Delta PQR$)

আৰু $\angle M = \angle N$ (প্ৰতিটোৱেই $90°$ ৰ সমান)

সেয়ে, $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (AA সাদৃশ্য চৰ্ত)

এতেকে, $$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \quad \text{..... (2)}$$

তদুপৰি, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (দিয়া আছে)

সেয়ে, $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \quad \text{..... (3)}$$

এতেকে, $\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (PQR)}} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN}$ [(1) আৰু (3)ৰ পৰা]

$= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ}$ [(2)ৰ পৰা]

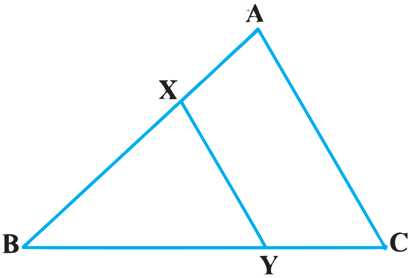
$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$

এতিয়া (3)ৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$$\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (PQR)}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$ ■

এই উপপাদ্যটোৰ ব্যৱহাৰৰ ব্যাখ্যা কৰিবৰ বাবে এটা উদাহৰণ লোৱা হ'ল।

উদাহৰণ 9 ঃ চিত্ৰ 6.43ত, ΔABC ৰ XY ৰেখাখণ্ডডাল AC বাহুৰ সমান্তৰাল আৰু ই ত্ৰিভুজটোৰ সমান কালিৰ দুটা অংশত বিভক্ত কৰিছে। $\frac{AX}{AB}$ অনুপাতটো উলিওৱা।



চিত্ৰ 6.43

সমাধান ঃ ইয়াত, XY ∥ AC (দিয়া আছে)

গতিকে, ∠BXY = ∠A

আৰু ∠BYX = ∠C (অনুৰূপ কোণ)

সেইকাৰণে, ΔABC ~ ΔXBY (AA সাদৃশ্য চৰ্ত)

গতিকে, $\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (XBY)}} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$ (উপপাদ্য 6.6) ..... (1)

তদুপৰি, ar(ABC) = 2 ar(XBY) (দিয়া আছে)

সেয়ে, $\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (XBY)}} = \frac{2}{1}$ ..... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, $\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}$,

অৰ্থাৎ, $\frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

বা, $\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $1-\frac{XB}{AB}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\frac{AB-XB}{AB}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$,

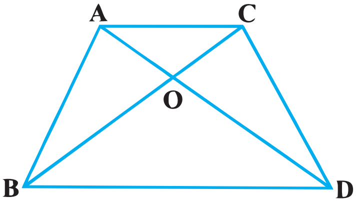
অৰ্থাৎ, $\frac{AX}{AB}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

অনুশীলনী 6.4

1. ধৰা $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ আৰু সিহঁতৰ কালি ক্ৰমে 64 cm^2 আৰু 121 cm^2। যদি EF = 15.4 cm, BC উলিওৱা।

2. ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ AB ∥ DC আৰু কৰ্ণ দুডালে পৰস্পৰক O বিন্দুত ছেদ কৰে। যদি AB = 2 CD, AOB আৰু COD ত্ৰিভুজৰ কালিৰ অনুপাত উলিওৱা।

3. চিত্ৰ 6.44ত, একে ভূমি BC ৰ ওপৰত ABC আৰু DBC দুটা ত্ৰিভুজ। যদি AD য়ে BCক O বিন্দুত ছেদ কৰে তেন্তে দেখুওৱা যে, $\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(DBC)}=\frac{AO}{DO}$



চিত্ৰ 6.44

4. যদি দুটা সদৃশ ত্ৰিভুজৰ কালি সমান, প্ৰমাণ কৰা যে সিহঁত সৰ্বসম।

5. ΔABCৰ AB, BC আৰু CA বাহুৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে D, E আৰু F। ΔDEF আৰু ΔABCৰ কালিৰ অনুপাত উলিওৱা।

6. প্ৰমাণ কৰা যে দুটা সদৃশ ত্ৰিভুজৰ কালিৰ অনুপাত সিহঁতৰ অনুৰূপ মধ্যমা দুডালৰ অনুপাতৰ বৰ্গৰ সমান।

7. প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৰ্গৰ এটা বাহুৰ ওপৰত গঠিত এটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ কালি বৰ্গটোৰ এটা কৰ্ণৰ ওপৰত গঠিত সমবাহু ত্ৰিভুজটোৰ কালিৰ আধা।

শুদ্ধ উত্তৰটোত চিন দিয়া আৰু যুক্তি দিয়া

8. ABC আৰু BDE দুটা সমবাহু ত্ৰিভুজ আৰু BC বাহুৰ মধ্যবিন্দু D। ABC আৰু BDE ত্ৰিভুজ দুটাৰ কালিৰ অনুপাত হ'ব

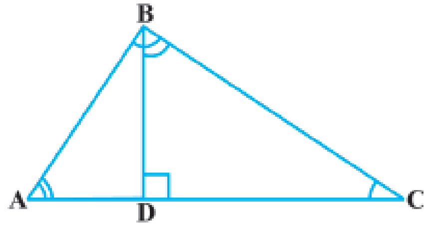
(A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4

9. দুটা সদৃশ ত্ৰিভুজৰ বাহুৰ অনুপাত 4 : 9। এই ত্ৰিভুজ দুটাৰ কালিৰ অনুপাত হ'ল

(A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6. পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য (Pythagoras Theorem)

তোমালোকে ইতিমধ্যে আগৰ শ্ৰেণীত পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য পাই আহিছা। তোমালোকে কিছুমান কাৰ্য্য বিধিৰ সহায়ত উপপাদ্যটোৰ সত্যাসত্য পৰীক্ষা কৰিছিলা আৰু কিছুমান বিশেষ প্ৰশ্নৰ সমাধান উলিয়াওঁতে উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰিছিলা। তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত উপপাদ্যটোৰ এটা প্ৰমাণো পাইছিলা। এতিয়া আমি ত্ৰিভুজৰ সাদৃশ্য ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি এই উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিম। এইটো প্ৰমাণ কৰিবলৈ যাওঁতে এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ অতিভুজৰ বিপৰীত শীৰ্ষ বিন্দুৰ পৰা অতিভুজ ডাললৈ টনা লম্বই গঠন কৰা ত্ৰিভুজ দুটাৰ সাদৃশ্য সম্পৰ্কীয় এটা ফলাফল ইয়াত ব্যৱহাৰ কৰিম।



চিত্ৰ 6.45

এতিয়া ধৰা হ'ল ABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ আৰু B ইয়াৰ সমকোণ। ধৰা হ'ল AC অতিভুজৰ ওপৰত BD লম্ব (চিত্ৰ 6.45 চোৱা)।

তোমালোকে মন কৰিছা নিশ্চয় যে ΔADB আৰু ΔABCত $\angle A = \angle A$

আৰু $\angle ADB = \angle ABC$ (কিয়?)

সেয়ে, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (কেনেকৈ?) .....(1)

একেদৰে, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (কেনেকৈ?) ..... (2)

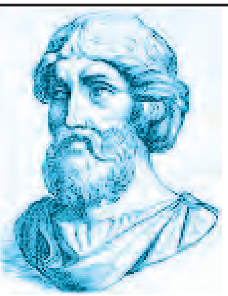
সেয়ে (1) আৰু (2) ৰ পৰা পাওঁ যে BD অতিভুজৰ দুয়োফালে গঠন হোৱা ত্ৰিভুজ দুটা ΔABCৰ সদৃশ।

তদুপৰি, যিহেতু $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ আৰু $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

গতিকে, $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (6.2 অনুচ্ছেদৰ মন্তব্যৰ পৰা)

ওপৰৰ আলোচনাটোৰ পৰা তলৰ উপপাদ্যটো পোৱা যায়।

উপপাদ্য (Theorem) 6.7 ঃ যদি এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ সমকোণ থকা শীৰ্ষবিন্দুটোৰ পৰা অতিভুজলৈ এডাল লম্ব টনা হয়, তেনেহ'লে লম্বডালৰ দুয়োফালে গঠিত ত্ৰিভুজ দুটাৰ প্ৰতিটোৱেই গোটেই ত্ৰিভুজটোৰ সৈতে সদৃশ আৰু সিহঁতদুটাও পৰস্পৰ সদৃশ।



পাইথাগোৰাচ
(569 – 479 B.C.)

এতিয়া পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰিবলৈ এই উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰিম।

উপপাদ্য (Theorem) 6.8 ঃ এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ অতিভুজৰ বৰ্গ আন দুটা বাহুৰ বৰ্গৰ যোগফলৰ সমান।

প্ৰমাণ ঃ আমাক এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ ABC দিয়া আছে যাৰ B কোণটো সমকোণ। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $AC^2 = AB^2 + BC^2$

AC ৰ ওপৰত BD লম্ব টনা হ'ল। (চিত্ৰ 6.46 চোৱা)

এতিয়া, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (উপপাদ্য 6.7)

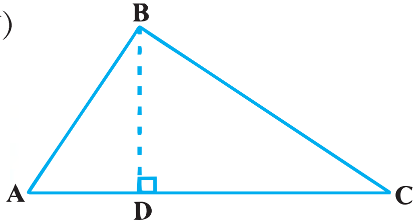
গতিকে, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (বাহুবোৰ সমানুপাতিক)

বা $AD.AC = AB^2$ ..... (1)

তদুপৰি, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (উপপাদ্য 6.7)

গতিকে, $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$

বা, $CD \, . \, AC = BC^2$ .... (2)



চিত্ৰ 6.46

(1) আৰু (2) যোগ কৰাত,

$$AD.AC + CD.AC = AB^2 + BC^2$$

বা, $AC(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

বা, $AC.AC = AB^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ■

ওপৰৰ এই উপপাদ্যটো ইয়াৰ আগতে প্ৰাচীন ভাৰতীয় বৌধায়ন (প্ৰায় 800 B.C.) নামৰ এগৰাকী গণিতজ্ঞই তলত দিয়াৰ দৰে আগবঢ়াইছিল ঃ

"এটা আয়তৰ কৰ্ণই যিমান কালি উৎপন্ন কৰে সেই একে কালিয়েই ইয়াৰ দুয়োটা বাহুৱে (অৰ্থাৎ দীঘ আৰু প্ৰস্থ) উৎপন্ন কৰে।

এই কাৰণে এই উপপাদ্যটোক কেতিয়াবা বৌধায়নৰ উপপাদ্য (*Baudhayan Theorem*) বুলিও কোৱা হয়।

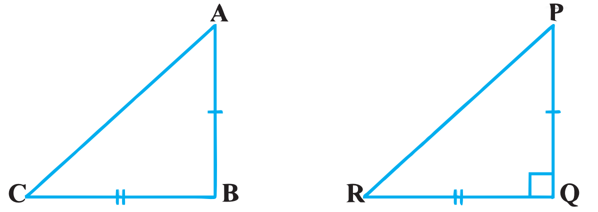
পাইথাগোৰাচৰ বিপৰীত উপপাদ্যটো কি হ'ব? তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত ইতিমধ্যে সত্যাপন কৰি পাইছা যে এইটোও সত্য। ইয়াকে আমি এটা উপপাদ্যৰ আৰ্হিত প্ৰমাণ কৰিম।

উপপাদ্য (Theorem) 6.9 ঃ যদি এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বাহুৰ বৰ্গ সেই ত্ৰিভুজটোৰ আন দুটা বাহুৰ বৰ্গৰ যোগফলৰ সমান হয় তেন্তে প্ৰথম বাহুটোৰ বিপৰীত কোণটো এটা সমকোণ।

প্ৰমাণ ঃ ইয়াত আমাক এটা ত্ৰিভুজ ABC দিয়া আছে যাৰ $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $\angle B = 90°$.

ইয়াকে কৰিবলৈ প্ৰথমে আমি এটা ত্ৰিভুজ PQR অংকন কৰিলো যাৰ Q কোণ সমকোণ আৰু যাতে PQ = AB আৰু QR = BC (চিত্ৰ 6.47 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.47

এতিয়া, Δ PQR ৰ পৰা, আমি পাওঁ,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য কাৰণ $\angle Q = 90°$)

বা, $PR^2 = AB^2 + BC^2$ (অংকন মতে) ..... (1)

কিন্তু $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (দিয়া আছে) ..... (2)

গতিকে, AC = PR [(1) আৰু (2)ৰ পৰা] ..... (3)

এতিয়া, ΔABC আৰু ΔPQRত

AB = PQ (অংকন মতে)

BC = QR (অংকন মতে)

AC = PR [ওপৰৰ (3) ত দেখুওৱা হৈছে]

সেয়ে, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (SSS সৰ্বসম চৰ্ত)

এতেকে, $\angle B = \angle Q$ (CPCT)

কিন্তু, $\angle Q = 90°$ (অংকন মতে)

সেয়ে, $\angle B = 90°$ ■

টোকা ঃ এই উপপাদ্যটোৰ আন এটা প্ৰমাণৰ বাবে পৰিশিষ্ট 1 চোৱা। এই উপপাদ্যবিলাকৰ ব্যৱহাৰৰ ব্যাখ্যা দিবৰ কাৰণে এতিয়া আমি কিছুমান উদাহৰণ কৰিম।

উদাহৰণ 10 ঃ চিত্ৰ 6.48ত, $\angle ACB = 90°$ আৰু $CD \perp AB$. প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.

সমাধান ঃ $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (উপপাদ্য 6.7)

সেয়ে, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

বা, $AC^2 = AB \cdot AD$ ..... (1)

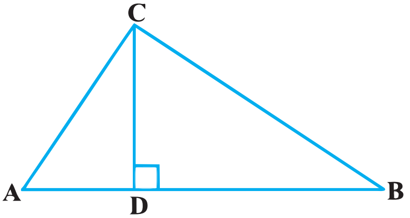
একেদৰে, $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (উপপাদ্য 6.7)

সেয়ে, $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

বা, $BC^2 = BA . BD$ ..... (2)

গতিকে, (1) আৰু (2) ৰ পৰা

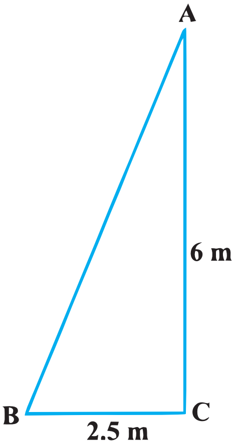
$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$



চিত্ৰ 6.48

উদাহৰণ 11 ঃ এডাল জখলা এখন বেৰত এনেভাবে থোৱা হ'ল যে ইয়াৰ গুৰিটো (foot) বেৰখনৰ পৰা 2.5m আঁতৰত আছে আৰু ইয়াৰ আগটোৱে (top) ভূমিৰ পৰা 6m ওপৰত থকা খিৰিকী এখন স্পৰ্শ কৰি থাকে। জখলাডালৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল জখলাডাল AB আৰু CA বেৰখনত খিৰিকিখন A (চিত্ৰ 6.49 চোৱা)।



চিত্ৰ 6.49

তদুপৰি, BC = 2.5m আৰু CA = 6m

পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰৰ পৰা পাওঁ যে

$AB^2 = BC^2 + CA^2$

$= (2.5)^2 + (6)^2$

$= 42.25$

সেয়ে, AB = 6.5

গতিকে, জখলাডালৰ দীঘ 6.5 মিটাৰ।

উদাহৰণ 12 ঃ চিত্ৰ 6.50ত যদি $AD \perp BC$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$.

সমাধান ঃ ΔADCৰ পৰা, আমি পাওঁ

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য) (1)

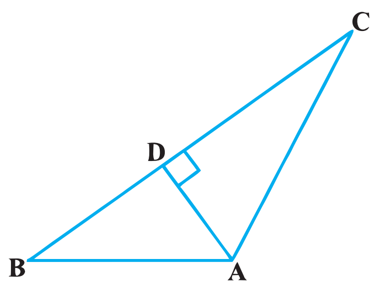
ΔADBৰ পৰা পাওঁ,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য) (2)

(2)ৰ পৰা (1) বিয়োগ কৰিলে,

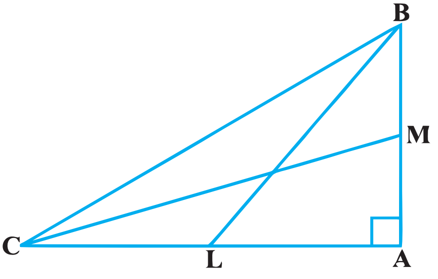
$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

বা, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



চিত্ৰ 6.50

উদাহৰণ 13 ঃ ΔABCৰ A কোণটো সমকোণ আৰু ইয়াৰ দুডাল মধ্যমা BL আৰু CM। প্ৰমাণ কৰা যে, $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$.



চিত্ৰ 6.51

সমাধান ঃ ΔABC ৰ BL আৰু CM মধ্যমা আৰু $\angle A = 90°$ (চিত্ৰ 6.51 চোৱা)।

ΔABC ৰ পৰা

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ..... (1)

(পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য)

ΔABL ৰ পৰা, $BL^2 = AL^2 + AB^2$

বা, $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$, (AC ৰ মধ্যবিন্দু L)

বা, $BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

বা, $4\ BL^2 = AC^2 + 4\ AB^2$ ..... (2)

Δ CMA ৰ পৰা, $CM^2 = AC^2 + AM^2$

বা, $CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ (ABৰ মধ্যবিন্দু M)

বা, $CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

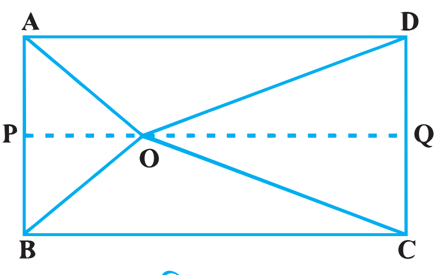
বা, $4CM^2 = 4AC^2 + AB^2$ ..... (3)

(2) আৰু (3) যোগ কৰি পাওঁ

$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$

অৰ্থাৎ, $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ [(1)অৰ পৰা]

উদাহৰণ 14 ঃ ABCD আয়ত এটাৰ O যিকোনো অন্তঃস্থ বিন্দু (চিত্ৰ 6.52 চোৱা)। প্ৰমাণ কৰা যে $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$.



চিত্ৰ 6.52

সমাধান ঃ O ৰ মাজেদি যোৱাকৈ PQ ক BC ৰ সমান্তৰালকৈ আঁকা হ'ল যাতে P বিন্দুটো AB ৰ আৰু Q বিন্দু DC ৰ ওপৰত থাকে।

এতিয়া, PQ || BC

এতেকে, PQ ⊥ AB আৰু PQ ⊥ DC ($\angle B = 90°$ আৰু $\angle C = 90°$)

গতিকে, $\angle BPQ = 90°$ আৰু $\angle CQP = 90°$

সেইবাবে, BPQC আৰু APQD দুয়োটাই আয়ত।

এতিয়া, ΔOPB ৰ পৰা

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad ..... (1)$$

একেদৰে, ΔOQDৰ পৰা

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad ..... (2)$$

ΔOQCৰ পৰা,

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad ..... (3)$$

আৰু Δ OAPৰ পৰা

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad ..... (4)$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰিলে,

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \quad (\because BP = CQ \text{ আৰু } DQ = AP)$$

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \quad [(3) \text{ আৰু } (4) \text{ ৰ পৰা}]$$

অনুশীলনী 6.5

1. ত্ৰিভুজৰ কিছুমান বাহুৰ দীঘ তলত দিয়া হ'ল। ইয়াৰে কোনবিলাক সমকোণী ত্ৰিভুজ উলিওৱা। সমকোণী ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰত অতিভুজডালৰ দীঘ লিখা।

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm

(ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm

(iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

2. PQR ত্ৰিভুজৰ P কোণ সমকোণ আৰু QRৰ ওপৰত M এটা বিন্দু। যদি $PM \perp QR$, দেখুওৱা যে $PM^2 = QM.MR$

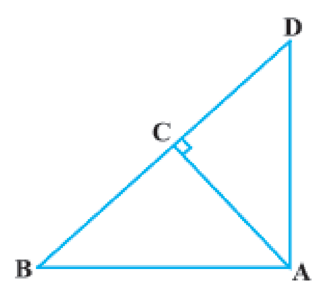
3. চিত্ৰ 6.53ত, ABD এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ যাৰ A কোণটো সমকোণ আৰু $AC \perp BD$. দেখুওৱা যে

(i) $AB^2 = BC \, . \, BD$

(ii) $AC^2 = BC \, . \, DC$

(iii) $AD^2 = BD \, . \, CD$

4. ABC এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ যাৰ C কোণ সমকোণ। প্ৰমাণ কৰা যে $AB^2 = 2AC^2$.



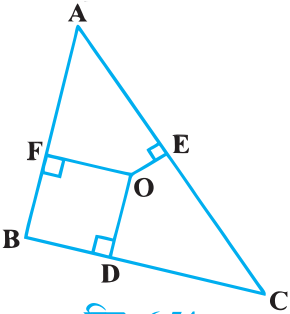
চিত্ৰ 6.53

5. ABC সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ AC = BC. যদি $AB^2 = 2AC^2$, প্ৰমাণ কৰা যে ABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ।

6. এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ ABC ৰ বাহুৰ দীঘ $2a$। ইয়াৰ প্ৰতিটো উন্নতিৰ দীঘ উলিওৱা।

7. প্ৰমাণ কৰা যে এটা ৰম্বাচৰ বাহুবিলাকৰ বৰ্গৰ যোগফল তাৰ কৰ্ণ দুডালৰ বৰ্গৰ যোগফলৰ সমান।

8. চিত্ৰ 6.54ত, ABC ত্ৰিভুজৰ O এটা অন্তঃস্থ বিন্দু আৰু OD ⊥ BC, OE ⊥ AC আৰু OF ⊥ AB. দেখুওৱা যে
(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$,
(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.



চিত্ৰ 6.54

9. 10m দীঘল জখলা এডালে ভূমিৰ পৰা 8m ওপৰত থকা খিৰিকি এখন ঢুকি পায়। বেৰখনৰপৰা জখলা ডালৰ গুৰিটোৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

10. 24 মিটাৰ দীঘল এডাল ভাৰ উত্তোলন কৰা জৰী (তাঁৰ) 18 মিটাৰ ওখ উলম্ব খুটা এটাত বান্ধি থোৱা আছে আৰু আনটো মূৰত এটা গধুৰ বস্তু বান্ধি থোৱা আছে। খুটাটোৰ গুৰিৰপৰা তাঁৰডালে কিমান ওপৰলৈ গধুৰ বস্তুটো দাঙি নিলে তাঁৰডাল টনটনীয়া (taut) হ'ব?

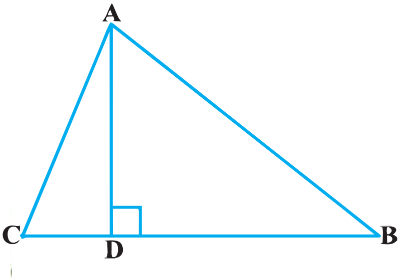
11. এখন উৰাজাহাজ এয়াৰ প'ৰ্টৰপৰা উৰা মাৰিলে আৰু ঘণ্টাত 1000 km দ্ৰুতিত উত্তৰ দিশে গতি কৰিলে। একে সময়তে, আন এখন উৰাজাহাজ একেটা এয়াৰপ'ৰ্টৰপৰা পশ্চিম দিশে ঘণ্টাত 1200 km দ্ৰুতিত উৰা মাৰিলে। $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টাৰ পিচত দুয়োখন উৰাজাহাজৰ মাজত দূৰত্ব কিমান হ'ব?

12. এখন সমতলত দুটা স্তম্ভ, এটা 6m আৰু 11m ওখ, থিয় হৈ আছে। যদি স্তম্ভ দুটাৰ গুৰি দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব 12m, তেন্তে সিহঁতৰ আগ দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব কিমান?

13. ABC ত্ৰিভুজৰ C কোণ সমকোণ আৰু CA আৰু CB বাহু দুটাত D আৰু E দুটা বিন্দু। প্ৰমাণ কৰা যে $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$।

14. ΔABC ৰ A বিন্দুৰপৰা BC ৰ ওপৰত টনা লম্বই BC ক D বিন্দুত এনেদৰে ছেদ কৰে যে DB = 3CD (চিত্ৰ 6.55 চোৱা)। প্ৰমাণ কৰা যে $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$।

15. ABC সমবাহু ত্ৰিভুজৰ BC বাহুৰ ওপৰত D এটা বিন্দু যাতে $BD = \frac{1}{3}$ BC। প্ৰমাণ কৰা যে $9AD^2 = 7AB^2$।



চিত্ৰ 6.55

16. প্ৰমাণ কৰা যে, এটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ এটা বাহুৰ বৰ্গৰ তিনিগুণ তাৰ এডাল উন্নতিৰ বৰ্গৰ চাৰিগুণৰ সমান।

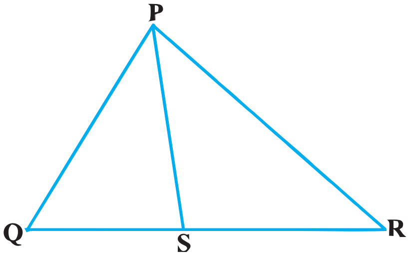
17. শুদ্ধ উত্তৰটোত চিন দিয়া আৰু যুক্তি প্ৰদৰ্শন কৰা

ΔABC ৰ $AB = 6\sqrt{3}$ cm, AC = 12 cm আৰু BC = 6 cm. এতিয়া B কোণ হ'ব

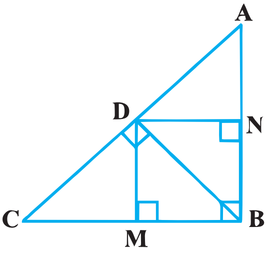
(A) 120° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

অনুশীলনী 6.6 (ঐচ্ছিক)*

1. চিত্ৰ 6.56ত, $\angle QPR$ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক PS। প্ৰমাণ কৰা যে $\dfrac{QS}{SR} = \dfrac{PQ}{PR}$



চিত্ৰ 6.56

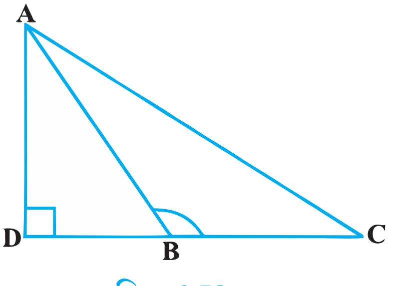


চিত্ৰ 6.57

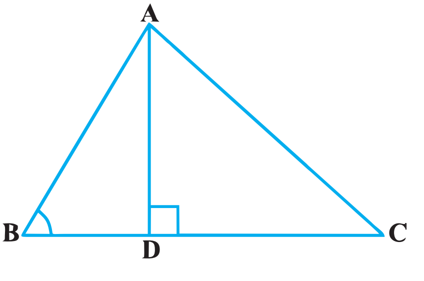
2. চিত্ৰ 6.57ত, ΔABCৰ AC অতিভুজৰ ওপৰত D এটা বিন্দু। যদি $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ আৰু $DN \perp AB$. তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $DM^2 = DN.MC$ (ii) $DN^2 = DM.AN$

3. চিত্ৰ 6.58 ত, ABC এটা ত্ৰিভুজ যাৰ $\angle ABC > 90°$ আৰু $AD \perp CB$ (বৰ্ধিত)। প্ৰমাণ কৰা যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$।



চিত্ৰ 6.58



চিত্ৰ 6.59

* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

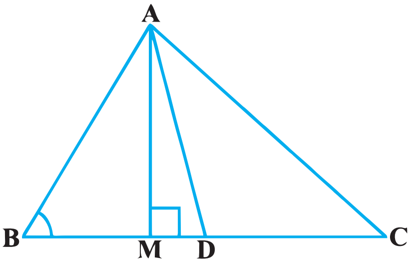
4. চিত্ৰ 6.59ত, ABC এটা ত্ৰিভুজ যাৰ $\angle ABC < 90°$ আৰু $AD \perp BC$. প্ৰমাণ কৰা যে $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$।

5. চিত্ৰ 6.60ত, ABC ত্ৰিভুজৰ AD এডাল মধ্যমা আৰু $AM \perp BC$। প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2\ AD^2 + \frac{1}{2}\ BC^2$

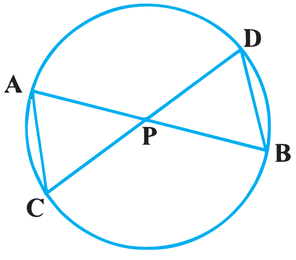


চিত্ৰ 6.60

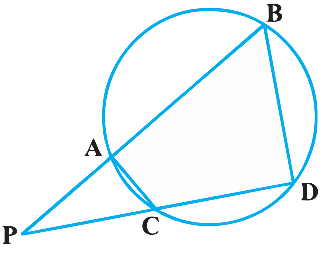
6. প্ৰমাণ কৰা যে এটা সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুডালৰ বৰ্গৰ যোগফল তাৰ বাহুকেইডালৰ বৰ্গৰ যোগফলৰ সমান।

7. চিত্ৰ 6.61ত, AB আৰু CD জ্যা দুডালে পৰস্পৰক P বিন্দুত ছেদ কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে,

(i) $\Delta\ APC \sim \Delta\ DPB$ (ii) $AP\ .\ PB = CP\ .\ DP$



চিত্ৰ 6.61



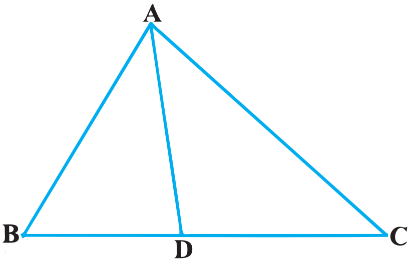
চিত্ৰ 6.62

8. চিত্ৰ 6.62ত, এটা বৃত্তৰ AB আৰু CD জ্যা দুডালে পৰস্পৰক P বিন্দুত (যেতিয়া বঢ়াই দিয়া হয়) বৃত্তটোৰ বাহিৰত ছেদ কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$

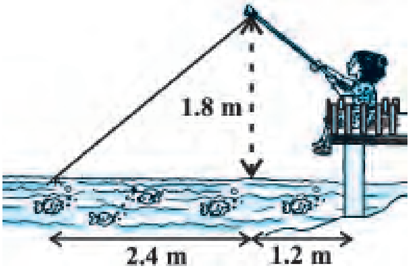
(ii) $PA.PB = PC.PD$

9. চিত্ৰ 6.63ত, $\Delta\ ABC$ ৰ BC বাহুৰ ওপৰত D এটা বিন্দু যাতে $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ । প্ৰমাণ কৰা যে AD ৰেখাডাল $\angle BAC$ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্ৰ 6.63

10. নাজমাই এটা জুৰিত বৰশী বাই আছে। তাইৰ বৰশীৰ চিপটোৰ আগটো পানীৰ উপৰিভাগৰ পৰা 1.8m ওপৰত আছে। বৰশীৰ পুঙা (fly)টো বৰশীৰ সূতাডালৰ আনটো মূৰত লাগি আছে আৰু ই এনেভাবে পানীত ওপঙি আছে যে ইয়াৰ দূৰত্ব তাইৰপৰা 3.6m আঁতৰত আৰু বৰশীৰ চিপটোৰ আগটোৰ ঠিক তলতে থকা পানীৰ ওপৰৰ বিন্দু এটাৰপৰা 2.4m আঁতৰত। যদি ধৰা হয় যে বৰশীৰ সূতাডাল (চিপটোৰ আগৰ পৰা পুঙাটোলৈকে) টনটনীয়া (অৰ্থাৎ ভাঁজ নথকা) হৈ আছে, তেন্তে সূতাডালৰ কিমানখিনি ওলাই আছে (চিত্ৰ 6.64 চোৱা)? যদি তাই সূতাডাল প্ৰতি চেকেণ্ডত 5 cm কৈ টানি থাকে তেন্তে 12 ছেকেণ্ড পিচত পুঙাটোৰ অনুভূমিক দূৰত্ব তাইৰপৰা কিমান হ'ব?



চিত্ৰ 6.64

6.7. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাখিনি শিকিলা ঃ

1. দুটা নক্সা (বা চিত্ৰ) যদি একে আকৃতিৰ হয়, কিন্তু আকাৰ একে হোৱাৰ প্ৰয়োজন নাই, তেন্তে সিহঁতক সদৃশ চিত্ৰ বুলি কোৱা হয়।

2. সকলোবোৰ সৰ্বসম চিত্ৰ সদৃশ কিন্তু বিপৰীতটো সত্য নহয়।

3. দুটা সমসংখ্যক বাহুৰ বহুভুজ সদৃশ হ'ব যদিহে (i) সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান আৰু (ii) সিহঁতৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ অনুপাত একে (অৰ্থাৎ সমানুপাতিক)।

4. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বাহুৰ সমান্তৰালকৈ টনা ৰেখা এডালে আন দুটা বাহুক দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুত ছেদ কৰে, তেনেহ'লে সেই বাহুদুটা একে অনুপাতত বিভক্ত হয়।

5. যদি এডাল ৰেখাই এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহুক একে অনুপাতত বিভক্ত কৰে তেনেহ'লে ৰেখাডাল তৃতীয় বাহুটোৰ সমান্তৰাল।

6. যদি দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান তেন্তে সিঁহতৰ অনুৰূপ বাহুবোৰ একে অনুপাতত থাকে আৰু এই কাৰণে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ (AAA সাদৃশ্য চৰ্ত)।

7. যদি দুটা ত্ৰিভুজৰ, এটাৰ দুটা কোণ আনটোৰ দুটা অনুৰূপ কোণৰ সমান হয়, তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ (AA সাদৃশ্য চৰ্ত)।

8. যদি দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ বাহুবোৰ একে অনুপাতত থাকে তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান হ'ব আৰু তেতিয়া ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ হ'ব (SSS সাদৃশ্য চৰ্ত)।

9. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ এটা কোণ আন এটা ত্ৰিভুজৰ এটা কোণৰ সমান হয় আৰু এই কোণ বিলাক গঠন কৰা বাহু বিলাক একে অনুপাতত থাকে (সমানুপাতিক) তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ। (SAS সাদৃশ্য চৰ্ত)।

10. দুটা সদৃশ ত্ৰিভুজৰ কালিৰ অনুপাত ত্ৰিভুজ দুটাৰ অনুৰূপ বাহুবিলাকৰ অনুপাতৰ বৰ্গৰ সমান।

11. যদি এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ সমকোণ থকা শীৰ্ষবিন্দুটোৰ পৰা অতিভুজলৈ এডাল লম্ব টনা হয় তেনেহ'লে লম্বডালৰ দুয়োফালে গঠিত ত্ৰিভুজ দুটাৰ প্ৰতিটোৱে গোটেই ত্ৰিভুজটোৰ সৈতে সদৃশ আৰু সিহঁত দুটাও পৰস্পৰ সদৃশ।

12. এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ অতিভুজৰ বৰ্গ আন দুটা বাহুৰ বৰ্গৰ যোগফলৰ সমান। (পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য)।

13. যদি এটা ত্ৰিভুজৰ এটা বাহুৰ বৰ্গ আন দুটা বাহুৰ বৰ্গৰ যোগফলৰ সমান তেন্তে প্ৰথম বাহুটোৰ বিপৰীত কোণটো সমকোণ।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

যদি দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ এটা ত্ৰিভুজৰ অতিভুজ আৰু এটা বাহু আনটো ত্ৰিভুজৰ অতিভুজ আৰু এটা বাহুৰ সমানুপাতিক তেন্তে ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ। ইয়াকে RHS সাদৃশ্য চৰ্ত বোলে।

এই চৰ্তটো যদি অষ্টম অধ্যায়ৰ উদাহৰণ 2ত ব্যৱহাৰ কৰা হয় তেন্তে প্ৰমাণটো সহজ হ'ব।

N7Q1A9

স্থানাংক জ্যামিতি (Coordinate Geometry)

সপ্তম অধ্যায়

7.1. অৱতাৰণা (Introduction)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে পঢ়ি আহিছা যে এখন সমতলত এটা বিন্দুৰ অৱস্থান জানিবলৈ হ'লে আমাক এযোৰ স্থানাংক অক্ষৰ প্ৰয়োজন হয়। y-অক্ষৰ পৰা এটা বিন্দুৰ দূৰত্বক ***x*-স্থানাংক (*x*-coordinate)** বা **ভুজ (abscissa)** বুলি কোৱা হয়। x-অক্ষৰ পৰা এটা বিন্দুৰ দূৰত্বক ***y*-স্থানাংক (*y*-coordinate)** বা **কোটি (ordinate)** বুলি কোৱা হয়। x-অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি $(x, 0)$ আৰু y-অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি $(0, y)$।

এইখিনিতে তোমালোকৰ বাবে এটা খেল দিয়া হ'ল। লেখ কাগজত এযোৰ পৰস্পৰ লম্বভাবে থকা অক্ষ অংকন কৰা। এতিয়া তলত দিয়া বিন্দুসমূহ স্থাপন কৰি নিৰ্দ্দেশ অনুযায়ী সিহঁতক সংযোগ কৰা। A(4, 8) বিন্দুক B(3, 9) ৰ লগত, Bক C(3, 8)ৰ লগত, C ক D(1, 6) ৰ লগত, D ক E(1,5) ৰ লগত, E ক F(3, 3) ৰ লগত, F ক G(6, 3) ৰ লগত, G ক H(8, 5) ৰ লগত, H ক I(8, 6) ৰ লগত, I ক J(6, 8) ৰ লগত, J ক K(6, 9) ৰ লগত, K ক L(5, 8) ৰ লগত, L ক A ৰ লগত সংযোগ কৰা। তাৰ পিছত P(3.5, 7), Q (3, 6) আৰু R(4, 6) ক সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰা। আকৌ X(5.5, 7), Y(5, 6) আৰু Z(6, 6) ক সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰা। এতিয়া S(4, 5), T(4.5, 4) আৰু U(5, 5) সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰা। অৱশেষত Sঅক (0, 5) আৰু (0, 6) ৰ লগত আৰু Uক (9, 5) আৰু (9, 6) ৰ লগত সংযোগ কৰা। তোমালোকে কি চিত্ৰ পালা?

আকৌ তোমালোকে দেখিছা যে $ax + by + c = 0$, (a, b একে সময়তে শূন্য নহয়) আৰ্হিৰ দুটা চলকযুক্ত ৰৈখিক সমীকৰণক লেখৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিলে এডাল সৰলৰেখা পোৱা যায়। তদুপৰি দ্বিতীয় অধ্যায়ত তোমালোকে দেখিছা যে $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ৰ লেখটো এটা অধিবৃত্ত (parabola)। দৰাচলতে চিত্ৰৰ জ্যামিতি অধ্যয়ন কৰিবলৈ এক বীজগণিতীয় আহিলা হিচাপে স্থানাংক জ্যামিতিৰ বিকাশ ঘটোৱা হৈছে। ই আমাক বীজগণিত ব্যৱহাৰ কৰি জ্যামিতি অধ্যয়ন কৰাত সহায় কৰে আৰু জ্যামিতিৰ সহায়ত বীজগণিত বুজাত

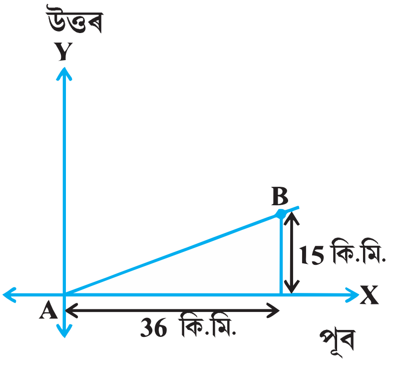
সহায় কৰে। এই কাৰণেই বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত উদাহৰণস্বৰূপে পদাৰ্থবিজ্ঞান, ইঞ্জিনীয়াৰিং, নৌ বিদ্যা, ভূকম্প বিজ্ঞান আৰু কলাত স্থানাংক জ্যামিতিৰ বহুল প্ৰয়োগ কৰা হয়।

এই অধ্যায়ত তোমালোকে দুটা বিন্দুৰ স্থানাংক দিয়া থাকিলে কিদৰে সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা হয় আৰু তিনিটা বিন্দুৰ স্থানাংক জনা থাকিলে ইহঁতে গঠন কৰা ত্ৰিভুজৰ কালি উলিয়াবলৈ শিকিব পাৰিবা। তদুপৰি দুটা প্ৰদত্ত বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক এটা নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত ছেদ কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক কিদৰে নিৰ্ণয় কৰা হয় সেই বিষয়েও পঢ়িবলৈ পাবা।

7.2. দূৰত্ব সূত্ৰ (Distance Formula) ঃ

তলত দিয়া অৱস্থাটো মন কৰো আঁহা।

B চহৰখন A চহৰখনৰপৰা 36 কি.মি. পূবত আৰু 15 কি.মি. উত্তৰত অৱস্থিত। এতিয়া জোখমাপ নকৰাকৈ A চহৰৰ পৰা B চহৰৰ দূৰত্ব কেনেকৈ উলিয়াবা? বাৰু চাওঁ আঁহা। এই অৱস্থাটো লেখ চিত্ৰৰ সহায়ত চিত্ৰ 7.1ত দিয়াৰ দৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। তোমালোকে পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য (Pythagoras Theorem) ব্যৱহাৰ কৰিও এই দূৰত্ব গণনা কৰিব পাৰিবা।



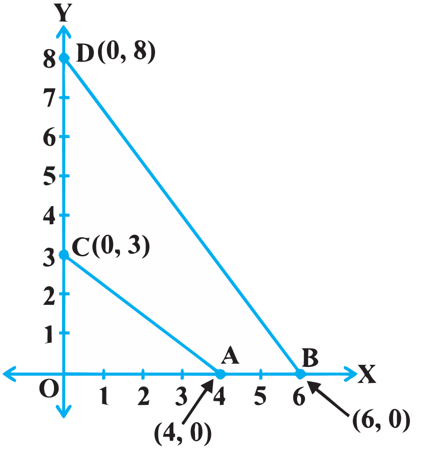
চিত্ৰ 7.1

এতিয়া, ধৰা দুটা বিন্দু x-অক্ষৰ ওপৰত আছে। ইহঁত দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে? চিত্ৰ 7.2ত দিয়াৰ দৰে ধৰা হ'ল A(4, 0) আৰু B(6, 0) দুটা বিন্দু। A আৰু B বিন্দু দুটা x-অক্ষৰ ওপৰত আছে।

চিত্ৰৰ পৰা তোমালোকে দেখিছা যে OA = 4 একক আৰু OB = 6 একক।

গতিকে A ৰ পৰা B ৰ দূৰত্ব অৰ্থাৎ,
AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 একক। সেয়ে, যদি দুটা বিন্দু x-অক্ষৰ ওপৰত অৱস্থিত তেনেহ'লে আমি সহজতে সিঁহতৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিম।

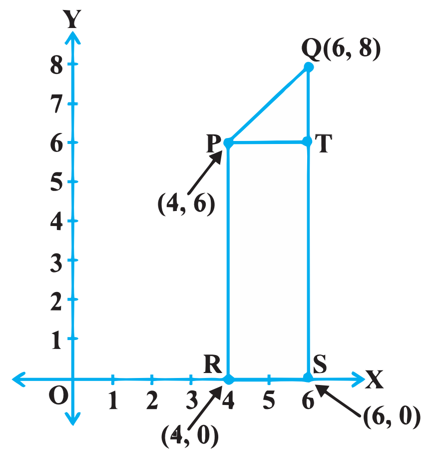
এতিয়া ধৰাহ'ল, দুটা বিন্দু y-অক্ষৰ ওপৰত অৱস্থিত বুলি লোৱা হ'ল। তোমালোকে ইহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে? যদি C(0, 3) আৰু D(0, 8) বিন্দু দুটা y-অক্ষৰ ওপৰত আছে, একেদৰেই আমি পাওঁ যে CD = 8 – 3 = 5 একক (চিত্ৰ 7.2 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.2

ইয়াৰ পিছত, তোমালোকে C ৰ পৰা A ৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে (চিত্ৰ 7.2 মতে)? যিহেতু OA = 4 একক আৰু OC = 3 একক, গতিকে C ৰ পৰা A ৰ দূৰত্ব, অৰ্থাৎ AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5 একক। এইদৰেই তোমালোকে D ৰ পৰা B ৰ দূৰত্ব = BD = 10 একক উলিয়াব পাৰিবা।

এতিয়া আমি যদি দুটা বিন্দু স্থানাংক অক্ষৰ ওপৰত নথকাকৈ লওঁ, তেন্তে সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিমনে? নিশ্চয় পাৰিম। এই ক্ষেত্ৰত আমি পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায় ল'ম। তলৰ এটা উদাহৰণলৈ মন কৰা। চিত্ৰ 7.3 ত দেখুওৱাৰ দৰে P(4, 6) আৰু Q(6, 8) বিন্দু দুটা প্ৰথম চোকত আছে। ইহঁত দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াবলৈ আমি কিদৰে পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিম। এতিয়া P আৰু Q ৰ পৰা x-অক্ষৰ ওপৰত ক্ৰমে PR আৰু QS ৰ ওপৰত T বিন্দুত ছেদ কৰাকৈ এডাল লম্ব টনা হ'ল। তেতিয়াহ'লে R আৰু S ৰ স্থানাংক হ'ব ক্ৰমে (4, 0) আৰু (6, 0)। গতিকে RS = 2 একক। আকৌ QS = 8 একক আৰু TS = PR = 6 একক। সেইবাবে, QT = 2 একক আৰু PT = RS = 2 একক।



চিত্ৰ 7.3

এতিয়া পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

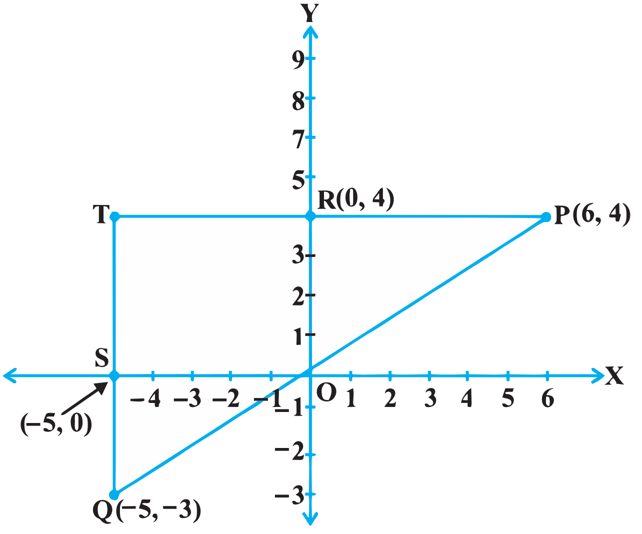
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

গতিকে, PQ = $2\sqrt{2}$ একক।

দুটা বেলেগ চোকত থকা দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব কেনেকৈ উলিয়াবা?

P(6, 4) আৰু Q(–5, –3) এই বিন্দু দুটা লোৱা (চিত্ৰ 7.4 চোৱা)। x-অক্ষৰ ওপৰত QS লম্ব টানা।

আকৌ P বিন্দুৰ পৰা QS ৰ (বৰ্দ্ধিত অংশত) ওপৰত PT লম্ব টানা আৰু এই লম্বই y-অক্ষক R বিন্দুত ছেদ কৰিছে।



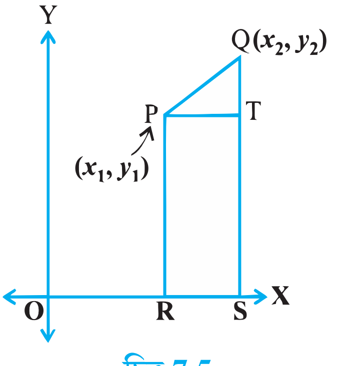
চিত্ৰ 7.4

এতিয়া PT = 11 একক আৰু QT = 7 একক (কিয়?)

PTQ সমকোণী ত্ৰিভুজত পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ

$$PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170} \text{ একক।}$$

এতিয়া আমি যিকোনো দুটা বিন্দু $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰিম। x-অক্ষৰ ওপৰত PR আৰু QS লম্ব টনা হ'ল। P বিন্দুৰ পৰা QS ৰ ওপৰত T বিন্দুত এডাল লম্ব টনা হ'ল (চিত্ৰ 7.5 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.5

এতিয়া, OR = x_1, OS = x_2.

গতিকে, RS = $x_2 - x_1$ = PT.

আকৌ SQ = y_2, ST = PR = y_1.

গতিকে, QT = $y_2 - y_1$.

এতিয়া ΔPTQ ত পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

গতিকে, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

মনত ৰাখিবা যে যিহেতু দূৰত্ব সদায় অঋণাত্মক, গতিকে আমি ইয়াত ধনাত্মক বৰ্গমূলহে লৈছো। গতিকে $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, ইয়াক 'দূৰত্ব সূত্ৰ' (**distance formula**) বোলে।

মন্তব্য ঃ

1. বিশেষত ঃ মূলবিন্দু O(0, 0) ৰ পৰা কোনো এটা বিন্দু $P(x, y)$ৰ দূৰত্ব হ'ব $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. দূৰত্বৰ সূত্ৰটো আমি তলত দিয়া ধৰণেৰেও ল'ব পাৰো $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (কিয়?)

উদাহৰণ 1 ঃ (3, 2), (–2, –3) আৰু (2, 3) বিন্দু কেইটাই এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰেনে? যদি কৰে, তেনেহ'লে কেনে ধৰণৰ ত্ৰিভুজ গঠন হ'ব তাৰ নাম লিখা।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বিন্দুকেইটা P(3, 2), Q(–2, –3) আৰু R(2, 3) ৰ পৰা দূৰত্বৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি PQ, QR আৰু PR এই দূৰত্ব কেইটা উলিয়াই লওঁ। আমি পাওঁ যে

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (প্ৰায়)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (প্ৰায়)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (প্ৰায়)}$$

যিহেতু এই দূৰত্ববিলাকৰ যিকোনো দুটা দূৰত্বৰ যোগফল তৃতীয়টোতকৈ ডাঙৰ, গতিকে P, Q আৰু R বিন্দু তিনিটাই এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰে।

তদুপৰি, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$. গতিকে, পাইথাগোৰাচ উপপাদ্যৰ বিপৰীত উপপাদ্যমতে আমি পাওঁ যে $\angle P = 90°$.

গতিকে, PQR এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ।

উদাহৰণ 2 ঃ দেখুওৱা যে (1, 7), (4, 2), (–1, –1) আৰু (– 4, 4) বিন্দুকেইটা এটা বৰ্গৰ শীৰ্ষ বিন্দু।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল প্ৰদত্ত বিন্দুকেইটা A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) আৰু D(– 4, 4)। ABCD এটা বৰ্গ বুলি দেখুওৱাৰ এটা পদ্ধতি হ'ল যে ইয়াৰ আটাইবোৰ বাহুৰ দীঘ সমান আৰু কৰ্ণ দুডালৰ দীঘ সমান বুলি দেখুৱাব লাগে।

এতিয়া,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

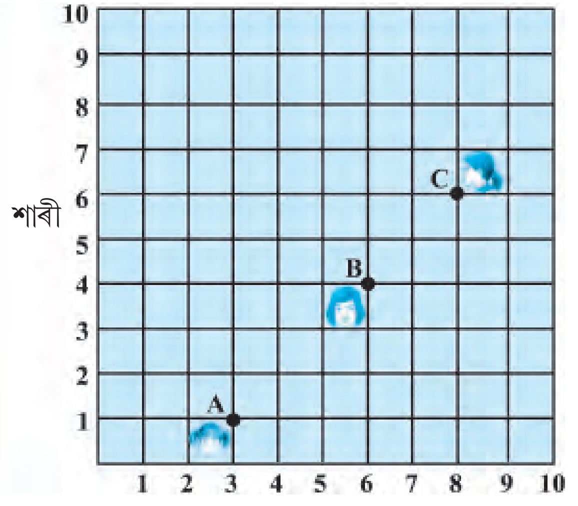
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

যিহেতু, AB = BC = CD = DA আৰু AC = BD, গতিকে ABCD চতুৰ্ভুজটোৰ আটাইবোৰ বাহু সমান আৰু কৰ্ণ AC আৰু BD সমান। গতিকে ABCD এটা বৰ্গ।

বিকল্প সমাধান (Alternative Solution) ঃ আমি চাৰিটা বাহু আৰু এটা কৰ্ণ, ধৰা AC ইতিমধ্যেনিৰ্ণয় কৰিছো। ইয়াত $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. গতিকে পাইথ াগোৰাচৰ বিপৰীত উপপাদ্যমতে, $\angle D = 90°$ হ'লে ই এটা বৰ্গ হয়। গতিকে, ABCD এটা বৰ্গ।

উদাহৰণ 3 ঃ চিত্ৰ 7.6ত এটা শ্ৰেণীকোঠাৰ ডেস্কৰ সাজোনটো দেখুওৱা হৈছে। অসীম, ভাৰতী আৰু কমলা ক্ৰমে A(3, 1), B(6, 4) আৰু C(8, 6) স্থানত বাহিছে। তোমালোকে ভাবানে যে তেওঁলোক এডাল সৰলৰেখাত বহিছে? তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দিয়া।



চিত্ৰ 7.6

সমাধান ঃ দূৰত্ব সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ,

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

যিহেতু, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, গতিকে আমি ক'ব পাৰো যে A, B আৰু C বিন্দুকেইটা একৰেখীয়। গতিকে, তেওঁলোক এডাল সৰলৰেখাত বহিছে।

উদাহৰণ 4 ঃ x আৰু y ৰ মাজৰ এটা সম্পৰ্ক নিৰ্ণয় কৰা যদিহে (x , y) বিন্দুটো (7, 1) আৰু (3, 5) বিন্দু দুটাৰপৰা সমদূৰৱৰ্তী।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $P(x, y)$ বিন্দুটো A(7, 1) আৰু B(3, 5) ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী।

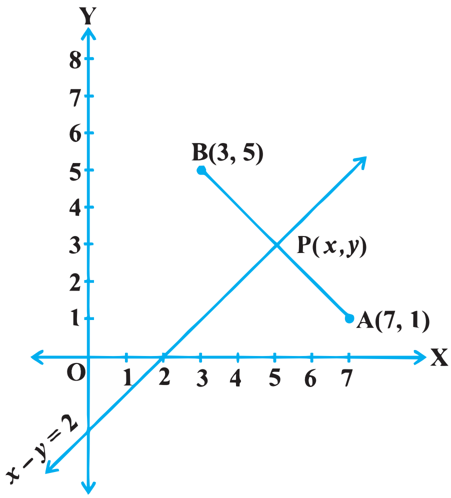
আমাক দিয়া আছে যে, AP = BP. গতিকে, $AP^2 = BP^2$

অৰ্থাৎ, $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$

অৰ্থাৎ, $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

অৰ্থাৎ, $x - y = 2$, ইয়েই উলিয়াব লগা সম্পৰ্ক।

মন্তব্য ঃ মন কৰা যে $x - y = 2$ ৰ লেখটো এডাল সৰল ৰেখা হ'ব। আগৰ অধ্যয়নৰপৰা তোমালোকে জানা যে A আৰু B ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী বিন্দুটো AB ৰেখাৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত থাকে। গতিকে, $x - y = 2$ ৰ লেখটো AB ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকডাল (চিত্ৰ 7.7 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.7

উদাহৰণ 5 ঃ y-অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দু উলিওৱা যিটো A(6, 5) আৰু B(– 4, 3)ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী।

সমাধান ঃ আমি জানো যে y-অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ল $(0, y)$। গতিকে ধৰা হ'ল $P(0, y)$ বিন্দুটো A আৰু Bৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী। তেতিয়া হ'লে,

$(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (- 4 - 0)^2 + (3 - y)^2$

অৰ্থাৎ, $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

অৰ্থাৎ, $4y = 36$,   অৰ্থাৎ, $y = 9$

গতিকে উলিয়াব লগা বিন্দুটো হ'ল (0, 9).

এতিয়া আমাৰ সমাধানৰ সত্যাপন কৰি চাওঁ

$$AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

টোকা ঃ ওপৰৰ মন্তব্যৰ সহায়ত আমি দেখিছো যে y-অক্ষ আৰু ABক লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ ছেদবিন্দুটো হ'ল (0, 9)।

অনুশীলনী 7.1

1. তলৰ প্ৰতিযোৰ বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা

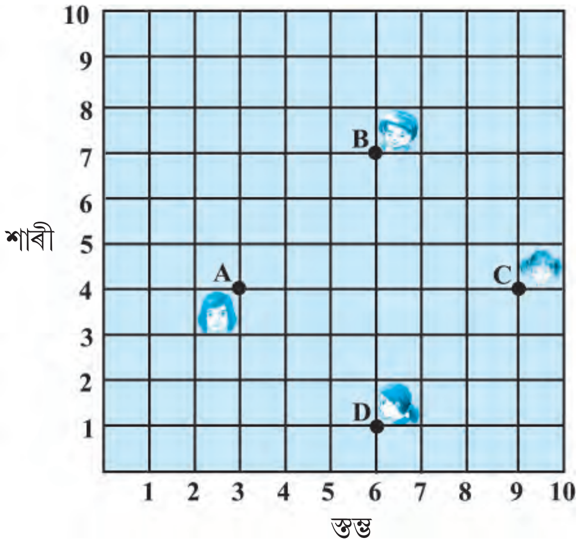
(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2. (0, 0) আৰু (36, 15) ৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিওৱা। তুমি এতিয়া ওপৰৰ 7.2 অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰা A আৰু B নগৰ দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে?

3. (1, 5), (2, 3) আৰু (– 2, – 11) বিন্দুকেইটা একৰেখীয় হয়নে নিৰ্ণয় কৰা।

4. (5, – 2), (6, 4) আৰু (7, – 2) বিন্দুকেইটা এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

5. এটা শ্ৰেণী কোঠাত 4 জন বন্ধু চিত্ৰ 7.8ত দিয়াৰ দৰে A, B, C আৰু D স্থানত বহিছে। চম্পা আৰু চামেলি শ্ৰেণী কোঠালৈ সোমাই গ'ল আৰু অলপ সময় নিৰীক্ষণ কৰাৰ পাছত চম্পাই চামেলিক সুধিলে, “ABCD এটা বৰ্গ বুলি তুমি নাভাবানে?” চামেলিয়ে বৰ্গ নহ'ব বুলি জনালে। দূৰত্বৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তেওঁলোক দুজনীৰ কোন শুদ্ধ নিৰূপণ কৰা।



চিত্ৰ 7.8

6. তলৰ বিন্দুবিলাকে যদি চতুৰ্ভুজ গঠন কৰে তেনেহ'লে সেই চতুৰ্ভুজৰ স্বৰূপ নিৰ্ণয় কৰা আৰু তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে কাৰণ দাঙি ধৰা

(i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)

(ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. (2, –5) আৰু (–2, 9) বিন্দু দুটাৰপৰা সমদূৰত্বত x অক্ষৰ ওপৰত থকা বিন্দুটো নিৰ্ণয় কৰা।

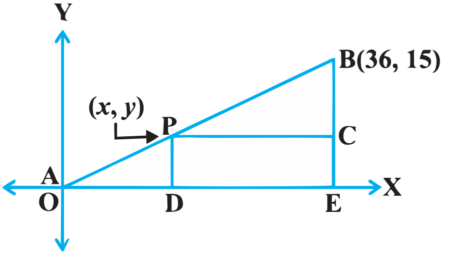
8. y ৰ সেই মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে P(2, – 3) আৰু Q(10, y) বিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব 10 একক হয়।

9. যদি Q(0, 1) বিন্দুটো P(5, –3) আৰু R(x, 6) ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী তেন্তে xঅৰ মান উলিওৱা। তদুপৰি QR আৰু PR দূৰত্বকেইটা উলিওৱা।

10. x আৰু y ৰ মাজৰ সম্পৰ্ক উলিওৱা যাতে (x, y) বিন্দুটো (3, 6) আৰু (– 3, 4) বিন্দু দুটাৰপৰা সমদূৰৱৰ্তী হয়।

7.3. বিভাজন সূত্র (Section Formula)

অনুচ্ছেদ 7.2 ৰ অৱস্থাটো মনত পেলোৱা। ধৰাহ'ল এটা টেলিফোন কোম্পানীয়ে A আৰু B ঠাই দুখনৰ মাজৰ P ঠাই টুকুৰাত এটা ৰিলে টাৱাৰ (relay tower) এনেদৰে স্থাপন কৰিব বিচাৰিলে যাতে P আৰু B ৰ মাজৰ দূৰত্ব P আৰু A ৰ মাজৰ দূৰত্বৰ দুগুণ হয়। যদি P বিন্দুটো AB ৰ ওপৰত থাকে তেনেহ'লে ই AB ক 1 : 2 অনুপাতত ভাগ কৰিব (চিত্ৰ 7.9 চোৱা)। যদি A বিন্দুটোক মূলবিন্দু O বুলি লোৱা হয় আৰু দুয়োডাল অক্ষতে 1 কি.মি.ক এক একক বুলি লোৱা হয় তেন্তে B বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব (36, 15)। এতিয়া টাৱাৰটোৰ অৱস্থান জানিবলৈ হ'লে আমি P ৰ স্থানাংক জানিবই লাগিব। এতিয়া P ৰ স্থানাংক কেনেকৈ উলিয়াম?



চিত্ৰ 7.9

ধৰা হ'ল, P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y)। P আৰু B বিন্দুৰপৰা x-অক্ষৰ ওপৰত ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত লম্ব টনা হ'ল। BE ৰ ওপৰত PC লম্ব টনা হ'ল। এতিয়া ত্ৰিভুজৰ কোণ-কোণ সাদৃশ্য চৰ্তৰপৰা (ষষ্ঠ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হৈছে) ΔPOD আৰু ΔBPC সদৃশ।

গতিকে, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$, আৰু $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

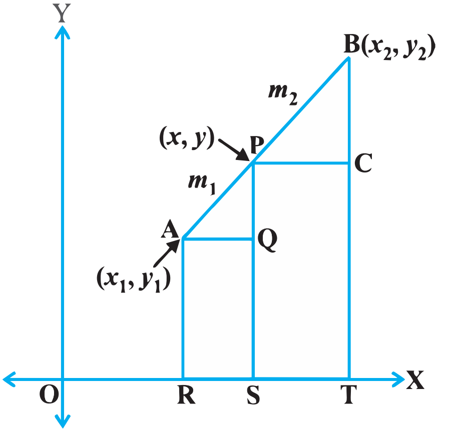
সেয়ে, $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ আৰু $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$.

এই সমীকৰণ দুটাৰপৰা পাওঁ $x=12$ আৰু $y=5$

তোমালোকে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা যে P(12, 5) বিন্দুটোৰ বাবে OP : PB = 1 : 2.

এতিয়া এই উদাহৰণটোৰপৰা তোমালোকে যিখিনি কথা শিকিলা তাৰ সহায়ত আমি এটা সাধাৰণ সূত্ৰ (general formula) উলিয়াম।

ধৰা হ'ল $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ দুটা বিন্দু। আকৌ ধৰা হ'ল $P(x, y)$ বিন্দুটোৱে AB ক $m_1 : m_2$, অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰে, অৰ্থাৎ, $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (চিত্ৰ 7.10 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.10

এতিয়া x অক্ষৰ ওপৰত AR, PS আৰু BT লম্ব টনা হ'ল। AQ আৰু PC ক x-অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ টনা হ'ল। এতিয়া কোণ-কোণ সাদৃশ্য চৰ্তমতে, $\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

গতিকে, $\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$ ..... (1)

এতিয়া,

$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$

এই মান বিলাক (1)ত বহুৱালে আমি পাওঁ,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

গতিকে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ ৰ পৰা $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

সেইদৰে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ ৰ পৰা $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

সেয়ে, $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰা $P(x, y)$ বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ল

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \quad ..... (2)$$

এই সূত্ৰটোকেই **বিভাজন সূত্ৰ (section formula)** বোলে। এই সূত্ৰটো আমি A, P আৰু B ৰ পৰা y-অক্ষৰ ওপৰত লম্ব টানি আগৰ দৰে একে পদ্ধতি অবলম্বন কৰিও উলিয়াব পাৰোঁ।

যদি P বিন্দুৱে AB ক বিভক্ত কৰা অনুপাত $k : 1$ হয়, তেতিয়া P বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right).$$

বিশেষ অৱস্থা (Special Case) ঃ এডাল ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুটোৱে সেই ৰেখাখণ্ডটোকে 1:1 অনুপাতত বিভক্ত কৰে। গতিকে $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দু P ৰ স্থানাংক হ'ব—

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1 + 1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1 + 1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

এতিয়া এই বিভাজন সূত্ৰৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি আমি কিছুমান উদাহৰণ সমাধা কৰিম।

উদাহৰণ 6 ঃ (4, – 3) আৰু (8, 5) বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক 3 : 1 অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল P(x, y) বিন্দুটোৱেই উলিয়াবলগীয়া বিন্দু। বিভাজন সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ, $x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = 7$, $\quad y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = 3$

∴ নিৰ্ণেয় বিন্দুটো (7, 3)

উদাহৰণ 7 ঃ (– 4, 6) বিন্দুটোৱে A(– 6, 10) আৰু B(3, – 8) বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক কি অনুপাতত বিভক্ত কৰে?

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল (– 4, 6) বিন্দুটোৱে AB ক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰে। বিভাজন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ,

$$(-4,\ 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad \text{..... (1)}$$

মনত পেলোৱা যে যদি (x, y) = (a, b) তেন্তে, $x = a$ আৰু $y = b$.

সেয়ে, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ আৰু $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

এতিয়া $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ ৰ পৰা $-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$

অৰ্থাৎ, $7m_1 = 2m_2$

অৰ্থাৎ, $m_1 : m_2 = 2 : 7$

তোমালোকে এইটো সত্যাপন কৰি চোৱা উচিত যে এই অনুপাতে y-স্থানাংকও সিদ্ধ কৰে।

এতিয়া, $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

গতিকে, (– 4, 6) বিন্দুটোৱে A(– 6, 10) আৰু B(3, – 8) বিন্দুদুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক 2 : 7 অনুপাতত বিভক্ত কৰে।

বিকল্প সমাধান (Alternatively) ঃ $m_1 : m_2$ অনুপাতটোক $\frac{m_1}{m_2} : 1$, বা $k : 1$ বুলিও ল'ব

পাৰি। ধৰা হ'ল (– 4, 6) য়ে AB ক k : 1 অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰিছে। এতিয়া বিভাজন সূত্ৰৰ সহায়ত পাওঁ যে—

$$(-4,\ 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \quad ....(2)$$

গতিকে, $-4 = \dfrac{3k-6}{k+1}$

অৰ্থাৎ, $-4k - 4 = 3k - 6$

বা, $7k = 2$

অৰ্থাৎ, $k : 1 = 2 : 7$

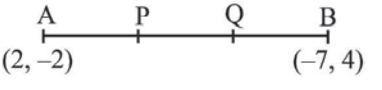
তোমালোকে y- স্থানাংকও লৈ পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা।

গতিকে, (– 4, 6) বিন্দুৰে A(–6, 10) আৰু B(3, – 8) বিন্দুসংযোগী ৰেখাখণ্ডক 2 : 7 অনুপাতত ভাগ কৰিছে।

টোকা ঃ তোমালোকে যদি জানা যে A, P আৰু B বিন্দু তিনিটা একৰেখীয়, তেনেহ'লে PA আৰু PBৰ দূৰত্ব উলিয়াই এই দূৰত্বৰ অনুপাত হিচাপ কৰিলেই আমাক লগা অনুপাত পাম।

উদাহৰণ 8 ঃ A(2, – 2) আৰু B(– 7, 4) বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক সম ত্ৰিখণ্ডিত কৰা (অৰ্থাৎ তিনিটা সমান ভাগত ভাগ কৰা) বিন্দুকেইটাৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল ABক সমানে ত্ৰিখণ্ডিত কৰা বিন্দুকেইটা P আৰু Q অৰ্থাৎ, AP = PQ = QB (চিত্ৰ 7.11 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.11

গতিকে, P য়ে ABক 1 : 2 অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰিছে। গতিকে বিভাজন সূত্ৰৰপৰা, P ৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{ অৰ্থাৎ, } (-1,\ 0)$$

আকৌ Q য়ে AB ক 2 : 1 অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰিছে। গতিকে Q ৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right), \text{ অৰ্থাৎ, } (-4,\ 2)$$

গতিকে, A আৰু B বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাক যি দুটা বিন্দুৰে সমানে ত্ৰিখণ্ডিত কৰিছে সেই বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক হ'ল (–1, 0) আৰু (– 4, 2)।

টোকা ঃ আমি Q বিন্দুটো PB ৰ মধ্যবিন্দু বুলি লৈয়ো ইয়াৰ স্থানাংক উলিয়াব পাৰোঁ। এই ক্ষেত্ৰত মধ্য বিন্দুৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব।

উদাহৰণ 9 ঃ (5, – 6) আৰু (–1, – 4) বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক y-অক্ষই কি অনুপাতত ছেদ কৰিছে উলিওৱা। তদুপৰি ছেদবিন্দুটোৰ স্থানাংকও নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল উলিয়াব লগা অনুপাত $k : 1$। এতিয়া বিভাজন সূত্ৰৰ পৰা ABক $k : 1$ অনুপাতত ভাগ কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ব $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

এই বিন্দুটো y-অক্ষত আছে। আমি জানো যে y-অক্ষত থকা এটা বিন্দুৰ ভুজ 0।

গতিকে, $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

সেয়ে, $k = 5$

গতিকে উলিয়াব লগা অনুপাত 5 : 1। এই k ৰ মান বহুৱাই আমি পোৱা ছেদবিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$।

উদাহৰণ 10 ঃ যদি A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) আৰু D(p, 3) বিন্দুকেইটা এইটো ক্ৰমতে এটা সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষ বিন্দু হয় তেনেহ'লে p ৰ মান উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি জানো যে সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

গতিকে, AC ৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক = BD ৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক

অৰ্থাৎ, $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

বা, $\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

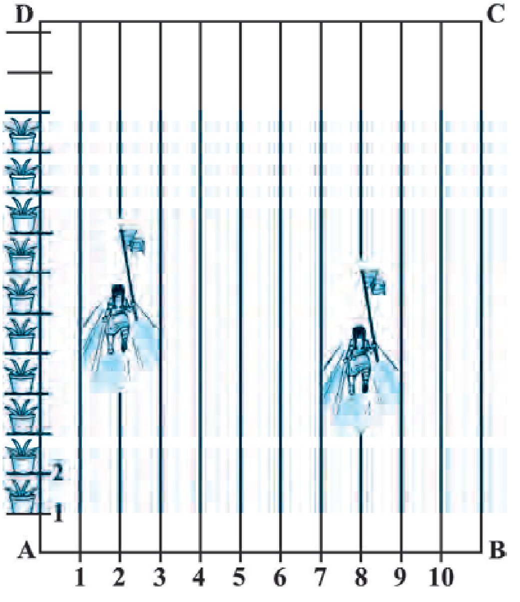
গতিকে, $\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$, অৰ্থাৎ, $p = 7$

অনুশীলনী 7.2

1. (–1, 7) আৰু (4, –3) ৰ সংযোগী ৰেখাখণ্ডক 2 : 3 অনুপাতত ভাগ কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

2. (4, –1) আৰু (–2, –3) ৰ সংযোগী ৰেখাখণ্ডক সমত্ৰিখণ্ডিত কৰা বিন্দু কেইটাৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

3. তোমালোকৰ স্কুলৰ আয়তাকাৰ খেল পথাৰ ABCD ত খেল দিৱস উপলক্ষে খেল-ধেমালি অনুষ্ঠিত কৰিবলৈ চক্ পাউদাৰেৰে 1 মিটাৰৰ ব্যৱধানত কিছুমান লাইন টনা হ'ল। 100 টা ফুলৰ টাব এটাৰ পৰা আনটোৰ ব্যৱধান 1 মিটাৰকৈ চিত্ৰ 7.12ত দেখুওৱাৰ দৰে ADৰ দিশত ৰখা হ'ল। নীহাৰিকাই দ্বিতীয় লাইন ডালেৰে ADৰ $\frac{1}{4}$ অংশ দৌৰি গৈ তাতে এখন সেউজীয়া পতাকা পুতি থলে। পদ্মই অষ্টম লাইন ডালেৰে ADৰ $\frac{1}{5}$ অংশ দৌৰি গৈ তাতে এখন ৰঙা পতাকা পুতি থ'লে। এই পতাকা দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব কিমান? যদি ৰশ্মিয়ে আগৰ পতাকা দুখন সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ ঠিক মধ্যস্থানত এখন নীলা পতাকা পুতিব লগা হয়, তেন্তে তেওঁ কোন স্থানত এই পতাকাখন পুতিব?



চিত্ৰ 7.12

4. (– 1, 6) বিন্দুটোৱে (– 3, 10) আৰু (6, – 8) বিন্দু সংযোগী ৰেখাক কি অনুপাতত ভাগ কৰিব?

5. A(1, – 5) আৰু B(– 4, 5) বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক x-অক্ষই কি অনুপাতত ছেদ কৰিব নিৰ্ণয় কৰা। লগতে ছেদ বিন্দুটোৰ স্থানাংকও উলিওৱা।

6. যদি (1, 2), (4, y), (x, 6) আৰু (3, 5) বিন্দুকেইটা এইটো ক্ৰমতে এটা সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষবিন্দু হয় তেন্তে x আৰু y উলিওৱা।

7. এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাস AB ৰ A বিন্দুটোৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ (2, – 3) আৰু B বিন্দুৰ স্থানাংক (1, 4)।

8. যদি A আৰু B বিন্দুৰ স্থানাংক ক্ৰমে (– 2, – 2) আৰু (2, – 4), তেন্তে P বিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা যাতে $AP = \frac{3}{7}AB$ আৰু P বিন্দুটো AB ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত থাকে।

9. A(– 2, 2) আৰু B(2, 8) বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক চাৰিটা সমান ভাগত ভাগ কৰা বিন্দু কেইটাৰ স্থানাংক উলিওৱা।

10. এটা ৰম্বাচৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যদিহে তাৰ শীৰ্ষ বিন্দু বিলাকৰ স্থানাংক ক্ৰম অনুসৰি (3, 0), (4, 5), (– 1, 4) আৰু (– 2, – 1)।

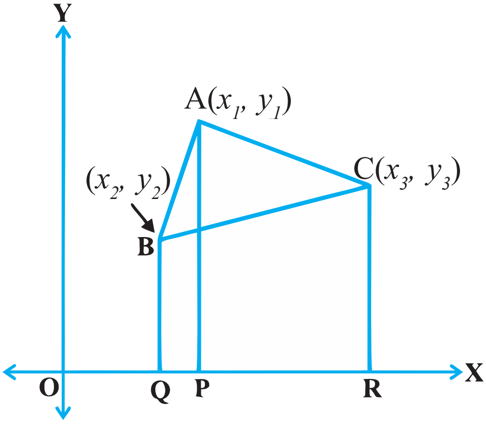
[**ইংগিত ঃ** ৰম্বাচৰ কালি = $\frac{1}{2}$ (কৰ্ণ দুডালৰ পূৰণফল)]

7.4. ত্ৰিভুজৰ কালি (Area of a Triangle)

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত ত্ৰিভুজৰ ভূমি আৰু উন্নতি দিয়া থাকিলে তাৰ কালি কেনেকৈ উলিয়াব লাগে এই বিষয়ে শিকি আহিছা। তেতিয়া তোমালোকে ব্যৱহাৰ কৰা সূত্ৰটো হ'ল

$$\textbf{ত্ৰিভুজৰ কালি} = \frac{1}{2} \times \textbf{ভূমি} \times \textbf{উন্নতি}$$

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে ত্ৰিভুজৰ কালি উলিয়াবলৈ হিৰণৰ সূত্ৰৰ ব্যৱহাৰৰ বিষয়েও পঢ়ি আহিছা। এতিয়া, তোমালোকক যদি এটা ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু বিলাকৰ স্থানাংক দিয়া হয় তোমালোকে ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিয়াব পাৰিবানে? পাৰিবা, তোমালোকে দূৰত্বৰ সূত্ৰৰ সহায়ত ত্ৰিভুজৰ বাহু তিনিটাৰ দীঘ উলিয়াই লৈ হিৰণৰ সূত্ৰত প্ৰয়োগ কৰিব পাৰিবা। কিন্তু এইটো বৰ আমনিদায়ক হ'ব, বিশেষকৈ যেতিয়া বাহু বিলাকৰ দীঘ অপৰিমেয় সংখ্যা হয়। বাৰু এতিয়া আমি কিবা সহজ নিয়ম আছে নেকি চাওঁ।



চিত্ৰ 7.13

ধৰা হ'ল ABC যিকোনো এটা ত্ৰিভুজ যাৰ শীৰ্ষ বিন্দু কেইটা হ'ল $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ আৰু $C(x_3, y_3)$। A, B আৰু C বিন্দুৰ পৰা x-অক্ষৰ ওপৰত ক্ৰমে AP, BQ আৰু CR লম্ব টনা হ'ল। স্পষ্টভাৱে, ABQP, APRC আৰু BQRC তিনিটা ট্ৰেপিজিয়াম (চিত্ৰ 7.13 চোৱা)।

এতিয়া চিত্ৰ 7.13 ৰ পৰা এইটো স্পষ্ট যে ΔABC ৰ কালি = ট্ৰেপিজিয়াম ABQP ৰ কালি + ট্ৰেপিজিয়াম APRC ৰ কালি – ট্ৰেপিজিয়াম BQRC ৰ কালি।

তোমালোকে এইটোৱো জানা যে—

এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ কালি = $\frac{1}{2}$(সমান্তৰাল বাহু দুটাৰ যোগফল) × (সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব)

গতিকে,

$$\Delta ABC \text{ ৰ কালি} = \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

গতিকে, ΔABC ৰ কালি তলৰ ৰাশিটোৰ সাংখ্যিক মান

$$\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

এতিয়া আমি কেইটামান উদাহৰণ ল'ম যি কেইটাত এই সূত্রটো ব্যৱহাৰ হয়।

উদাহৰণ 11 ঃ এটা ত্রিভুজৰ শীর্ষবিন্দুকেইটা (1, –1), (–4, 6) আৰু (–3, –5); ত্রিভুজটোৰ কালি উলিওৱা।

সমাধান ঃ ধৰো ত্রিভুজটোৰ শীর্ষবিন্দুকেইটা A(1, –1), B(–4, 6) আৰু C (–3, –5)। ওপৰৰ সূত্রৰ সহায়ত পাওঁ যে, ইয়াৰ কালি

$$= \frac{1}{2}\left[1(6+5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-1-6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(11 + 16 + 21) = 24$$

গতিকে, ত্রিভুজটোৰ কালি 24 বর্গ একক।

উদাহৰণ 12 ঃ A(5, 2), B(4, 7) আৰু C(7, –4) বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্রিভুজটোৰ কালি নির্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ A(5, 2), B(4, 7) আৰু C (7, – 4) বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্রিভুজটোৰ কালি

$$= \frac{1}{2}\left[5(7+4) + 4(-4-2) + 7(2-7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(55 - 24 - 35)$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

যিহেতু ত্রিভুজৰ কালি এটা মাপ গতিকে ই ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে। গতিকে, আমি –2 ৰ

সাংখ্যিক মান 2 হে গ্ৰহণ কৰিম।

গতিকে, ত্ৰিভুজটোৰ কালি = 2 বৰ্গ একক।

উধাহৰণ 13 ঃ P(–1.5, 3), Q(6, –2) আৰু R(–3, 4) বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি

$$= \frac{1}{2}[-1.5(-2-4) + 6(4-3) + (-3)(3+2)]$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 6 - 15) = 0$$

আমি এনে এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰো নেকি যাৰ কালি 0 বৰ্গ একক? ইয়াৰ অৰ্থ কি?

যদি এটা ত্ৰিভুজৰ কালি 0 বৰ্গ একক, তেন্তে তাৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটা একৰেখীয়।

উদাহৰণ 14 ঃ যদি A(2, 3), B(4, k) আৰু C(6, –3) বিন্দুকেইটা একৰেখীয় তেন্তে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু প্ৰদত্ত বিন্দুকেইটা একৰেখীয়, গতিকে এই বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি 0 হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ

$$\frac{1}{2}[2(k+3) + 4(-3-3) + 6(3-k)] = 0$$

অৰ্থাৎ, $\frac{1}{2}(-4k) = 0$

গতিকে, $k = 0$

আমি এতিয়া আমাৰ উত্তৰটো সত্যাপন কৰি চাওঁ

ΔABC ৰ কালি $= \frac{1}{2}[2(0+3) + 4(-3-3) + 6(3-0)] = 0$

উদাহৰণ 15 ঃ যদি A(–5, 7), B(– 4, –5), C(–1, –6) আৰু D(4, 5) বিন্দুকেইটা এটা চতুৰ্ভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু, তেন্তে ABCD চতুৰ্ভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যদি B আৰু D বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা হয় তেনেহ'লে আমি ABD আৰু BCD দুটা ত্ৰিভুজ পাম।

এতিয়া, ΔABDৰ কালি $= \frac{1}{2}[-5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5)]$

$$= \frac{1}{2}(50 + 8 + 48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ বৰ্গ একক।}$$

আকৌ ΔABCDৰ কালি $= \frac{1}{2}[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)]$

$= \frac{1}{2}(44-10+4)=19$ বৰ্গ একক।

সেয়ে ABCD চতুৰ্ভুজৰ কালি = 53 + 19 = 72 বৰ্গ একক।

টোকা ঃ এটা বহুভুজৰ কালি উলিয়াবলৈ হ'লে ইয়াক কিছুমান ত্ৰিভুজাকাৰ ক্ষেত্ৰত, যিবিলাকৰ কোনো উমৈহতীয়া কালি নাথাকে, বিভক্ত কৰি সেইবোৰৰ কালি উলিয়াই তাৰ যোগফল ল'ব লাগে।

অনুশীলনী 7.3

1. ত্ৰিভুজৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শীৰ্ষবিন্দুবিলাক হ'ল

(i) (2, 3), (–1, 0), (2, – 4)

(ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)

2. তলৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰত 'k' ৰ মান উলিওৱা যেতিয়া সেই বিন্দুবিলাক একৰেখীয়

(i) (7, –2), (5, 1), (3, k)

(ii) (8, 1), (k, – 4), (2, –5)

3. (0, –1), (2, 1) আৰু (0, 3) শীৰ্ষবিন্দু কেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ বাহুবিলাকৰ মধ্যবিন্দুকেইটা সংযোগ কৰি গঠন কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। এই ত্ৰিভুজটোৰ কালি আৰু প্ৰদত্ত ত্ৰিভুজটোৰ কালিৰ অনুপাত নিৰ্ণয় কৰা।

4. সেই চতুৰ্ভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শীৰ্ষবিন্দুবিলাক ক্ৰম অনুসৰি (–4, –2), (–3, –5), (3, –2) আৰু (2, 3)।

5. তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত (নৱম অধ্যায়, উদাহৰণ 3) পঢ়ি আহিছা যে ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা এডালে ত্ৰিভুজটোক দুটা ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে যাৰ কালি সমান। ΔABC ৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ সত্যাপন কৰা যদি ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটা A(4, – 6), B(3, –2) আৰু C(5, 2)।

অনুশীলনী 7.4 (ঐচ্ছিক)*

1. $2x + y - 4 = 0$ ৰেখাই A(2, – 2) আৰু B(3, 7) বিন্দু সংযোগীৰেখাক ভাগ কৰা অনুপাতটো নিৰ্ণয় কৰা।

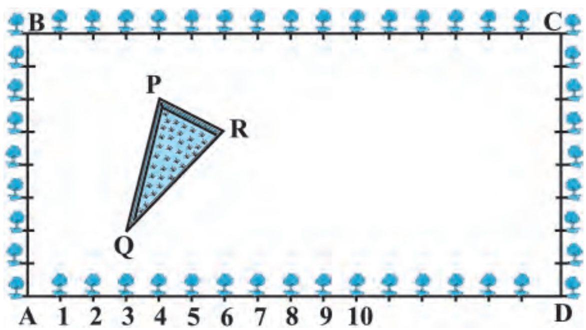
2. x আৰু y ৰ মাজৰ এটা সম্পৰ্ক উলিওৱা, যদি (x, y), (1, 2) আৰু (7, 0) বিন্দুকেইটা একৰেখীয়।

3. (6, –6), (3, –7) আৰু (3, 3) বিন্দুৰে যোৱা বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ উলিওৱা।

* এই অনুশীলনীটো পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

4. এটা বৰ্গৰ দুটা বিপৰীত শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল (–1, 2) আৰু (3, 2) । বৰ্গৰ আন দুটা শীৰ্ষবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

5. কৃষ্ণনগৰৰ এখন মাধ্যমিক বিদ্যালয়ৰ দশম শ্ৰেণীৰ শিক্ষাৰ্থীসকলক বাগিচা পাতিবৰ বাবে এটুকুৰা আয়তাকাৰ মাটি আবণ্টন দিয়া হ'ল। মাটি টুকুৰাৰ সীমাত 1 মিটাৰৰ আঁতৰে আঁতৰে কৃষ্ণচূড়াৰ পুলি ৰোপণ কৰা হ'ল। চিত্ৰ 7.14 ত দিয়াৰ দৰে মাটি টুকুৰাত ত্ৰিভুজাকাৰৰ অলপমান ঘাঁহনি আছে। শিক্ষাৰ্থীবিলাকে মাটি টুকুৰাৰ অৱশিষ্ট অংশত ফুলৰ গুটি সিঁচিব লাগে।



চিত্ৰ 7.14

(i) A বিন্দুক মূলবিন্দু ধৰি ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দু বিলাকৰ স্থানাংক উলিওৱা।

(ii) যদি C ক মূলবিন্দু বুলি ধৰা হয় তেনেহ'লে ΔPQR ৰ শীৰ্ষবিন্দুবিলাকৰ স্থানাংক কি হ'ব? এই পৰিস্থিতি কেইটাত ত্ৰিভুজ দুটাৰ কালি উলিওৱা।

ইয়াৰ পৰা তোমালোকে কি লক্ষ্য কৰিলা?

6. ΔABC ৰ শীৰ্ষবিন্দু কেইটা A(4, 6), B(1, 5) আৰু C(7, 2) । এডাল ৰেখা এনেভৰে টনা হ'ল যে ই AB আৰু AC ক ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত ছেদ কৰে আৰু তেতিয়া $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ হয়। ΔADE ৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা আৰু এই মান ΔABC ৰ কালিৰ লগত তুলনা কৰা। (উপপাদ্য 6.2 আৰু 6.6 মনত পেলোৱা)।

7. ধৰাহ'ল, A(4, 2), B(6, 5) আৰু C(1, 4) বিন্দুকেইটা ΔABC ৰ শীৰ্ষবিন্দু.

(i) A ৰ পৰা টনা মধ্যমাই BC ক D বিন্দুত ছেদ কৰে। D বিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) AD ৰ ওপৰত P বিন্দুটো এনেভাবে আছে যে AP : PD = 2 : 1; P ৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) Q আৰু R বিন্দু দুটা ক্ৰমে BE আৰু CF মধ্যমাৰ ওপৰত আছে যাতে BQ : QE = 2 : 1 আৰু CR : RF = 2 : 1; Q আৰু Rৰ স্থানাংক উলিওৱা।

(iv) ইয়াৰপৰা তোমালোকে কি লক্ষ্য কৰিলা?

[**টোকা** ঃ ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা তিনিডালৰ উমৈহতীয়া বিন্দুটোক ভাৰকেন্দ্ৰ (*centroid*) বুলি কোৱা হয় আৰু ই মধ্যমা এডালক 2 : 1 অনুপাতত ভাগ কৰে।]

(v) যদি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ আৰু $C(x_3, y_3)$ বিন্দুকেইটা ΔABC ৰ শীৰ্ষবিন্দু, তেনেহ'লে ত্ৰিভুজটোৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ স্থানাংক উলিওৱা।

8. ABCD আয়তটো A(–1, –1), B(– 1, 4), C(5, 4) আৰু D(5, – 1) বিন্দুকেইটাৰে গঠিত। P, Q, R আৰু S বিন্দু কেইটা AB, BC, CD আৰু DA ৰ মধ্যবিন্দু। PQRS চতুৰ্ভুজটো বৰ্গ নে? নে আয়ত? নে এটা ৰম্বাচ? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা আগবঢ়োৱা।

7.5 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া মূল কথা কেইটা অধ্যয়ন কৰিলা

1. $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব হ'ল $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. মূল বিন্দুৰ পৰা $P(x, y)$ বিন্দুৰ দূৰত্ব হ'ল $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰা $P(x, y)$ বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ল $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

4. $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

5. (x_1, y_1), (x_2, y_2) আৰু (x_3, y_3) বিন্দু তিনিটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি তলৰ ৰাশিটোৰ সাংখ্যিক মানৰ সমান $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

অনুচ্ছেদ 7.3 ত আলোচনা কৰা বিভাজন সূত্ৰটোত $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰা P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y) তলত দিয়াৰ দৰে পোৱা যায়- $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$, $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

মন কৰা যে ইয়াত, $PA : PB = m_1 : m_2$. যদিহে P বিন্দুটো A আৰু B ৰ মাজত নাথাকি AB ৰেখাৰ ওপৰত AB ৰেখাখণ্ডৰ বাহিৰত থাকে আৰু $PA : PB = m_1 : m_2$, তেতিয়া কওঁযে P য়ে AB ক বহিৰ্বিভক্ত কৰিছে। এই পৰিস্থিতিত যিটো বিভাজন সূত্ৰ হ'ব এই বিষয়ে ওপৰৰ শ্ৰেণীত পঢ়িবলৈ পাবা।

R6V8G8

ত্ৰিকোণমিতিৰ পৰিচয় (Introduction to Trigonometry)

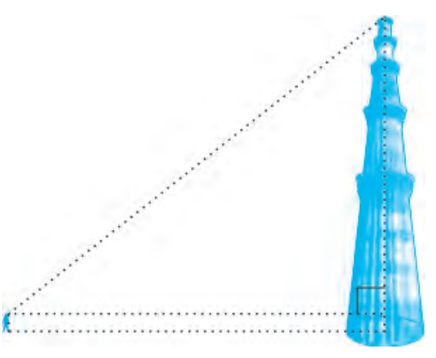
অষ্টম অধ্যায়

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

– J.F. Herbart (1890)

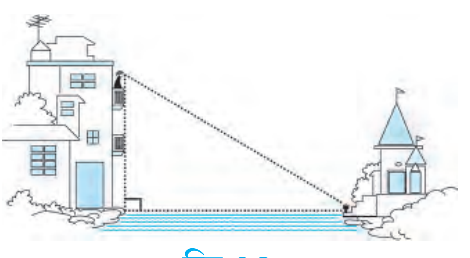
8.1 অৱতাৰণা (Introduction)

তোমালোকে ইতিমধ্যে ত্ৰিভুজৰ বিষয়ে, বিশেষকৈ সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বিষয়ে, আগৰ শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰিছা। আমাৰ চৌপাশৰপৰা এতিয়া কিছুমান উদাহৰণ লওঁ যিবিলাকত সমকোণী ত্ৰিভুজ গঠন হৈছে বুলি কল্পনা কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে



চিত্ৰ 8.1

1. ধৰা হ'ল এখন স্কুলৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীবিলাক কুতুব মিনাৰ দৰ্শন কৰিবলৈ গ'ল। এজন ছাত্ৰই যদি মিনাৰটোৰ শীৰ্ষলৈ চায় তেনেহ'লে চিত্ৰ 8.1ত দিয়াৰ দৰে এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ গঠন হৈছে বুলি কল্পনা কৰিব পাৰি। প্ৰকৃততে নোজোখাকৈ ছাত্ৰজনে মিনাৰটোৰ উচ্চতা উলিয়াব পাৰিবনে?

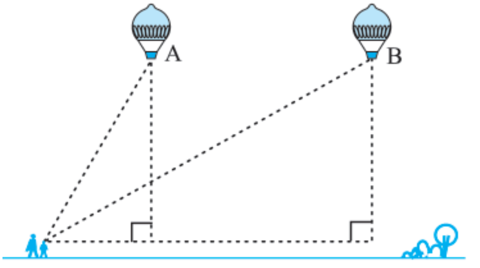


চিত্ৰ 8.2

2. ধৰা হ'ল এজনী ছোৱালী নদীৰ পাৰত অৱস্থিত তেওঁলোকৰ ঘৰটোৰ বেলকনিত বহি আছে। তাই নদীখনৰ সিপাৰে থকা মন্দিৰ এটাৰ খট্‌খটিৰ ফুলৰ টাব এটালৈ তলৰ দিশে চাই

আছে। এই ক্ষেত্ৰতো চিত্ৰ 8.2ত দিয়াৰ দৰে এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ গঠন হোৱা বুলি কল্পনা কৰিব পাৰি। যদি তোমালোকে ছোৱালীজনী বহি থকা স্থানৰ উচ্চতা জানা, তেনেহ'লে নদীখন কিমান বহল উলিয়াব পাৰিবানে?

3. ধৰা হ'ল গৰম বায়ুপূৰ্ণ বেলুন এটা ওপৰত আছে। ছোৱালী এজনীয়ে আকাশত বেলুনটো দেখা পালে আৰু মাকক ক'বলৈ ভিতৰলৈ দৌৰি গ'ল। মাকে বেলুনটো চাবলৈ ততা তৈয়াকৈ বাহিৰলৈ আহিল। ছোৱালীজনীয়ে প্ৰথমতে দেখোতে বেলুনটো A স্থানত আছিল। কিন্তু পিচৰবাৰ মাক আৰু জীয়েক দুয়ো যেতিয়া বেলুনটো চাবলৈ আহিছিল তেতিয়া ই উৰি গৈ আন এটা স্থান B পালে গৈ। এতিয়া তোমালোকে মাটিৰ পৰা বেলুনটোৰ উন্নতি উলিয়াব পাৰিবানে?



চিত্ৰ 8.3

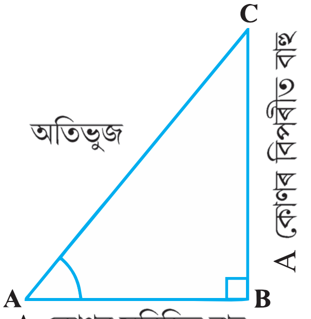
ওপৰৰ এই আটাইকেইটা অৱস্থাতেই দূৰত্ব বা উচ্চতা উলিয়াবলৈ কিছুমান গাণিতিক কৌশল প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি যিটো গণিতৰ এটা ভাগ 'ত্ৰিকোমিতি'ত অধ্যয়ন কৰা হয়। এই ত্ৰিকোণমিতি শব্দটো গ্ৰীক ভাষাৰ 'Tri' (যাৰ অৰ্থ 'তিনি'), 'gon' (যাৰ অৰ্থ 'বাহু') আৰু 'metron' (যাৰ অৰ্থ 'জোখ')ৰ পৰা লোৱা হৈছে। দৰাচলতে ত্ৰিকোণমিতি হ'ল ত্ৰিভুজৰ কোণ আৰু বাহুৰ সম্পৰ্ক আলোচনা কৰা এটা বিষয়। ত্ৰিকোণমিতিৰ চৰ্চাৰ প্ৰাচীনতম তথ্য ইজিপ্ত আৰু বেবিলনত পোৱা গৈছে। আগৰ দিনৰ জ্যোতিৰ্বিদসকলে ইয়াৰ সহায়ত পৃথিৱীৰ পৰা গ্ৰহ-নক্ষত্ৰবিলাকৰ দূৰত্ব উলিয়াইছিল। আনহে নালাগে এতিয়াও, ইঞ্জিনীয়াৰিং আৰু ভৌতিক বিজ্ঞানত ব্যৱহৃত বেছিভাগ প্ৰযুক্তি বিদ্যাৰ উন্নত পদ্ধতি ত্ৰিকোণমিতিৰ ধাৰণাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত।

এই অধ্যায়ত, এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ সূক্ষ্মকোণ বিলাকৰ সাপেক্ষে তাৰ বাহুবিলাকৰ কিছুমান অনুপাতৰ বিষয়ে আমি আলোচনা কৰিম। এই অনুপাত বিলাকক '**কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত**' (**trigonometric ratios of the angle**) বোলে। আমাৰ আলোচনা মাত্ৰ সূক্ষ্ম কোণতেই সীমাবদ্ধ থাকিব। সেয়ে হ'লেও, এই অনুপাত অন্য কোণলৈও সম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি। আমি ইয়াত 0° আৰু 90° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰো সংজ্ঞা দাঙি ধৰিম। আমি কিছুমান বিশেষ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত গণনা কৰিম আৰু এই অনুপাত বিলাকক জড়িত কৰি কিছুমান অভেদ উলিয়াম। এই অভেদবিলাকক 'ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ' (**trigonometric identities**) বোলে।

8.2. ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios)

অনুচ্ছেদ 8.1ত তোমালোকে দেখিছা যে বেলেগ বেলেগ পৰিস্থিতিত কিছুমান সমকোণী ত্ৰিভুজ কল্পনা কৰিব পাৰি।

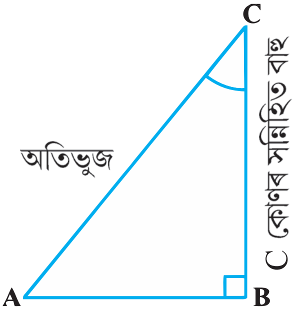
এতিয়া চিত্ৰ 8.4ত দিয়াৰ দৰে আমি ABC সমকোণী ত্ৰিভুজ এটা লওঁ।



চিত্ৰ 8.4

ইয়াত, ∠CAB (বা চমুকৈ কোণ A) এটা সূক্ষ্মকোণ। A কোণৰ সাপেক্ষে BC বাহুৰ অৱস্থান মন কৰা। ইয়াৰ সন্মুখত ∠A আছে। আমি ইয়াকে A কোণৰ 'বিপৰীত বাহু' বুলি কওঁ। এই সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ AC হ'ল অতিভুজ আৰু AB বাহুটো ∠Aৰ এটা অংশ। আমি ইয়াকে A কোণৰ 'সন্নিহিত বাহু' বুলি কওঁ।

মনত ৰাখিবা যে এই বাহুকেইটাৰ স্থান সলনি হ'ব যদিহে A কোণৰ ঠাইত আমি C কোণ লওঁ (চিত্ৰ 8.5 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.5

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত অনুপাতৰ বিষয়ে পঢ়ি আহিছা। এতিয়া আমি সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বাহুবিলাকক জড়িত কৰি কিছুমান নিৰ্দিষ্ট অনুপাতৰ সংজ্ঞা আগবঢ়াম আৰু এই বিলাকক ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বুলি ক'ম।

ABC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ (চিত্ৰ 8.4 চোৱা) A কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবিলাকৰ সংজ্ঞা হ'ল—

$$\angle A\text{ৰ sine} = \frac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A\text{ৰ cosine} = \frac{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A\text{ৰ tangent} = \frac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A\text{ৰ cosecant} = \frac{1}{\angle A\text{ৰ sine}} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A\text{ৰ secant} = \frac{1}{\angle A\text{ৰ cosine}} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A\text{ৰ cotangent} = \frac{1}{\angle A\text{ৰ tangent}} = \frac{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}} = \frac{AB}{BC}$$

ওপৰত দিয়া এই অনুপাত বিলাকক চমুকৈ sinA, cosA, tanA, cosecA, secA আৰু cotA বুলি ক্ৰম অনুসৰি লিখা হয়। মন কৰা যে cosecA, secA আৰু cotA ক্ৰমে sinA, cosA আৰু tanAৰ অনোন্যক।

তদুপৰি মন কৰা যে $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ আৰু $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

গতিকে এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ এটা সূক্ষ্মকোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতে ত্ৰিভুজটোৰ কোণটো আৰু বাহু বিলাকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক প্ৰকাশ কৰে।

এতিয়া তোমালোকে C কোণৰ (চিত্ৰ 8.5 চোৱা) ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ সংজ্ঞা দিবলৈ যত্ন নকৰানো কিয়?

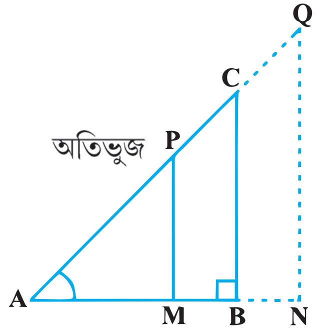
আমি আজি **'sine'** ৰ ব্যৱহাৰ যিদৰে কৰোঁ ইয়াৰ ধাৰণা 500 খৃষ্টাব্দত ৰচিতআৰ্য্যভটৰ 'আৰ্য্যভটীয়'ত পোৱা যায়। আৰ্য্যভটই জ্যা এডালৰ আধাৰ বাবে 'অৰ্ধ জ্যা' (***ardha-jya***) শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰিছিল আৰু কালক্ৰমত ইয়েই চমুকৈ 'জ্যা' বা জিৱা' (***jya*** or ***jiva***) হ'ল। যেতিয়া আৰ্য্যভটীয় আৰবী ভাষালৈ অনুবাদ কৰা হৈছিল তেতিয়া তাত 'জিৱা' শব্দটো ৰখা হৈছিল। কিন্তু এই আৰবী সংস্কৰণটো লেটিন ভাষালৈ অনুবাদ কৰোতে 'জিৱা (***jiva***)ক '***sinus***' হিচাপে অনুবাদ কৰা হৈছিল। অতি সোনকালেই এই '***sinus***' শব্দটো, চমুকৈ ***sine,*** ইউৰোপৰ গণিতিক পাঠ্যপুথিত প্ৰচলিত হ'বলৈ ধৰিলে। জ্যোতিৰ্বিজ্ঞানৰ ইংৰাজ প্ৰফেছৰ এডমাণ্ড গুন্টাৰে (1581–1626) চমুকৈ লিখা '***sin***' চিহ্নটো প্ৰথমে ব্যৱহাৰ কৰিছিল।

আৰ্য্যভট
A.D. 476 – 550

cosine আৰু **tangent** শব্দ দুটাৰ উদ্ভৱ যথেষ্ট পিছৰ। পূৰক কোণৰ Sine গণনাৰ প্ৰয়োজনত cosine ফলনৰ উদ্ভৱ হৈছিল। আৰ্য্যভটই ইয়াক 'কোটি জ্যা' (**kotijya**) নাম দিছিল। এডমাণ্ড গুন্টাৰে '***cosinus***' নামটো পোনতে ব্যৱহাৰ কৰিছিল। 1674 চনত ইংৰাজ গণিতজ্ঞ ছাৰ জ'নাছ মোৰে ইয়াৰ চমুৰূপ **'*cos*'** চিহ্নটো প্ৰথমে ব্যৱহাৰ কৰিছিল।

মন্তব্য ঃ মন কৰিবা যে ‘sinA’ প্ৰতীকটো ‘Sine of the angle A’ ৰ সংক্ষিপ্তৰূপ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। sinA টো sin আৰু A ৰ পূৰণফল নহয়। A নিদিয়াকৈ sin লিখিলে তাৰ কোনো অৰ্থ নাথাকে। একেদৰে cosA টো ‘cos’ আৰু Aৰ পূৰণফল নহয়। একে কথাই অন্য কেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য হয়।

এতিয়া সমকোণী ত্ৰিভুজ ABC ৰ AC অতিভুজৰ ওপৰত P এটা বিন্দু লৈ ABৰ ওপৰত PM লম্ব টনা হ’ল অথবা ACৰ বৰ্ধিত অংশত Q এটা বিন্দু লৈ ABৰ বৰ্ধিত অংশত QN এডাল লম্ব টনা হ’ল। (চিত্ৰ 8.6 চোৱা)। এনে অৱস্থাত ΔPAMৰ $\angle$A ৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ লগত ΔCABৰ $\angle$A ৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাকৰ কি প্ৰভেদ থাকিব অথবা ΔQAN ৰ $\angle$A ৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাকৰ কি প্ৰভেদ থাকিব?



চিত্ৰ 8.6

ইয়াৰ উত্তৰৰ বাবে এতিয়া ত্ৰিভুজ কেইটালৈ চোৱা। ΔPAM আৰু ΔCAB সদৃশনে? অনুচ্ছেদ 6 ৰ পৰা ‘কোণ কোণ’ সাদৃশ্য চৰ্ত মনত পেলোৱা। এই চৰ্তৰপৰা দেখা পাবা যে ΔPAM আৰু ΔCAB সদৃশ। গতিকে সদৃশ ত্ৰিভুজৰ ধৰ্মৰপৰা পাওঁ যে অনুৰূপ বাহুবিলাক সমানুপাতিক।

গতিকে আমি পাওঁ $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{MP}{BC}$.

ইয়াৰপৰা পাওঁ যে $\dfrac{MP}{AP}=\dfrac{BC}{AC}=\sin A$.

সেইদৰে, $\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{AB}{AC}=\cos A$, $\dfrac{MP}{AM}=\dfrac{BC}{AB}=\tan A$, ইত্যাদি।

ইয়াৰপৰা দেখা গ’ল যে ΔPAM ৰ A কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাক ΔCAB ৰ A কোণৰ পৰস্পৰ অনুপাতবিলাকৰে সৈতে বেলেগ নহয়।

একেদৰে তোমালোকে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা যে sinA ৰ মান (আৰু লগতে আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাকো) ΔQAN ৰ ক্ষেত্ৰতো একে থাকে।

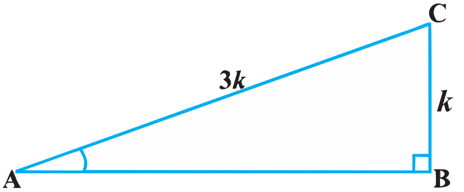
এই পৰ্য্যবেক্ষণৰপৰা এতিয়া স্পষ্ট যে যদি কোণটো একে থাকে তেনেহ’লে ত্ৰিভুজৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্যৰ পৰিবৰ্তনত এটা কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ পৰিবৰ্তন নঘটে।

টোকা ঃ সুবিধাৰ বাবে, $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ ইত্যাদি ঠাইত আমি ক্ৰমে $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ইত্যাদি লিখিব পাৰোঁ। কিন্তু $\text{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ । ইয়াত $\sin^{-1} A$ ক ‘sin inverse A’

বুলি পঢ়া হয়। $\sin^{-1}A$ৰ এটা বেলেগ অৰ্থ আছে যিটো তোমালোকে ওপৰৰ শ্ৰেণীত পঢ়িবলৈ পাবা। এই কথাখিনি আন কেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ ক্ষেত্ৰটো প্ৰযোজ্য। কেতিয়াবা গ্ৰীক আখৰ ‘θ’ (theta) কো কোণ বুজাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

আমি এটা সূক্ষ্ম কোণৰ 6 টা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ সংজ্ঞা দিলোঁ। যদি আমি যিকোনো এটা অনুপাত জানো তেনেহ'লে অন্য অনুপাতকেইটা উলিয়াব পাৰিমনে? বাৰু, এইটো আমি চাওঁ।

যদি ABC সমকোণী ত্ৰিভুজটোত $\sin A = \frac{1}{3}$, তেন্তে ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ অৰ্থাৎ, ABC ত্ৰিভুজৰ BC আৰু AC বাহুদুটাৰ দীঘৰ অনুপাত 1 : 3 (চিত্ৰ 8.7 চোৱা)। সেয়ে, যদি $BC = k$, তেন্তে AC হ'ব $3k$, য'ত k হ'ল এটা ধনাত্মক সংখ্যা। এতিয়া A কোণৰ অন্যকেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত উলিয়াবৰ কাৰণে আমি তৃতীয় বাহু AB ৰ দীঘ উলিয়াব লাগিব। তোমালোকৰ পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যটো মনত আছেনে? ইয়াৰ সহায়ত AB ৰ দীঘ উলিয়াব লাগিব।



চিত্ৰ 8.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

গতিকে, $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

গতিকে, আমি লওঁ $AB = 2\sqrt{2}\,k$ (আমি $-2\sqrt{2}\,k$ কিয় নল'লো?)

এতিয়া, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}\,k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

একেদৰে তোমালোকে A কোণৰ আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাক উলিয়াব পাৰিবা।

মন্তব্য ঃ যিহেতু এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ অতিভুজডালেই দীৰ্ঘতম বাহু, গতিকে sinA বা cosAৰ মান সদায় 1তকৈ সৰু (বা বিশেষ ক্ষেত্ৰত 1ৰ সমান হ'ব পাৰে)। বাৰু এতিয়া কেইটামান উদাহৰণ লোৱা হ'ল।

উদাহৰণ 1 ঃ যদি $\tan A = \frac{4}{3}$, তেন্তে A কোণৰ আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ উলিওৱা।

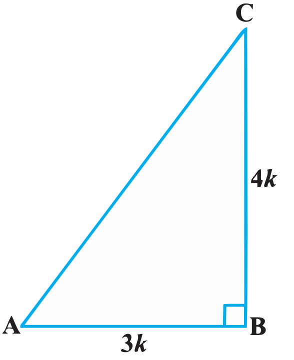
সমাধান ঃ প্ৰথমে ΔABC সমকোণী ত্ৰিভুজটো অংকন কৰা হ'ল (চিত্ৰ 8.8)। এতিয়া আমি জানো যে $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$.

গতিকে, যদি BC = $4k$, তেন্তে AB = $3k$, য'ত k এটা ধনাত্মক সংখ্যা।

এতিয়া পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

গতিকে, AC = $5k$



চিত্ৰ 8.8

এতিয়া আমি সংজ্ঞাৰ সহায়ত গোটেইকেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত লিখিব পাৰিম

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

গতিকে, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$

আৰু $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$.

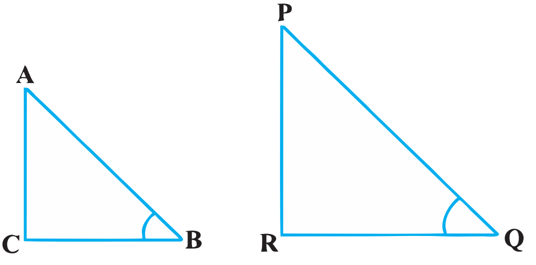
উদাহৰণ 2 ঃ যদি $\angle B$ আৰু $\angle Q$ সূক্ষ্ম কোণ দুটা এনে ধৰণৰ যে $\sin B = \sin Q$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\angle B = \angle Q$.

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল ABC আৰু PQR দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজ আৰু $\sin B = \sin Q$ (চিত্ৰ 8.9 চোৱা)

আমি পাওঁ, $\sin B = \frac{AC}{AB}$

আৰু $\sin Q = \frac{PR}{PQ}$

সেয়েহে, $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$



চিত্ৰ 8.9

গতিকে, $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$ (ধৰাহ'ল) ..... (1)

এতিয়া, পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} \text{ আৰু } QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

গতিকে, $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$

$$= \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$$

$$= \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \qquad ..... (2)$$

এতিয়া (1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি পাওঁ যে,

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

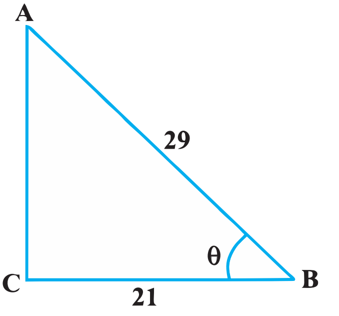
সেয়েহে, উপপাদ্য 6.4 ৰ পৰা পাওঁ যে $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ আৰু সেই গতিকে, $\angle B = \angle Q$.

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰাহ'ল ΔACB ৰ C কোণ সমকোণ আৰু AB = 29 একক, BC = 21 একক আৰু $\angle ABC = \theta$ (চিত্ৰ 8.10 চোৱা)।

তলত দিয়া মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা-

(i) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$,

(ii) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.



চিত্ৰ 8.10

সমাধান ঃ ΔACB ৰ পৰা আমি পাওঁ,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)(29+21)}$$

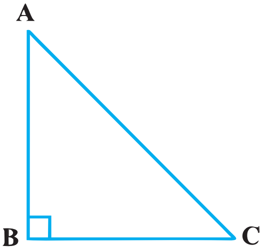
$$= \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ একক।}$$

গতিকে, $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$.

এতিয়া, (i) ৰ বাবে, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400+441}{841} = 1$,

আৰু (ii) ৰ বাবে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$.

উদাহৰণ 4 ঃ ABC ত্ৰিভুজৰ যদি B কোণ সমকোণ আৰু $\tan A = 1$, তেন্তে দেখুওৱা যে $2\sin A \cos A = 1$.



চিত্ৰ 8.11

সমাধান ঃ ΔABC ৰ পৰা, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (চিত্ৰ 8.11 চোৱা)।

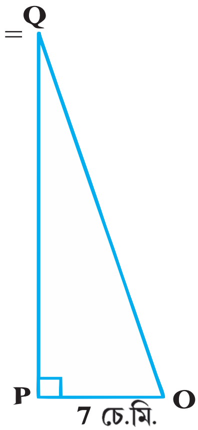
অৰ্থাৎ, $BC = AB$

ধৰাহ'ল $BC = AB = k$, ইয়াত k এটা ধনাত্মক সংখ্যা।

এতিয়া, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

গতিকে, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ আৰু $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সেয়ে, $2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, ইয়েই উলিয়াব লগা মান।



চিত্ৰ 8.12

উদাহৰণ 5 ঃ ΔOPQ ৰ P সমকোণ আৰু $OP = 7cm$ আৰু $OQ - PQ = 1cm$ (চিত্ৰ 8.12 চোৱা)। $\sin Q$ আৰু $\cos Q$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ΔOPQ ৰ পৰা পাওঁ, $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

অৰ্থাৎ, $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (কিয় ?)

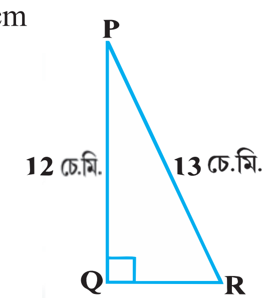
অৰ্থাৎ, $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

অৰ্থাৎ, $1 + 2PQ = 7^2$ (কিয় ?)

অৰ্থাৎ, $PQ = 24cm$ আৰু $OQ = 1 + PQ = 25cm$

গতিকে, $\sin Q = \frac{7}{25}$ আৰু $\cos Q = \frac{24}{25}$.

অনুশীলনী 8.1



চিত্ৰ 8.13

1. ΔABC ত্ৰিভুজৰ B কোণ সমকোণ আৰু $AB = 24cm$, $BC=7cm$ হ'লে তলত দিয়াবিলাক উলিওৱাঃ
   (i) $\sin A$, $\cos A$
   (ii) $\sin C$, $\cos C$
2. চিত্ৰ 8.13 ৰ পৰা $\tan P - \cot R$ নিৰ্ণয় কৰা।
3. যদি $\sin A = \frac{3}{4}$, তেন্তে $\cos A$ আৰু $\tan A$ উলিওৱা।
4. দিয়া আছে যে, $15 \cot A = 8$, তেন্তে $\sin A$ আৰু $\sec A$ উলিওৱা।
5. দিয়া আছে যে, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ গণনা কৰা।

6. যদি $\angle A$ আৰু $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ হয় যাতে $\cos A = \cos B$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\angle A = \angle B$.

7. যদি $\cot\theta = \frac{7}{8}$, তেন্তে মান উলিওৱা

(i) $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$,

(ii) $\cot^2\theta$

8. যদি $3\cot A = 4$, তেন্তে $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ হ'বনে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

9. ΔABC ৰ B কোণ সমকোণ। যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, তেন্তে তলৰ মান বিলাক উলিওৱা

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10. ΔPQR ৰ Q কোণ সমকোণ আৰু $PR + QR = 25$cm আৰু $PQ = 5$cm. $\sin P$, $\cos P$ আৰু $\tan P$ ৰ মান উলিওৱা।

11. তলত দিয়াবিলাক সত্য নে অসত্য কোৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ যথাৰ্থতা উল্লেখ কৰা

(i) $\tan A$ ৰ মান সদায় 1 তকৈ সৰু।

(ii) A কোণৰ কোনো মানৰ বাবে $\sec A = \frac{12}{5}$

(iii) 'cosecant of angle A' ৰ সংক্ষিপ্ত ৰূপ হিচাপে $\cos A$ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(iv) cot আৰু A ৰ পূৰণফল হ'ল $\cot A$.

(v) কোনো এটা কোণ 'θ' ৰ বাবে $\sin\theta = \frac{4}{3}$

8.3 কেইটামান বিশেষ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Some Specific Angles)

জ্যামিতিৰ পৰা ইতিমধ্যে তোমালোকে 30°, 45°, 60° আৰু 90° কোণৰ অংকন পদ্ধতিৰ বিষয়ে জানা। এই অনুচ্ছেদত এই কোণবিলাকৰ, আৰু লগতে 0° কোণৰো, ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ মানবিলাক নিৰ্ণয় কৰিম।

45° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratio of 45°)

ΔABC ৰ B কোণটো সমকোণ আৰু যদি আন দুটাৰ এটা কোণ 45° হয় তেন্তে ইটো কোণো

45° হ'ব, অৰ্থাৎ, $\angle A = \angle C = 45°$ (চিত্ৰ 8.14 চোৱা)।

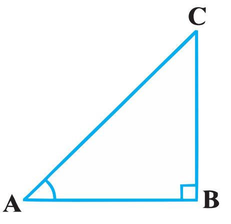
গতিকে BC = AB (কিয়?)

এতিয়া, ধৰা হ'ল $BC = AB = a$.

সেয়ে, পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

গতিকে, $AC = a\sqrt{2}$.



চিত্ৰ 8.14

এতিয়া ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ সংজ্ঞাৰপৰা পাওঁ যে—

$$\sin 45° = \frac{45° \text{ কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{45° \text{ কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{45° \text{ কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{45° \text{ কোণৰ সন্নিহিত বাহু}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

তদুপৰি, $\operatorname{cosec} 45° = \dfrac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$,

$$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2},$$

$$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1.$$

30° আৰু 60° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of 30° and 60°)

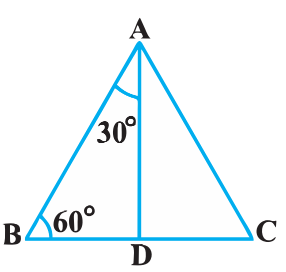
এতিয়া আমি 30° আৰু 60° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত গণনা কৰিম। ABC সমবাহু ত্ৰিভুজটো লোৱা। যিহেতু এটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ প্ৰতিটো কোণেই 60°, গতিকে $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

A বিন্দুৰপৰা BC বাহুৰ ওপৰত AD লম্ব টনা হ'ল (চিত্ৰ 8.15 চোৱা)।

এতিয়া, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (কিয়?)

এতেকে, $BD = DC$

আৰু $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)



চিত্ৰ 8.15

এতিয়া মন কৰা যে,

ΔABD সমকোণী আৰু D কোণ সমকোণ।

ইয়াত $\angle BAD = 30°$ আৰু $\angle ABD = 60°$ (চিত্ৰ 8.15 চোৱা)।

তোমালোকে জানা যে ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ বাবে আমাক ত্ৰিভুজ এটাৰ বাহু বিলাকৰ দীঘ লাগে। গতিকে ধৰাহ'ল $AB = 2a$.

সেয়ে, $BD = \frac{1}{2}BC = a$ আৰু $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$,

গতিকে, $AD = a\sqrt{3}$

এতিয়া আমি পাওঁ, $\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$,

$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

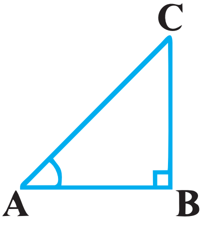
তদুপৰি, $\text{cosec}30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2$, $\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$.

একেদৰে, $\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$,

$\text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec 60° = 2$ আৰু $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

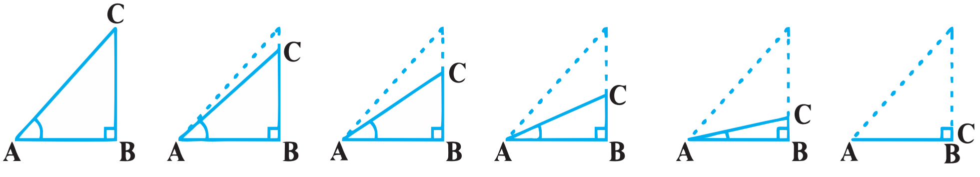
0° আৰু 90° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of 0° and 90°)

যদি ABC সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ A কোণটোকে ক্ৰমান্বয়ে সৰু কৰি গৈ থকা যায় আৰু এই কামটো A কোণটো শূন্য হোৱালৈকে কৰি থকা হয়, তেতিয়া A কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ কি হয় চোৱা যাওঁক (চিত্ৰ 8.16 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.16

যিহেতু A কোণৰ মানটো ক্ৰমে সৰু হৈ যায়, সেয়ে BC বাহুৰ দীঘো কমি আহে। এইদৰে C বিন্দুটো B ৰ কাষ চাপি আহি অৱশেষত A কোণটো 0° ৰ প্ৰায় ওচৰ চাপে আৰু AC প্ৰায় AB ৰ সমান হয় (চিত্ৰ 8.17)।



চিত্ৰ 8.17

যেতিয়া $\angle A$ ৰ মান প্ৰায় $0°$ ৰ ওচৰ চাপে তেতিয়া BC ৰ দীঘ প্ৰায় 0 ৰ সমান হয় আৰু সেয়ে $\sin A = \frac{BC}{AC}$ ৰ মান প্ৰায় 0 ৰ সমান হয়। আকৌ $\angle A$ ৰ মান $0°$ ৰ ওচৰ চপাৰ লগে লগে AC আৰু AB প্ৰায় সমান হয় আৰু সেয়ে $\cos A = \frac{AB}{AC}$ ৰ মান প্ৰায় 1ৰ সমান হয়।

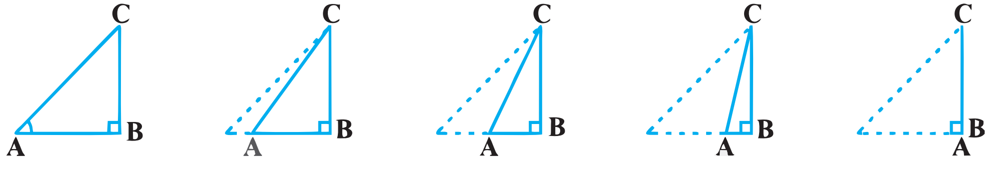
ইয়েই আমাক $A = 0°$ হওঁতে sinA আৰু cosA ৰ মানৰ সংজ্ঞা দিয়াত সহায় কৰিছে। আমি এতিয়া কওঁ যে, $\sin 0° = 0$ আৰু $\cos 0° = 1$.

ইয়াৰপৰাই আমি পাওঁ, $\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0$,

$\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}$, যিটো সংজ্ঞাবদ্ধ নহয় (কিয়?)

$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$ আৰু $\operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°}$, ইয়ো সংজ্ঞাবদ্ধ নহয় (কিয়?)

এতিয়া $\angle A$ কোণৰ মান ই $90°$ নোহোৱালৈকে বঢ়াই গৈ থাকিলে $\angle A$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ কি হয় চোৱা যাওঁক। $\angle A$ ডাঙৰ হৈ যোৱাৰ লগে লগে $\angle C$ ক্ৰমে সৰু হৈ যাব। সেয়ে ওপৰৰ অৱস্থাৰ দৰে, AB বাহুৰ দীঘ কমি কমি গৈ থাকিব। A বিন্দুটো ক্ৰমে Bলৈ চলি যাব। অৱশেষত $\angle A$ যেতিয়া $90°$ৰ অতি ওচৰ চাপিব তেতিয়া $\angle C$ আহি $0°$ ৰ ওচৰ পাব আৰু AC বাহুটো BC ৰ ওপৰত মিলি যাব (চিত্ৰ 8.18 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.18

যেতিয়া $\angle C$, $0°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে তেতিয়া $\angle A$, $90°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে আৰু AC প্ৰায় BC ৰ সমান হয়। গতিকে sinAৰ মান 1 ৰ অতি ওচৰ চাপে। আকৌ $\angle A$ যেতিয়া $90°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে তেতিয়া $\angle C$, $0°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে আৰু ফলত AB ৰ দীঘ প্ৰায় শূন্য হয়। সেয়ে cosAৰ মান 0ৰ ওচৰ চাপে।

সেয়ে আমি ক'ব পাৰোঁ যে, $\sin 90° = 1$ আৰু $\cos 90° = 0$.

এতিয়া তোমালোকে $90°$ ৰ আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবিলাক নিৰ্ণয় নকৰানো কিয়?

ততালিকে চোৱাৰ সুবিধাৰ্থে, 8.1 তালিকাত $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ আৰু $90°$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ উল্লেখ কৰা হ'ল।

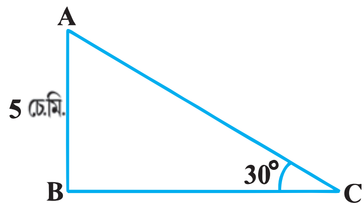
তালিকা 8.1

$\angle$ **A**	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়
cosec A	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়
cot A	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ তালিকাৰপৰা তোমালোকে দেখিছা যে $\angle A$ যেতিয়া $0°$ ৰ পৰা $90°$ বাঢ়ি যায় তেতিয়া sinA ৰ মান 0 ৰ পৰা 1লৈ বাঢ়ে আৰু cosA ৰ মান 1 ৰ পৰা 0 লৈ কমে।

কিছুমান উদাহৰণৰ সহায়ত ওপৰত দিয়া তালিকাৰ মানসমূহৰ ব্যৱহাৰৰ ব্যাখ্যা আগবঢ়াম।

উদাহৰণ 6 ঃ ΔABC ত্ৰিভুজৰ B কোণটো সমকোণ, $AB = 5cm$ আৰু $\angle ACB = 30°$ (চিত্ৰ 8.19 চোৱা)। BC আৰু AC বাহুৰ দীঘ উলিওৱা।



চিত্ৰ 8.19

সমাধান ঃ BC বাহুৰ দীঘ উলিয়াবলৈ আমি BC আৰু প্ৰদত্ত AB বাহু জড়িত থকা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতটো ল'ম। যিহেতু BC বাহুটো C কোণৰ সন্নিহিত বাহু আৰু AB বাহুটো C কোণৰ বিপৰীত বাহু, গতিকে, $\frac{AB}{BC} = \tan C$ অৰ্থাৎ, $\frac{5}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ইয়াৰপৰা পাওঁ যে $BC = 5\sqrt{3}$ cm

আকৌ AC বাহুৰ দীঘ উলিয়াবলৈ আমি লওঁ

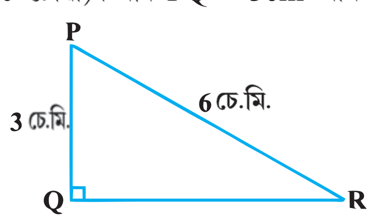
$$\sin 30° = \frac{AB}{AC} \quad \text{(কিয়?)}$$

অৰ্থাৎ, $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$, অৰ্থাৎ, $AC = 10$ cm

মন কৰিবা যে বিকল্প পদ্ধতি হিচাপে পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰপৰা তৃতীয় বাহুৰ দীঘ পাব পাৰি।

অৰ্থাৎ, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$ cm $= 10$cm.

উদাহৰণ 7 ঃ ΔPQR ত্ৰিভুজৰ Q কোণটো 90° (চিত্ৰ 8.20 চোৱা)। যদি $PQ = 3cm$ আৰু $PR = 6cm$ তেন্তে $\angle QPR$ আৰু $\angle PRQ$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 8.20

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে $PQ = 3cm$

আৰু $PR = 6cm.$

গতিকে, $\frac{PQ}{PR} = \sin R$ বা $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

গতিকে, $\angle PRQ = 30°$ আৰু সেয়ে

$\angle QPR = 60°$ (কিয়?)

তোমালোকে মন কৰিব পাৰা যে যদি তিনিটা বাহুৰ যিকোনো এটা বাহু আৰু আন যিকোনো এটা অংগ (এটা সূক্ষ্ম কোণ অথবা আন এটা বাহু) আমি জানো, তেনেহ'লে সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ অৱশিষ্ট কোণ আৰু বাহু উলিয়াব পাৰি।

উদাহৰণ 8 ঃ যদি $\sin(A-B)=\frac{1}{2}$, $\cos(A+B)=\frac{1}{2}$, য'ত $0° < A + B \le 90°$, আৰু $A > B$, তেনেহ'লে A আৰু B নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু $\sin(A-B)=\frac{1}{2}$, গতিকে, $A - B = 30°$ (কিয়?) ..... (1)

আকৌ, যিহেতু $\cos(A+B)=\frac{1}{2}$, গতিকে, $A + B = 60°$ (কিয়?) ..... (2)

(1) আৰু (2)ক সমাধা কৰি আমি পাওঁ যে $A = 45°$ আৰু $B = 15°$.

অনুশীলনী 8.2

1. তলত দিয়া বিলাকৰ মান উলিওৱা —

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$

(iv) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

(vi) $\dfrac{\operatorname{cosec} 30° + \operatorname{cosec} 60° + \operatorname{cosec} 90°}{\sec 0° + \sec 30° + \sec 60°}$

2. শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা আৰু তোমাৰ বাছনিৰ যথাৰ্থতা উল্লেখ কৰা

(i) $\dfrac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°} =$

(A) $\sin 60°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} =$

(A) $\tan 90°$ (B) 1 (C) $\sin 45°$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ সত্য যেতিয়া $A =$

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°} = ?$

(A) $\cos 60°$ (B) $\sin 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

3. (i) যদি $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ আৰু $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A + B \le 90°$; $A > B$, তেন্তে A আৰু B উলিওৱা।

(ii) যদি $\sin (x + y) = 1$, $\cos (x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ আৰু $x > y$, $0^0 \le x + y \le 90^0$ তেন্তে x আৰু y নিৰ্ণয় কৰা।

4. তলত দিয়াবিলাক সত্য নে অসত্য কোৰা। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দাঙি ধৰা

(i) $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$.

(ii) $\sin\theta$ ৰ মান বাঢ়ি যায় যদি θ ৰ মান বাঢ়ে।

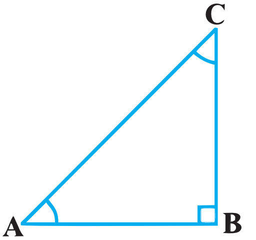
(iii) $\cos\theta$ ৰ মান বাঢ়ি যায় যদি θ ৰ মান বাঢ়ে।

(iv) θ ৰ সকলো মানৰ বাবে $\sin\theta = \cos\theta$

(v) $A = 0^o$ ৰ বাবে cotA সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

8.4 পূৰক কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Complementary Angles)

মনত পেলোৱা যে দুটা কোণক পূৰক কোণ বুলি কোৱা হয় যেতিয়া সিহঁতৰ যোগফল 90° হয়। ABC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ যদি B কোণ সমকোণ, তেনেহ'লে ইয়াৰ কোনোবা এযোৰ কোণ পূৰক কোণ হ'বনে? (চিত্ৰ 8.21 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.21

যিহেতু $\angle A + \angle C = 90°$ গতিকে, ইহঁত তেনে এটা যোৰ।

আমি জানো যে,

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \frac{BC}{AC},\ \cos A = \frac{AB}{AC},\ \tan A = \frac{BC}{AB},\\ \operatorname{cosec} A &= \frac{AC}{BC},\ \sec A = \frac{AC}{AB},\ \cot A = \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} \quad ...(1)$$

এতিয়া আমি $\angle C = 90° - \angle A$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবিলাক লিখিম— $90° - A$ হিচাপে $90° - A$ কোণৰ বিপৰীত বাহু আৰু সন্নিহিত বাহু দুটা কি কি? তোমালোকে পাবা যে $90° - \angle A$ কোণৰ বিপৰীত বাহুটো AB আৰু সন্নিহিত বাহুটো BC। গতিকে,

$$\left.\begin{aligned} \sin(90° - A) &= \frac{AB}{AC},\ \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC},\ \tan(90° - A) = \frac{AB}{BC}\\ \operatorname{cosec}(90° - A) &= \frac{AC}{AB},\ \sec(90° - A) = \frac{AC}{BC},\ \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \quad ...(2)$$

এতিয়া, (1) আৰু (2) ৰ অনুপাতবিলাক তুলনা কৰিলে দেখিবা যে

$\sin(90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A$ আৰু $\cos(90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$

$\tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A$, $\quad \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$

$\sec(90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A$, $\quad \operatorname{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$

গতিকে, $\mathbf{\sin(90° - A) = \cos A}$, $\quad \mathbf{\cos(90° - A) = \sin A}$,

$\mathbf{\tan(90° - A) = \cot A}$, $\quad \mathbf{\cot(90° - A) = \tan A}$,

$\mathbf{\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A}$, $\quad \mathbf{\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A}$

এই কেইটা 0° আৰু 90° ৰ মাজত থকা A কোণৰ সকলো মানৰ বাবেই সত্য। তোমালোকে $A = 0°$ আৰু $A = 90°$ ৰ বাবে এইকেইটা সত্য হয়নে পৰীক্ষা কৰি চোৱা।

টোকা ঃ $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$; কিন্তু $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ আৰু $\cot 0°$ ৰ মান সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। তলত আমি কেইটামান উদাহৰণ ল'লো।

উদাহৰণ 9 ঃ $\frac{\tan 65°}{\cot 25°}$ ৰ মান উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\cot A = \tan(90° - A)$

গতিকে, $\cot 25° = \tan(90° - 25°) = \tan 65°$

অৰ্থাৎ, $\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$

উদাহৰণ 10 ঃ যদি $\sin 3A = \cos(A - 26°)$, য'ত 3A সূক্ষ্ম কোণ, তেন্তে A উলিওৱা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে $\sin 3A = \cos(A - 26°)$. ..... (1)

যিহেতু, $\sin 3A = \cos(90° - 3A)$, গতিকে আমি (1) ক তলত দিয়াৰ দৰে লিখিব পাৰো $\cos(90° - 3A) = \cos(A - 26°)$

যিহেতু $90° - 3A$ আৰু $A - 26°$ দুয়োটাই সূক্ষ্মকোণ, গতিকে $90° - 3A = A - 26°$ ইয়াৰ পৰা পাওঁ $A = 29°$

উদাহৰণ 11 ঃ $\cot 85° + \cos 75°$ ক 0° আৰু 45° কোণৰ মাজৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতত প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ $\cot 85° + \cos 75° = \cot(90° - 5°) + \cos(90° - 15°) = \tan 5° + \sin 15°$

অনুশীলনী 8.3

1. মান নিৰ্ণয় কৰা

(i) $\frac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\frac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

(v) $\sin 35^\circ \sin 55^\circ - \cos 35^\circ \cos 55^\circ$ (vi) $\tan 35^\circ \tan 60^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ$

(vii) $\frac{\cot 54^\circ}{\tan 36^\circ} + \frac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ} - 2$ (viii) $3\frac{\sin 23^\circ}{\cos 67^\circ} + 4\frac{\sec 47^\circ}{\operatorname{cosec} 43^\circ}$

(ix) $\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 30^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ$

2. দেখুওৱা যে

(i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

3. যদি $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, য'ত 2A সূক্ষ্মকোণ, তেন্তে A ৰ মান উলিওৱা।

4. যদি $\tan A = \cot B$, প্ৰমাণ কৰা যে $A + B = 90^\circ$.

5. যদি $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, য'ত 4A সূক্ষ্মকোণ, তেন্তে A ৰ মান উলিওৱা।

6. যদি A, B আৰু C কোণকেইটা ABC ত্ৰিভুজৰ অন্তঃকোণ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}.$$

7. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ ক 0° আৰু 45° ৰ মাজৰ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

8. (i) যদি $\sec 5\theta = \operatorname{cosec}(\theta - 36^0)$ য'ত θ এটা সূক্ষ্মকোণ। তেন্তে θ ৰ মান উলিওৱা।

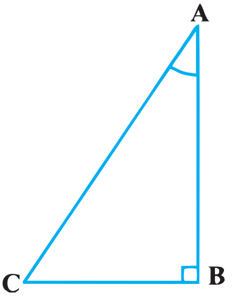
(ii) যদি $\sin A = \cos 33^\circ$, $A < 90^0$। A ৰ মান উলিওৱা।

(iii) $\sin 2A = \cos(A + 15^\circ)$ য'ত $2A < 90^\circ$। Aৰ মান উলিওৱা।

(iv) যদি $\sin(3x + 10) = \cos(x + 24)$ তেন্তে x ৰ মান উলিওৱা।

8.5. ত্ৰিকোণমিতিক অভেদাৱলী (Trigonometric Identities)

তোমালোকৰ মনত থাকিব পাৰে যে এটা সমীকৰণক অভেদ বুলি কোৱা হ'ব যদিহে তাত থকা চলকবোৰৰ সকলো মানৰ বাবেই সমীকৰণটো সত্য হয়। একেদৰে কোনো কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত জড়িত থকা এটা সমীকৰণক **ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ (trigonometric identity)** বুলি কোৱা হব যদিহে কোণৰ সকলো মানৰ বাবেই ই সত্য হয়।



চিত্ৰ 8.22

এই অনুচ্ছেদত আমি এটা দৰকাৰী ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ প্ৰমাণ কৰিম।

ΔABC ত্ৰিভুজৰ B কোণ সমকোণ (চিত্ৰ 8.22 চোৱা)। ইয়াৰ পৰা পাওঁ যে $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ..... (1)

(1) ৰ প্ৰতিটো পদক AC^2 ৰে হৰণ কৰাত

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

অৰ্থাৎ, $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$

অৰ্থাৎ, $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

অৰ্থাৎ, $\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$ ..... (2)

ই A ৰ সকলো মানৰ বাবেই সত্য, যেতিয়া $0° \leq A \leq 90°$। গতিকে ইয়াত ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ বোলে।

এতিয়া (1) ক AB^2 ৰে হৰণ কৰিলে পাওঁ যে

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

বা, $\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$

অৰ্থাৎ, $\mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A}$ ..... (3)

এই সমীকৰণটো $A = 0°$ ৰ বাবে সত্য হয়নে? হয়, ই সত্য। $A = 90°$ হ'লে কি হ'ব? ইয়াত $A = 90°$ হ'লে tanA আৰু secA সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। গতিকে (3) টো সত্য হোৱাৰ ক্ষেত্ৰত A ৰ মান হ'ব $0° \leq A < 90°$.

এতিয়া (1) নং সমীকৰণক BC^2 ৰে হৰণ কৰিলে কি পাওঁ চাওঁ।

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

অৰ্থাৎ, $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

অৰ্থাৎ, $\mathbf{\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A}$ ..... (4)

মনত ৰাখিবা যে $A = 0°$ হ'লে cosecA আৰু cotA সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। গতিকে (4) টো সত্য হোৱাৰ ক্ষেত্ৰত A ৰ মান হ'ব $0° < A \leq 90°$.

এই অভেদসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি আমি প্ৰতিটো ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতকে আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতত প্ৰকশ কৰিব পাৰোঁ। অৰ্থাৎ যদি যিকোনো এটা অনুপাত জানো তেতিয়াহ'লে আমি আনবিলাক ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ মান উলিয়াব পাৰিম।

এই অভেদবিলাক ব্যৱহাৰ কৰি কেনেকৈ অংক কৰিব পাৰি এতিয়া চাওঁ। আমি জানো যে

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$. । গতিকে $\cot A = \sqrt{3}$ ।

যিহেতু, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$,

গতিকে, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, আৰু $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

আকৌ, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. গতিকে, $\operatorname{cosec} A = 2$.

উদাহৰণ 12 ঃ cosA, tanA আৰু secA অনুপাত কেইটাক sinA ৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, গতিকে, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, অৰ্থাৎ,

$\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (কিয়?)

গতিকে, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ আৰু $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

উদাহৰণ 13 ঃ প্ৰমাণ কৰা যে $\sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$.

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ $= \sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$$ = সোঁপক্ষ।

উদাহৰণ 14 ঃ প্ৰমাণ কৰা যে, $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ $= \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\text{cosec } A - 1}{\text{cosec } A + 1} = \text{সোঁপক্ষ।}$$

উদাহৰণ 15 ঃ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ এই অভেদটোৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

সমাধান ঃ যিহেতু আমি $\sec\theta$ আৰু $\tan\theta$ জড়িত থকা অভেদটো প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব, গতিকে আমি প্ৰমাণ কৰিব লগা অভেদটোৰ বাওঁপক্ষৰ হৰ আৰু লবক $\cos\theta$ ৰে হৰণ কৰি পদসমূহ $\sec\theta$ আৰু $\tan\theta$ লৈ ৰূপান্তৰ কৰি লব লাগিব।

এতিয়া, বাওঁপক্ষ $= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1}$$

$$= \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

= সোঁপক্ষ, ইয়েই নিৰ্ণেয় প্ৰমাণ।

অনুশীলনী 8.4

1. sinA, secA আৰু tanA এই ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত কেইটাক cotA ৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা।

2. secA ৰ সহায়ত $\angle A$ কোণৰ আন সকলোবিলাক ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত লিখা।

3. মান নিৰ্ণয় কৰা—

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$ (ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

4. শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা। তোমাৰ বাছনিৰ যথাৰ্থতা সাব্যস্ত কৰা

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A =$

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) secA (B) sinA (C) cosecA (D) cosA

(iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. তলৰ অভেদ কেইটা প্ৰমাণ কৰা যদিহে ইয়াত কোণ বিলাক সূক্ষ্ম কোণ আৰু যাৰ বাবে অভেদ কেইটা সংজ্ঞাবদ্ধ হয়—

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ (ii) $\dfrac{\cos A}{1 + \sin A} + \dfrac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

[ইংগিত ঃ ইয়াত থকা পদবোৰ sinθ আৰু cosθ ত প্ৰকাশ কৰা]

(iv) $\dfrac{1 + \sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$ [ইংগিত ঃ বাওঁপক্ষ আৰু সোঁপক্ষ বেলেগে সৰল কৰা।]

(v) $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$, $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ অভেদৰ সহায়ত কৰা।

(vi) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$ (vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[ইংগিত ঃ বাওঁপক্ষ আৰু সোঁপক্ষ বেলেগে সৰল কৰা]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

6. প্ৰমাণ কৰা ঃ

(i) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(ii) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

(iv) $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

(v) $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec\theta$

8.6. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাখিনি অধ্যয়ন কৰিলা—

1. ABC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ B কোণ সমকোণ হ'লে-

$\sin A = \dfrac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$, $\cos A = \dfrac{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$,

$\tan A = \dfrac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

3. যদি এটা সূক্ষ্মকোণৰ যিকোনো এটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত জনা থাকে তেনেহ'লে এই কোণটোৰ অৱশিষ্ট অনুপাতকেইটা সহজেই উলিয়াব পাৰি।

4. 0°, 30°, 45°, 60° আৰু 90° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ মানসমূহ।

5. sinA আৰু cosA ৰ মান কেতিয়াও 1 তকৈ ডাঙৰ হ'ব নোৱাৰে, কিন্তু secA বা cosecA ৰ মান সদায় 1 তকৈ ডাঙৰ বা 1 ৰ সমান হয়।

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$;
$\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$;
$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$.

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,
$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, $0° \le A < 90°$,
$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$, $0° < A \le 90°$.

Q8F1R6

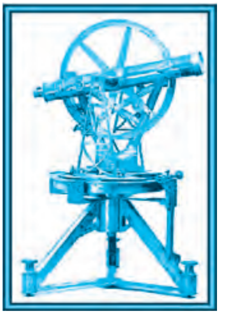
ত্ৰিকোণমিতিৰ কিছুমান প্ৰয়োগ (Some Applications of Trigonometry)

নৱম অধ্যায়

9.1. অৱতাৰণা (Introduction)

আগৰ অধ্যায়ত, তোমালোকে ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাতৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছা। এই অধ্যায়ত, তোমালোকৰ চাৰিওফালে থকা জীৱনত ত্ৰিকোণমিতি ব্যৱহৃত হোৱা কিছুমান উপায়ৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিব পাৰিবা। গোটেই বিশ্বতে পণ্ডিতসকলে অধ্যয়ন কৰা আটাইতকৈ পুৰণি বিষয়বোৰৰ ভিতৰত ত্ৰিকোণমিতি এটা। অষ্টম অধ্যায়ত কৈ অহাৰ দৰে, জ্যোতিৰ্বিজ্ঞানত আৱশ্যক হোৱা বাবে ত্ৰিকোণমিতি আৱিষ্কাৰ হৈছিল। তেতিয়াৰ পৰা জ্যোতিৰ্বিজ্ঞানীসকলে ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰিছে; উদাহৰণস্বৰূপে, পৃথিৱীৰপৰা গ্ৰহ আৰু নক্ষত্ৰবোৰৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰিবলৈ। ভূগোল আৰু নৌ-বিদ্যাতো ত্ৰিকোণমিতি ব্যৱহাৰ কৰা হয়। মানচিত্ৰ অংকন আৰু দ্ৰাঘিমাংশ আৰু অক্ষাংশ সাপেক্ষে এটা দ্বীপৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰিবলৈ ত্ৰিকোণমিতিৰ জ্ঞান ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

জৰীপকৰোঁতাসকলে শতিকা ধৰি ত্ৰিকোণমিতি ব্যৱহাৰ কৰিছে। ব্ৰিটিছ-ভাৰতবৰ্ষৰ উনৈশ শতিকাৰ এনেকুৱা এটা ডাঙৰ জৰীপ প্ৰকল্প হ'ল 'গ্ৰেট্ ত্ৰিকোণমিত্ৰিক চাৰ্ভে'। ইয়াৰ বাবে চিৰযুগমীয়া দুটা আটাইতকৈ ডাঙৰ মাটি জোখা কোণমান যন্ত্ৰ (Theodolite) নিৰ্মাণ কৰা হৈছিল। 1852 চনত জৰীপৰ সময়ত পৃথিৱীৰ আটাইতকৈ ডাঙৰ পৰ্বতখন আৱিষ্কাৰ কৰা হৈছিল। 160 কি.মি. দূৰত্বত থকা ছয়টা ভিন্ন স্থানৰ পৰা শৃংগটো নিৰীক্ষণ কৰা হৈছিল। 1856 চনত এই শৃংগটো চাৰ্ জৰ্জ এভাৰেষ্ট হিচাবে নামকৰণ কৰা হৈছিল। তেৱেঁই প্ৰথমে বৃহৎ মাটি জোখা কোণমান যন্ত্ৰবোৰ স্থাপন আৰু ব্যৱহাৰ কৰিছিল (কাষৰ চিত্ৰত চোৱা)। বৰ্তমান মাটিজোখা কোণমান যন্ত্ৰবোৰ দেৰাডুনত থকা ভাৰতৰ জৰীপ মিউজিয়ামত প্ৰদৰ্শন কৰা হয়।

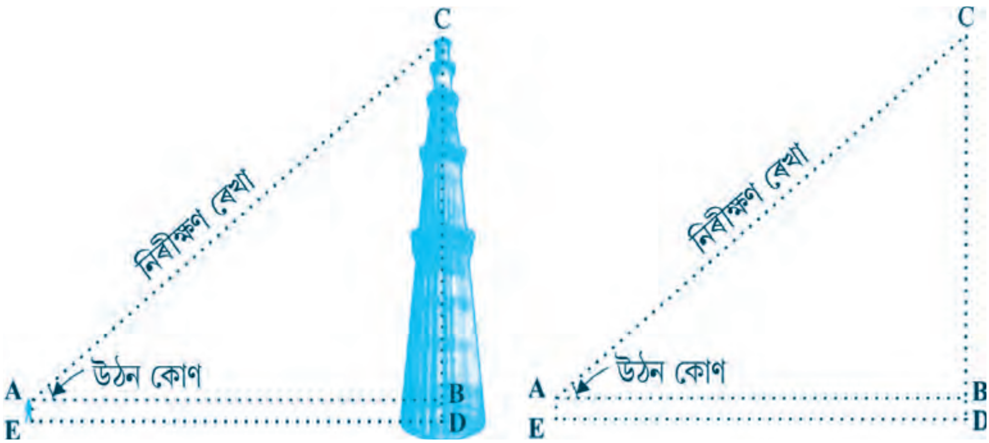


A Theodolite
(ত্ৰিকোণমিতিৰ তত্ত্বৰ আধাৰত জৰীপ কৰা যন্ত্ৰ, এটা ঘূৰ্ণিয়মান দূৰবীণৰ সৈতে কোণ জোখাৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।)

এই অধ্যায়ত, প্ৰকৃত জোখ-মাখ নোলোৱাকৈ বিভিন্ন বস্তুৰ উচ্চতা আৰু দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে কেনেকৈ ত্ৰিকোণমিতি ব্যৱহাৰ কৰা হয় আমি চাম।

9.2. উচ্চতা আৰু দূৰত্ব (Heights and Distances) ঃ

আগৰ অধ্যায়ৰ চিত্ৰ 8.1 বিবেচনা কৰোঁহক। ইয়াক তলৰ চিত্ৰ 9.1 ত পুনৰ অঁকা হ'ল।



চিত্ৰ 9.1

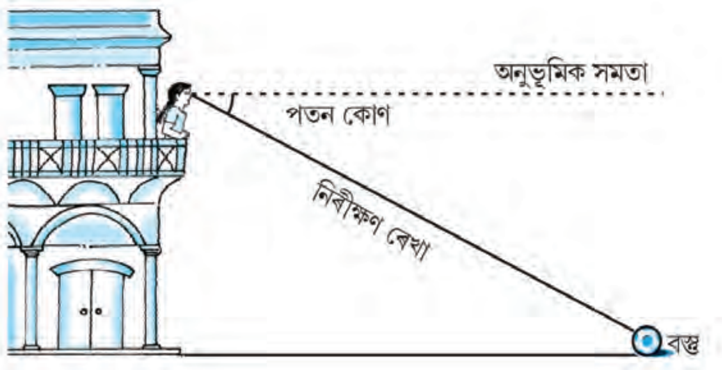
এই চিত্ৰত, এজন ছাত্ৰৰ চকুৰ পৰা মিনাৰটোৰ শীৰ্ষলৈ টনা AC ৰেখাক নিৰীক্ষণ ৰেখা (line of sight) বোলা হয়। ছাত্ৰজনে মিনাৰটোৰ শীৰ্ষলৈ চাই আছে। অনুভূমিকৰ লগত নিৰীক্ষণ ৰেখাৰদ্বাৰা উৎপন্ন হোৱা BAC কোণক ছাত্ৰজনৰ চকুৰপৰা মিনাৰৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ (angle of elevation) বোলা হয়।

এইদৰে, নিৰীক্ষণ ৰেখা হ'ল এজন পৰ্য্যবেক্ষকৰ চকুৰপৰা পৰ্য্যবেক্ষকৰদ্বাৰা নিৰীক্ষণ কৰা বস্তুটোৰ বিন্দুলৈ টনা ৰেখা। নিৰীক্ষণ কৰা বিন্দুটোৰ উঠন কোণ হ'ল অনুভূমিকৰ লগত নিৰীক্ষণ ৰেখাৰদ্বাৰা উৎপন্ন হোৱা কোণ, যেতিয়া অনুভূমিক সমতাৰ ওপৰত বিন্দুটো নিৰীক্ষণ কৰা হয়। অৰ্থাৎ যেতিয়া আমি বস্তুটো চাবলৈ আমাৰ মূৰ দাঙো (চিত্ৰ 9.2)।

চিত্ৰ 9.2

এতিয়া চিত্ৰ 8.2. ত দিয়া অৱস্থাটো বিবেচনা কৰোঁহক। বেলকনিত বহি ছোৱালীজনীয়ে মন্দিৰৰ খট্খটি এটাত থকা ফুলৰ পাত্ৰ এটালৈ তলফালে চাই আছে। এই ক্ষেত্ৰত, নিৰীক্ষণ ৰেখা অনুভূমিক সমতাৰ তলত। অনুভূমিকৰ লগত নিৰীক্ষণ ৰেখাৰদ্বাৰা উৎপন্ন হোৱা কোণটোক পতন কোণ (angle of depression) বোলা হয়।

এইদৰে, বস্তুটোৰ ওপৰত নিৰীক্ষণ কৰা এটা বিন্দুৰ পতন কোণ হ'ল অনুভূমিকৰ লগত নিৰীক্ষণ ৰেখাৰদ্বাৰা উৎপন্ন হোৱা কোণ যেতিয়া বিন্দুটো অনুভূমিক সমতাৰ তলত থাকে অৰ্থাৎ যেতিয়া আমি নিৰীক্ষণ কৰা বিন্দুটো চাবলৈ আমাৰ মূৰ তললৈ নমাওঁ (চিত্ৰ 9.3 চোৱা)।



চিত্ৰ 9.3

এতিয়া, চিত্ৰ 8.3. ত উৎপন্ন হোৱা নিৰীক্ষণ ৰেখাবোৰ আৰু কোণবোৰ তোমালোকে চিনাক্ত কৰিব পাৰিবা। সেইবোৰ উঠন কোণ বা পতন কোণ হয়নে?

আকৌ আমি চিত্ৰ 9.1 উল্লেখ কৰোঁহক। যদি তুমি প্ৰকৃত জোখ-মাখ নোলোৱাকৈ মিনাৰৰ উচ্চতা CD নিৰ্ণয় কৰিব বিচৰা, তেন্তে তোমাক কি জ্ঞানৰ প্ৰয়োজন? তোমাক তলত দিয়াবোৰ জনাৰ আৱশ্যক হ'ব ঃ

(i) মিনাৰৰ পাদ বিন্দুৰপৰা ছাত্ৰজন থিয় হৈ থকা স্থানৰ দূৰত্ব DE।

(ii) মিনাৰৰ শীৰ্ষৰ উঠনকোণ $\angle BAC$

(iii) ছাত্ৰজনৰ উচ্চতা AE

উপৰোক্ত জোখ তিনিটা জনা আছে বুলি ধৰি লৈ আমি কেনেকৈ মিনাৰৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ?

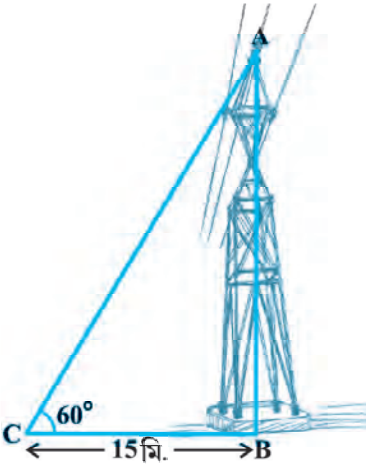
চিত্ৰত, CD = CB + BD। ইয়াত, BD = AE, যি ছাত্ৰজনৰ উচ্চতা। BC নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি $\angle BAC$ বা $\angle A$ৰ ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাত ব্যৱহাৰ কৰিম। ΔABCত, বাহু BC, জ্ঞাত $\angle A$ ৰ বিপৰীত বাহু।

এতিয়া, আমি ত্ৰিকোণমিতিৰ কোনটো অনুপাত ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ? সেইবোৰৰ কোনটোৰ আমি পোৱা দুটা মান আছে আৰু আমি এটা মান নিৰ্ণয় কৰা প্ৰয়োজন? tanA বা cotA ব্যৱহাৰ কৰিলে আমাৰ অন্বেষণ কমিব, যিহেতু এই অনুপাতবোৰৰ AB আৰু BC ৰ লগত সম্পৰ্ক।

গতিকে, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ বা $\cot A = \frac{AB}{BC}$, লৈ ইয়াক সমাধান কৰি আমি BC পাম। BCৰ লগত AE যোগ কৰি, আমি মিনাৰৰ উচ্চতা পাম।

এতিয়া আমি ওপৰত আলোচনা কৰি অহা পদ্ধতিৰ দৰে কিছুমান পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমস্যা সমাধানৰ চেষ্টা কৰোঁ আহা।

উদাহৰণ 1 ঃ ভূমিত এটা স্তম্ভ উলম্বভাৱে থিয় হৈ আছে। স্তম্ভটোৰ পাদবিন্দুৰ পৰা 15 মিটাৰ দূৰত্বত ভূমিত থকা এটা বিন্দুৰপৰা স্তম্ভটোৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ উঠন কোণ 60° পোৱা হ'ল। স্তম্ভটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 9.4

সমাধান ঃ প্ৰথমতে, আমি সমস্যাটো বুজাবলৈ এটা সৰল চিত্ৰ আকোঁহক। ইয়াত AB য়ে স্তম্ভটোক নিৰ্দেশ কৰে, স্তম্ভৰপৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব CB আৰু উঠন কোণ ∠ACB। আমি স্তম্ভটোৰ উচ্চতা অৰ্থাৎ AB নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। ACB এটা ত্ৰিভুজ, B সমকোণ।

সমস্যাটো সমাধান কৰিবলৈ আমি ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাত tan 60° (বা cot60°) বাছি লওঁ, কিয়নো অনুপাতটোৰ AB আৰু BCৰ লগত সম্বন্ধ।

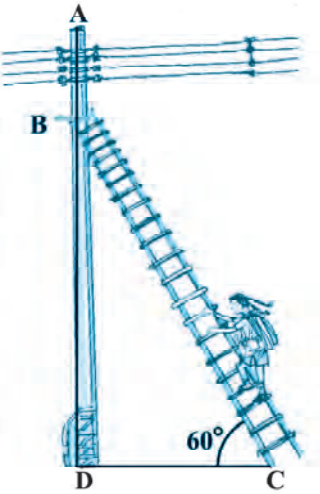
এতিয়া, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

অৰ্থাৎ, $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

অৰ্থাৎ, $AB = 15\sqrt{3}$

গতিকে, স্তম্ভটোৰ উচ্চতা $15\sqrt{3}$ মিটাৰ।

উদাহৰণ 2 ঃ এজন ইলেকট্ৰিচিয়ানে 5 মিটাৰ উচ্চতাৰ খুঁটি এটাত বৈদ্যুতিক বিজুতি মেৰামতি কৰিব লগা হ'ল। মেৰামতিৰ কাম কৰিবলৈ তেওঁ খুঁটিটোৰ মূৰটোৰ 1.3 মিটাৰ তলৰ এটা বিন্দু ঢুকি পাব লাগে (চিত্ৰ 9.5 চোৱা)। যদি অনুভূমিকৰ লগত 60°ৰ কোণ এটাত হালি থাকে, তেওঁ ব্যৱহাৰ কৰিব লগা জখলাডালৰ দৈৰ্ঘ্য কিমান হ'ব লাগিব, যিটোৱে তেওঁক আৱশ্যক হোৱা স্থানটো ঢুকি পাবলৈ সমৰ্থ কৰাব? লগতে, খুটিটোৰ পাদবিন্দুৰ পৰা কিমান দূৰত্বত তেওঁ জখলাটোৰ পাদবিন্দু স্থাপন কৰিব লাগিব? ($\sqrt{3}=1.73$ ল'বা)



চিত্ৰ 9.5

সমাধান ঃ চিত্ৰ 9.5ত, ইলেক্ট্ৰিচিয়ানজনৰ খুঁটি ADৰ B বিন্দুটো ঢুকি পাব লাগে।

সেয়েহে, BD = AD – AB = (5 – 1.3)মিটাৰ = 3.7 মিটাৰ.

ইয়াত, BC য়ে জখলাটোক নিৰ্দ্দেশ কৰিছে। আমি ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্য অৰ্থাৎ সমকোণী ত্ৰিভুজ BDCৰ অতিভুজ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

এতিয়া, তোমালোকে ভাবিব পাৰানে কোনটো ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাত আমি বিবেচনা কৰিব লাগিব? এইটো sin60° হোৱা উচিত।

সেয়েহে, $\frac{BD}{BC} = \sin 60°$ বা $\frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

গতিকে, $BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28$ মিটাৰ (প্ৰায়)

অৰ্থাৎ, জখলাডালৰ দৈৰ্ঘ্য 4.28 মিটাৰ হ'ব লাগিব।

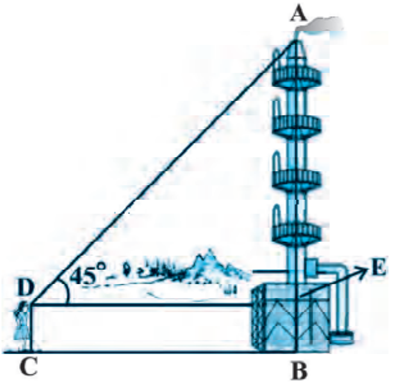
এতিয়া, $\frac{DC}{BD} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

অৰ্থাৎ, $DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14$ মিটাৰ (প্ৰায়)

গতিকে, তেওঁ খুটিটোৰপৰা 2.14 মিটাৰ দূৰত্বত জখলাডালৰ পাদবিন্দু স্থাপন কৰিব লাগিব।

উদাহৰণ 3 ঃ 1.5 মিটাৰ ওখ এজনী পৰ্য্যবেক্ষক এটা চিমনীৰ পৰা 28.5 মিটাৰ আঁতৰত আছে। তাইৰ চকুত চিমনীটোৰ উঠন কোণ 45°। চিমনীটোৰ উচ্চতা কিমান?

সমাধান ঃ ইয়াত, AB চিমনী, CD পৰ্যবেক্ষক আৰু ∠ADE উঠন কোণ (চিত্ৰ 9.6 চোৱা)। এইক্ষেত্ৰত, ADE এটা ত্ৰিভুজ, E সমকোণ আৰু আমি চিমনীটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।



চিত্ৰ 9.6

আমি পাওঁ, AB = AE + BE = AE + 1.5

আৰু DE = CB = 28.5 মিটাৰ।

AE নিৰ্ণয় কৰিবলৈ, আমি AE আৰু DE উভয়েৰে সম্বন্ধ থকা এটা ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাত বাচি লওঁ।

এতিয়া, $\tan 45° = \frac{AE}{DE}$

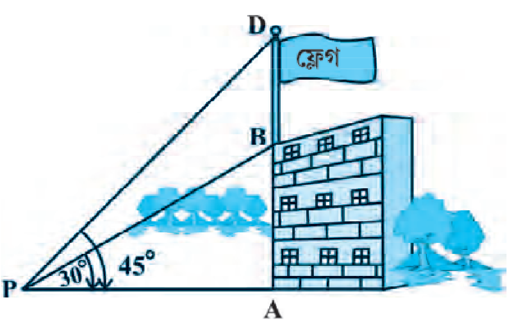
অৰ্থাৎ, $1 = \frac{AE}{28.5}$

গতিকে, AE = 28.5

সেয়েহে, চিমনীটোৰ (AB) উচ্চতা = (28.5 + 1.5) মিটাৰ = 30 মিটাৰ।

উদাহৰণ 4 ঃ ভূমিত থকা এটা বিন্দু P ৰ পৰা এটা 10 মিটাৰ ওখ অট্টালিকাৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 30°. অট্টালিকাটোৰ শীৰ্ষত এখন পতাকা উত্তোলন কৰা হ'ল আৰু P বিন্দুৰপৰা পতাকাৰ দণ্ডডালৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 45°. পতাকাৰ দণ্ডডালৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু P বিন্দুৰপৰা অট্টালিকাৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা (তোমালোকে লব পাৰা $\sqrt{3}$ = 1.732)।

সমাধান ঃ চিত্ৰ 9.7 ত, AB যে অট্টালিকাটোৰ উচ্চতা নিৰ্দ্দেশ কৰিছে, BD পতাকাৰ দণ্ডডাল আৰু P প্ৰদত্ত বিন্দু। লক্ষ্য কৰা যে PAB আৰু PAD দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজ। আমি পতাকাৰ দণ্ডডালৰ দৈৰ্ঘ্য অৰ্থাৎ, DB আৰু P বিন্দুৰ পৰা অট্টালিকাৰ দূৰত্ব অৰ্থাৎ, AP নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।



চিত্ৰ 9.7

যিহেতু, আমি অট্টালিকাৰ উচ্চতা AB

জানো, আমি প্ৰথমতে সমকোণী ΔPAB বিবেচনা কৰিম।

আমি পাওঁ, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$

অৰ্থাৎ, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

গতিকে, $AP = 10\sqrt{3}$

অৰ্থাৎ, P ৰ পৰা অট্টালিকাৰ দূৰত্ব $10\sqrt{3}$ মিটাৰ = 17.32 মিটাৰ।

তাৰ পাছত আকৌ, আমি ধৰোঁহক $DB = x$ মিটাৰ।

তেন্তে, $AD = (10 + x)$ মিটাৰ।

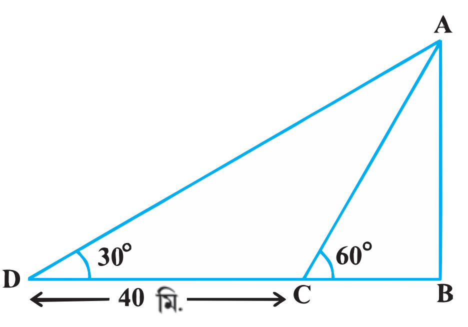
এতিয়া, সমকোণী ΔPAD ত, $\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

গতিকে, $1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

অৰ্থাৎ, $x = 10\left(\sqrt{3}-1\right) = 7.32$

সেয়েহে, পতাকাৰ দণ্ডডালৰ দৈৰ্ঘ্য 7.32 মিটাৰ।

উদাহৰণ- 5 ঃ অনুভূমিক সমতাৰ ওপৰত থিয় হৈ থকা এটা স্তম্ভৰ ছাঁ সূৰ্য্যৰ উন্নতি (উঠন কোণ) 60° হ'লে যিমান দীঘল হয়, উঠন কোণ 30° হ'লে তাতকৈ 40 মিটাৰ বেছি দীঘল হয়। স্তম্ভটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 9.8

সমাধান ঃ চিত্ৰ 9.8ত, AB স্তম্ভ আৰু সূৰ্য্যৰ উন্নতি 60° অৰ্থাৎ ছাঁটোৰ মূৰৰ পৰা স্তম্ভটোৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 60^0 হ'লে ছাঁটোৰ দৈৰ্ঘ্য BC আৰু উঠন কোণ 30° হ'লে ছাঁটোৰ দৈৰ্ঘ্য DB।

এতিয়া, ধৰা হ'ল $AB = h$ মিটাৰ আৰু

$BC = x$ মিটাৰ

প্ৰশ্নানুসাৰে, DB, BC তকৈ 40 মিটাৰ দীঘল।

সেয়েহে, $DB = (40 + x)$ মিটাৰ।

এতিয়া, আমি ABC আৰু ABD দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজ পাওঁ—

ΔABC ত, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ ..... (1)

ΔABD ত, $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 40}$ .... (2)

(1)ৰ পৰা আমি পাওঁ, $h = x\sqrt{3}$

এই মানটো (2)ত বহুৱাই আমি পাওঁ, $\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40,$

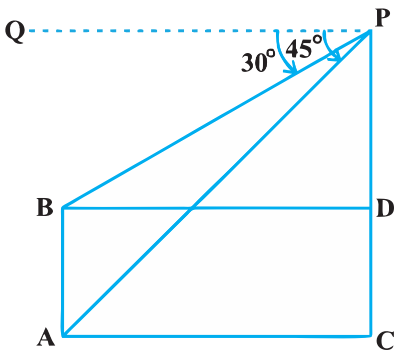
অৰ্থাৎ, $3x = x + 40$

অৰ্থাৎ, $x = 20$

সেয়েহে, $h = 20\sqrt{3}$ [(1) ৰ পৰা]

গতিকে, স্তম্ভটোৰ উচ্চতা $20\sqrt{3}$ মিটাৰ।

উদাহৰণ 6 ঃ এটা বহু মহলীয়া অট্টালিকাৰ শীৰ্ষৰ পৰা এটা 8 মিটাৰ ওখ অট্টালিকাৰ শীৰ্ষ আৰু পাদবিন্দুৰ পতন কোণ যথাক্ৰমে 30° আৰু 45°, বহু মহলীয়া অট্টালিকাটোৰ উচ্চতা আৰু অট্টালিকা দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 9.9

সমাধান ঃ চিত্ৰ 9.9ত, PC য়ে বহু মহলীয়া অট্টালিকাক আৰু AB য়ে 8 মিটাৰ ওখ অট্টালিকাক নিৰ্দ্দেশ কৰিছে। আমি বহু মহলীয়া অট্টালিকাটোৰ উচ্চতা অৰ্থাৎ, PC আৰু অট্টালিকা দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব অৰ্থাৎ, AC নিৰ্ণয় কৰিবলৈ মনোযোগ দিব লাগে।

চিত্ৰটো সাৱধানে লক্ষ্য কৰা। মন কৰা যে সমান্তৰাল ৰেখা PQ আৰু BD ৰ PB ছেদক। গতিকে $\angle QPB$ আৰু $\angle PBD$ একান্তৰ কোণ আৰু সেয়েহে সমান। এতেকে, $\angle PBD = 30°$. সেইদৰে, $\angle PAC = 45°$.

সমকোণী ΔPBDত আমি পাওঁ—

$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা $BD = PD\sqrt{3}$

সমকোণী ΔPAC ত, আমি পাওঁ —

$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$

অৰ্থাৎ, $PC = AC$

আকৌ, $PC = PD + DC$,

গতিকে, $PD + DC = AC$.

যিহেতু, $AC = BD$ আৰু $DC = AB = 8$ মিটাৰ,

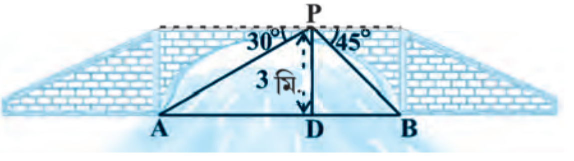
আমি পাওঁ, $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (কিয়?)

ইয়াৰ পৰা পাওঁ $PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)$m.

গতিকে, বহু মহলীয়া অট্টালিকাটোৰ উচ্চতা $=\{4(\sqrt{3}+1)+8\}$ মিটাৰ $= 4(3+\sqrt{3})$ মিটাৰ

আৰু অট্টালিকা দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব $= 4(3+\sqrt{3})$ মিটাৰ

উদাহৰণ 7 ঃ এখন নদীৰ ওপৰেদি থকা দলং এখনৰ এটা বিন্দুৰ পৰা নদীখনৰ দুই বিপৰীত ফালৰ পাৰৰ পতন কোণ যথাক্ৰমে 30° আৰু 45°। যদি দুই পাৰৰ পৰা 3 মিটাৰ উচ্চতাত দলংখন থাকে, তেন্তে নদীখনৰ প্ৰস্থ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 9.10

সমাধান ঃ চিত্ৰ 9.10ত, A আৰু B য়ে নদীখনৰ বিপৰীত ফালৰ পাৰত থকা দুটা বিন্দু নিৰ্দ্দেশ কৰিছে, যাতে AB নদীখনৰ প্ৰস্থ হয়। 3 মিটাৰ উচ্চতাত দলংখনত P এটা বিন্দু অৰ্থাৎ, DP = 3মিটাৰ। ΔAPB ৰ বাহু AB ৰ দৈৰ্ঘ্যই নদীখনৰ প্ৰস্থ। আমি এই প্ৰস্থ নিৰ্ণয় কৰিম।

এতিয়া, $AB = AD + DB$

সমকোণী ΔAPD ত, $\angle A = 30°$.

সেয়েহে, $\tan 30° = \frac{PD}{AD}$

অৰ্থাৎ, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ বা $AD = 3\sqrt{3}$ মিটাৰ

আকৌ, সমকোণী ΔPBD, $\angle B = 45°$.

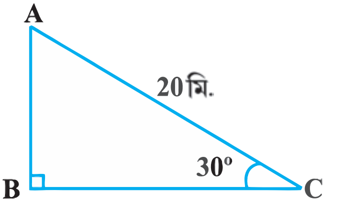
সেয়েহে, $BD = PD = 3$ মিটাৰ

এতিয়া, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3\ (1 + \sqrt{3}\,)$ মিটাৰ

গতিকে, নদীখনৰ প্ৰস্থ $3\left(\sqrt{3}+1\right)$ মিটাৰ।

অনুশীলনী 9.1

1. ভূমিলৈ এটা উলম্ব খুঁটিৰ শীৰ্ষৰপৰা টানকৈ টনা আৰু বন্ধা এডাল 20 মিটাৰ দীঘল ৰছীৰ ওপৰত এজন চাৰ্কাচ কৌশলীয়ে বগাই আছে। ৰছীডালে ভূমি সমতাৰ লগত উৎপন্ন কৰা কোনটো 30° হ'লে, খুঁটিটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা (চিত্ৰ 9.11 চোৱা)।



চিত্ৰ 9.11

2. ধুমুহাৰ ফলত এজোপা গছ ভাঙে আৰু ভঙা অংশটো ভাঁজ খাই গছজোপাৰ মূৰটোৱে ভূমিক স্পৰ্শ কৰি তাৰ লগত 30° কোণ উৎপন্ন কৰে। গছজোপাৰ পাদবিন্দু আৰু ভূমিক স্পৰ্শ কৰি থকা মূৰটোৰ বিন্দুৰ মাজত দূৰত্ব 8 মিটাৰ। গছজোপাৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

3. এজনী ঠিকা কাম কৰা ছোৱালীয়ে ল'ৰা-ছোৱালীৰ বাবে খেলিবলৈ এখন বাগিচাত দুখন 'শ্লাইড' (slide) স্থাপন কৰাৰ আঁচনি লয়। 5 বছৰ বয়সৰ তলৰ ল'ৰা-ছোৱালীৰ বাবে তাই শীৰ্ষ 1.5 মিটাৰ উচ্চতাত থকাকৈ আৰু ভূমিৰ লগত 30° কোণত হালি থকা এখন 'শ্লাইড' পছন্দ কৰে। আনহাতে, ডাঙৰ ল'ৰা-ছোৱালীৰ বাবে তাই 3 মিটাৰ উচ্চতাত থকাকৈ আৰু ভূমিৰ লগত 60° কোণত হালি থকা এখন আওগৰীয়া 'শ্লাইড' বিচাৰে। প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে শ্লাইডৰ দৈৰ্ঘ্য কিমান হোৱা উচিত?

4. এটা স্তম্ভৰ পাদবিন্দুৰপৰা 30 মিটাৰ আঁতৰত ভূমিত থকা এটা বিন্দুৰপৰা স্তম্ভৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 30°। স্তম্ভটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

5. ভূমিৰ ওপৰত 60 মিটাৰ উচ্চতাত চিলা উৰি আছে। চিলাখনৰ লগত সংলগ্ন সূতাডাল ভূমিৰ এটা বিন্দুত অস্থায়ীভাবে গাঁঠি দিয়া হ'ল। ভূমিৰ লগত সূতাডালৰ হেলন 60°, সূতাডাল ঢিলা নহয় বুলি ধৰি লৈ সূতাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

6. 1.5 মিটাৰ ওখ ল'ৰা এজনে 30 মিটাৰ ওখ অট্টালিকাৰপৰা কিছু দূৰত্বত থিয় হৈ আছে। তেওঁ অট্টালিকাটোৰ ফালে খোজ কঢ়াৰ লগে লগে তেওঁৰ চকুৰপৰা অট্টালিকাটোৰ শীৰ্ষলৈ উঠন কোণ 30° ৰ পৰা 60° লৈ বাঢ়ে। তেওঁ অট্টালিকাটোৰ ফালে খোজ কঢ়া দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

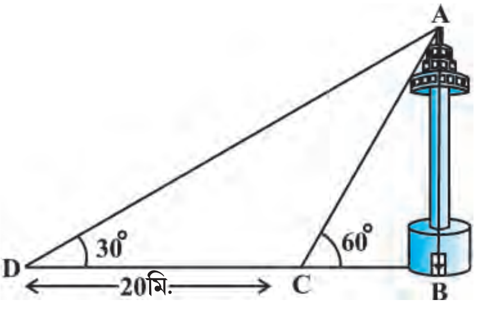
7. ভূমিৰ এটা বিন্দুৰ পৰা 20 মিটাৰ ওখ এটা অট্টালিকাৰ ওপৰত স্থাপন কৰা এটা প্ৰেৰণ স্তম্ভৰ (Transmission tower) পাদবিন্দু আৰু শীৰ্ষৰ উঠন কোণ যথাক্ৰমে 45° আৰু 60°, স্তম্ভটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

8. এটা পকা ভেটিৰ ওপৰত 1.6 মিটাৰ ওখ মূৰ্তি এটা থিয় হৈ আছে। ভূমিৰ এটা বিন্দুৰপৰা মূৰ্তিটোৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 60° আৰু একেটা বিন্দুৰপৰা ভেটিটোৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 45°। ভেটিটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

9. এটা স্তম্ভৰ পাদবিন্দুৰপৰা এটা অট্টালিকাৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 30° আৰু অট্টালিকাটোৰ পাদবিন্দুৰ পৰা স্তম্ভটোৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 60°। স্তম্ভটো 50 মিটাৰ ওখ হ'লে, অট্টালিকাটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

10. এটা 80 মিটাৰ বহল ৰাস্তাৰ দুয়োফালে সমান উচ্চতাৰ দুটা খুঁটি ইটোৱে সিটোৱে সন্মুখবৰ্ত্তী হৈ থিয় দি আছে। ৰাস্তাত খুঁটি দুটাৰ মাজৰ বিন্দু এটাৰ পৰা খুঁটি দুটাৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ যথাক্ৰমে 60° আৰু 30°, খুঁটি দুটাৰ উচ্চতা আৰু খুঁটি দুটাৰ পৰা বিন্দুটোৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

11. এটা খালৰ এটা পাৰত এটা টেলিভিচন স্তম্ভ (TV tower) উলম্বভাৱে থিয় হৈ আছে। স্তম্ভৰ পোনে পোনে বিপৰীত দিশে আনটো পাৰত থকা এটা বিন্দুৰ পৰা স্তম্ভৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 60°। স্তম্ভৰ পাদবিন্দুৰ লগত এই বিন্দুটো সংযোগী ৰেখাত থকা এই বিন্দুটোৰ পৰা 20 মিটাৰ আঁতৰত থকা আন এটা বিন্দুৰপৰা স্তম্ভৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 30° (চিত্ৰ 9.12 চোৱা)। স্তম্ভটোৰ উচ্চতা আৰু খালটোৰ প্ৰস্থ নিৰ্ণয় কৰা।

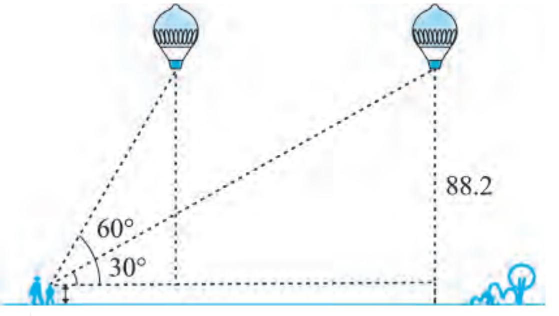


চিত্ৰ 9.12

12. এটা 7 মিটাৰ ওখ অট্টালিকাৰ শীৰ্ষৰপৰা এটা কেবল স্তম্ভৰ (cable tower) শীৰ্ষৰ উঠন কোণ 60° আৰু ইয়াৰ পাদৰ পতন কোন 45°। স্তম্ভটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

13. এটা 75 মিটাৰ ওখ লাইট-হাউচৰ শীৰ্ষৰ পৰা পৰ্য্যবেক্ষণ কৰাত সাগৰৰ সমতাত দুখন জাহাজৰ পতন কোণ যথাক্ৰমে 30° আৰু 45°. যদি লাইট-হাউচটোৰ একেফালে এখন জাহাজ আনখনৰ ঠিক পিছফালে থাকে, তেন্তে জাহাজ দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

14. এজনী 1.2 মিটাৰ ওখ ছোৱালীয়ে ভূমিৰপৰা 88.2 মিটাৰ উচ্চতাত থকা অনুভূমিক ৰেখাত এটা বেলুন বতাহত লৰি থকা দেখিলে। ছোৱালীজনীৰ চকুৰ পৰা বেলুনটোৰ উঠন কোণ যিকোনো মুহূৰ্তত 60°. কিছু সময়ৰ পিছত, উঠন কোণ 30° তললৈ নামে (চিত্ৰ 9.13 চোৱা)। বেলুনটোৱে সেই সময়চোৱাত পৰিভ্ৰমণ কৰা দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 9.13

15. এটা পোনপোটিয়া ঘাইপথ এটা স্তম্ভৰ পাদ বিন্দুলৈ আগবাঢ়ি গৈছে। স্তম্ভটোৰ শীৰ্ষত এজন মানুহ থিয় হৈ সুষম গতিত স্তম্ভটোৰ পাদবিন্দুৰ ফালে আগবাঢ়ি থকা এখন গাড়ীৰ পতন কোণ 30° পৰ্য্যবেক্ষণ কৰে। ছয় চেকেণ্ড পিছত, গাড়ীখনৰ পতন কোণ 60° পোৱা হ'ল। এই বিন্দুটোৰপৰা স্তম্ভটোৰ পাদবিন্দু ঢুকি পাবলৈ গাড়ীখনৰ লগা সময় নিৰ্ণয় কৰা।

16. এটা স্তম্ভৰ পাদবিন্দুৰপৰা 4 মিটাৰ আৰু 9 মিটাৰ দূৰত্বত একে সৰলৰেখাত থকা দুটা বিন্দুৰপৰা স্তম্ভটোৰ শীৰ্ষৰ উঠন কোণ দুটা পূৰক। প্ৰমাণ কৰা যে স্তম্ভটোৰ উচ্চতা 6 মিটাৰ।

9.3. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত, তোমালোকে নিম্নোক্ত প্ৰধান বিষয়কেইটা অধ্যয়ন কৰিলা।

1. (i) নিৰীক্ষণ ৰেখা হ'ল এজন পৰ্য্যবেক্ষকৰ চকুৰপৰা পৰ্য্যবেক্ষকৰদ্বাৰা নিৰীক্ষণ কৰা বস্তুটোৰ বিন্দুলৈ টনা ৰেখা।

(ii) নিৰীক্ষণ কৰা এটা বস্তুৰ উঠন কোণ হ'ল অনুভূমিকৰ লগত নিৰীক্ষণ ৰেখাৰদ্বাৰা উৎপন্ন কৰা কোণ যেতিয়া ই অনুভূমিক সমতাৰ ওপৰত থাকে, অৰ্থাৎ যেতিয়া আমি বস্তুটো চাবলৈ আমাৰ মূৰ উঠাওঁ।

(iii) নিৰীক্ষণ কৰা এটা বস্তুৰ পতন কোণ হ'ল অনুভূমিকৰ লগত নিৰীক্ষণ ৰেখাৰদ্বাৰা উৎপন্ন কৰা কোণ যেতিয়া ই অনুভূমিক সমতাৰ তলত থাকে অৰ্থাৎ যেতিয়া আমি বস্তুটো চাবলৈ আমাৰ মূৰ নমাওঁ।

2. এটা বস্তুৰ উচ্চতা বা দৈৰ্ঘ্য বা দুটা দূৰৰ বস্তুৰ মাজত দূৰত্ব ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাতৰ সহায়ত নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

T7K8X5

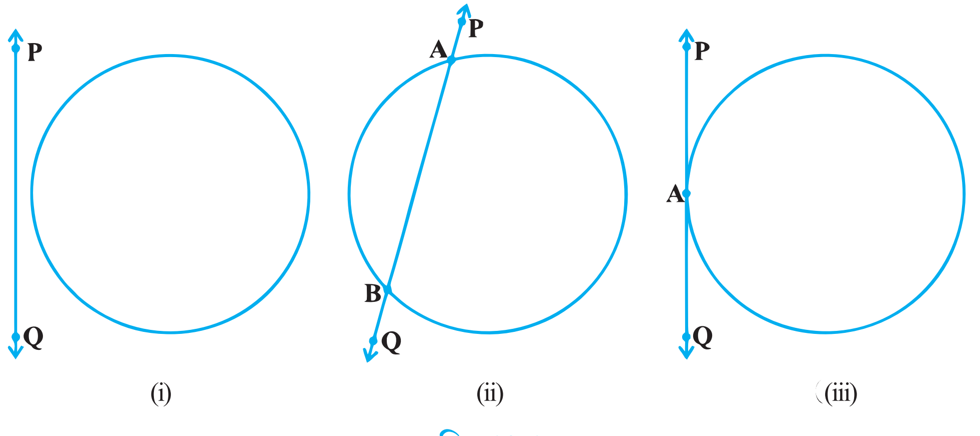
বৃত্ত (Circles)

দশম অধ্যায়

10.1. অৱতাৰণা (Introduction)

তোমালোকে নবম শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰিছা যে বৃত্ত হ'ল এখন সমতলত এটা স্থিৰ বিন্দু (কেন্দ্ৰ)ৰ পৰা নিয়ত দূৰত্ব (ব্যাসাৰ্দ্ধ) ত থকা আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংগ্ৰহ। তোমালোকে বৃত্তৰ লগত সম্পৰ্ক থকা বিভিন্ন সংজ্ঞা যেনে জ্যা, বৃত্তাংশ, বৃত্তকলা, চাপ আদিও অধ্যয়ন কৰিছা। আমি এতিয়া এখন সমতলত এটা বৃত্ত আৰু এডাল ৰেখা দিয়া থাকিলে উদ্ভৱ হ'ব পৰা বিভিন্ন অৱস্থাবোৰ পৰীক্ষা কৰোঁহক।

সেয়ে, আমি এটা বৃত্ত আৰু এডাল ৰেখা PQ বিবেচনা কৰোঁহক। ইয়াত তলত দিয়া চিত্ৰ 10.1ৰ দৰে তিনিটা সম্ভাৱনা হ'ব পাৰে ঃ

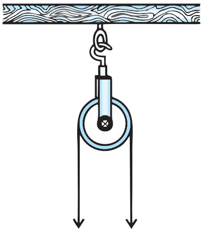


চিত্ৰ 10.1

চিত্ৰ 10.1 (i)ত, PQ ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া বিন্দু নাই। এই ক্ষেত্ৰত, PQ ক বৃত্তটোৰ সম্পৰ্কত এডাল ছেদক নহয় (non-intersecting) বুলি কোৱা হয়। চিত্ৰ 10.1 (ii) ত PQ ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ দুটা উমৈহতীয়া বিন্দু A আৰু B আছে। এই ক্ষেত্ৰত, আমি PQ ৰেখাক বৃত্তটোৰ

ছেদক (secant) বুলি কওঁ। চিত্ৰ 10.1 (iii)ত, PQ ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া মাত্ৰ এটা বিন্দু A আছে। এই ক্ষেত্ৰত, ৰেখাডালক বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক (tangent) বুলি কোৱা হয়।

তোমালোকে নাদৰ পৰা পানী তোলাত ব্যৱহাৰ হোৱা নাদৰ ওপৰত লগাই থোৱা এটা কপিকল দেখিছা। চিত্ৰ 10.2 চোৱা। ইয়াত কপিকলটোৰ দুয়োফালে থকা ৰছীডাল কপিকলটোৱে নিৰ্দেশ কৰা বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শকৰ নিচিনা, যদি ৰছীডাল ৰশ্মি হিচাবে বিবেচনা কৰা হয়।



চিত্ৰ 10.2

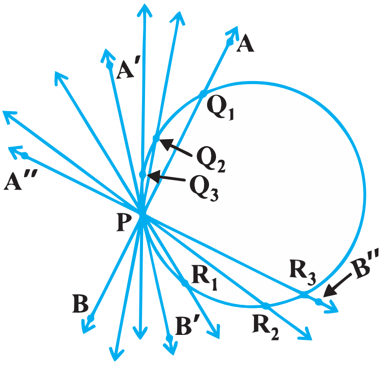
উপৰোক্ত প্ৰদত্ত প্ৰকাৰবোৰতকৈ বৃত্ত সাপেক্ষে ৰেখাডালৰ আন কোনো অৱস্থান আছেনে? তোমালোকে দেখা পাবা যে বৃত্ত সাপেক্ষে ৰেখাডালৰ অৱস্থানৰ কোনো আন প্ৰকাৰ থাকিব নোৱাৰে। এই অধ্যায়ত আমি বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ স্থিতিৰ বিষয়ে আৰু লগতে সিহঁতৰ ধৰ্মবোৰৰ কিছুমান অধ্যয়ন কৰিম।

10.2. বৃত্তৰ স্পৰ্শক (Tangent to a Circle)

আগৰ অধ্যায়ত, তোমালোকে দেখিছা যে বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শক * এডাল ৰেখা যিয়ে বৃত্তটোক মাত্ৰ এটা বিন্দুত ছেদ কৰে।

এটা বিন্দুত বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ স্থিতি বোধগম্য হ'বলৈ, আমি নিম্নোক্ত কাৰ্যপ্ৰণালীসমূহ সম্পন্ন কৰোঁহক ঃ

কাৰ্য্যপ্ৰণালী 1 ঃ এডাল বৃত্তীয় তাঁৰ লোৱা আৰু বৃত্তীয় তাঁৰডালৰ P বিন্দুত এডাল পোনপটীয়া তাঁৰ AB সংলগ্ন কৰা যাতে ই এখন সমতলত P বিন্দুৰ চাৰিওফালে ঘূৰিব পাৰে। ব্যৱস্থা প্ৰণালীটো এখন টেবুলৰ ওপৰত ৰাখা আৰু পোনপটীয়া তাঁৰডালৰ বিভিন্ন অৱস্থান পাবলৈ P বিন্দুৰ চাৰিওফালে AB তাঁৰডাল লাহে লাহে ঘূৰোৱা (চিত্ৰ 10.3(i)চোৱা)।



চিত্ৰ 10.3 (i)

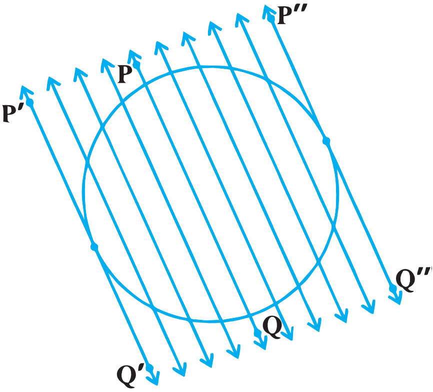
বিভিন্ন অৱস্থানত, তাঁৰডালে বৃত্তীয় তাঁৰক P বিন্দুত আৰু আন এটা বিন্দু Q_1 বা Q_2 বা Q_3 আদিত ছেদ কৰে। এটা অৱস্থানত, তোমালোকে দেখিবা যে ই মাত্ৰ P বিন্দুত বৃত্তটোক ছেদ কৰিব (AB ৰ A′B′ অৱস্থান চোৱা)। দেখা যায় যে বৃত্তটোৰ P বিন্দুত এডাল স্পৰ্শক আছে। বেছি পৰিমাণে ঘূৰালে তোমালোক পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিব পাৰা যে AB ৰ আন আটাইবোৰ অৱস্থানত, ই বৃত্তটোক P বিন্দুত আৰু আন এটা বিন্দু, যেনে R_1 বা R_2 বা R_3

* 'tangent' (স্পৰ্শক) শব্দটো লেটিন ভাষাৰ শব্দ 'tangere' শব্দৰপৰা আহিছে, যাৰ অৰ্থ হৈছে স্পৰ্শ কৰা আৰু ইয়াক প্ৰথমে ডেনিছ গণিতজ্ঞ থমাছ ফিনেকে (Thomas Fineke) 1583 চনত ব্যৱহাৰ কৰিছিল।

আদিত ছেদ কৰিব। সেয়ে, তোমালোকে পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিব পাৰা যে বৃত্তটোৰ এটা বিন্দুত মাত্ৰ এডাল স্পৰ্শক আছে।

ওপৰোক্ত কাৰ্যপ্ৰণালী কৰি থাকোঁতে, তোমালোকে নিশ্চয় পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিলা যে অৱস্থান AB অৱস্থান, A′ B′ ৰ ফালে আগবঢ়াৰ লগে লগে, AB ৰেখা আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া বিন্দু যেনে Q_1, উমৈহতীয়া বিন্দু P ৰ ক্ৰমশ ঃ বেছি ওচৰ চাপি আহে। অৱশেষত, ই A″B″ৰ A′B′ অৱস্থানত P বিন্দুৰ লগত মিলিত হয়। আকৌ লক্ষ্য কৰা, যদি ‘AB’ ক P ৰ সোঁফালে ঘূৰোৱা হয় কি ঘটে? উমৈহতীয়া বিন্দু R_3 ক্ৰমশঃ P ৰ বেছি ওচৰ চাপি আহে আৰু অৱশেষত P ৰ লগত মিলিত হয়। সেয়ে আমি যি দেখো সেইটো হ’ল ঃ বৃত্তৰ স্পৰ্শক ছেদক ডালৰ এটা বিশেষ অৱস্থা যেতিয়া ইয়াৰ অনুৰূপ জ্যাৰ মূৰ বিন্দু দুটা মিলিত হয়।

কাৰ্যপ্ৰণালী 2 ঃ এখন কাগজত, এটা বৃত্ত আৰু বৃত্তটোৰ এডাল ছেদক PQ আঁকা। ছেদকৰ দুয়োফালে ইয়াৰ সমান্তৰাল বিভিন্ন ৰেখা আঁকা। কিছু পৰ্য্যায়ৰ পিছত, তোমালোকে দেখিবা যে ৰেখাবোৰৰদ্বাৰা কটা জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্য ক্ৰমশ ঃ কমি যাব অৰ্থাৎ ৰেখা আৰু বৃত্তৰ ছেদবিন্দু দুটা বেছি ওচৰ চাপিব (চিত্ৰ 10.3(ii) চোৱা)। এটা ক্ষেত্ৰত, ই ছেদকৰ এটা ফালে শূন্য হয় আৰু আনটো এটা ক্ষেত্ৰত, ই ছেদকৰ আনটো ফালে শূন্য হয়। চিত্ৰ 10.3 (ii) ত ছেদকৰ P′Q′ আৰু P″Q″ অৱস্থানবোৰ চোৱা। এইবোৰ প্ৰদত্ত ছেদক PQ ৰ সমান্তৰাল বৃত্তৰ স্পৰ্শক। এইটোৱে তোমালোকক ভাবি চাবলৈ সহায় কৰিব যে এটা প্ৰদত্ত ছেদকৰ সমান্তৰাল স্পৰ্শক দুডালতকৈ বেছি থাকিব নোৱাৰে।

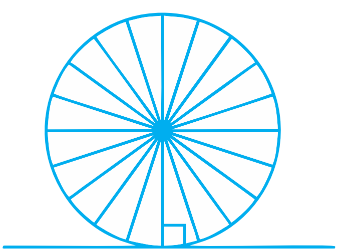


চিত্ৰ 10.3 (ii)

কাৰ্য্যপ্ৰণালী 1 কৰি থাকোঁতে, তোমালোকে নিশ্চয় পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিছিলা যে এডাল স্পৰ্শক হ’ল ছেদক, যেতিয়া ইয়াৰ অনুৰূপ জ্যাৰ দুয়োটা মূৰ বিন্দু লগ লাগে, সেই কথা এই কাৰ্য্যপ্ৰণালীটোৱে প্ৰতিপন্ন কৰে।

স্পৰ্শক আৰু বৃত্তৰ উমৈহতীয়া বিন্দুটোক স্পৰ্শবিন্দু (point of contact) বোলা হয় [চিত্ৰ 10.1 (iii)ত বিন্দু A] আৰু স্পৰ্শকডালে উমৈহতীয়া বিন্দুটোত বৃত্তক স্পৰ্শ কৰা বুলি কোৱা হয়।

এতিয়া তোমালোকৰ চাৰিওফালে চোৱা। তোমালোকে চাইকেল বা গৰুৰ গাড়ী গতি কৰি থকা



চিত্ৰ 10.4

দেখিছানে? ইয়াৰ চকাবোৰ চোৱা। এটা চকাৰ আটাইবোৰ শলা (spokes) ইয়াৰ ব্যাসাৰ্দ্ধৰফালে আছে। এতিয়া ভূমিত চকাটোৰ গতিসাপেক্ষে ইয়াৰ অৱস্থান লক্ষ্য কৰা। তোমালোকে ক'ৰবাত কোনো স্পৰ্শক দেখিছানে? (চিত্ৰ 10.4 চোৱা)। আচলতে, চকাটো এডাল ৰেখাৰ দিশত ঘূৰে, যিডাল ৰেখা চকাটোৰে নিৰ্দেশ কৰা বৃত্তৰ স্পৰ্শক। লগতে, লক্ষ্য কৰা যে আটাইবোৰ অৱস্থানতে ভূমিৰ লগত স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেদি যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধডাল স্পৰ্শকৰ লগত সমকোণত থকা যেন দেখা যায় (চিত্ৰ 10.4 চোৱা)। এতিয়া, আমি স্পৰ্শকৰ এই ধৰ্মটো প্ৰমাণ কৰিম।

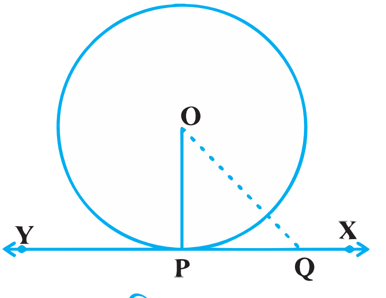
উপপাদ্য 10.1 ঃ *এটা বৃত্তৰ যিকোনো বিন্দুত টনা স্পৰ্শকডাল স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধৰ লম্ব।*

প্ৰমাণ ঃ দিয়া আছে, কেন্দ্ৰ বিন্দু O যুক্ত এটা বৃত্ত আৰু P বিন্দুত বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক XY.

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে, OP, XY ৰ লম্ব।

Pক বাদে XY ৰ ওপৰত Q এটা বিন্দু লোৱা আৰু OQ সংযোগ কৰা (চিত্ৰ 10.5 চোৱা)।

Q বিন্দুটো নিশ্চয় বৃত্তটোৰ বাহিৰত আছে। (কিয়? লক্ষ্য কৰা যে যদি Q বিন্দুটো বৃত্তৰ ভিতৰত থাকে, XY বৃত্তৰ এডাল ছেদক হয় আৰু এডাল স্পৰ্শক নহয়)। গতিকে, OQ, বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ OP তকৈ দীঘল। অৰ্থাৎ, OQ > OP.



চিত্ৰ 10.5

যিহেতু এইটো P বিন্দুক বাদে XY ৰেখাত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে হয়, XY ৰ বিন্দুবোৰলৈ O বিন্দুৰ আটাইবোৰ দূৰত্বৰ ভিতৰত OP য়েই আটাইতকৈ কম। সেয়ে OP, XY ৰ লম্ব (উপপাদ্য A1.7.ত দেখুওৱাৰ দৰে)।

মন্তব্য ঃ

1. উপৰিউক্ত উপপাদ্যৰদ্বাৰা, আমি সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰোঁ যে এটা বৃত্তৰ যিকোনো বিন্দুত মাত্ৰ এডালহে স্পৰ্শক থাকিব পাৰে।
2. স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধক কেতিয়াবা বিন্দুটোত বৃত্তটোৰ অভিলম্ব (normal) বুলিও কোৱা হয়।

অনুশীলনী 10.1

1. এটা বৃত্তৰ কিমানবোৰ স্পৰ্শক থাকিব পাৰে?

2. খালী ঠাই পূৰ্ণ কৰা

(i) এটা বৃত্তৰ স্পৰ্শকে ইয়াক ——— বিন্দুত ছেদ কৰে।

(ii) এটা বৃত্তক দুটা বিন্দুত ছেদ কৰা এডাল ৰেখাক ——— বোলে।

(iii) এটা বৃত্তৰ বৰ বেছি ——— সমান্তৰাল স্পৰ্শক থাকিব পাৰে।

(iv) এটা বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শক আৰু বৃত্তটোৰ উমৈহতীয়া বিন্দুটোক ——— বোলে।

3. 5 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত এটা বৃত্তৰ এটা বিন্দু P ত টনা এডাল স্পৰ্শক PQ য়ে কেন্দ্ৰ O ৰ মাজেৰে যোৱা এডাল ৰেখাক Q বিন্দুত লগ লাগে যাতে OQ = 12 চে.মি.। PQ ৰ দৈৰ্ঘ্য হ'ল ঃ

(A) 12 চে.মি. (B) 13 চে.মি. (C) 8.5 চে.মি. (D) $\sqrt{119}$ চে.মি.

4. এটা বৃত্ত আৰু এডাল প্ৰদত্ত ৰেখাৰ সমান্তৰালকৈ দুডাল ৰেখা আঁকা যাতে এডাল স্পৰ্শক হয় আৰু আনডাল ছেদক হয়।

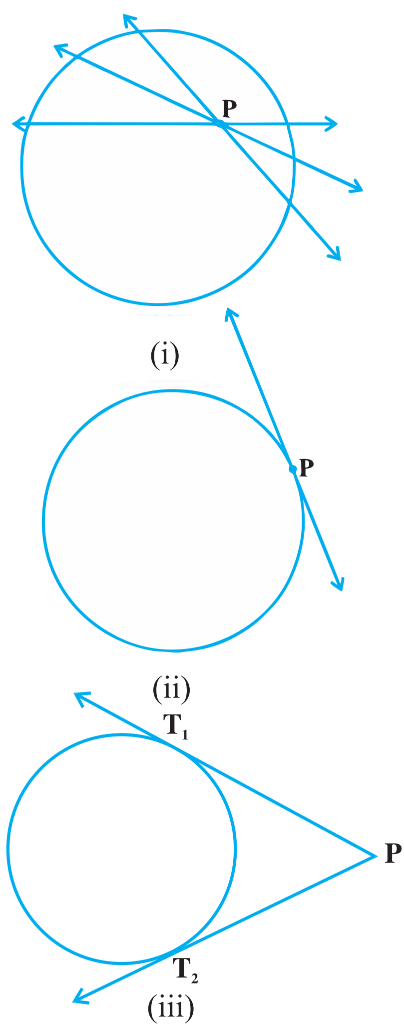
10.3. এটা বৃত্তৰ এটা বিন্দুৰপৰা টনা স্পৰ্শকৰ সংখ্যা (Number of Tangents from a Point on a Circle) ঃ

এটা বৃত্তৰ এটা বিন্দুৰপৰা টনা স্পৰ্শকৰ সংখ্যাৰ ধাৰণা পাবলৈ নিম্নোক্ত কাৰ্যপ্ৰণালীটো আমি সম্পন্ন কৰোঁহক ঃ

কাৰ্য্যপ্ৰণালী 3 ঃ এখন কাগজত এটা বৃত্ত আঁকা। ইয়াৰ ভিতৰত P এটা বিন্দু লোৱা। তোমালোকে এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক আঁকিব পাৰানে? তোমালোকে দেখিবা যে এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে যোৱা আটাইবোৰ ৰেখাই বৃত্তটোক দুটা বিন্দুত ছেদ কৰে। সেয়ে এটা বৃত্তৰ ভিতৰত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেৰে বৃত্তটোলৈ কোনো স্পৰ্শক আঁকা সম্ভৱ নহয় (চিত্ৰ 10.6 (i) চোৱা)।

তাৰ পিছত, বৃত্তটোত P এটা বিন্দু লোৱা আৰু এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে স্পৰ্শক আঁকা। ইতিমধ্যে তোমালোকে পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিছা যে এনেকুৱা এটা বিন্দুত বৃত্তটোৰ মাত্ৰ এডাল স্পৰ্শক আছে (চিত্ৰ 10.6 (ii) চোৱা)।

অৱশেষত, বৃত্তটোৰ বাহিৰত P এটা বিন্দু লোৱা আৰু এই বিন্দুটোৰপৰা বৃত্তটোলৈ স্পৰ্শক আঁকিবলৈ চেষ্টা কৰা। তোমালোকে কি পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিলা? তোমালোকে দেখিবলৈ পাবা যে এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে বৃত্তটোলৈ ঠিক দুডাল স্পৰ্শক আঁকিব পাৰি। (চিত্ৰ 10.6 (iii) চোৱা)।



চিত্ৰ 10.6

আমি এই সত্যতাবোৰ নিম্নোক্ত ধৰণে সংক্ষিপ্ত কৰিব পাৰো ঃ

অৱস্থা 1 ঃ বৃত্তটোৰ ভিতৰত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা বৃত্তৰ স্পৰ্শক নাই।

অৱস্থা 2 ঃ বৃত্তটোত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা বৃত্তৰ মাত্ৰ এডালহে স্পৰ্শক আছে।

অৱস্থা 3 ঃ বৃত্তটোৰ বাহিৰত থকা এটা বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা বৃত্তৰ ঠিক দুডাল স্পৰ্শক আছে।

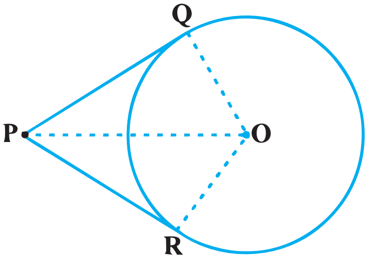
চিত্ৰ 10.6 (iii) ত, স্পৰ্শক PT_1 আৰু PT_2 ৰ যথাক্ৰমে স্পৰ্শবিন্দু T_1 আৰু T_2।

বহিঃ বিন্দু P ৰ পৰা বৃত্তৰ স্পৰ্শ বিন্দুলৈ টনা স্পৰ্শকৰ খণ্ডটোৰ দৈৰ্ঘ্যক P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ স্পৰ্শকৰ দৈৰ্ঘ্য বোলা হয়।

লক্ষ্য কৰা যে চিত্ৰ 10.6 (iii) ত, PT_1 আৰু PT_2 হ'ল P ৰ পৰা বৃত্তটোলৈ স্পৰ্শকৰ দৈৰ্ঘ্য। দৈৰ্ঘ্য PT_1 আৰু PT_2 ৰ এটা উমৈহতীয়া ধৰ্ম আছে। তোমালোকে এইটো নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবানে ? PT_1 আৰু PT_2 জোখা। এইবোৰ সমাননে ? আচলতে, ইহঁত সদায় সমান। আমি এই সত্যতাটো নিম্নোক্ত উপপাদ্যত প্ৰমাণ কৰোঁ আহা ঃ

উপপাদ্য 10.2 ঃ *এটা বহিঃ বিন্দুৰপৰা বৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকবোৰৰ দৈৰ্ঘ্য সমান।*

প্ৰমাণ ঃ আমাক দিয়া আছে, O কেন্দ্ৰযুক্ত এটা বৃত্ত, বৃত্তটোৰ বাহিৰত P এটা বিন্দু আৰু P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোৰ PQ, PR দুডাল স্পৰ্শক (চিত্ৰ 10.7 চোৱা)। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে PQ = PR.



চিত্ৰ 10.7

ইয়াৰ বাবে, আমি OP, OQ আৰু OR সংযোগ কৰোঁ। তেন্তে ∠OQP আৰু ∠ORP সমকোণ, কাৰণ ইহঁত ব্যাসাৰ্দ্ধ আৰু স্পৰ্শকৰ মাজৰ কোণ আৰু উপপাদ্য 10.1 অনুসৰি ইহঁত সমকোণ। এতিয়া OQP আৰু ORP সমকোণী ত্ৰিভুজৰ, OQ = OR (একে বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ)

OP = OP (উমৈহতীয়া)

গতিকে, $\Delta\ OQP \cong \Delta ORP$ (RHS)

ইয়াৰপৰা পাওঁ PQ = PR (CPCT)

মন্তব্য ঃ

1. উপপাদ্যটো পাইথাগোৰাছ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি নিম্নোক্ত ধৰণেও প্ৰমাণ কৰিব পাৰি ঃ

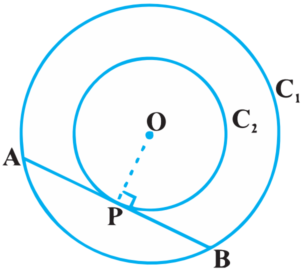
   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (যিহেতু OQ = OR)

   ইয়াৰপৰা পাওঁ PQ = PR.

2. এইটোও লক্ষ্য কৰা যে ∠OPQ = ∠OPR

গতিকে, OP, $\angle QPR$ ৰ কোণ সমদ্বিখণ্ডক, অৰ্থাৎ স্পৰ্শক দুডালৰ মাজৰ কোণটোৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত কেন্দ্ৰ থাকে। আমি কিছুমান উদাহৰণ লওঁহক।

উদাহৰণ 1 ঃ প্ৰমাণ কৰা যে দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্তত, ডাঙৰ বৃত্তটোৰ জ্যাডালে সৰু বৃত্তটোক স্পৰ্শ কৰিলে, জ্যাডাল স্পৰ্শবিন্দুত সমখণ্ডিত হয়।



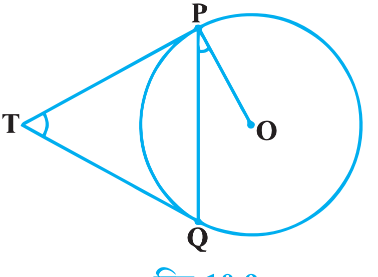
চিত্ৰ 10.8

সমাধান ঃ আমাক দিয়া আছে, O কেন্দ্ৰযুক্ত দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত C_1 আৰু C_2 আৰু ডাঙৰ বৃত্ত C_1 ৰ AB জ্যাডালে সৰু বৃত্ত C_2 ক P বিন্দুটোত স্পৰ্শ কৰে (চিত্ৰ 10.8 চোৱা)। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে AP = BP.

আমি O,P সংযোগ কৰোঁহক। তেন্তে, Pত C_2 ৰ AB এডাল স্পৰ্শক আৰু OP ইয়াৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ। গতিকে, উপপাদ্য 10.1 ৰপৰা পাওঁ $OP \perp AB$.

এতিয়া, C_1 বৃত্তৰ AB এডাল জ্যা আৰু $OP \perp AB$। গতিকে, OP, AB জ্যাৰ সমদ্বিখণ্ডক, যিহেতু কেন্দ্ৰৰপৰা টনা লম্বই জ্যাডালক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, অৰ্থাৎ, AP = BP.

উদাহৰণ 2 ঃ এটা বহিঃবিন্দু T ৰ পৰা O কেন্দ্ৰযুক্ত এটা বৃত্তলৈ TP আৰু TQ দুডাল স্পৰ্শক টনা হ'ল। প্ৰমাণ কৰা যে, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$.



চিত্ৰ 10.9

সমাধান ঃ আমাক দিয়া আছে, O কেন্দ্ৰ যুক্ত এটা বৃত্ত, এটা বহিঃ বিন্দু T আৰু বৃত্তটোৰ TP আৰু TQ দুডাল স্পৰ্শক, য'ত P, Q দুটা স্পৰ্শ বিন্দু (চিত্ৰ 10.9 চোৱা)।

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

ধৰাহ'ল $\angle PTQ = \theta$

এতিয়া, উপপাদ্য 10.2 ৰপৰা, TP = TQ.

সেয়ে, TPQ এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ।

গতিকে, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\theta$

আকৌ, উপপাদ্য 10.1 ৰপৰা, $\angle OPT = 90°$

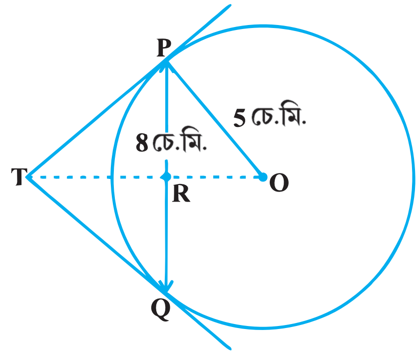
সেয়ে, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ$

$$= 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

ইয়াৰপৰা পাওঁ, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

উদাহৰণ 3 ঃ 5 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তৰ 8 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ PQ এডাল জ্যা। P আৰু Q ত টনা স্পৰ্শকবোৰে এটা বিন্দু T ত ছেদ কৰে (চিত্ৰ 10.10 ত চোৱা)। TP ৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.10

সমাধান ঃ OT সংযোগ কৰা। ধৰাহ'ল ই PQ ক R বিন্দু ছেদ কৰে। তেতিয়া ΔTPQ সমদ্বিবাহু আৰু TO, $\angle PTQ$ ৰ কোণ সমদ্বিখণ্ডক।

সেয়ে, $OT \perp PQ$ আৰু সেইবাবে OTয়ে PQক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

ইয়াৰ পৰা পাওঁ $PR = RQ = 4$ চে.মি.

আকৌ, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2}$

$= \sqrt{5^2 - 4^2}$ চে.মি.

$= 3$ চে.মি.

এতিয়া, $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$ (কিয়?)

সেয়ে, $\angle RPO = \angle PTR$

গতিকে AA সাদৃশ্যৰদ্বাৰা পাওঁ, সমকোণী ত্ৰিভুজ TRP সমকোণী ত্ৰিভুজ PRO ৰ লগত সদৃশ।

ইয়াৰপৰা পাওঁ, $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$, অৰ্থাৎ, $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ বা $TP = \frac{20}{3}$ চে.মি.

টোকা ঃ নিম্নোক্ত ধৰণেও পাইথাগোৰাছ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি, TP নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি ঃ

ধৰাহ'ল, $TP = x$ আৰু $TR = y$.

তেতিয়া, $x^2 = y^2 + 16$ (সমকোণী ΔPRT লৈ) ....(1)

$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ (সমকোণী ΔOPT লৈ) ....(2)

(2) ৰ পৰা (1) বিয়োগ কৰি, আমি পাওঁ—

$$25 = 6y - 7 \quad \text{বা} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

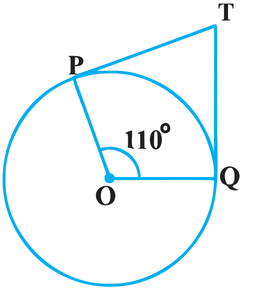
গতিকে, $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9}$ [(1) ৰ পৰা]

বা, $x = \frac{20}{3}$

অনুশীলনী ঃ 10.2

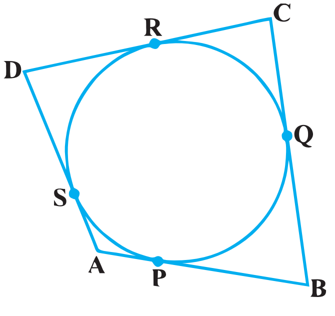
প্ৰশ্ন 1 ৰ পৰা 3 লৈ শুদ্ধ উত্তৰ বাছি উলিওৱা আৰু উপযুক্ত কাৰণ দৰ্শোৱা ঃ

1. এটা বিন্দু Q ৰপৰা এটা বৃত্তৰ স্পৰ্শকডালৰ দৈৰ্ঘ্য 24 চে.মি. আৰু কেন্দ্ৰৰপৰা Q ৰ দূৰত্ব 25 চে.মি. বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ হ'ল
   (A) 7 চে.মি. (B) 12 চে.মি.
   (C) 15 চে.মি. (D) 24.5 চে.মি.

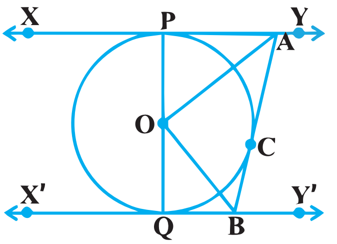


চিত্ৰ 10.11

2. চিত্ৰ 10.11ত যদি O কেন্দ্ৰ যুক্ত এটা বৃত্তৰ TP আৰু TQ দুডাল স্পৰ্শক, যাতে $\angle POQ = 110°$, তেন্তে $\angle PTQ$
   (A) 60° (B) 70°
   (C) 80° (D) 90° ৰ সমান।
3. যদি এটা বিন্দু P ৰ পৰা O কেন্দ্ৰযুক্ত এটা বৃত্তৰ PA আৰু PB স্পৰ্শকেইডালে পৰস্পৰ 80° কোণত হালি থাকে, তেন্তে $\angle POA$
   (A) 50° (B) 60°
   (C) 70° (D) 80° ৰ সমান।
4. প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্তৰ ব্যাসৰ মূৰত টনা স্পৰ্শকবোৰ সমান্তৰাল।
5. প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ স্পৰ্শবিন্দুত টনা লম্বডাল কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যায়।
6. বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা 5 চে.মি. দূৰত্বত থকা এটা বিন্দু A ৰপৰা স্পৰ্শক এডালৰ দৈৰ্ঘ্য 4 চে.মি.। বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।
7. 5 চে.মি. আৰু 3 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ দুটা ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত আছে। ডাঙৰ বৃত্তৰ জ্যাডালে সৰু বৃত্তক স্পৰ্শ কৰে, জ্যাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।
8. এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰাকৈ ABCD এটা চতুৰ্ভুজ আঁকা হ'ল (চিত্ৰ 10.12 চোৱা)। প্ৰমাণ কৰা যে AB + CD = AD + BC



চিত্ৰ 10.12



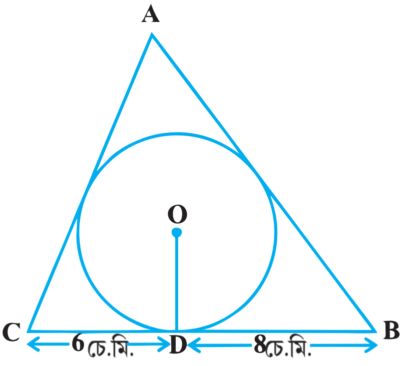
চিত্ৰ 10.13

9. চিত্র 10.13ত, O কেন্দ্র যুক্ত বৃত্তৰ XY আৰু X′Y′ দুডাল সমান্তৰাল স্পৰ্শক আৰু স্পৰ্শ বিন্দু C ত আন এডাল স্পৰ্শক AB য়ে XY ক A ত আৰু X′Y′ ক B ত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে $\angle AOB = 90°$.

10. প্ৰমাণ কৰা যে বৃত্তৰ এটা বহিঃ বিন্দুৰপৰা টনা স্পৰ্শক দুডালৰ মাজৰ কোণটো স্পৰ্শবিন্দু দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰদ্বাৰা কেন্দ্ৰত সন্মুখকৈ উৎপন্ন কৰা কোণটোৰ সম্পূৰক।

11. প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰা সামান্তৰিকটো এটা ৰম্বাচ।

12. 4চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰাকৈ ABC এটা ত্ৰিভুজ অঁকা হ'ল যাতে স্পৰ্শবিন্দু D ৰ দ্বাৰা বিভক্ত BC ৰ খণ্ড BD আৰু DC ৰ দৈৰ্ঘ্য যথাক্ৰমে 8 চে.মি. আৰু 6 চে.মি. (চিত্ৰ 10.14 চোৱা)। AB আৰু AC বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 10.14

13. প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৃত্তক স্পৰ্শ কৰি থকা এটা চতুৰ্ভুজৰ বিপৰীত বাহুবোৰে বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰত সন্মুখকৈ সম্পূৰক কোণ কৰে।

10.4. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত, তোমালোকে নিম্নোক্ত প্ৰধান বিষয়সমূহ অধ্যয়ন কৰিলা ঃ

1. বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ অৰ্থ।
2. বৃত্তৰ স্পৰ্শকডাল স্পৰ্শবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধৰ লম্ব।
3. বৃত্তৰ এটা বহিঃ বিন্দুৰপৰা বৃত্তটোলৈ টনা স্পৰ্শক দুডালৰ দৈৰ্ঘ্য সমান।

K5P3K6

অংকন (Constructions)

একাদশ অধ্যায়

11.1. অৱতাৰণা (Introduction)

নবম শ্ৰেণীত, তোমালোকে এপাত পোনপটীয়া ৰুলাৰ আৰু এডাল কম্পাছ ব্যৱহাৰ কৰি কিছুমান অংকন কৰিছা, যেনে ঃ এটা কোণক সমদ্বিখণ্ডিত কৰা, এডাল ৰেখাখণ্ডৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক আঁকা, ত্ৰিভুজৰ কিছুমান অংকন আদি আৰু সেইবোৰৰ উপযুক্ত কাৰণো দিছিলা। এই অধ্যায়ত, আমি আগৰ অংকনবোৰৰ জ্ঞান প্ৰয়োগ কৰি কিছুমান আৰু অংকন কৰিম। তোমালোকে এনেকুৱা অংকন কাৰ্য্যত নিহিত হৈ থকা গাণিতিক যুক্তিও প্ৰদৰ্শন কৰিবলৈ সক্ষম হ'বা বুলি আশা কৰা হ'ল।

11.2. এডাল ৰেখাখণ্ডৰ বিভাজন (Division of a Line Segment) ঃ

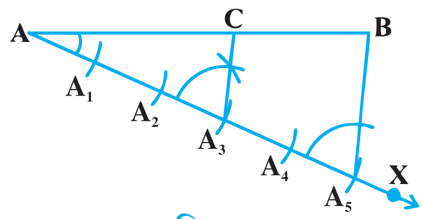
ধৰা এডাল ৰেখাখণ্ড দিয়া আছে আৰু তোমালোকে ইয়াক নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত, যেনে ঃ 3 : 2.ত ভাগ কৰিব লাগে। তোমালোকে ইয়াৰ দৈৰ্ঘ্যৰ জোখ লৈ আৰু ইয়াৰ ওপৰত নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত ভাগ কৰা এটা বিন্দু চিহ্নিত কৰি কামটো কৰিব পাৰা। কিন্তু ধৰা, তোমালোকে ইয়াৰ ঠিকমতে জোখ লোৱাৰ কোনো উপায় নাই, তেন্তে তোমালোকে কেনেকৈ বিন্দুটো নিৰ্ণয় কৰিবা? আমি এনেকুৱা এটা বিন্দু নিৰ্ণয়ৰ বাবে তলত দুটা উপায় দিওঁ।

অংকন (Construction) 11.1 ঃ এটা নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত এডাল ৰেখাখণ্ডক ভাগ কৰা।

এডাল ৰেখাখণ্ড AB দিয়া আছে, আমি ইয়াক $m : n$ অনুপাতত ভাগ কৰিব লাগে, য'ত m আৰু n উভয়ে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এইটো বোধগম্য হ'বলৈ, তোমালোকক সহায় কৰাৰ বাবে আমি ল'ম $m = 3$ আৰু $n = 2$.

অংকনৰ পৰ্য্যায়বোৰ (Steps of Construction) ঃ

1. AB ৰ লগত এটা সূক্ষ্মকোণ হোৱাকৈ যিকোনো ৰশ্মি AX আঁকা।
2. AX ৰ ওপৰত 5 $(= m + n)$ টা বিন্দু A_1, A_2, A_3, A_4 আৰু A_5 বহুওৱা যাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$.



চিত্ৰ 11.1

3. BA_5 সংযোগ কৰা।
4. A_3 (m = 3) বিন্দুটোৰ মাজেদি, A_5B ৰ সমান্তৰালকৈ AB আৰু AB ক C বিন্দুত ছেদ কৰাকৈ এডাল ৰেখা আঁকা ($\angle AA_5B$ ৰ সমানকৈ এটা কোণ উৎপন্ন কৰি) (চিত্ৰ 11.1চোৱা)। তেন্তে, AC : CB = 3 : 2.

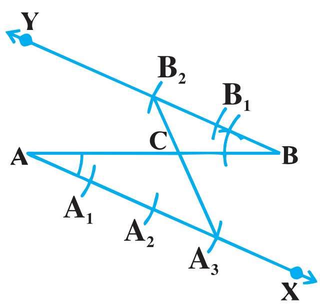
আমি লক্ষ্য কৰোঁহক কেনেকৈ এই পদ্ধতিটোৱে আমাক প্ৰয়োজনীয় বিভাজনটো দিয়ে।

যিহেতু A_3C, A_5B ৰ সমান্তৰাল,

গতিকে, $\dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{AC}{CB}$ (মূল সমানুপাত উপপাদ্য মতে)

অংকনৰদ্বাৰা, $\dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{3}{2}$ গতিকে, $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{3}{2}$

দেখা যায় যে C য়ে AB ক 3 : 2 অনুপাতত ভাগ কৰে।



চিত্ৰ 11.2

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative Method) ঃ

অংকনৰ পৰ্য্যায়বোৰ (Steps of Construction) ঃ

1. AB ৰ লগত এটা সূক্ষ্মকোণ হোৱাকৈ যিকোনো ৰশ্মি AX আঁকা।
2. AX ৰ সমান্তৰালকৈ এটা ৰশ্মি BY আঁকা যাতে $\angle ABY = \angle BAX$ হয়।
3. AX ৰ ওপৰত A_1, A_2, A_3 (m = 3) বিন্দুবোৰ আৰু BY ৰ ওপৰত B_1, B_2 বিন্দুবোৰ বহুওৱা যাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$.
4. A_3B_2 সংযোগ কৰা। ধৰা ই AB ক এটা বিন্দু C ত ছেদ কৰে (চিত্ৰ 11.2)।

তেনেহ'লে AC : CB = 3 : 2.

কিয় এই পদ্ধতিটোৱে কাৰ্য্য কৰে? আমি চাওঁহক ঃ

ইয়াত ΔAA_3C, ΔBB_2C ৰ লগত সদৃশ (কিয়?)

তেনেহ'লে, $\dfrac{AA_3}{BB_2} = \dfrac{AC}{BC}$.

যিহেতু অংকনৰ দ্বাৰা, $\dfrac{AA_3}{BB_2} = \dfrac{3}{2}$, গতিকে, $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{2}$.

আচলতে, ওপৰোক্ত পদ্ধতিবোৰে যিকোনো অনুপাতত ৰেখাখণ্ডটো ভাগ কৰাৰ বাবে কাৰ্য্য কৰে।

আমি এতিয়া এটা নিৰ্দিষ্ট ত্ৰিভুজৰ সদৃশকৈ আন এটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰাৰ বাবে ওপৰোক্ত অংকনৰ ধাৰণা প্ৰয়োগ কৰোঁ, যাৰ বাহুবোৰ প্ৰদত্ত ত্ৰিভুজটোৰ বাহুৰ সৈতে এটা নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত আছে।

অংকন 11.2 ঃ নিৰ্দিষ্ট স্কেল ফেক্টৰ অনুসৰি এটা নিৰ্দিষ্ট ত্ৰিভুজৰ সদৃশকৈ এটা ত্ৰিভুজ অংকন কৰা।

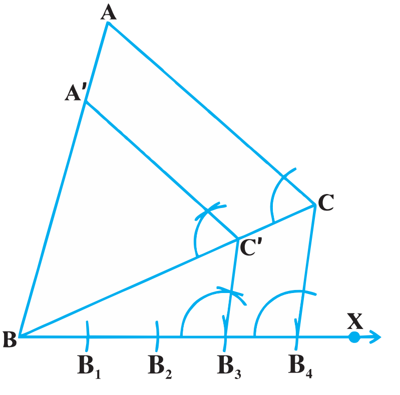
এই অংকনটো দুটা ভিন্ন অৱস্থাৰ লগত জড়িত। এটাত, নিৰ্দিষ্ট ত্ৰিভুজটোতকৈ অংকন কৰিবলগীয়া ত্ৰিভুজটো সৰু আৰু আনটোত, ই ডাঙৰ। ইয়াত, স্কেল ফেক্টৰ অৰ্থ হ'ল নিৰ্দিষ্ট ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ সৈতে অংকন কৰিবলগীয়া ত্ৰিভুজটোৰ বাহুবোৰৰ অনুপাত (অধ্যায় 6 চোৱা)। অংকন বোধগম্য হ'বলৈ আমি নিম্নোক্ত উদাহৰণবোৰ লওঁহক। একে পদ্ধতিবোৰ সাধাৰণ অৱস্থাৰ বাবেও প্ৰযোজ্য।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা প্ৰদত্ত ত্ৰিভুজ ABC ৰ সদৃশকৈ এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাতে ইয়াৰ বাহুবোৰ ABC ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{3}{4}$ গুণৰ সমান (অৰ্থাৎ স্কেল ফেক্টৰ $\frac{3}{4}$ ৰ)।

সমাধান ঃ দিয়া আছে এটা ত্ৰিভুজ ABC, আমি আন এটা ত্ৰিভুজ আঁকিব লাগে যাৰ বাহুবোৰ ABC ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{3}{4}$ গুণ।

অংকনৰ পৰ্য্যায়বোৰ (Steps of Construction) ঃ

1. শীৰ্ষবিন্দু A ৰ বিপৰীতফালে BC ৰ লগত এটা সূক্ষ্মকোণ কৰি যিকোনো ৰশ্মি BX আঁকা।
2. BX ৰ ওপৰত 4 টা ($\frac{3}{4}$ ত 3 আৰু 4 ৰ ডাঙৰ) বিন্দু B_1, B_2, B_3 আৰু B_4 বহুওঁৱা যাতে $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.
3. B_4C সংযোগ কৰা আৰু B_3 (তৃতীয়, $\frac{3}{4}$ ত 3 আৰু 4 ৰ সৰু 3 বাবে) ৰ মাজেৰে B_4C ৰ সমান্তৰালকৈ BC ক C′ ত ছেদ কৰাকৈ এডাল ৰেখা আঁকা।
4. C′ ৰ মাজেদি CA ৰেখাৰসমান্তৰালকৈBA ক A′ত ছেদ কৰাকৈ এডাল ৰেখা আঁকা (চিত্ৰ 11.3 চোৱা)। তেনেহ'লে, $\Delta A'BC'$ য়েই আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজ।



চিত্ৰ 11.3

এতিয়া আমি লক্ষ্য কৰোঁহক কেনেকৈ এই অংকনটোৱে আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজটো দিয়ে।

অংকন 11.1 ৰ পৰা, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$.

গতিকে, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

অৰ্থাৎ, $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$.

আকৌ C′A′, CAৰ সমান্তৰাল। গতিকে, ΔA′BC′ ~ ΔABC (কিয়?)

সেয়ে, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$.

উদাহৰণ 2 এটা নিৰ্দিষ্ট ত্ৰিভুজ ABC ৰ সদৃশকৈ আন এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাতে ইয়াৰ বাহুবোৰ ABC ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{5}{3}$ গুণৰ সমান (অৰ্থাৎ স্কেল ফেক্টৰ $\frac{5}{3}$ ৰ)।

সমাধান ঃ দিয়া আছে এটা ত্ৰিভুজ ABC, আমি আন এটা ত্ৰিভুজ আঁকিব লাগে যাৰ বাহুবোৰ Δ ABC ৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{5}{3}$ গুণ।

অংকনৰ পৰ্য্যায়বোৰ (Steps of Construction) ঃ

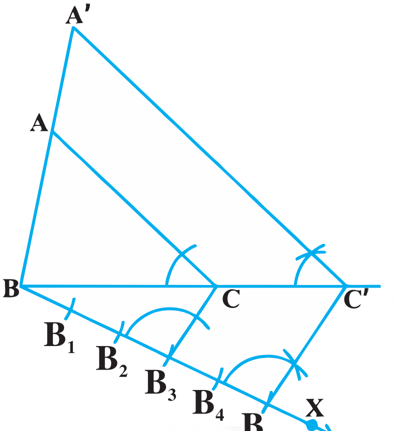
1. শীৰ্ষবিন্দু A ৰ বিপৰীতফালে BC ৰ লগত এটা সূক্ষ্মকোণ কৰি যিকোনো ৰশ্মি BX আঁকা।
2. BX ৰ ওপৰত 5 টা ($\frac{5}{3}$ ত 5 আৰু 3 ৰ ডাঙৰ) বিন্দু B_1, B_2, B_3, B_4 আৰু B_5 বহুওৱা যাতে $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$.
3. B_3 (তৃতীয় বিন্দু, $\frac{5}{3}$ ত 3 আৰু 5 ৰ সৰু 3), C ৰ লগত সংযোগ কৰা আৰু B_5 ৰ মাজেৰে B_3C ৰ সমান্তৰালকৈ বৰ্দ্ধিত ৰেখাখণ্ড BC ক C′ ত ছেদ কৰাকৈ এডাল ৰেখা আঁকা।
4. C′ ৰ মাজেদি CA ৰ সমান্তৰালকৈ বৰ্দ্ধিত BA ক A′ ত ছেদ কৰাকৈ এডাল ৰেখা আঁকা (চিত্ৰ 11.4 চোৱা)।

তেনেহ'লে A′BC′ য়েই আঁকিবলগীয়া ত্ৰিভুজ।

অংকনৰ যুক্তিযুক্ততাৰ বাবে, লক্ষ্য কৰা যে ΔABC ~ΔA′BC′ (কিয়?)

গতিকে, $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$.

কিন্তু, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$,



চিত্ৰ 11.4

সেয়ে, $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$,

গতিকে, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$.

মন্তব্য ঃ উদাহৰণ 1 আৰু 2 ত, তোমালোকে AB বা AC ৰ লগত এটা সূক্ষ্মকোণ কৰি এডাল ৰশ্মি ল'ব পাৰা আৰু একেদৰে আগবাঢ়িব পাৰা।

অনুশীলনী 11.1

নিম্নোক্ত প্ৰতিটোত, অংকনৰ উপযুক্ত কাৰণো দৰ্শোৱা ঃ

1. 7.6 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ এডাল ৰেখাখণ্ড আঁকা আৰু ইয়াক 5 : 8 অনুপাতত ভাগ কৰা। ভাগ দুটা জোখা।

2. 4 চে.মি., 5 চে.মি. আৰু 6 চে.মি. বাহুৰ এটা ত্ৰিভুজ আঁকা আৰু তাৰ পিছত ইয়াৰ সদৃশ হোৱাকৈ এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাৰ বাহুবোৰ প্ৰথম ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{2}{3}$ গুণ হয়।

3. 5 চে.মি., 6 চে.মি. আৰু 7 চে.মি. বাহুযুক্ত এটা ত্ৰিভুজ আঁকা আৰু তাৰ পিছত আন এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাৰ বাহুবোৰ প্ৰথম ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{7}{5}$ গুণ হয়।

4. ভূমি 8 চে.মি. আৰু উন্নতি 4 চে.মি. যুক্ত এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ আঁকা আৰু তাৰ পিছত আন এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাৰ বাহুবোৰ সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $1\frac{1}{2}$ গুণ।

5. BC = 6 চে.মি., AB = 5 চে.মি. আৰু $\angle ABC = 60°$ যুক্ত ABC এটা ত্ৰিভুজ আঁকা। তাৰ পিছত এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাৰ বাহুবোৰ ABC ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{3}{4}$ গুণ হয়।

6. BC = 7 চে.মি., $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$ যুক্ত ABC এটা ত্ৰিভুজ আঁকা। তাৰ পিছত, এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাৰ বাহুবোৰ ΔABC ৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{4}{3}$ গুণ।

7. এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ আঁকা য'ত বাহুবোৰৰ (অতিভুজক বাদ দি) দৈৰ্ঘ্য 4 চে.মি. আৰু 3 চে.মি.। তাৰ পিছত আন এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যাৰ বাহুবোৰ প্ৰদত্ত ত্ৰিভুজটোৰ অনুৰূপ বাহুবোৰৰ $\frac{5}{3}$ গুণ।

11.3. বৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ অংকন (Construction of Tangents to a Circle)

তোমালোকে ইতিমধ্যে আগৰ অধ্যায়ত অধ্যয়ন কৰিছা যে যদি এটা বিন্দু বৃত্তৰ ভিতৰত থাকে, তেন্তে এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে বৃত্তৰ এডালো স্পৰ্শক থাকিব নোৱাৰে। যি হওঁক, যদি এটা বিন্দু বৃত্তটোত থাকে, তেন্তে এই বিন্দুটোত বৃত্তটোৰ মাত্ৰ এডাল স্পৰ্শক থাকিব আৰু ই এই বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ব্যাসাৰ্দ্ধৰ লম্ব। গতিকে, যদি তোমালোকে বৃত্তৰ এটা বিন্দুত এডাল স্পৰ্শক আঁকিব খোজা, মাথোন এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে ব্যাসাৰ্দ্ধডাল আঁকা আৰু এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে এই ব্যাসাৰ্দ্ধডালৰ লম্ব হোৱাকৈ এডাল ৰেখা আঁকা।

তোমালোকে এইটোও দেখিছা যে যদি এই বিন্দুটো বৃত্তৰ বাহিৰত থাকে, তেন্তে এই বিন্দুটোৰ পৰা বৃত্তৰ দুডাল স্পৰ্শক থাকিব।

এতিয়া আমি লক্ষ্য কৰিম কেনেকৈ এই স্পৰ্শকবোৰ আঁকিব পাৰি।

অংকন (Construction) 11.3 ঃ এটা বহিস্থ বিন্দুৰপৰা বৃত্তৰ স্পৰ্শক অংকন।

আমাক দিয়া আছে O কেন্দ্ৰযুক্ত এটা বৃত্ত আৰু ইয়াৰ বাহিৰত P এটা বিন্দু। আমি P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ দুডাল স্পৰ্শক আঁকিব লাগে।

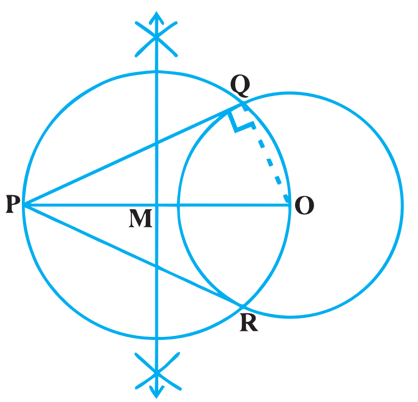
অংকনৰ পৰ্য্যায়বোৰ (Steps of Construction) ঃ

1. PO সংযোগ কৰা আৰু ইয়াক সমদ্বিখণ্ডিত কৰা। ধৰা M, PO ৰ মধ্যবিন্দু।
2. M ক কেন্দ্ৰ আৰু MO ক ব্যাসাৰ্দ্ধ হিচাবে লৈ, এটা বৃত্ত আঁকা। ধৰা ই প্ৰদত্ত বৃত্তটোক Q আৰু R বিন্দুত ছেদ কৰে।
3. PQ আৰু PR সংযোগ কৰা।

তেনেহ'লে, PQ আৰু PR য়েই আঁকিবলগীয়া দুডাল স্পৰ্শক (চিত্ৰ 11.5)।

এতিয়া আমি লক্ষ্য কৰোঁহক কেনেকৈ এই অংকনে কাম কৰে। O,Q সংযোগ কৰা। তেনেহ'লে, $\angle PQO$ অৰ্ধবৃত্তত থকা এটা কোণ আৰু সেইবাবে, $\angle PQO = 90°$. আমি $PQ \perp OQ$ ক'ব পাৰোনে?

যিহেতু, OQ প্ৰদত্ত বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ, PQ বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক হ'ব লাগিব। সেইদৰে, PRও বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক।



চিত্ৰ 11.5

টোকা ঃ যদি বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ দিয়া নাথাকে, তোমালোকে প্ৰথমতে দুডাল অসমান্তৰাল জ্যা লৈ তাৰ পিছত সিহঁতৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ ছেদ বিন্দু উলিয়াই বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰা আৰু তাৰ পিছত, তোমালোকে ওপৰোক্ত ধৰণে আগবাঢ়িব পাৰা।

অনুশীলনী 11.2

নিম্নোক্ত প্ৰতিটোত, অংকনৰ উপযুক্ত কাৰণ দিয়া ঃ

1. 6 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্ত আঁকা। ইয়াৰ কেন্দ্ৰৰপৰা 10 চে.মি. আঁতৰৰ এটা বিন্দুৰপৰা বৃত্তটোৰ স্পৰ্শক এযোৰা আঁকা আৰু সিহঁতৰ দৈৰ্ঘ্য জোখা।

2. 6 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্তটোৰ এটা বিন্দুৰপৰা 4 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ বৃত্তলৈ এডাল স্পৰ্শক আঁকা। প্ৰকৃত গণনাৰদ্বাৰা জোখ পৰীক্ষা কৰা।

3. 3 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্ত আঁকা। ইয়াৰ কেন্দ্ৰৰপৰা 7 চে.মি. দূৰত্বত বৰ্দ্ধিত এডাল ব্যাসত P আৰু Q দুটা বিন্দু লোৱা। এই P আৰু Q বিন্দু দুটাৰপৰা বৃত্তৰ স্পৰ্শকবোৰ আঁকা।

4. 5 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ বৃত্তৰ এযোৰ স্পৰ্শক আঁকা যিবোৰ পৰস্পৰ $60°$ কোণ এটাত হালি থাকে।

5. 8 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ AB এডাল ৰেখাখণ্ড আঁকা। A ক কেন্দ্ৰ হিচাবে লৈ, 4 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্ত আঁকা আৰু B ক কেন্দ্ৰ হিচাবে লৈ, 3 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ আন এটা বৃত্ত আঁকা। প্ৰতিটো বৃত্তলৈ আনটো বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰপৰা স্পৰ্শকবোৰ আঁকা।

6. ধৰা ABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ য'ত AB = 6 চে.মি., BC = 8 চে.মি. আৰু $\angle B = 90°$. B পৰা AC ৰ ওপৰত BD লম্ব। B, C, D ৰ মাজেৰে যোৱা বৃত্তটো আঁকা। A ৰ পৰা এই বৃত্তলৈ স্পৰ্শকবোৰ আঁকা।

7. খাৰু এপাতৰ সহায়ত এটা বৃত্ত আঁকা। বৃত্তটোৰ বাহিৰত এটা বিন্দু লোৱা। এই বিন্দুটোৰ পৰা বৃত্তৰ এযোৰ স্পৰ্শক আঁকা।

11.4. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত, তোমালোকে নিম্নোক্ত অংকনবোৰ কেনেকৈ কৰা হয় শিকিলা ঃ

1. এটা নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত এডাল ৰেখাখণ্ড ভাগ কৰা।

2. এটা নিৰ্দিষ্ট স্কেল ফেক্টৰ অনুসৰি এটা প্ৰদত্ত ত্ৰিভুজৰ সদৃশ হোৱাকৈ আন এটা ত্ৰিভুজ আঁকা যিটো স্কেল ফেক্টৰ 1 তকৈ সৰু বা 1 তকৈ ডাঙৰ হ'ব পাৰে।

3. এটা বহিঃবিন্দুৰ পৰা বৃত্তৰ এযোৰ স্পৰ্শক আঁকা।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

অংকন 11.2 ৰ উদাহৰণ 1 আৰু 2 ত প্ৰয়োগ কৰা একে পৰ্যায়বোৰ অনুসৰণ কৰি এটা নিৰ্দিষ্ট স্কেল ফেক্টৰলৈ এটা নিৰ্দিষ্ট চতুৰ্ভুজৰ (বা এটা বহুভুজৰ) সদৃশকৈ এটা চতুৰ্ভুজ (বা এটা বহুভুজ) অংকনো কৰিব পাৰি।

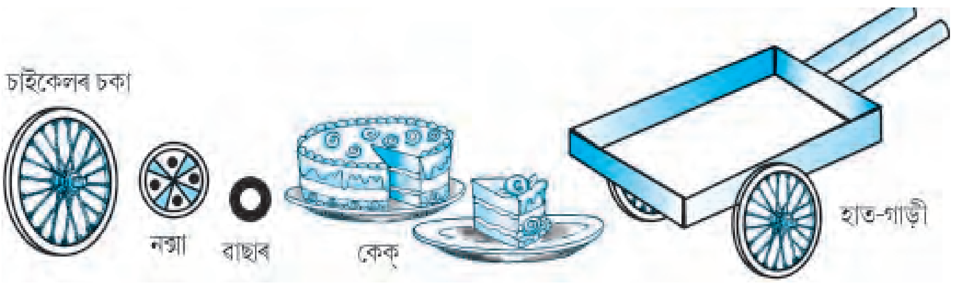
F2Y5E6

বৃত্ত সম্বন্ধীয় কালি (Areas Related to Circles)

দ্বাদশ অধ্যায়

12.1. অৱতাৰণা (Introduction)

ইতিমধ্যে তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীৰপৰা সৰল সামতলিক আকাৰবোৰ যেনে ঃ আয়তক্ষেত্ৰ, বৰ্গক্ষেত্ৰ, সামান্তৰিক, ত্ৰিভুজ আৰু বৃত্তৰ কালি আৰু পৰিসীমা নিৰ্ণয়ৰ কিছুমান পদ্ধতিৰ সৈতে পৰিচিত। আমি আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত পাই অহা বহুতো বস্তুৰ কিবা নহয় কিবা প্ৰকাৰে বৃত্তীয় আকাৰৰ লগত সম্বন্ধ আছে। এনেকুৱা বস্তুবোৰৰ ভিতৰত চাইকেলৰ চকা, থেলাৰ চকা, শেলমাৰা বোৰ্ড ঘূৰণীয়া কেক্, পাপৰ, নলাৰ ঢাকোন, বিভিন্ন নক্সা, খাৰু, ব্ৰুচ্ পিন, বৃত্তাকাৰ পথ, টিন গজালৰ টুপী, ফুলনি বাগিচাৰ বৃত্তাকাৰ ঠাই আদি কিছুমান উদাহৰণ (চিত্ৰ 12.1চোৱা)। সেয়েহে, বৃত্তীয় আকাৰবোৰৰ লগত সম্পৰ্ক থকা পৰিসীমা আৰু কালি নিৰ্ণয়ৰ সমস্যা ব্যৱহাৰিক গুৰুত্ব প্ৰধান। এই অধ্যায়ত, এটা বৃত্তৰ পৰিসীমা (পৰিধি) আৰু কালিৰ ধাৰণাবোৰৰ এটি পুনৰ নিৰীক্ষণৰে আমি আমাৰ আলোচনা আৰম্ভ কৰিম আৰু এই জ্ঞান এটা বৃত্তীয় ক্ষেত্ৰৰ (বা চমুকৈ এটা বৃত্তৰ) দুটা বিশেষ অংশ বৃত্তকলা আৰু বৃত্তখণ্ডৰ কালি নিৰ্ণয়ত প্ৰয়োগ কৰিম। আমি এইটোও লক্ষ্য কৰিম যে কেনেকৈ বৃত্ত বা তাৰ খণ্ডবোৰৰ সহায়ত গঠিত সামতলিক আকাৰবোৰৰ গোট কিছুমানৰ কালি কিদৰে নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।



চিত্ৰ 12.1

12.2. বৃত্তৰ পৰিসীমা আৰু কালি— এটি পৰ্য্যালোচনা (Perimeter and Area of a Circle — A Review) ঃ

মনত পেলোৱা যে এটা বৃত্তৰ চাৰিওফালে এবাৰ ঘূৰোতে আবৃত হোৱা দূৰত্বই ইয়াৰ পৰিসীমা, যাক সচাৰাচৰ কোৱা হয় ইয়াৰ পৰিধি। তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীবোৰৰপৰা জানা যে এটা বৃত্তৰ পৰিধি ইয়াৰ ব্যাসৰ সৈতে এটা ধ্ৰুৱক অনুপাতত থাকে। এই ধ্ৰুৱক অনুপাতটো গ্ৰীক আখৰ π ('পাই' বুলি পঢ়া) ৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

আন কথাত, $\dfrac{\text{পৰিধি (circumference)}}{\text{ব্যাস (diameter)}} = \pi$

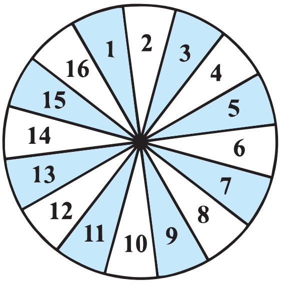
বা, পৰিধি $= \pi \times$ ব্যাস

$= \pi \times 2r$ (য'ত r হ'ল বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ)

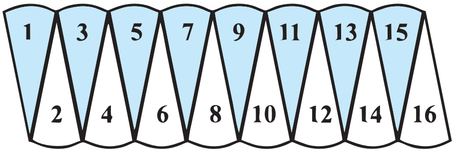
$= 2\pi r$ (where r is the radius of the circle)

মহান ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ আৰ্য্যভট্টই (খৃষ্টাব্দ 476 – 550) πৰ এটা আসন্ন মান দিছিল। তেওঁ নিৰূপণ কৰিছিল যে $\pi = \dfrac{62832}{20000}$, আৰু ই প্ৰায় 3.1416ৰ সমান। এইটো মন কৰিবলগীয়া যে ভাৰতৰ মহান, অসাধাৰণ প্ৰতিভা সম্পন্ন গণিতজ্ঞ শ্ৰীনিবাস ৰামানুজন (1887–1920)ৰ এটা অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি, গণিতজ্ঞসকলে π ৰ মান দশমিকৰ পিছত নিযুত স্থানলৈ শুদ্ধকৈ গণনা কৰিবলৈ সমৰ্থ হৈছে। নৱম শ্ৰেণীৰ প্ৰথম অধ্যায়ৰপৰা তোমালোকে জানিব পাৰিছা যে π এটা অপৰিমেয় সংখ্যা আৰু ইয়াৰ দশমিক বিস্তাৰ অসমাপ্ত আৰু অপুনৰাবৃত (পৌনঃপুনিক নহয়)। ব্যৱহাৰিক উদ্দেশ্যৰ বাবে, আমি সাধাৰণতে π ৰ মান $\dfrac{22}{7}$ বা 3.14 (প্ৰায়) হিচাবে লওঁ।

তোমালোকে এইটোৱো মনত পেলোৱা যে এটা বৃত্তৰ কালি πr^2, য'ত r হ'ল বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ। স্মৰণ কৰা যে তোমালোকে সপ্তম শ্ৰেণীত এটা বৃত্তক বৃত্তকলাবোৰলৈ ভাগ ভাগ কৰি ইয়াৰ সত্যাপনো কৰিছিলা আৰু চিত্ৰ 12.2 ত দেখুওৱাৰ দৰে সেইবোৰ পুনৰ সজোৱা।



(i)



(ii)

চিত্ৰ 12.2

তোমালোকে লক্ষ্য কৰিব পাৰা যে চিত্ৰ 12.2 ত থকা আকৃতিটো, দৈৰ্ঘ্য $\frac{1}{2}\times 2\pi r$ আৰু প্ৰস্থ r ৰ প্ৰায় এটা আয়তক্ষেত্ৰ। ই দেখুৱায় যে বৃত্তৰ কালি $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$. আমি এটা উদাহৰণৰ দ্বাৰা আগৰ শ্ৰেণীবোৰত শিকা ধাৰণাবোৰ মনত পেলাওঁ আহা।

উদাহৰণ 1 ঃ প্ৰতি মিটাৰত 24 টকা হাৰত এখন বৃত্তাকাৰ পথাৰৰ বেৰ দিয়া কামত 5280 টকা খৰচ হয়। পথাৰখন প্ৰতি বৰ্গ মিটাৰত 0.50 টকা হাৰত হাল বাব লাগে। পথাৰখনৰ হাল বোৱা খৰচ নিৰ্ণয় কৰা ($\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা)।

সমাধান ঃ বেৰৰ দৈৰ্ঘ্য (মিটাৰত) $= \frac{\text{মুঠ খৰচ}}{\text{হাৰ}} = \frac{5280}{24} = 220$

সেয়ে, পথাৰখনৰ পৰিধি = 220 মিটাৰ

গতিকে, যদি পথাৰখনৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ r মিটাৰ হয়, তেন্তে

$$2\pi r = 220$$

বা, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$

বা, $r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$

অৰ্থাৎ, পথাৰখনৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 35 মিটাৰ।

গতিকে, পথাৰখনৰ কালি $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35$ মিটাৰ^2

$= 22 \times 5 \times 35$ মিটাৰ^2

এতিয়া, পথাৰখনৰ 1 মিটাৰ^{2}ত হাল বোৱা খৰচ = 0.50 টকা

সেয়েহে, পথাৰখনৰ হালবোৱা মুঠ খৰচ $= 22 \times 5 \times 35 \times 0.50$ টকা

= 1925 টকা।

অনুশীলনী ঃ 12.1

অন্য ধৰণে দিয়া নাথাকিলে $\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা।

1. দুটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ যথাক্ৰমে 19 চে.মি. আৰু 9 চে.মি.। এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ পৰিধি বৃত্ত দুটাৰ পৰিধিৰ সমষ্টিৰ সমান।

2. দুটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ যথাক্ৰমে 8 চে.মি. আৰু 6 চে.মি.। এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ কালি বৃত্ত দুটাৰ কালিৰ সমষ্টিৰ সমান।

3. এখন ঘূৰণীয়া আকৃতিৰ ধনু-কাঁড়ৰ লক্ষ্য কেন্দ্ৰৰপৰা বাহিৰলৈ পাঁচটা নম্বৰ পোৱা অংশ ক্ৰমে সোণালী, ৰঙা, নীলা, ক'লা আৰু বগা ৰঙেৰে চিহ্নিত কৰি চিত্ৰ 12.3 ত আঁকি দেখুওৱা হৈছে। সোণালী ৰঙেৰে নিৰ্দ্দেশ কৰা অঞ্চলটোৰ ব্যাস 21 চে.মি. আৰু বাকী ৰং দিয়া অঞ্চলবোৰৰ প্ৰত্যেকৰে প্ৰস্থ 10.5 চে.মি.। ৰং দিয়া অঞ্চল প্ৰত্যেকৰে কালি নিৰ্ণয় কৰা।

চিত্ৰ 12.3

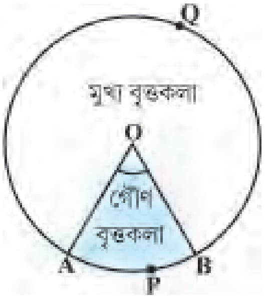
4. এখন গাড়ীৰ চকাবোৰৰ প্ৰত্যেকৰে ব্যাস 80 চে.মি.। যেতিয়া গাড়ীখনে প্ৰতি ঘণ্টাত 66 কি.মি. দ্ৰুতিত গৈ থাকে, প্ৰতিটো চকাই 10 মিনিটত কিমানটা সম্পূৰ্ণ ঘূৰণ কৰে?

5. তলত দিয়াবোৰত শুদ্ধ উত্তৰত চিন দিয়া আৰু তোমাৰ বাছনিৰ যুক্তি দৰ্শোৱাঃ যদি এটা বৃত্তৰ পৰিসীমা আৰু কালি সাংখ্যিকভাৱে সমান হয়, তেন্তে বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ হ'ল-

(A) 2 একক (B) π একক (C) 4 একক (D) 7 একক

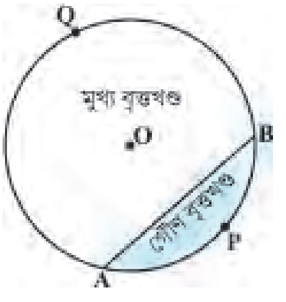
12.3. বৃত্তকলা আৰু বৃত্তখণ্ডৰ কালি (Areas of Sector and Segment of a Circle) ঃ

ইতিমধ্যে তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীসমূহত বৃত্তকলা আৰু বৃত্তখণ্ড পদবোৰ পাই আহিছা। মনত পেলোৱা যে দুডাল ব্যাসাৰ্দ্ধ আৰু অনুৰূপ চাপৰ দ্বাৰা আবৃত বৃত্তীয় অঞ্চলৰ খণ্ডটোক (বা অংশটোক) এটা বৃত্তকলা বোলা হয়; এডাল জ্যা আৰু অনুৰূপ চাপৰ মাজৰ বৃত্তীয় অঞ্চলৰ খণ্ডটোক (বা অংশটোক) এটা বৃত্তখণ্ড বোলা হয়। এইদৰে, চিত্ৰ 12.4 ত, OAPB আবৃত অঞ্চল O কেন্দ্ৰযুক্ত বৃত্তটোৰ এটা বৃত্তকলা। $\angle AOB$ ক বৃত্তকলাৰ কোণ বোলা হয়। লক্ষ্য কৰা যে এই চিত্ৰত, OAQB অনাবৃত অঞ্চলো এটা বৃত্তকলা। স্পষ্টভাৱে, OAPB ক গৌণ বৃত্তকলা বোলা হয় আৰু OAQB ক মুখ্য বৃত্তকলা বোলা হয়। তোমালোকে এইটোও মন কৰা যে মুখ্য বৃত্তকলাৰ কোণ হ'ল $360° - \angle AOB$.



চিত্ৰ 12.4

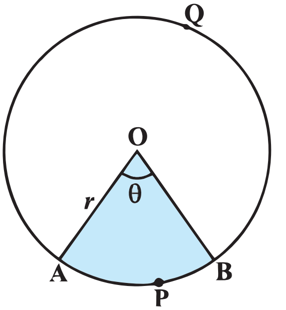
এতিয়া, চিত্ৰ 12.5 ত লক্ষ্য কৰা য'ত O কেন্দ্ৰ যুক্ত বৃত্তটোৰ AB এডাল জ্যা। সেয়ে, আবৃত অঞ্চল APB বৃত্তটোৰ এটা খণ্ড। তোমালোকে এইটোও মন কৰা যে AB জ্যাৰদ্বাৰা গঠন হোৱা



চিত্ৰ 12.5

অনাবৃত অঞ্চল AQB বৃত্তটোৰ আন এটা খণ্ড। স্পষ্টভাৱে APB ক গৌণ বৃত্তখণ্ড আৰু AQB মুখ্য বৃত্তখণ্ড বোলা হয়।

মন্তব্য ঃ যেতিয়া আমি 'বৃত্তখণ্ড' আৰু 'বৃত্তকলা' লিখোঁ, অন্যধৰণে নিৰূপিত নোহোৱা পৰ্য্যন্ত, আমি যথাক্ৰমে বুজিম 'গৌণ বৃত্তখণ্ড' আৰু 'গৌণ বৃত্তকলা'।



চিত্ৰ 12.6

এতিয়া এই জ্ঞানৰদ্বাৰা, সেইবোৰৰ কালি গণনা কৰিবলৈ আমি কিছুমান সম্বন্ধ (বা সূত্ৰ) নিৰ্ণয় কৰাৰ চেষ্টা কৰোঁ আহা।

ধৰা কেন্দ্ৰ O আৰু ব্যাসাৰ্দ্ধ r যুক্ত এটা বৃত্তৰ OAPB এটা বৃত্তকলা (চিত্ৰ 12.6 চোৱা)। ধৰা $\angle AOB$ ৰ ডিগ্ৰী মাপ θ.

তোমালোকে জানা যে এটা বৃত্তৰ কালি (আচলতে এটা বৃত্তাকাৰ অঞ্চলৰ বা চক্ৰাকাৰৰ) হ'ল πr^2.

এই ধৰণে, O কেন্দ্ৰত 360° (অৰ্থাৎ ডিগ্ৰী মাপত 360) ৰ কোণ এটা উৎপন্ন কৰা এই বৃত্তীয় অঞ্চলটোক এটা বৃত্তকলা বুলি আমি বিবেচনা কৰিব পাৰোঁ। এতিয়া ঐকিক নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি, আমি OAPB বৃত্তকলাটোৰ কালি নিম্নোক্ত ধৰণে পাব পাৰোঁ ঃ

যেতিয়া কেন্দ্ৰত কোণটোৰ ডিগ্ৰীমাপ 360, বৃত্তকলাটোৰ কালি $= \pi r^2$

সেয়ে, যেতিয়া কেন্দ্ৰত কোণটোৰ ডিগ্ৰীমাপ 1, বৃত্তকলাটোৰ কালি $= \dfrac{\pi r^2}{360}$.

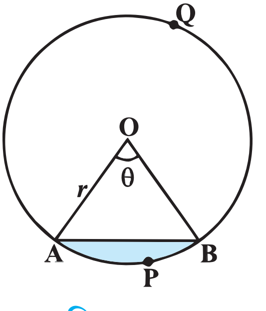
গতিকে, যেতিয়া কেন্দ্ৰত কোণটোৰ ডিগ্ৰীমাপ θ, বৃত্তকলাটোৰ কালি $= \dfrac{\pi r^2}{360} \times \theta$

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 .$$

এইদৰে, এটা বৃত্তৰ এটা বৃত্তখণ্ডৰ কালিৰ বাবে আমি নিম্নোক্ত সম্বন্ধ (বা সূত্ৰ) পাওঁ ঃ

কোণ θ ৰ বৃত্তকলাটোৰ কালি $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$

য'ত r হ'ল বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ আৰু θ হ'ল ডিগ্ৰী মাপত বৃত্তকলাটোৰ কোণ।



চিত্ৰ 12.7

এতিয়া স্বাভাৱিকতে এটা প্ৰশ্নৰ উদয় হয়— আমি এই বৃত্তকলাটো অনুযায়ী APB চাপটোৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁনে? হয় পাৰোঁ। আকৌ, ঐকিক নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি আৰু বৃত্তটোৰ (360^0 কোণৰ) সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য $2\pi r$ হিচাবে ধৰি, আমি APB চাপটোৰ নিৰ্ণেয় দৈৰ্ঘ্য $\dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ হিচাপে পাব পাৰোঁ।

সেয়েহে, θ কোণৰ এটা বৃত্তকলাৰ এটা চাপৰ দৈৰ্ঘ্য $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

এতিয়া আমি কেন্দ্ৰ O আৰু ব্যাসাৰ্দ্ধ r যুক্ত এটা বৃত্তৰ APB বৃত্তখণ্ডটোৰ কালিৰ কথাটো লওঁহক। তোমালোকে লক্ষ্য কৰা যে ঃ

APB বৃত্তখণ্ডটোৰ কালি = OAPB বৃত্তকলাটোৰ কালি – ΔOABৰ কালি

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ ৰ কালি}$$

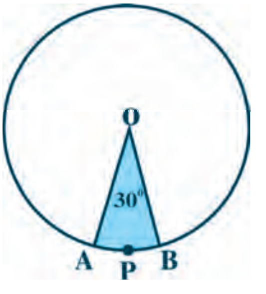
টোকা ঃ চিত্ৰ 12.6 আৰু চিত্ৰ 12.7 ৰ পৰা যথাক্ৰমে, তোমালোকে পৰ্য্যবেক্ষণকৰিব পাৰা যে

মুখ্য বৃত্তকলা OAQB ৰ কালি = πr^2 – গৌণ বৃত্তকলা OAPB ৰ কালি আৰু মুখ্যবৃত্তখণ্ড AQB ৰ কালি = πr^2 – গৌণ বৃত্তখণ্ড APB ৰ কালি।

এতিয়া আমি এই ধাৰণাবোৰ (বা সিদ্ধান্তবোৰ) বোধগম্য হ'বলৈ কিছুমান উদাহৰণ লওঁহক।

উদাহৰণ 2 ঃ 4 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত আৰু 30° কোণৰ এটা বৃত্তৰ বৃত্তকলাটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। লগতে, অনুৰূপ মুখ্য বৃত্তকলাটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$)।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, বৃত্তকলা OAPB (চিত্ৰ 12.8 চোৱা)।



চিত্ৰ 12.8

$$\text{বৃত্তকলাটোৰ কালি} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ চে.মি.}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ চে.মি.}^2$$

$= 4.19$ চে.মি.^{2} (প্ৰায়)

অনুৰূপ মুখ্য বৃত্তকলাটোৰ কালি = πr^2 – বৃত্তকলা OAPB ৰ কালি

$= (3.14 \times 16 - 4.19)$ চে.মি.^{2}

$= 46.05$ চে.মি.^{2}

$= 46.1$ চে.মি.^{2} (প্ৰায়)

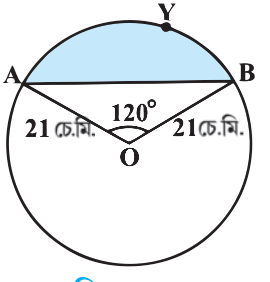
বিকল্পভাৱে,

$$\text{মুখ্য বৃত্তকলাটোৰ কালি} = \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16 \text{ চে.মি.}^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{ চে.মি.}^2$$
$$= 46.05 \text{ চে.মি.}^2$$
$$= 46.1 \text{ চে.মি.}^2 \text{ (প্ৰায়)}$$

উদাহৰণ 3 ঃ যদি বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 21 চে.মি. আৰু $\angle AOB = 120°$, চিত্ৰ 12.9 ত দেখুওৱা AYB বৃত্তখণ্ডটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্ৰ 12.9

সমাধান ঃ AYB বৃত্তখণ্ডটোৰ কালি = বৃত্তকলা OAYB ৰ কালি – ΔOAB ৰ কালি ..... (1)

এতিয়া, OAYB বৃত্তকলাটোৰ কালি

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ চে.মি.}^2$$
$$= 462 \text{ চে.মি.}^2 \qquad ..... (2)$$

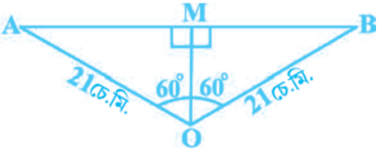
ΔOABৰ কালি উলিওৱাৰ বাবে, চিত্ৰ 12.10. ত দেখুওৱাৰ দৰে $OM \perp AB$ আঁকা।

লক্ষ্য কৰা যে OA = OB।

গতিকে, RHS সৰ্বাংগসমতাৰ দ্বাৰা, $\Delta AMO \cong \Delta BMO$.

সেয়েহে, M, AB ৰ মধ্যবিন্দু আৰু $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$.

ধৰা, OM = x চে.মি.



চিত্ৰ 12.10

সেয়েহে, ΔOMA ৰ পৰা, $\frac{OM}{OA} = \cos 60°$

বা, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left(\because \cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow x = \frac{21}{2}$$

সেয়েহে, OM = $\frac{21}{2}$ চে.মি.

আকৌ, $\frac{AM}{OA} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

সেয়েহে, AM = $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ চে.মি.

গতিকে, AB = 2 AM $= \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ চে.মি. $= 21\sqrt{3}$ চে.মি.

সেয়েহে, ΔOABৰ কালি $= \frac{1}{2} AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ চে.মি²

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ চে.মি.² ..... (3)

গতিকে, AYB বৃত্তখণ্ডটোৰ কালি $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ চে.মি.² [(1),(2) আৰু (3)ৰ পৰা]

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ চে.মি.²

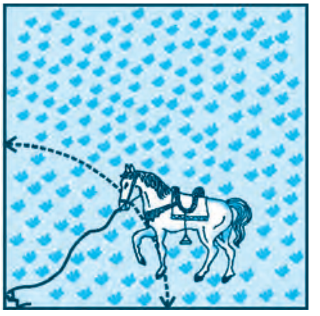
অনুশীলনী ঃ 12.2

অন্যধৰণে দিয়া নাথাকিলে $\pi = \frac{22}{7}$ ল'বা।

1. 6 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত এটা বৃত্তৰ এটা বৃত্তকলাৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা, যদি বৃত্তকলাটোৰ কোণ 60° হয়।
2. 22 চে.মি. পৰিধিযুক্ত এটা বৃত্তৰ এটা চোকৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।
3. এটা ঘড়ীৰ মিনিটৰ কাঁটাডালৰ দৈৰ্ঘ্য 14 চে.মি.। 5 মিনিটত ঘড়ীৰ কাঁটাডালৰ দ্বাৰা ঘূৰণৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।
4. 10 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তৰ এডাল জ্যাই কেন্দ্ৰত এটা সমকোণ কৰে। অনুৰূপ (i) গৌণ বৃত্তখণ্ড (ii) মুখ্য বৃত্তকলাৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$)
5. 21 চে.মি., ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তত, এটা চাপে কেন্দ্ৰত এটা 60° ৰ কোণ কৰে। নিৰ্ণয় কৰাঃ
   (i) চাপটোৰ দৈৰ্ঘ্য
   (ii) চাপটোৰ দ্বাৰা গঠন হোৱা বৃত্তকলাটোৰ কালি
   (iii) অনুৰূপ জ্যাডালৰ দ্বাৰা গঠন হোৱা বৃত্তখণ্ডটোৰ কালি।
6. 15 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তৰ এডাল জ্যাই কেন্দ্ৰত এটা 60° ৰ কোণ কৰে। বৃত্তটোৰ অনুৰূপ গৌণ আৰু মুখ্য বৃত্তখণ্ডবোৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$ আৰু $\sqrt{3} = 1.73$)

7. 12 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তৰ এডাল জ্যাই কেন্দ্ৰত এটা 120° ৰ কোণ কৰে। বৃত্তটোৰ অনুৰূপ বৃত্তখণ্ডটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$ আৰু $\sqrt{3} = 1.73$)

8. 15 মিটাৰ বাহুৰ এখন বৰ্গক্ষেত্ৰাকাৰ ঘাঁহনি পথাৰৰ এটা চুকত এটা খুঁটিত 5 মিটাৰ দীঘল ৰছীৰে এটা ঘোঁৰা বান্ধি থোৱা হৈছে। (চিত্ৰ 12.11)

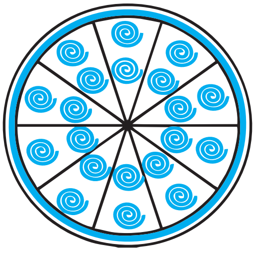


চিত্ৰ 12.11

(i) ঘোঁৰাটো য'ত চৰিব পাৰে পথাৰ খনৰ সেই অংশটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) যদি ৰছীডাল 5 মিটাৰৰ সলনি 10 মিটাৰ দীঘল হয়, চৰণীয়া অঞ্চলটোৰ বৃদ্ধি নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$)

9. 35 মি.মি. ব্যাসযুক্ত এটা বৃত্তৰ আকাৰৰ এটা ব্ৰোচপিন ৰূপৰ তাঁৰেৰে তৈয়াৰ কৰা হৈছে। আকৌ, তাঁৰডাল 5 ডাল ব্যাস হোৱাকৈ ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে আৰু চিত্ৰ 12.12ত দেখুওৱাৰ দৰে এই ব্যাসবোৰে বৃত্তটোক 10 টা সমান বৃত্তকলাত ভাগ কৰিছে।

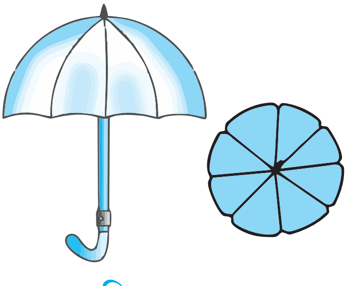


চিত্ৰ 12.12

(i) প্ৰয়োজন হোৱা ৰূপৰ তাঁৰৰ মুঠ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) ব্ৰোচপিনটোৰ প্ৰতিটো বৃত্তকলাৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

10. এটা ছাতিৰ সমান ব্যৱধানত থকাকৈ 8 ডাল ৰিব্ আছে (চিত্ৰ 12.13 চোৱা)। ছাতিটোক 45 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা সমান বৃত্ত হ'ব বুলি ধৰি লৈ, ছাতিটোৰ দুটা ক্ৰমিক ৰিবৰ মাজৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

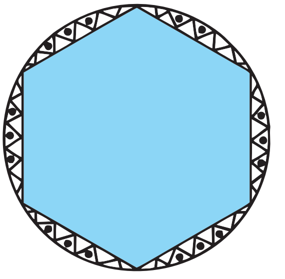


চিত্ৰ 12.13

11. এখন গাড়ীৰ ওপৰাউপৰিকৈ লাগি নথকাকৈ দুডাল ৱাইপাৰ (Wiper) আছে। 115° ৰ এটা কোণৰে ঘূৰি থকা প্ৰতিডাল ৱাইপাৰৰ 25 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ এখন ব্লেড আছে। ব্লেডবোৰৰ প্ৰতিটো ঘূৰণত পৰিষ্কাৰ হোৱা মুঠ অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

12. পানীৰ তলত থকা শিলবোৰৰ বাবে জাহাজবোৰক সতৰ্ক কৰি দিবলৈ, এটা লাইট্‌হাউচে ৰঙা বৰণীয়া পোহৰ 16.5 কি.মি. দূৰত্বলৈ 80° কোণৰ এটা বৃত্তকলাৰ ওপৰত বিয়পায়। সাগৰৰ যি অঞ্চলৰ ওপৰত জাহাজবোৰ সতৰ্ক কৰি দিয়া হয় সেই অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$)।

13. চিত্ৰ 12.14 ত দেখুওৱাৰ দৰে এখন ঘূৰণীয়া টেবুল কভাৰৰ ছয়টা সমান নক্সা আছে। যদি কভাৰটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 28 চে.মি. হয়, তেন্তে প্ৰতি চে.মি.^{2} ত 0.35 টকা হাৰত নক্সাবোৰ তৈয়াৰ কৰাৰ খৰচ নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\sqrt{3} = 1.7$)



চিত্ৰ 12.14

14. শুদ্ধ উত্তৰত চিন দিয়া ঃ

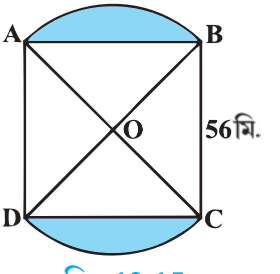
R ব্যাসাৰ্দ্ধ যুক্ত এটা বৃত্তৰ p (ডিগ্ৰীত) কোণৰ এটা বৃত্তকলাৰ কালি হ'ল–

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4. সামতলিক আকাৰবোৰৰ গোটসমূহৰ কালি (Areas of Combinations of Plane Figures) ঃ

এতিয়ালৈকে আমি বিভিন্ন আকাৰবোৰৰ কালি পৃথকভাৱে নিৰ্ণয় কৰিছো। এতিয়া আমি সামতলিক আকাৰবোৰৰ গোটসমূহৰ কালি উলিয়াবলৈ চেষ্টা কৰোঁহক। আমি আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত আকাৰবোৰ এনেধৰণে আৰু লগতে বিভিন্ন আমোদজনক নক্সাবোৰৰ আকাৰতো পাই আহিছোঁ। এনেকুৱা উদাহৰণবোৰৰ কিছুমান হ'ল ফুলনি বাগিছাৰ বৃত্তাকাৰ ঠাই, নলাৰ ঢাকন, খিৰিকীৰ নক্সা, টেবুল কভাৰৰ নক্সা। আমি কিছুমান উদাহৰণৰ জৰিয়তে এই আকাৰবোৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰাৰ পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰোঁ।

উদাহৰণ 4 ঃ চিত্ৰ 12.15ত, 56 মিটাৰ বাহুৰ এডোখৰ বৰ্গাকাৰ, ঘাঁহ থকা মুকলি ঠাই ABCD ৰ দুয়োফালত দুডোখৰ বৃত্তীয় ফুলনি; দেখুওৱা হৈছে। যদি বৰ্গাকাৰ ঘাঁহ থকা মুকলি ঠাইখনৰ কৰ্ণবোৰৰ ছেদ বিন্দু O য়েই প্ৰতি ডোখৰ বৃত্তীয় ফুলনিৰ কেন্দ্ৰ হয়, তেন্তে ঘাঁহ থকা মুকলি ঠাইখন আৰু ফুলনিৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 12.15

সমাধান ঃ ঘাঁহ থকা মুকলি ঠাই ABCD ৰ কালি $= 56^2$ মিটাৰ^2

$= 56 \times 56$ মিটাৰ^2 ..... (1)

ধৰা OA = OB = x মিটাৰ

সেয়েহে, $x^2 + x^2 = 56^2$

বা, $2x^2 = 56 \times 56$

বা, $x^2 = 28 \times 56$ ..... (2)

এতিয়া, বৃত্তকলা OAB ৰ কালি $= \frac{90}{360} \times \pi x^2 = \frac{1}{4} \times \pi x^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56$ মিটাৰ^2 [(2) ৰ পৰা] ..... (3)

আকৌ, ΔOAB ৰ কালি $= \frac{1}{4} \times 56^2$ মিটাৰ^2

$= \frac{1}{4} \times 56 \times 56$ মিটাৰ^2 ($\angle$ AOB = 90°) ..... (4)

সেয়েহে, ফুলনি AB ৰ কালি $= \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right)$ মিটাৰ^2

[(3) আৰু (4)ৰ পৰা]

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2\right)$ মিটাৰ^2

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}$ মিটাৰ^2 ..... (5)

সেইদৰে, আনখন ফুলনিৰ কালি $= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}$ মিটাৰ^2 ..... (6)

গতিকে, মুঠ কালি $= \left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right)$ মিটাৰ^2

$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right)$ মিটাৰ^2 [(1), (5) আৰু (6)ৰ পৰা]

$= 28 \times 56 \times \frac{18}{7}$ মিটাৰ^2

$= 4032$ মিটাৰ^2

বিকল্প সমাধান ঃ

মুঠকালি = বৃত্তকলা OAB ৰ কালি + বৃত্তকলা ODC ৰ কালি

+ ΔOAD ৰ কালি + ΔOBC ৰ কালি

$$= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{ মিটাৰ}^2$$

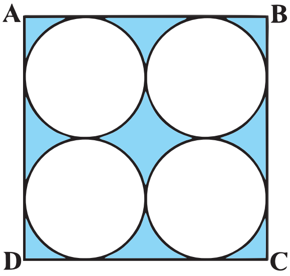
$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2\right) \text{ মিটাৰ}^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) \text{ মিটাৰ}^2$$

$$= 56 \times 72 \text{ মিটাৰ}^2$$

$$= 4032 \text{ মিটাৰ}^2$$

উদাহৰণ 5 ঃ চিত্ৰ 12.16ত আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা, য'ত 14 চে.মি. বাহুৰ ABCD এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ।



চিত্ৰ 12.16

সমাধান ঃ ABCD বৰ্গক্ষেত্ৰৰ কালি = 14×14 চে.মি.^{2}

= 196 চে.মি.^{2}

প্ৰতিটো বৃত্তৰ ব্যাস = $\frac{14}{2}$ চে.মি. = 7 চে.মি.

সেয়েহে, প্ৰতিটো বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ = $\frac{7}{2}$ চে.মি.

সেয়েহে, এটা বৃত্তৰ কালি = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2$ চে.মি.^{2}

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ চে.মি.^{2}

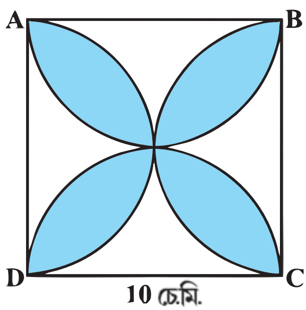
$= \frac{154}{4}$ চে.মি.^{2}

$= \frac{77}{2}$ চে.মি.^{2}

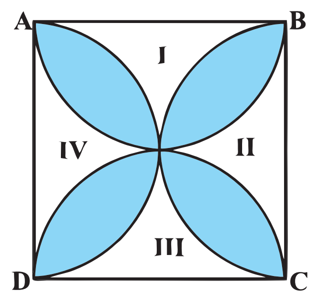
গতিকে, চাৰিটা বৃত্তৰ কালি = $4 \times \frac{77}{2}$ চে.মি.^{2} = 154 চে.মি.^{2}

এতেকে, ৰঙেৰে আবৃত অঞ্চলটোৰ কালি = (196 – 154) চে.মি.^{2} = 42 চে.মি.^{2}

উদাহৰণ 6 ঃ চিত্ৰ 12.17ত, নক্সাটোৰ আচ্ছাদিত অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা, য'ত 10চে.মি. বাহুৰ ABCD এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ আৰু বৰ্গক্ষেত্ৰটোৰ প্ৰতিটো বাহুক ব্যাস হিচাবে লৈ অৰ্ধবৃত্তবোৰ অঁকা হৈছে। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$)



চিত্ৰ 12.17



চিত্ৰ 12.18

সমাধান ঃ আমি চাৰিটা অনাচ্ছাদিত অঞ্চল (ৰং নলগোৱা) I, II, III আৰু IV হিচাবে চিহ্নিত কৰোঁহক (চিত্ৰ 12.18 চোৱা)

I ৰ কালি + III ৰ কালি = ABCD ৰ কালি – প্ৰতিটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 5 চে.মি.ৰ দুটা অৰ্দ্ধবৃত্তৰ কালি

$$= \left(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2\right) \text{ চে.মি.}^2$$

$$= (100 - 3.14 \times 25) \text{ চে.মি.}^2$$

$$= (100 - 78.5) \text{ চে.মি.}^2$$

$$= 21.5 \text{ চে.মি.}^2$$

সেইদৰে, II ৰ কালি + IV ৰ কালি = 21.5 চে.মি.^{2}

সেয়ে, নক্সাটোৰ আচ্ছাদিত অংশৰ কালি = ABCD ৰ কালি – (I + II + III + IV) ৰ কালি

$$= (100 - 2 \times 21.5) \text{ চে.মি.}^2$$

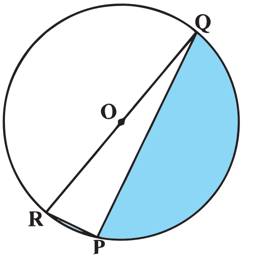
$$= (100 - 43) \text{ চে.মি.}^2$$

$$= 57 \text{ চে.মি.}^2$$

অনুশীলনী ঃ 12.3

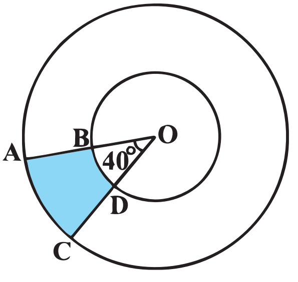
অন্যধৰণে উল্লেখ নাথাকিলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ল'বা।

1. চিত্ৰ 12.19 ত, আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি উলিওৱা, যদি PQ = 24 চে.মি., PR = 7 চে.মি. আৰু বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ O।

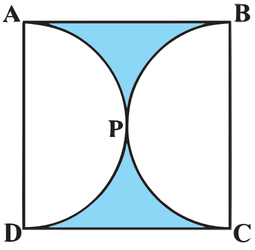


চিত্ৰ 12.19

2. চিত্ৰ 12.20ত, আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যদি O কেন্দ্ৰ যুক্ত ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত দুটাৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ ক্ৰমে 7 চে.মি. আৰু 14 চে.মি. আৰু $\angle AOC = 40°$.



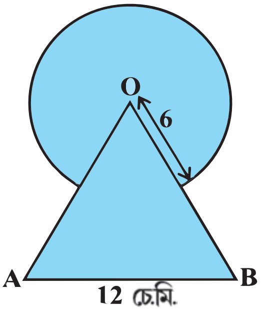
চিত্ৰ 12.20



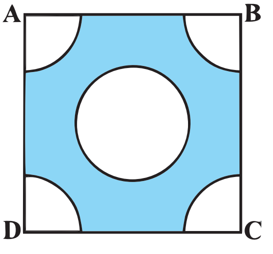
চিত্ৰ 12.21

3. চিত্ৰ 12.21 ত, আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা, যদি 14 চে.মি. বাহুৰ ABCD এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ আৰু APD আৰু BPC অৰ্ধবৃত্ত হয়।

4. চিত্ৰ 12.22ত আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা য'ত 12 চে.মি. বাহুৰ এটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষ বিন্দু O ক কেন্দ্ৰ হিচাবে ধৰি 6 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধ এটা বৃত্তীয় চাপ আঁকা হৈছে।



চিত্ৰ 12.22



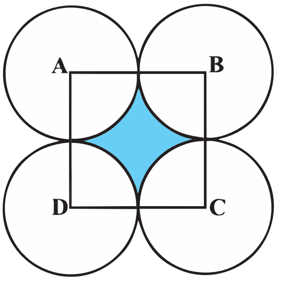
চিত্ৰ 12.23

5. চিত্ৰ 12.23ত দেখুওৱাৰ দৰে 4 চে.মি. বাহুৰ এটা বৰ্গক্ষেত্ৰৰ প্ৰতিটো চুকৰপৰা 1 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তৰ এটা চোক কাটি লোৱা হৈছে আৰু 2 চে.মি. ব্যাসৰ এটা বৃত্তও কাটি লোৱা হৈছে। বৰ্গক্ষেত্ৰটোৰ অৱশিষ্ট অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

6. চিত্ৰ 12.24ত দেখুওৱাৰ দৰে 32 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এখন বৃত্তীয় টেবুলকভাৰৰ মাজত ABC এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ এৰি এটা নক্সা তৈয়াৰ কৰা হৈছে। নক্সাটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

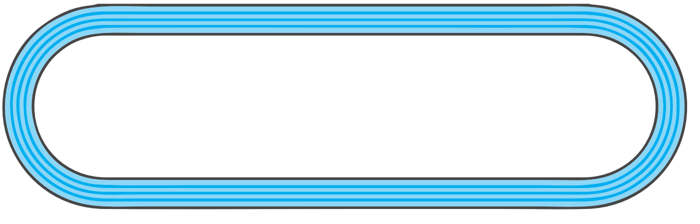
চিত্ৰ 12.24

7. চিত্ৰ 12.25 ত, 14 চে.মি. বাহুৰ ABCD এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ। A, B, C আৰু D কেন্দ্ৰযুক্ত চাৰিটা বৃত্ত অঁকা হ'ল, যাতে প্ৰতিটো বৃত্তই বাকী থকা তিনিটা বৃত্তৰ দুটাক বহিঃভাবে স্পৰ্শ কৰে। আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 12.25

8. চিত্ৰ 12.26 ত, এটা দৌৰা বাট দিয়া আছে, যাৰ বাওঁফাল আৰু সোঁফাল অৰ্ধবৃত্ত।

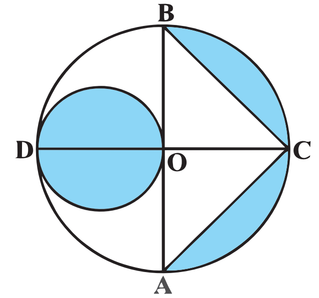

চিত্ৰ 12.26

ভিতৰৰ সমান্তৰাল ৰেখাখণ্ড দুটাৰ মাজত দূৰত্ব 60 মিটাৰ আৰু সেইবোৰ প্ৰত্যেকে 106 মিটাৰ দীঘল। যদি বাটটোৰ প্ৰস্থ 10 মিটাৰ হয়, তেন্তে নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) বাটটোৰ চাৰিওফালে ইয়াৰ ভিতৰৰ ফালৰ দূৰত্ব।

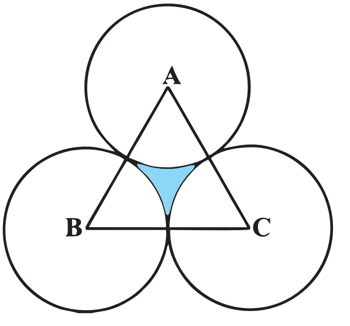
(ii) বাটটোৰ কালি।

9. চিত্ৰ 12.27ত, এটা বৃত্তৰ (O কেন্দ্ৰযুক্ত) AB আৰু CD ব্যাস দুডাল পৰস্পৰ লম্ব আৰু OD হ'ল সৰু বৃত্তটোৰ ব্যাস। যদি OA = 7 চে.মি., তেন্তে আচ্ছাদিত অঞ্চলৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।



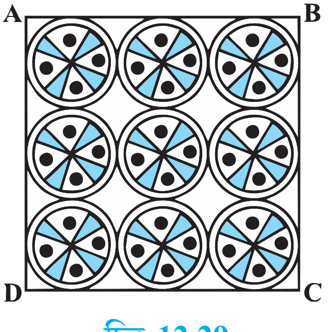
চিত্ৰ 12.27

10. এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ ABC ৰ কালি 17320.5 চে.মি.^{2}। ত্ৰিভুজটোৰ প্ৰতিটো শীৰ্ষবিন্দুক কেন্দ্ৰ হিচাপে লৈ ত্ৰিভুজটোৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্যৰ আধাৰ সমান ব্যাসাৰ্দ্ধ লৈ একোটা বৃত্ত আঁকা হ'ল (চিত্ৰ 12.28 চোৱা)। আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$ আৰু $\sqrt{3} = 1.73205$)

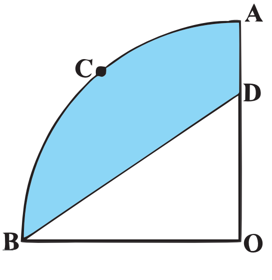


চিত্ৰ 12.28

11. এখন বৰ্গাকাৰ ৰুমালত প্ৰতিটো 7 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ নটা বৃত্তীয় নক্সা আঁকা হ'ল (চিত্ৰ 12.29)। ৰুমালখনৰ বাকী থকা অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 12.29

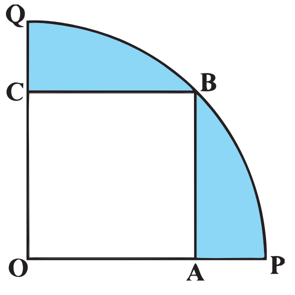


চিত্ৰ 12.30

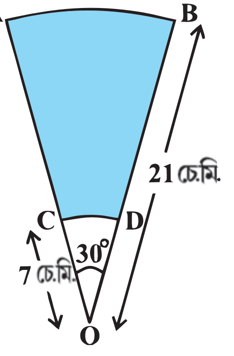
12. চিত্ৰ 12.30ত, কেন্দ্ৰ O আৰু ব্যাসাৰ্দ্ধ 3.5 চে.মি. যুক্ত এটা বৃত্তৰ OACB এটা চোক। যদি OD = 2 চে.মি., তেন্তে

(i) OACB চোকৰ, (ii) আচ্ছাদিত অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

13. চিত্র 12.31ত, এটা বৃত্তৰ চোক OPBQ ত OABC এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ অংকন কৰা হ'ল। যদি OA = 20 চে.মি., তেন্তে আচ্ছাদিত অঞ্চলৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (ব্যৱহাৰ কৰা $\pi = 3.14$)



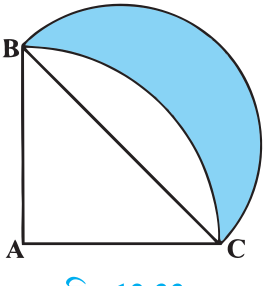
চিত্ৰ 12.31



চিত্ৰ 12.32

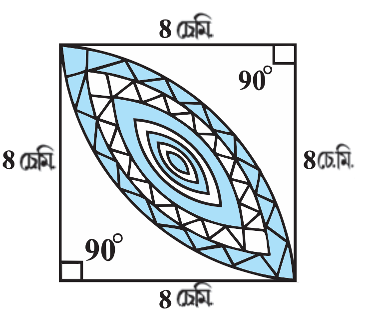
14. কেন্দ্ৰ O আৰু ব্যাসাৰ্দ্ধ 21 চে.মি. আৰু 7 চে.মি. ঐককেন্দ্ৰিক বৃত্ত দুটাৰ ক্ৰমে AB আৰু CD দুটা চাপ (চিত্ৰ 12.32 চোৱা)। যদি $\angle AOB = 30°$, তেন্তে আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

15. চিত্ৰ 12.33ত, 14 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বৃত্তৰ ABC এটা চোক আৰু BC ক ব্যাস হিচাপে লৈ এটা অৰ্ধবৃত্ত অঁকা হ'ল। আচ্ছাদিত অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 12.33

16. প্ৰতিটো 8 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ বৃত্তৰ দুটা চোকৰ মাজত চিত্ৰ 12.34 ত উমৈহতীয়া নক্সা থকা অঞ্চলটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 12.34

12.5. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত, তোমালোকে নিম্নোক্ত প্ৰধান বিষয়কেইটা অধ্যয়ন কৰিলা ঃ

1. এটা বৃত্তৰ পৰিধি = $2\pi r$.
2. এটা বৃত্তৰ কালি = πr^2.
3. ব্যাসাৰ্দ্ধ r আৰু ডিগ্ৰী মাপত কোণ θ হ'লে এটা বৃত্তৰ এটা বৃত্তকলাৰ চাপৰ দৈৰ্ঘ্য $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.
4. ব্যাসাৰ্দ্ধ r আৰু ডিগ্ৰী জোখত কোণ θ হ'লে এটা বৃত্তৰ বৃত্তকলাৰ কালি = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$.
5. এটা বৃত্তৰ বৃত্তখণ্ডৰ কালি = অনুৰূপ বৃত্তকলাটোৰ কালি – অনুৰূপ ত্ৰিভুজটোৰ কালি।

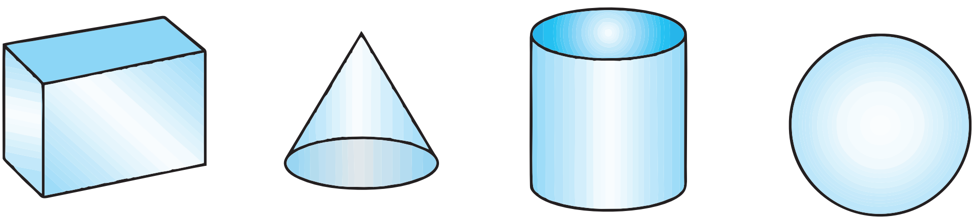
S1N2H8

পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন (Surface Areas and Volumes)

ত্ৰয়োদশ অধ্যায়

13.1. অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

নৱম শ্ৰেণীৰ পৰা তোমালোক কিছুমান গোটাবস্তু যেনে— চৌপল বা আয়তীয় ঘনক (cuboid), শংকু (cone), বেলন (cylinder) আৰু গোলক (sphere) (চিত্ৰ 13.1) ৰ সৈতে পৰিচিত। তোমালোকে এইটোৱো শিকিছা যে কেনেকৈ সেইবোৰৰ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন নিৰ্ণয় কৰা হয়।

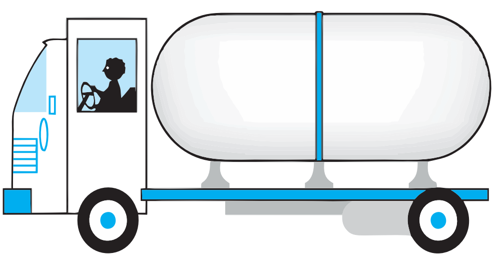


(i) (ii) (iii) (iv)

চিত্ৰ 13.1

আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত আমি বহুতো গোটাবস্তুৰ মুখামুখি হওঁ যি ওপৰত দেখুওৱা প্ৰাথমিক গোটাবস্তুৰ দুটা বা ততোধিক বস্তুৰ সংমিশ্ৰনেৰে গঠিত।

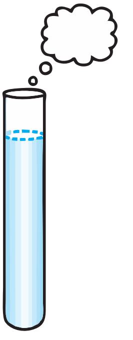
তোমালোকে এঠাইৰপৰা আনঠাইলৈ তেল বা পানী কঢ়িওৱা ট্ৰাকৰ পিছফালে সংযুক্ত পাত্ৰসহ একোখন ট্ৰাক নিশ্চয় দেখিছা (চিত্ৰ 13.2)। এই পাত্ৰটো ওপৰত দেখুওৱা চাৰিবিধ প্ৰাথমিক গোটা বস্তুৰ কোনোবা বিধত পৰেনে? তোমালোকে



চিত্ৰ 13.2

অনুমান কৰিব পাৰিবা যে এইটো এটা বেলন আৰু দুয়োমূৰত দুটা অৰ্ধগোলকেৰে গঠিত।

আকৌ, তোমালোকে চিত্ৰ- 13.3 দেখুওৱাৰ দৰে একোটা বস্তু নিশ্চয় দেখিছা। ইয়াৰ নাম ক'ব পাৰিবানে? এটা পৰীক্ষা নলী, শুদ্ধ। তোমালোকৰ বিজ্ঞানৰ পৰীক্ষাগাৰত ইয়াৰ ব্যৱহাৰ পাবা। এই নলীটোৰো এটা বেলন আৰু এটা অৰ্ধগোলকৰ সংমিশ্ৰণ। একেদৰে, যেতিয়া তোমালোকে ফুৰিবলৈ যোৱা তেতিয়া কিছুমান ডাঙৰ আৰু সুন্দৰ বিল্ডিং বা স্মৃতি সৌধ দেখিবা যিটো ওপৰত দিয়া গোটা বস্তুবোৰৰ সংমিশ্ৰণ।



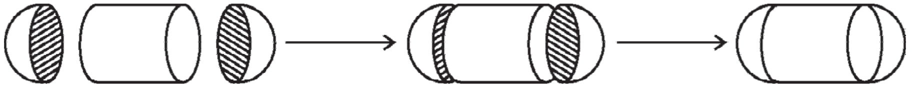
চিত্ৰ 13.3

যদি কোনো কাৰণত তোমালোকে এনেবোৰ বস্তুৰ পৃষ্ঠকালি বা আয়তন, বা ধাৰণক্ষমতা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ বিচাৰা, তেন্তে এইটো কেনেকৈ কৰিবা? তোমালোকে ইতিমধ্যে পঢ়ি অহা কোনোবিধ গোটাবস্তুৰ লগত ইয়াক শ্ৰেণীবিভক্ত কৰিব পৰা নাযায়।

এই অধ্যায়ত, তোমালোকে দেখিবা কেনেকৈ এনেবোৰ বস্তুৰ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

13.2. গোটা বস্তুৰ সংমিশ্ৰণৰ পৃষ্ঠকালি (Surface Area of a Combination of Solids)ঃ

চিত্ৰ 13.2 ত দেখা পাত্ৰটো বিবেচনা কৰা হওক। এনে এটা গোটা বস্তুৰ পৃষ্ঠকালি কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰিম? যেতিয়া আমি নতুন সমস্যাৰ সন্মুখীন হওঁ, আমি প্ৰথমে ইতিমধ্যে সমাধান কৰা সৰু সমস্যালৈ ইয়াক পৰিৱৰ্তিত কৰিব পাৰি নে নাই চাওঁ। আমি দেখোঁ যে, এই গোটাবস্তুটো এটা বেলন দুয়োমূৰত দুটা অৰ্ধগোলক লগাই গঠন কৰা হৈছে। এইটো চিত্ৰ 13.4 ত দেখুওৱাৰ দৰে আটাইকেইটা টুকুৰা একেলগ কৰি পোৱা যায়।



চিত্ৰ 13.4

যদি আমি নতুনকৈ গঠন কৰা বস্তুটোৰ পৃষ্ঠকালি বিবেচনা কৰোঁ, আমি দেখা পাম, মাত্ৰ দুটা অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি আৰু এটা বেলনৰ বক্ৰপৃষ্ঠকালি।

সেইবাবে নতুন গোটাবস্তুটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি হ'ল প্ৰত্যেকটো অংশৰ পৃথকভাৱে পোৱা বক্ৰ পৃষ্ঠকালিৰ সমষ্টি। ইয়াৰপৰা পাওঁ

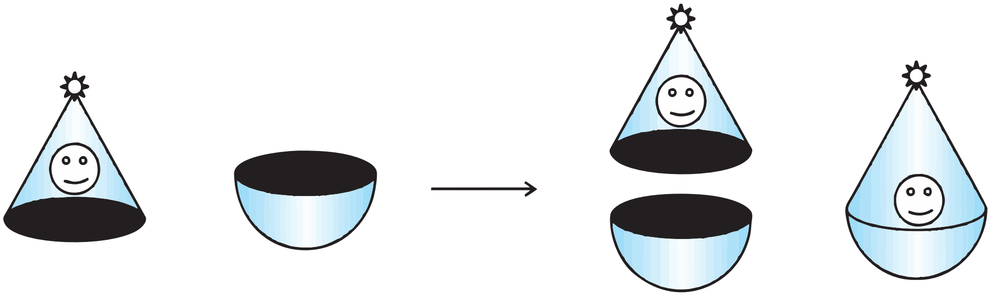
নতুন গোটাবস্তুৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি (TSA) = এটা অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি (CSA) + বেলনৰ

বক্ৰ পৃষ্ঠকালি (CSA) + আনটো অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰ পৃষ্ঠকালি (CSA)

য'ত TSA, CSA হ'ল ক্ৰমে "মুঠ পৃষ্ঠকালি" আৰু "বক্ৰ পৃষ্ঠ কালি"।

এতিয়া আমি অন্য এটা অৱস্থা বিবেচনা কৰোঁহক। ধৰা হ'ল আমি এটা অৰ্ধগোলক আৰু এটা শংকু একেলগ কৰি এটা পুতলা নিৰ্মাণ কৰিছোঁ। আমি কি কি ঢাপ অতিক্ৰম কৰিব লাগে তাক চোৱা হওঁক।

প্ৰথমে আমি এটা শংকু আৰু এটা অৰ্ধগোলক লওঁ আৰু সিহঁতৰ সমতল পৃষ্ঠ দুটা লগ লগাওঁ। ইয়াত অৱশ্যেই আমি শংকুটোৰ ভূমি ব্যাসাৰ্ধ আৰু অৰ্ধগোলকৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ একেভাৱে লওঁ আৰু যাতে পুতলাটো মসৃণ পৃষ্ঠৰ হয়। সেইবাবে ঢাপকেইটা চিত্ৰত (13.5) দেখুৱাৰ দৰে পাওঁ।



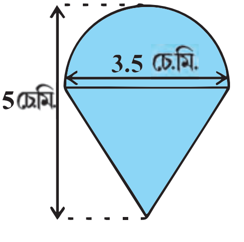
চিত্ৰ 13.5

আমাৰ প্ৰচেষ্টাৰ শেষত আমি এটা সুন্দৰ গোলক তলৰ এটা পুতলা পালো। এতিয়া যদি আমি পুতলাটোৰ পৃষ্ঠ ৰং কৰিবলৈ কিমান ৰঙৰ আৱশ্যক হ'ব তাক জানিব খোজোঁ, কি কথা আমি জানিব লাগিব? আমি পুতলাটোৰ পৃষ্ঠ কালি জানিব লাগিব, যিটো অৰ্ধগোলক CSA আৰু শংকুটোৰ CSA ৰে গঠিত।

সেইবাবে, আমি ক'ব পাৰোঁ—

পুতলাটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = অৰ্ধগোলকৰ CSA + শংকুৰ CSA।

এতিয়া, কিছুমান উদাহৰণ বিবেচনা কৰাহওঁক—



চিত্ৰ 13.6

উদাহৰণ 1 ঃ ৰছিদে তাৰ জন্মদিনৰ উপহাৰস্বৰূপে এটা খেলাৰ লাটুম পালে। আচৰিতভাৱে তাৰ কোনো ৰং নাছিল। সি এইটো ৰঙীন পেঞ্চিলেৰে (crayon) ৰং কৰিব বিচাৰিলে। লাটুমটোৰ আকৃতি এটা শংকুৰ ওপৰত এটা অৰ্দ্ধগোলকেৰে গঠিত (চিত্ৰ 13.6)। গোটেই লাটুমটোৰ উচ্চতা 5 চে.মি. আৰু ইয়াৰ ব্যাস 3.5 চে.মি.। সি ৰং কৰিবলগীয়া ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। ($\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা)

সমাধান ঃ এই লাটুমটো সম্পূৰ্ণৰূপে চিত্ৰ 13.5 ত ব্যাখ্যা কৰা বস্তুটোৰ সৈতে একে।

সেয়ে, আমি তাত পোৱা ফলাফলটো সুবিধাজনকভাৱে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ। সেয়া হ'ল—

লাটুমটোৰ TSA = অৰ্ধগোলকৰ CSA + শংকুৰ CSA

এতিয়া অৰ্ধগোলকৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি (CSA) $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$

আকৌ, শংকুটোৰ উচ্চতা = লাটুমটোৰ উচ্চতা – অৰ্ধগোলকৰ উচ্চতা (ব্যাসাৰ্দ্ধ)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{ চে.মি.}$$

$$= 3.25 \text{ চে.মি.}$$

সেয়ে শংকুৰ হেলনীয়া উচ্চতা (l) $= \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} \text{ চে.মি.}$$

$$= 3.7 \text{ চে.মি. (প্ৰায়)}$$

গতিকে, শংকুৰ CSA $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ বৰ্গ চে.মি.

গতিকে লাটুমটোৰ পৃষ্ঠকালি

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ বৰ্গ চে.মি.} + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$

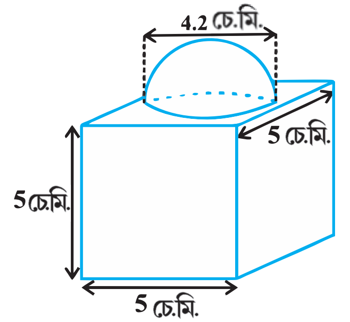
$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7) \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$

$$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$

$$= 39.6 \text{ বৰ্গ চে.মি. (প্ৰায়)}$$

তোমালোকে মন কৰিবা যে, 'লাটুমটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি', শংকুৰ পৃষ্ঠকালি আৰু অৰ্ধগোলকটোৰ পৃষ্ঠ কালিৰ সমষ্টি নহয়।

উদাহৰণ 2 ঃ চিত্ৰ 13.7 ত দুটা গোটাবস্তু— এটা ঘনক আৰু এটা অৰ্দ্ধগোলকৰে নিৰ্মাণ কৰা এটা নক্সাৰ ভূমি 5 চে.মি., কাষৰ এটা ঘনক আৰু ইয়াৰ ওপৰত লগাই থোৱা অৰ্দ্ধগোলকৰ ব্যাস 4.2 চে.মি.। নক্সাটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা। (ধৰা, $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্ৰ 13.7

সমাধান ঃ ঘনকৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = 6 × (কাষ)^2 = 6 × 5 × 5 বৰ্গ চে.মি. = 150 বৰ্গ চে.মি.

মন কৰা যে, ঘনকৰ যি অংশত অৰ্দ্ধগোলকটো লগাই থোৱা আছে সেইয়া পৃষ্ঠ কালিত অন্তঃর্ভুক্ত নহয়।

গতিকে, নক্সাৰ পৃষ্ঠকালি = ঘনকৰ TSA – অৰ্দ্ধগোলকৰ ভূমি পৃষ্ঠৰ কালি + অৰ্ধগোলকৰ CSA

$= 150 - \pi r^2 + 2\,\pi r^2$

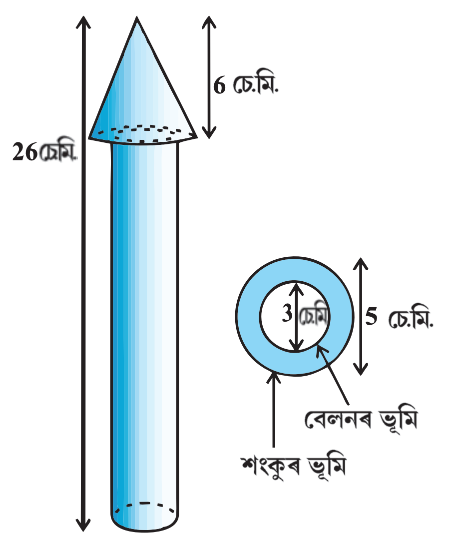
$= (150 + \pi r^2)$ বৰ্গ চে.মি.

$= 150$ বৰ্গ চে.মি. $+ \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)$ বৰ্গ চে.মি.

$= (150 + 13.86)$ বৰ্গ চে.মি.

$= 163.86$ বৰ্গ চে.মি.

উদাহৰণ 3 ঃ চিত্ৰ 13.8ত দেখুওৱাৰ দৰে ৰকেট আকৃতিৰ এটা কাঠৰ পুতলা এটা শংকুক এটা বেলনৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠা কৰাৰ নিচিনা। সম্পূৰ্ণ ৰকেটটোৰ উচ্চতা হ'ল 26 চে.মি., য'ত শংকু অংশটোৰ উচ্চতা 6 চে.মি.। শংকু অংশটোৰ ভূমিৰ ব্যাস 5 চে.মি., য'ত চুঙাৰ ভূমি ব্যাস হ'ল 3 চে.মি.। যদি শংকু অংশটোত কমলা ৰং আৰু বেলন অংশটো হালধীয়া ৰং দিব লাগে, তেন্তে এই দুয়োটা ৰং থকা ৰকেটটোৰ ৰঙীন অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। (ধৰা, $\pi = 3.14$)



চিত্ৰ 13.8

সমাধান ঃ শংকুৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 'r', বেলনৰ হেলনীয়া উচ্চতা 'l', শংকুৰ উচ্চতা 'h', বেলনৰৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ r' আৰু বেলনৰ উচ্চতা h'ৰে সূচিত কৰা হ'ল।

তেন্তে, $r = 2.5$চে.মি.

$h = 6$চে.মি.

$r' = 1.5$চে.মি.

$h' = 26 - 6 = 20$চে.মি. আৰু

$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = 6.5$ চে.মি.

ইয়াত, শংকু অংশটোৰ বৃত্তাকাৰ ভূমি বেলনটোৰ ভূমিত প্ৰতিষ্ঠিত, কিন্তু শংকুটোৰ ভূমি বেলনটোৰ ভূমিতকৈ ডাঙৰ। সেইবাবে, শংকুটোৰ ভূমিৰ এটা অংশও (এটা আঙুঠি) ৰং কৰিব লাগিব।

গতিকে, কমলা ৰং দিব লগীয়া ক্ষেত্ৰৰ কালি—

= শংকুৰ CSA + শংকুৰ ভূমিৰ কালি – বেলনৰ ভূমিৰ কালি

$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$

$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ বৰ্গচে.মি.

$= \pi[20.25]$ বৰ্গ চে.মি.

$= 3.14 \times 20.25$ বৰ্গ চে.মি.

$= 63.585$ বৰ্গ চে.মি.

এতিয়া, হালধীয়া ৰং দিব লগীয়া ক্ষেত্ৰৰ কালি = বেলনৰ CSA + বেলনৰ ভূমিৰ কালি

$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$

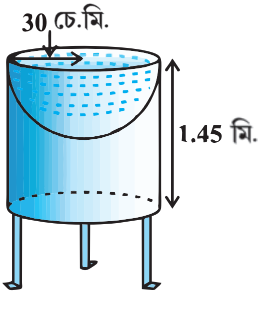
$= \pi r'(2h' + r')$

$= (3.14 \times 1.5)(2 \times 20 + 1.5)$ বৰ্গ চে.মি.

$= 4.71 \times 41.5$ বৰ্গ চে.মি.

$= 195.465$ বৰ্গ চে.মি.

উদাহৰণ 4 ঃ আফজলে তাৰ বাগিচাৰ বাবে এটা বেলনৰ এটা মূৰত অৰ্ধগোলাকাৰ গভীৰতা প্ৰকৃতিৰে এটা চৰাইৰ গা-ধোৱা পাত্ৰ তৈয়াৰ কৰিলে। (চিত্ৰ 13.9)। বেলনটোৰ উচ্চতা হ'ল 1.45 মি. আৰু ইয়াৰ ব্যাস্যাৰ্দ্ধ 30 চে.মি.। চৰাইৰ গা-ধোৱা পাত্ৰটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা। (ধৰা $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্ৰ 13.9

সমাধান ঃ ধৰাহওক, বেলনটোৰ উচ্চতা h আৰু r হ'ল বেলনটোৰ আৰু অৰ্ধগোলকৰ উমৈহতীয়া ব্যাসাৰ্দ্ধ।

তেন্তে, চৰাইৰ গা-ধোৱা পাত্ৰৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = বেলনৰ CSA + অৰ্ধগোলকৰ CSA

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$= 2\pi r(h + r)$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30) \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$
$$= 33000 \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$
$$= 3.3 \text{ বৰ্গ মি.}$$

অনুশীলনী- 13.1

অন্য ধৰণে দিয়া নাথাকিলে $\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা।

1. প্ৰত্যেকৰে আয়তন 64 ঘনমিঃ বিশিষ্ট দুটা ঘনক (cube) মূৰে মূৰে সংযোগ কৰা হ'ল। চৌপল বা আয়তীয় ঘনকটোৰ (Cuboid) পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

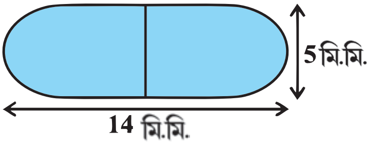
2. এটা পাত্ৰ এটা খোলা অৰ্দ্ধগোলক আৰু তাৰ ওপৰত এটা খোলা বেলনৰে গঠিত। অৰ্দ্ধগোলকটোৰ ব্যাস 14 চে.মি. আৰু পাত্ৰটোৰ মুঠ উচ্চতা হ'ল 13 চে.মি.। পাত্ৰটোৰ ভিতৰ পৃষ্ঠৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

3. এটা পুতলা একে ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত এটা অৰ্দ্ধগোলকৰ ওপৰত 3.5 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত এটা শংকুৰে গঠিত। পুতলাটোৰ মুঠ উচ্চতা হ'ল 15.5 চে.মি.। পুতলাটোৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

4. 7 চে.মি. কাষযুক্ত এটা ঘনকীয় টুকুৰাৰ ওপৰভাগ এটা অৰ্ধগোলকে আগুৰি আছে। অৰ্ধগোলকটোৰ সৰ্ব্বোচ্চ ব্যাস কিমান হ'ব পাৰে? গোটা বস্তুটোৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

5. এটা ঘনকীয় কাঠৰ টুকুৰাৰ এটা পৃষ্ঠৰপৰা এটা অৰ্দ্ধগোলক আকৃতিৰ গভীৰতা কাটি লোৱা হৈছে যাতে অৰ্দ্ধগোলকৰ ব্যাস 'l' ঘনকৰ কাষৰ সৈতে একে হয়। অৱশিষ্ট অংশৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

6. এটা ঔষধৰ কেপচুলৰ আকৃতি এটা বেলনৰ দুয়োটা মূৰত দুটা অৰ্দ্ধগোলক লগাই থোৱা সদৃশ (চিত্ৰ 13.10)। সম্পূৰ্ণ কেপচুলটোৰ দৈৰ্ঘ্য 14 মি.মি. আৰু ব্যাস হ'ল 5 মি.মি.। পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।

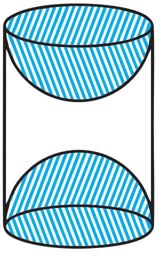


চিত্ৰ 13.10

7. এটা তম্বুৰ আকৃতি এটা বেলনৰ ওপৰত এটা শংকুৰ মূধচেৰে আবৃত। যদি বেলন অংশৰ উচ্চতা আৰু ব্যাস ক্ৰমে 2.1 মি. আৰু 4 মি. আৰু ওপৰ অংশৰ হেলনীয়া উচ্চতা 2.8 মি., তেন্তে তম্বুটো সজাওঁতে ব্যৱহাৰ হোৱা ডাঠ কাপোৰৰ কালি উলিওৱা। প্ৰতি বৰ্গমিটাৰ ডাঠ কাপোৰৰ মূল্য 500 টকা হ'লে তম্বুটোৰ কাপোৰৰ খৰচ নিৰ্ণয় কৰা। (মন কৰিবা যে, তম্বুৰ ভূমি ডাঠ কাপোৰেৰে আবৃত নহয়)

8. 2.4 চে.মি. উচ্চতা আৰু 1.4 চে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট এটা গোটা বেলনৰ পৰা এটা একে উচ্চতাৰ আৰু ব্যাসৰ শংকু আকৃতিৰ খোল খুলি উলিওৱা হ'ল। অৱশিষ্ট গোটাবস্তুটোৰ পৃষ্ঠকালি বৰ্গ চে.মি.ৰ শুদ্ধমানত নিৰ্ণয় কৰা।

9. চিত্ৰ 13.11 ত দেখুওৱাৰ দৰে এটা গোটা বেলনৰপৰা দুয়োটা মূৰৰপৰা অৰ্দ্ধগোলক আকৃতিত কাটি এটা কাঠৰ বস্তু বনোৱা হ'ল। যদি বেলনৰ উচ্চতা 10 চে.মি. আৰু ইয়াৰ ভূমিৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 3.5 চে.মি., তেন্তে বস্তুটোৰ মুঠ পৃষ্ঠ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

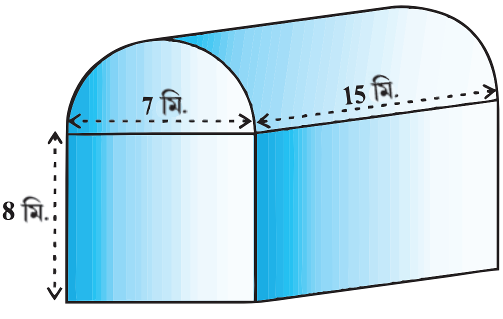


চিত্ৰ 13.11

13.3. গোটা বস্তুৰ সংমিশ্ৰণৰ আয়তন (Volume of a Combination of Solids) ঃ

আগৰ অনুচ্ছেদত আমি দুটা প্ৰাথমিক গোটা বস্তুক সংযোগ কৰি পোৱা গোটা বস্তুটোৰ পৃষ্ঠকালি কেনেদৰে নিৰ্ণয় কৰা হয় তাক আলোচনা কৰিলো। ইয়াত আমি সেইবোৰৰ আয়তন কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰা হয় তাক চাম। এইটো মন কৰিবা যে, পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰোঁতে আমি দুয়োটা অংশৰ পৃষ্ঠকালি যোগ নকৰোঁ কাৰণ সিহঁতক সংযোগ কৰোঁতে কিছু অংশৰ পৃষ্ঠকালি অদৃশ্য হৈ পৰে। যি কি নহওক, যেতিয়া আমি আয়তন নিৰ্ণয় কৰোঁ এইটো অৱস্থা নহয়। প্ৰাথমিক গোটাবস্তুক সংযোগ কৰি পোৱা গোটাবস্তুটোৰ আয়তন নিখুঁতভাৱে অংশীদাৰী গোটাবস্তুৰ আয়তনৰ সমষ্টিৰ সমান যিটো তলৰ উদাহৰণত দেখা যায়—

উদাহৰণ 5 ঃ শান্তাই এটা অৰ্দ্ধবেলনেৰে আবৃত এটা চৌপলৰ আকৃতিৰ চালিৰ ভিতৰত এটা উদ্যোগ চলাইছে। (চিত্ৰ 13.12)। যদি চালিখনৰ ভেটিৰ মাপ 7 মি. × 15 মি. আৰু ঘনকীয় অংশৰ উচ্চতা 8 মি. তেন্তে চালিখনে আগুৰা বায়ুৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা। তদুপৰি, ধৰোঁ চালিখনত মুঠ আয়তন 300 ঘনমি. আগুৰি যন্ত্ৰপাতি আৰু 20 জন কৰ্মী য'ত প্ৰত্যেকে গড়ে প্ৰায় 0.08 ঘনমি. ঠাই আগুৰি আছে। তেন্তে কিমান বায়ু চালিখনত আছে? (ধৰোঁ $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্ৰ 13.12

সমাধান ঃ চালিখনৰ ভিতৰৰ বায়ুৰ আয়তন (যেতিয়া কোনো মানুহ বা যন্ত্ৰপাতি নাই) হ'ল চৌপলৰ ভিতৰত থকা বায়ুৰ আয়তন আৰু অৰ্ধবেলনেৰে আবৃত অংশৰ বায়ুৰ আয়তনৰ সমষ্টি।

এতিয়া চৌপলৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু উচ্চতা ক্ৰমে 15 মি., 7 মি. আৰু 8 মি., আৰু অৰ্ধবেলনৰ ব্যাস 7 মি. আৰু উচ্চতা 15 মি.।

গতিকে নিৰ্ণয় কৰিব লগীয়া আয়তন = চৌপলৰ আয়তন + $\frac{1}{2}$ × বেলনৰ আয়তন।

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] \text{ ঘনমিটাৰ}$$

= 1128.75 ঘন মিটাৰ

এতিয়া, যন্ত্ৰপাতিৰে আগুৰা মুঠ আয়তন = 300 ঘন মিটাৰ

আৰু মানুহে আগুৰা মুঠ আয়তন = 20 × 0.08 ঘন মিটাৰ

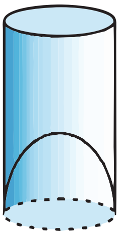
= 1.6 ঘন মিটাৰ

গতিকে যন্ত্ৰপাতি আৰু মানুহ থকা অৱস্থাত চালিৰ বায়ুৰ আয়তন

= 1128.75 – (300.00 + 1.60)

= 827.15 ঘন মিটাৰ

উদাহৰণ 6 ঃ এজন ফলৰ ৰস বিক্ৰেতাই চিত্ৰ 13.13ত দেখুওৱা গিলাচ ব্যৱহাৰ কৰি গ্ৰাহকক সেৱা কৰি আহিছিল। বেলন আকৃতিৰ গিলাচটোৰ ভিতৰৰ ব্যাস আছিল 5 চে.মি., কিন্তু গিলাচৰ তলফালে এটা অৰ্দ্ধগোলক আকাৰৰ উঠি অহা অংশই গিলাচৰ ধাৰণ ক্ষমতা কমাই দিছে। যদি গিলাচৰ উচ্চতা 10 চে.মি., তেন্তে গিলাচৰ আপাত ধাৰণ ক্ষমতা আৰু প্ৰকৃত ধাৰণ ক্ষমতা নিৰ্ণয় কৰা। (π = 3.14)



চিত্ৰ 13.13

সমাধান ঃ যিহেতু গিলাচৰ ভিতৰৰ ব্যাস = 5 চে.মি.

আৰু উচ্চতা = 10 চে.মি.,

গিলাচৰ আপাত ধাৰণ ক্ষমতা = $\pi r^2 h$

= 3.14 × 2.5 × 2.5 × 10 ঘন চে.মি.

= 196.25 ঘন চে.মি.

কিন্তু গিলাচৰ প্ৰকৃত ধাৰণ ক্ষমতা গিলাচৰ তলভাগত থকা অৰ্ধগোলকৰ আয়তন পৰিমাণে কমিব।

অৰ্থাৎ এইটো কমিব, $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$ ঘন চে.মি.

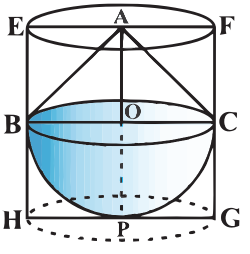
= 32.71 ঘন চে.মি.

গতিকে, গিলাচৰ প্ৰকৃত ধাৰণ ক্ষমতা = গিলাচৰ আপাত আয়তন – অৰ্দ্ধগোলকৰ আয়তন

= (196.25 – 32.71) ঘন চে.মি.

= 163.54 ঘন চে.মি.

উদাহৰণ 7 ঃ এটা অৰ্দ্ধগোলকৰ ওপৰত এটা লম্বীয় বৃত্তাকাৰ শংকুৰ দ্বাৰা আগুৰি থকা আকৃতিৰ এটা গোটা পুতলা সজোৱা হৈছে। শংকুটোৰ উচ্চতা 2 চে.মি. আৰু ভূমিৰ ব্যাস 4 চে.মি.। পুতলাটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা। যদি এটা লম্বীয় বৃত্তাকাৰ বেলনে পুতলাটোৰ সীমা আবৃত কৰি থাকে তেন্তে বেলনটোৰ আয়তন আৰু পুতলাটোৰ আয়তনৰ পাৰ্থক্য নিৰ্ণয় কৰা। (π = 3.14 লোৱা)



চিত্ৰ. 13.14

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল BPC হ'ল অৰ্দ্ধগোলক আৰু ABC, অৰ্দ্ধগোলকৰ ভূমিত প্ৰতিষ্ঠিত শংকু (চিত্ৰ 13.14 চোৱা)। অৰ্দ্ধগোলকৰ (তথা শংকুৰ) ব্যাসাৰ্ধ BO $= \frac{1}{2} \times 4$ চে.মি. = 2 চে.মি.

সেয়ে, পুতলাটোৰ আয়তন $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right]$ ঘন চে.মি.

= 25.12 ঘন চে.মি.

এতিয়া ধৰাহ'ল, EFGH লম্বীয় বৃত্তাকাৰ বেলনে পুতলাটোৰ সীমা আবৃত কৰিছে। লম্বীয় বৃত্তাকাৰ বেলনৰ ব্যাসাৰ্ধ = HP = BO = 2 চে.মি. আৰু ইয়াৰ উচ্চতা হ'ল —

EH = AO + OP = (2 + 2) চে.মি. = 4 চে.মি.

গতিকে, নিৰ্ণেয় আয়তন = লম্বীয় বৃত্তাকাৰ বেলনৰ আয়তন – পুতলাৰ আয়তন

= $(3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12)$ ঘন চে.মি.

= 25.12 ঘন চে.মি.

সেয়ে, দুয়োটা আয়তনৰ পাৰ্থক্য হ'ল = 25.12 ঘন চে.মি.

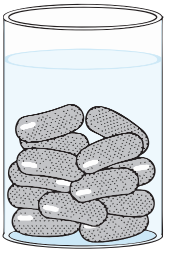
অনুশীলনী ঃ 13.2

অন্যধৰণে উল্লেখ নকৰিলে $\pi = \frac{22}{7}$ ল'বা।

1. শংকু আকৃতিৰ এটা গোটাবস্তু এটা অৰ্দ্ধগোলকৰ ওপৰত থিয় হৈ আছে য'ত সিহঁত দুয়োটাৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ হ'ল 1 চে.মি. আৰু শংকুৰ উচ্চতা ইয়াৰ ব্যাসাৰ্দ্ধৰ সমান। গোটাবস্তুটোৰ আয়তন πৰ মানেৰে নিৰ্ণয় কৰা।

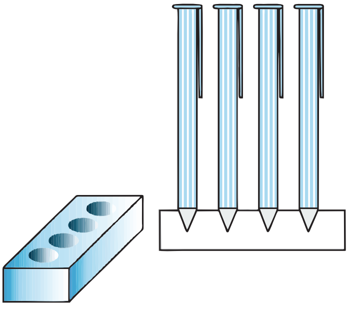
2. ৰাছেল এজন ইঞ্জিনীয়াৰিঙৰ ছাত্ৰ, তেওঁক এখন পাতল এলুমিনিয়ামৰ পাতৰ সহায়ত দুইমূৰে দুটা শংকুসহ এটা বেলন আকৃতিৰ আৰ্হি প্ৰস্তুত কৰিবলৈ কোৱা হ'ল। আৰ্হিৰ ব্যাস হ'ল 3 চে.মি. আৰু দৈৰ্ঘ্য 12 চে.মি.। যদি প্ৰতিটো শংকুৰ দৈৰ্ঘ্য 2 চে.মি. হয়, তেন্তে ৰাছেলে প্ৰস্তুত কৰা আৰ্হিত থকা বায়ুৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা। (ধৰাহওঁক, আৰ্হিৰ ভিতৰৰ আৰু বাহিৰৰ মাপ প্ৰায় একে)।

3. এটা গোলাপ জামুনত চেনিৰ ৰসৰ পৰিমাণ ইয়াৰ আয়তনৰ 30%। 5 চে.মি. দৈৰ্ঘ্য আৰু 2.8 চে.মি. ব্যাসৰ দুই মূৰে দুটা অৰ্দ্ধগোলক যুক্ত এটা বেলন আকৃতিৰ 45 টা গোলাপ জামুনত প্ৰায় কিমান ৰস থাকিব নিৰ্ণয় কৰা। (চিত্ৰ 13.15)।



চিত্ৰ 13.15

4. চৌপল আকৃতিৰ এটা কাঠৰ পেনষ্টেন্ড (Pen stand)ত কলম ৰাখিবলৈ চাৰিটা শংকু আকৃতিৰ গাঁত আছে। চৌপলৰ জোখ হ'ল 15 চে.মি. × 10 চে.মি. × 3.5 চে.মি.। প্ৰতিটো গাঁতৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 0.5 চে.মি. আৰু গভীৰতা 1.4 চে.মি.। সম্পূৰ্ণ ষ্টেন্ডটোত কাঠৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা (চিত্ৰ 13.16)।



চিত্ৰ 13.16

5. উলটি থকা শংকু আকৃতিৰ এটা পাত্ৰ আছে। ইয়াৰ উচ্চতা হ'ল 8 চে.মি. আৰু মুক্ত হৈ থকা শীৰ্ষভাগৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 5 চে.মি.। ইয়াৰ কাণলৈকে চপ্‌চপীয়াকৈ পানী ভৰোৱা হ'ল। যেতিয়া 0.5 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ গোলাকাৰ কেইটামান সীহৰ গুলি পাত্ৰটোত ভৰোৱা হ'ল, পাত্ৰৰ এক চতুৰ্থাংশ পানী ওলাই পৰিল। পাত্ৰটোত ভৰোৱা সীহৰ গুলিৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

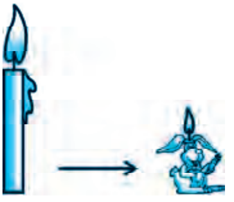
6. এটা গোটা লোহাৰ খুটা 220 চে.মি. উচ্চতা আৰু 24 চে.মি. ভূমি ব্যাসবিশিষ্ট বেলনেৰে গঠিত যাৰ ওপৰভাগ 60 চে.মি. উচ্চতা আৰু 8 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধযুক্ত আন এটা বেলনে আবৃত কৰি আছে। খুটাটোৰ ভৰ নিৰ্ণয় কৰা, দিয়া আছে, 1 ঘন চে.মি. লোৰ ভৰ প্ৰায় 8 গ্ৰাম। ($\pi = 3.14$ ব্যৱহাৰ কৰা)।

7. এটা 60 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ অৰ্দ্ধগোলকৰ ওপৰত এটা 120 চে.মি. ওখ আৰু 60 চে.মি. ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধ বিশিষ্ট লম্বীয় বৃত্তাকাৰ শংকু থিয় হৈ থকাকৈ গঠিত এটা গোটা বস্তু থিয়কৈ এটা পানীভৰ্তি লম্বীয় বৃত্তাকাৰ বেলনৰ তল স্পৰ্শ কৰাকৈ প্ৰতিষ্ঠা কৰা হৈছে। বেলনত থকা অৱশিষ্ট পানীৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰা, যদি বেলনৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 60 চে.মি. আৰু উচ্চতা 180 চে.মি.।

8. এটা গোলক আকৃতিৰ কাঁচৰ পাত্ৰৰ 8 চে.মি. দীঘল আৰু 2 চে.মি. ব্যাসৰ এটা বেলন সদৃশ ডিঙি আছে; গোলকীয় অংশৰ ব্যাস হ'ল 8.5 চে.মি.। ইয়াত ধৰা পানী জোখ-মাপ কৰি এটা শিশুৱে ইয়াৰ আয়তন 345 ঘন চে.মি. পালে। ওপৰৰ জোখ ভিতৰৰ জোখ হিচাপে লৈ আৰু $\pi = 3.14$ ধৰি, তাই শুদ্ধ আছিলনে নাই, পৰীক্ষা কৰা।

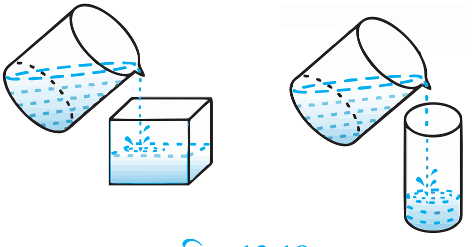
13.4. গোটা বস্তু এটা আকৃতিৰপৰা আন এটা আকৃতিলৈ ৰূপান্তৰ (Conversion of Solid from One Shape to Another) ঃ

আমি নিশ্চিত যে তোমালোকে মমবাতি দেখিছা। সাধাৰণতে সেইবোৰ বেলন আকৃতিৰ। তোমালোকে কিছুমান জন্তুৰ দৰে মমবাতিও দেখিবলৈ পাবা (চিত্ৰ 13.17)।



চিত্ৰ 13.17

সেইবোৰ কেনেকৈ তৈয়াৰ কৰা হয়? যদি তুমি একোটা বিশেষ আকৃতিৰ মমবাতি বিচৰা, তেন্তে তুমি মমবাতি এটা ধাতুৰ পাত্ৰত সম্পূৰ্ণৰূপে তৰল অৱস্থালৈ অহালৈকে গৰম কৰিব লাগিব। তাৰ পাছত তুমি বিচৰা বিশেষ আকাৰৰ পাত্ৰ এটাত তৰল মমবাতি ঢালিব লাগিব। উদাহৰণস্বৰূপে, এটা বেলন আকৃতিৰ এডাল মমবাতি লোৱা আৰু ইয়াক সম্পূৰ্ণৰূপে গলিবলৈ দি গলিত মমখিনি এটা শহাৰ আকৃতিৰ পাত্ৰত বাকী দিয়া। ঠাণ্ডা হ'লে তুমি শহা আকৃতিৰ এডাল মমবাতি পাবা। নতুন মমডালৰ আয়তন আগৰ মমডালৰ আয়তনৰ সৈতে একে। যেতিয়া আমি গোটা বস্তু এটা আকৃতিৰপৰা অন্য এটা আকৃতিলৈ ৰূপান্তৰৰ কথা কওঁ বা, যেতিয়া আদিতে এটা বিশেষ আকৃতিৰ পাত্ৰত পূৰ্ণ হৈ থকা তৰল পদাৰ্থ অন্য আকৃতিৰ পাত্ৰত বাকী দিয়া হয়, তেতিয়া, এই টোৰেই মনত ৰাখিবলগীয়া কথা চিত্ৰত দেখাৰ দৰে (চিত্ৰ 13.18)।



চিত্ৰ 13.18

যিখিনি আলোচনা কৰা হ'ল, তাক ভালদৰে উপলব্ধি কৰিবলৈ কিছুমান উদাহৰণ লোৱা হওঁক।

উদাহৰণ 8 ঃ 24 চে.মি. ওখ আৰু 6 চে.মি. ভূমি ব্যাসাৰ্দ্ধ বিশিষ্ট এটা শংকু আৰ্হি প্ৰস্তুত কৰা মাটিৰে তৈয়াৰ কৰা হ'ল। এজন শিশুৱে ইয়াক এটা গোলকৰ আকৃতি দিলে। গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ শংকুৰ আয়তন $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ ঘন চে.মি.।

যদি r গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ, তেন্তে ইয়াৰ আয়তন $\frac{4}{3}\pi r^3$

যিহেতু শংকু আকৃতি আৰু গোলক আকৃতিত মাটিৰ আয়তন একে, সেয়ে আমি পাওঁ—

$$\frac{4}{3}\times\pi\times r^3 = \frac{1}{3}\times\pi\times 6\times 6\times 24$$

অৰ্থাৎ, $r^3 = 3\times 3\times 24 = 3^3\times 2^3$

গতিকে, $r = 3\times 2 = 6$

সেয়ে গোলকৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 6 চে.মি.।

উদাহৰণ 9 ঃ চেল্‌ভিৰ ঘৰৰ ওপৰত এটা বেলন আকৃতিৰ চৌবাচ্চা আছে। ইয়াক মাটিৰ তলৰ টেংকিৰপৰা পাম্পৰ সহায়ত পানীৰে ভৰ্তি কৰা হয়, য'ত টেংকিটোৰ আকাৰ চৌপলৰ আকৃতি। টেংকিটোৰ মাপ 1.57 মি. × 1.44 মি. × 95 চে.মি.। ঘৰৰ ওপৰৰ চৌবাচ্চাটোৰ ব্যাসাৰ্ধ 60 চে.মি. আৰু উচ্চতা 95 চে.মি.। পানীৰে পূৰ্ণ টেংকিটোৰপৰা চৌবাচ্চাটো ভৰ্তি কৰাৰ পাছত টেংকিটোৰ অৱশিষ্ট পানীৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা। চৌবাচ্চাটোৰ ধাৰণ ক্ষমতা টেংকিটোৰ ধাৰণ ক্ষমতাৰ লগত তুলনা কৰা। ($\pi = 3.14$)।

সমাধান ঃ চৌবাচ্চাৰ পানীৰ আয়তন টেংকিৰপৰা খালী কৰা পানীৰ আয়তনৰ সমান।

এতিয়া, চৌবাচ্চাৰ (বেলন আকৃতিৰ) পানীৰ আয়তন $= \pi r^2 h$

$= 3.14\times 0.6\times 0.6\times 0.95$ ঘন মি.

পূৰ্ণ অৱস্থাত টেংকিৰ পানীৰ আয়তন $= l\times b\times h$

$= 1.57\times 1.44\times 0.95$ ঘন মি.

টেংকিটোত (মাটিৰ তলৰ) থকা অৱশিষ্ট পানীৰ আয়তন

$= [(1.57\times 1.44\times 0.95) - (3.14\times 0.6\times 0.6\times 0.95)]$ ঘনমি.

$= (1.57\times 0.6\times 0.6\times 0.95\times 2)$ ঘনমি.

গতিকে, টেংকিত বৈ যোৱা পানীৰ উচ্চতা $= \dfrac{\text{টেংকিত অৱশিষ্ট পানীৰ আয়তন}}{l\times b}$

$$= \frac{1.57\times 0.6\times 0.6\times 0.95\times 2}{1.57\times 1.44}$$

$= 0.475$ মি.

$= 47.5$ চে.মি.

আৰু, $\dfrac{\text{চৌবাচ্চাৰ ধাৰণ ক্ষমতা}}{\text{টেংকিৰ ধাৰণ ক্ষমতা}} = \dfrac{3.14\times 0.6\times 0.6\times 0.95}{1.57\times 1.44\times 0.95} = \dfrac{1}{2}$

গতিকে চৌবাচ্চাটোৰ ধাৰণ ক্ষমতা টেংকিটোৰ ধাৰণ ক্ষমতাৰ আধা।

উদাহৰণ 10 ঃ 1 চে.মি. ব্যাস আৰু 8 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ তামৰ দণ্ড এডালৰপৰা 18 মিটাৰ দৈৰ্ঘ্যৰ সুষম বেধৰ এডাল তাঁৰ প্ৰস্তুত কৰা হ'ল। তাঁৰডালৰ বেধ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দণ্ডডালৰ আয়তন $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8$ ঘন চে.মি. $= 2\pi$ ঘন চে.মি.

সমআয়তনৰ নতুন তাঁৰডালৰ দীঘ $= 18$ মি. $= 1800$ চে.মি.

যদি তাঁৰডালৰ প্ৰস্থচ্ছেদৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 'r' চে.মি.,

তেন্তে, ইয়াৰ আয়তন $= \pi \times r^2 \times 1800$ ঘন চে.মি.

সেয়ে, $\pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

অৰ্থাৎ, $r^2 = \frac{1}{900}$, অৰ্থাৎ, $r = \frac{1}{30}$

গতিকে তাঁৰডালৰ প্ৰস্থচ্ছেদৰ ব্যাস অৰ্থাৎ তাঁৰডালৰ বেধ $\frac{1}{15}$ চে.মি.

অৰ্থাৎ, 0.67 মি.মি. (প্ৰায়)

উদাহৰণ 11 ঃ প্ৰতি ছেকেণ্ডত $3\frac{4}{7}$ লিটাৰকৈ এডাল নলীৰ সহায়ত এটা পানীপূৰ্ণ অৰ্দ্ধগোলাকাৰ চৌবাচ্চা খালী কৰা হ'ল। যদি ইয়াৰ ব্যাস 3 মি. তেন্তে চৌবাচ্চাটো আধা খালী কৰিবলৈ কিমান সময় লাগিব? ($\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা)

সমাধান ঃ অৰ্দ্ধগোলাকাৰ চৌবাচ্চাটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ $= \frac{3}{2}$ মি.

চৌবাচ্চাৰ আয়তন $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$ ঘনমি. $= \frac{99}{14}$ ঘনমি.

গতিকে, খালী কৰিবলগীয়া পানীৰ আয়তন $= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14}$ ঘনমি.

$= \frac{99}{28} \times 1000$ লিটাৰ

$= \frac{99000}{28}$ লিটাৰ

যিহেতু প্ৰতি ছেকেণ্ডত $\frac{25}{7}$ লিটাৰ পানী খালী কৰে, $\frac{99000}{28}$ লিটাৰ খালী কৰিবলৈ সময় লাগিব $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ ছেকেণ্ড অৰ্থাৎ 16.5 মিনিট।

অনুশীলনীঃ 13.3

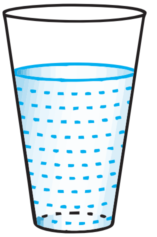
অন্য ধৰণে উল্লেখ নাথাকিলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ল'বা।

1. 4.2 ছে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ ধাতুৰ গোলক এটা গলাই পেলোৱা হ'ল আৰু তাক পুনৰ 6 চে.মি. ব্যাসাৰ্দ্ধৰ এটা বেলন আকৃতি দিয়া হ'ল। বেলনটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।
2. 6 চে.মি., 8 চে.মি. আৰু 10 চে.মি., ব্যাসাৰ্দ্ধৰ তিনিটা ধাতুৰ গোলক গলাই এটা নতুন গোলক তৈয়াৰ কৰা হ'ল। নতুন গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।
3. 20 মিটাৰ গভীৰ আৰু 7 মিটাৰ ব্যাসৰ এটা কুঁৱা খান্দি তাৰ মাটিখিনি সমভাৱে বহলাই 22 মি. × 14 মি. জোখৰ প্লেটফৰ্ম এখন প্ৰস্তুত কৰা হ'ল। প্লেটফৰ্মখনৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।
4. এটা 3 মিটাৰ ব্যাসৰ কুঁৱা 14 মিটাৰ গভীৰলৈ খন্দা হ'ল। ইয়াৰ পৰা ওলোৱা মাটিখিনি সমানভাৱে বহলাই 4 মিটাৰ প্ৰস্থৰ বৃত্তাকাৰ আঙঠিসদৃশ এটা ঢাপ সজোৱা হ'ল। ঢাপটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।
5. 12 চে.মি. ব্যাস আৰু 15 চে.মি. উচ্চতাৰ লম্বীয় বৃত্তাকাৰ বেলন আকৃতিৰ এটা পাত্ৰ আইচক্ৰীমেৰে পূৰ্ণ হৈ আছে। আইচক্ৰীমখিনি 12 চে.মি. উচ্চতা আৰু 6 চে.মি. ব্যাসৰ ওপৰৰ ফালে অৰ্দ্ধগোলক আকৃতিৰ শংকুত ভৰাব লাগে। এই আইচক্ৰীমখিনিৰে পূৰাব পৰা এনে কিমান সংখ্যক শংকু পাম নিৰ্ণয় কৰা।
6. 5.5 চে.মি. × 10 চে.মি. × 3.5 চে.মি. মাপৰ এটা চৌপল সাজিবলৈ 1.75 চে.মি. ব্যাস আৰু 2 মি.মি. ডাঠৰ কিমানটা ৰূপৰ মুদ্ৰা গলাব লাগিব?
7. 32 চে.মি. ওখ আৰু 18 চে.মি. ভূমিব্যাসাৰ্দ্ধ বিশিষ্ট এটা বেলন আকৃতিৰ বাল্টি বালিৰে পূৰ্ণহৈ আছে। এই বাল্টিটো মাটিত খালী কৰাত এটা শংকু আকৃতিৰ দ'ল সৃষ্টি হ'ল। শংকু আকৃতিৰ দ'লটোৰ উচ্চতা 24 চে.মি. হ'লে, শংকুটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ আৰু হেলনীয়া উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।
8. 6 মি. বহল আৰু 1.5 মি. গভীৰ এটা নলাৰে 10 কি.মি./ঘণ্টা বেগেৰে পানী বৈ আছে। 30 মিনিটত ই কিমান ক্ষেত্ৰত জলসিঞ্চন কৰিব পাৰিব, যদি পানীৰ স্থিৰ উচ্চতা 8 চে.মি. প্ৰয়োজন?
9. এজন খেতিয়কে তেওঁৰ পথাৰত থকা 10 মি. ব্যাস আৰু 2 মি. গভীৰতাৰ এটা বেলন আকৃতিৰ চৌবাচ্চাৰ লগত 20 চে.মি. ভিতৰ ব্যাসৰ এডাল পাইপ এটা নলাৰ লগত সংযোগ কৰি দিলে। যদি 3 কি.মি./ঘণ্টা হাৰত পাইপেৰে পানী বৈ যায় তেন্তে চৌবাচ্চাটো ভৰ্তি হ'বলৈ কিমান সময় লাগিব?

13.5. এটা শংকুৰ শংকুচ্ছেদ (Frustum of a Cone)ঃ

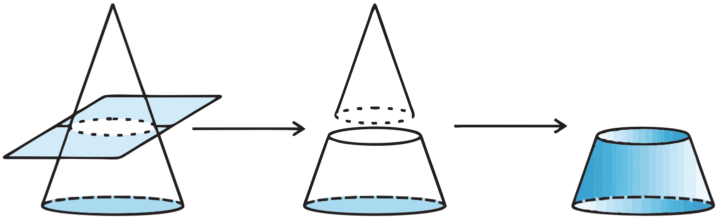
13.2 অনুচ্ছেদত আমি দুটা প্ৰাথমিক গোটাবস্তু একেলগ কৰি পোৱা বস্তুবোৰ পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিলো। এতিয়া আমি অলপ ভিন্নধৰণে কাৰ্য্য কৰিম। আমি এটা লম্বীয় বৃত্তাকাৰ শংকু ল'ম আৰু ইয়াৰ কিছু অংশ আঁতৰাই পেলাম। এইটো কৰাৰ বহুতো পন্থা আছে। কিন্তু আমি গুৰুত্ব দিয়া বিশেষ পদ্ধতিটো হ'ল এখন সমতলে শংকুৰ ভূমিৰ সমান্তৰালকৈ শংকুটো ছেদ কৰি সৰু লম্বীয়বৃত্তাকাৰ শংকুটো

আঁতৰাই দিম। তোমালোকে দেখা পাবা যে, সাধাৰণতে পানীখাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা গিলাচবোৰ (বাচনবোৰ) এনেকুৱা আকৃতিৰ (চিত্ৰ 13.19)।



চিত্ৰ 13.19

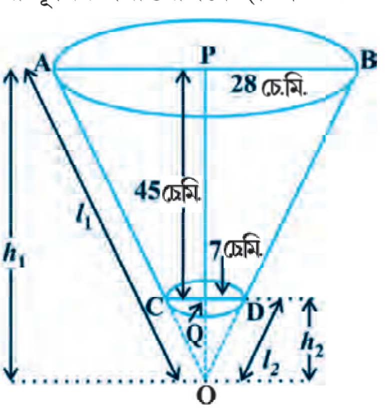
কাৰ্য্য 1 ঃ কিছুপৰিমাণে আলতীয়া মাটি লোৱা বা এনেধৰণৰ আন পদাৰ্থ (প্লাষ্টিচাইনৰ দৰে) লোৱা আৰু এটা শংকু সাজা। ইয়াৰ ভূমিৰ সমান্তৰালকৈ এখন কটাৰীৰে কাটা। সৰু শংকুটো আঁতৰাই দিয়া। তোমাৰ হাতত কি থাকিল ? তোমাৰ হাতত এটা শংকুৰ ছেদাংশ (frustum) থাকিল। তোমালোকে দেখা পাবা যে, ইয়াৰ দুটা বৃত্তাকাৰ মূৰ আছে যাৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ ভিন্ন।



চিত্ৰ 13.20

সেইবাবে, প্ৰদত্ত এটা শংকুক যেতিয়া এখন সমতলৰ দ্বাৰা ভূমিৰ সমান্তৰালকৈ (চিত্ৰ 13.20 চোৱা) কটা হয় আৰু সমতলখনৰ এটা ফালে থকা শংকুটো আঁতৰাই পেলোৱা হয়, তেন্তে সমতলখনৰ আনটোফালে থকা অংশটোক শংকুৰ 'শংকুচ্ছেদ' বোলা হয়। কেনেকৈ শংকুচ্ছেদৰ পৃষ্ঠকালি আৰু আয়তন নিৰ্ণয় কৰা হয় ? আমি উদাহৰণৰ জৰিয়তে ব্যাখ্যা কৰোঁহক।

উদাহৰণ 12 ঃ 45 চে.মি. উচ্চতাৰ শংকু এটাৰ এটুকুৰা শংকুচ্ছেদৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ ক্ৰমে 28 চে.মি. আৰু 7 চে.মি. (চিত্ৰ 13.21চোৱা)। ইয়াৰ আয়তন, বক্ৰপৃষ্ঠকালি আৰু মুঠ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা ($\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা)।



চিত্ৰ 13.21

সমাধান ঃ শংকুচ্ছেদ টুকুৰাক দুটা লম্বীয় বৃত্তাকাৰ শংকু OAB আৰু OCD ৰ অন্তৰৰূপে চাব পাৰি (চিত্র 13.21 চোৱা)। ধৰাহওক, OAB শংকুৰ উচ্চতা h_1 আৰু ইয়াৰ হেলনীয়া উচ্চতা l_1, (চে.মি.ত) অৰ্থাৎ, OP = h_1 আৰু OA = OB = l_1। ধৰাহ'ল OCD শংকুৰ উচ্চতা h_2 আৰু l_2 ইয়াৰ হেলনীয়া উচ্চতা।

আমাক দিয়া আছে, $r_1 = 28$ চে.মি., $r_2 = 7$ চে.মি. আৰু

শংকুচ্ছেদ টুকুৰাৰ উচ্চতা $(h) = 45$ চে.মি.। আকৌ, $h_1 = 45 + h_2$ ..... (1)

আমি প্ৰথমে শংকু OAB আৰু OCD ৰ উচ্চতা ক্ৰমে h_1 আৰু h_2 নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

যিহেতু OPB আৰু OQD ত্ৰিভুজ সদৃশ (কিয় ?), আমি পাওঁ—

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \qquad ..... (2)$$

(1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি পাওঁ, $h_2 = 15$ চে.মি. আৰু $h_1 = 60$ চে.মি.

এতিয়া শংকুচ্ছেদৰ আয়তন = OAB শংকুৰ আয়তন – OCD শংকুৰ আয়তন

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(28)^2\cdot(60) - \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7)^2\cdot(15)\right] \text{ ঘন চে.মি.}$$

$$= 48510 \text{ ঘন চে.মি.}$$

OCD আৰু OAB শংকুৰ হেলনীয়া উচ্চতা ক্ৰমে l_2 আৰু l_1 ইয়াৰপৰা পাওঁ

$$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55 \text{ চে.মি. (প্ৰায়)}$$

$$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20 \text{ চে.মি.}$$

এতেকে, শংকুছেদৰ বক্ৰপৃষ্ঠকালি = $\pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$$= \frac{22}{7}(28)(66.20) - \frac{22}{7}(7)(16.55)$$

$$= 5461.5 \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$

এতিয়া, শংকুচ্ছেদৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = বক্ৰপৃষ্ঠকালি + $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$= 5461.5 \text{ বৰ্গ চে.মি.} + \frac{22}{7}(28)^2 \text{বৰ্গ চে.মি.} + \frac{22}{7}(7)^2 \text{বৰ্গ চে.মি.}$$

$$= 5461.5 \text{ বৰ্গ চে.মি.} + 2464 \text{ বৰ্গ চে.মি.} + 154 \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$

$$= 8079.5 \text{ বৰ্গ চে.মি.}$$

ধৰাহ'ল, শংকুছেদ এটুকুৰাৰ উচ্চতা h, হেলনীয়া উচ্চতা l, আৰু মূৰৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ r_1 আৰু r_2

$(r_1 > r_2)$ । তেন্তে আমি শংকুছেদটুকুৰাৰ আয়তন, বক্রপৃষ্ঠকালি আৰু মুঠ পৃষ্ঠকালি প্রত্যেক্ষভাৱে তলৰ সূত্রৰ সহায়ত উলিয়াব পাৰোঁহক।

(i) শংকুছেদ এটুকুৰাৰ আয়তন $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$.

(ii) শংকুছেদ টুকুৰাৰ বক্র পৃষ্ঠকালি $= \pi(r_1 + r_2)l$, য'ত $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

(iii) শংকুছেদ টুকুৰাৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$, য'ত $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

এই সূত্রসমূহ সদৃশ ত্রিভুজৰ ধাৰণা ব্যৱহাৰ কৰি প্রতিষ্ঠা কৰিব পাৰি। কিন্তু ইয়াত প্রতিষ্ঠা কৰি দেখুওৱা নাই।

এতিয়া উদাহৰণ 12 সূত্রৰ সহায়ত সমাধান কৰোঁহক।

(i) শংকুচ্ছেদ টুকুৰাৰ আয়তন $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45 \cdot \left[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)\right] \text{ ঘন চে.মি.}$$

$$= 48510 \text{ ঘন চে.মি.}$$

(ii) আমি পাওঁ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$$= \sqrt{(45)^2 + (28 - 7)^2} \text{ চে.মি.}$$

$$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2}$$

$$= 49.65 \text{ চে.মি.}$$

গতিকে শংকুচ্ছেদটোৰ বক্র পৃষ্ঠকালি $= \pi(r_1 + r_2)\,l$

$$= \frac{22}{7}(28 + 7)(49.65)$$

$$= 5461.5 \text{ বর্গ চে.মি.}$$

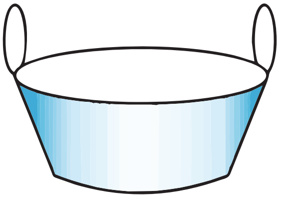
(iii) শংকুচ্ছেদ টুকুৰাৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি $= \pi\left(r_1 + r_2\right)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$= \left[5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2\right] \text{বর্গ চে.মি.}$$

$$= 8079.5 \text{ বর্গ চে.মি.}$$

এই সূত্রকেইটা কিছুমান উদাহৰণত ব্যৱহাৰ কৰোঁ আহা—

উদাহৰণ 13 ঃ শিৱনাথ আৰু তেওঁৰ পত্নী গংগাই কুঁহিয়াৰ ৰসৰপৰা গুড় বনোৱাত ব্যস্ত। তেওঁলোকে কুঁহিয়াৰৰ ৰসখিনি পগাই (শোধন কৰে) জুলীয়া গুড় প্ৰস্তুত কৰে আৰু সেয়া 14 চে.মি. উচ্চতা আৰু দুই বৃত্তাকাৰ মূৰৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 30 চে.মি. আৰু 35 চে.মি. বিশিষ্ট এটা শংকুচ্ছেদ আকৃতিৰ পাত্ৰত বাকী থয়। যদি প্ৰতি ঘন চে.মি. গুড়ৰ ভৰ 1.2 গ্ৰাম, তেন্তে প্ৰতিটো পাত্ৰত থোৱা গুড়ৰ ভৰ নিৰ্ণয় কৰা (চিত্ৰ 13.22) ($\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা)



চিত্ৰ 13.22

সমাধান ঃ যিহেতু পাত্ৰটোৰ আকৃতি এটা শংকুচ্ছেদৰ নিচিনা, গুড়ৰ পৰিমাণ (আয়তন) যিখিনি পাত্ৰটোত থ'ব পাৰি $= \frac{\pi}{3}h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$, য'ত r_1 ডাঙৰ ভূমিৰ ব্যাসৰ্ধ আৰু r_2 সৰু ভূমিৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right)\right] \text{ ঘন চে.মি.}$$

$= 11641.7$ ঘন চে.মি.

এইটো দিয়া আছে যে, 1 ঘন চে.মি. গুড়ৰ ভৰ 1.2 গ্ৰাম, গতিকে পাত্ৰটোত থ'ব পৰা গুড়ৰ ভৰ

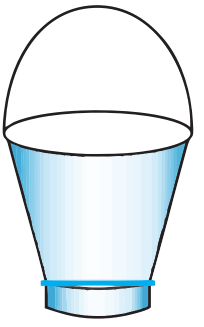
$= (11641.7 \times 1.2)$ গ্ৰাম

$= 13970.04$ গ্ৰাম

$= 13.97$ কে.জি

$= 14$ কি.গ্ৰাম (প্ৰায়)

উদাহৰণ 14 ঃ এটা শংকুচ্ছেদ আকৃতিৰ ধাতুৰ এটা বাল্টি একে ধাতুৰ পাতেৰে নিৰ্মিত এটা খোলা বেলনৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠা কৰা হৈছে (চিত্ৰ 13.23)। বাল্টিৰ দুই বৃত্তাকাৰ মূৰৰ ব্যাস 45 চে.মি. আৰু 25 চে.মি. আৰু বাল্টিটোৰ মুঠ উচ্চতা 40 চে.মি. আৰু বেলন আকৃতিৰ ভূমিৰ উচ্চতা 6 চে.মি.।বাল্টিটো নিৰ্মাণ কৰোঁতে ব্যৱহাৰ কৰা ধাতুৰ পাতচটাৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা, য'ত আমি হেণ্ডেলডাল বিবেচনা নকৰোঁ। বাল্টিত ভৰাব পৰা পানীৰ আয়তনো নিৰ্ণয় কৰা ($\pi = \frac{22}{7}$ লোৱা)।



চিত্ৰ 13.23

সমাধান ঃ বাল্টিটোৰ মুঠ উচ্চতা = 40 চে.মি., য'ত ভূমিৰ উচ্চতাও

অন্তৰ্ভুক্ত। গতিকে, শংকুৰ ছেদাংশৰ উচ্চতা = (40 – 6) চে.মি. = 34 চে.মি.।

সেইবাবে, ছেদাংশ টুকুৰাটোৰ হেলনীয়া উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$, য'ত $r_1 = 22.5$ চে.মি., $r_2 = 12.5$ চে.মি. আৰু $h = 34$ চে.মি.

গতিকে, $l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2}$ চে.মি.

$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44$ চে.মি.

ব্যৱহৃত ধাতুৰ পাতচটাৰ কালি—

= শংকুৰ ছেদাংশৰ বক্রপৃষ্ঠকালি + বৃত্তাকাৰ ভূমিৰ কালি + বেলনৰ বক্রপৃষ্ঠৰ কালি।

$= [\pi \times 35.44\,(22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6]$ বৰ্গ চে.মি.

$= \dfrac{22}{7}(1240.4 + 156.25 + 150)$ বৰ্গ চে.মি.

= 4860.9 বৰ্গ চে.মি.

এতিয়া বাল্টিটোত ভৰাব পৰা পানীৰ আয়তন (বাল্টিৰ ধাৰণ ক্ষমতা)

$= \dfrac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= \dfrac{22}{7} \times \dfrac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5]$ ঘন চে.মি.

$= \dfrac{22}{7} \times \dfrac{34}{3} \times 943.75$

= 33615.48 ঘন চে.মি.

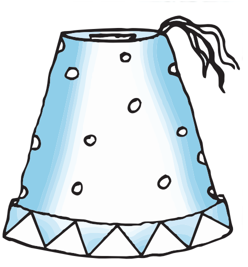
= 33.62 লিটাৰ (প্ৰায়)

অনুশীলনী ঃ 13.4

অন্য ধৰণে উল্লেখ নাথাকিলে $\pi = \dfrac{22}{7}$ ল'বা।

1. এটা পানীখোৱা গিলাচ এটা 14 চে.মি. উচ্চতাৰ শংকুচ্ছেদ। ইয়াৰ দুই বৃত্তাকাৰ মূৰৰ ব্যাস 4 চে.মি. আৰু 2 চে.মি.। গিলাচৰ ধাৰণ ক্ষমতা নিৰ্ণয় কৰা।

2. এটা শংকুচ্ছেদৰ হেলনীয়া উচ্চতা 4 চে.মি. আৰু ইয়াৰ বৃত্তাকাৰ মূৰৰ পৰিসীমা (পৰিধি) হ'ল 18 চে.মি. আৰু 6 চে.মি.। শংকুচ্ছেদটোৰ বক্রপৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 13.24

3. তুৰ্কীসকলে পৰিধান কৰা এটা টুপী (fez) এটা শংকুচ্ছেদৰ নিচিনা (চিত্ৰ 13.24চোৱা)। ইয়াৰ খোলা মুখৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 10 চে.মি., ওপৰৰ ভূমিৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ 4 চে.মি. আৰু হেলনীয়া উচ্চতা 15 চে.মি.। এইটো প্ৰস্তুত কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা পদাৰ্থৰ কালি উলিওৱা।

4. 16 চে.মি. উচ্চতাৰ শংকুচ্ছেদ এটুকুৰাৰ নিচিনা ধাতুৰ পাতেৰে নিৰ্মিত মুখৰ খোলা পাত্ৰ এটাৰ তলৰ আৰু ওপৰৰ ভূমিৰ ব্যাসাৰ্দ্ধক্ৰমে 8 চে.মি. আৰু 20 চে.মি.। প্ৰতিলিটাৰত 20 টকা দৰত লোৱা গাখীৰেৰে পাত্ৰটো পূৰ্ণ কৰিবলৈ কিমান খৰচ পৰিব নিৰ্ণয় কৰা। পাত্ৰটো নিৰ্মাণ কৰোঁতে ব্যৱহাৰ কৰা ধাতুৰ পাতৰ খৰচ উলিওৱা যদি ইয়াৰ দাম প্ৰতি 100 বৰ্গ চে.মি.ত 8 টকা। ($\pi = 3.14$ লোৱা)

5. 20 চে.মি. ওখ আৰু 60° শীৰ্ষকোণ বিশিষ্ট ধাতুৰ লম্বীয়বৃত্তাকাৰ শংকু এটাক ভূমিৰ সমান্তৰালকৈ এখন সমতলে মাজতে দুটা ভাগ কৰি কাটিছে। যদি এনেদৰে পোৱা শংকুচ্ছেদটোৰপৰা $\frac{1}{16}$ চে.মি. ব্যাসৰ তাঁৰ প্ৰস্তুত কৰা হয়, তাঁৰডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

অনুশীলনী ঃ 13.5 (ঐচ্ছিক)*

1. 3 মি.মি. ব্যাসৰ এডাল তামৰ তাঁৰ, 12 চে.মি. ওখ আৰু 10 চে.মি. ব্যাসৰ এটা বেলনৰ বাহিৰফালে মেৰিওৱা হৈছে যাতে বেলনটোৰ বক্ৰপৃষ্ঠ সম্পূৰ্ণৰূপে ঢাক খায়। তাঁৰডালৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু ভৰ, তামৰ ঘনত্ব 8.88 গ্ৰাম প্ৰতিঘনচে.মি. ধৰি লৈ নিৰ্ণয় কৰা।

2. এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ যাৰ বাহু 3 চে.মি. আৰু 4 চে.মি. (অতিভুজৰ বাদে), ইয়াৰ অতিভুজৰ সাপেক্ষে ঘূৰোৱা হৈছে। এনেদৰে ঘূৰ্ণনৰ ফলত গঠিত দ্বৈত শংকুৰ আয়তন আৰু পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰা (π ৰ মান সুবিধামতে লোৱা)।

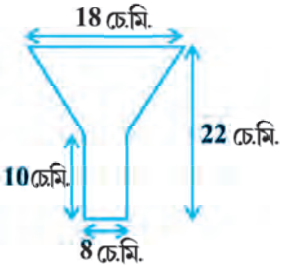
3. এটা জলাধাৰৰ ভিতৰৰ জোখ 150 চে.মি. × 120 চে.মি. × 110 চে.মি., ইয়াত থকা পানীৰ পৰিমাণ 129600 ঘন চে.মি.। ইয়াত ছিদ্ৰযুক্ত ইটাৰ টুকুৰা এনেভাৱে ভাৰোৱা হয় যে পানী কাষলৈকে পূৰ্ণ হয়। প্ৰতিটুকুৰা ইটাই ইয়াৰ নিজৰ আয়তনৰ এক সপ্তদশাংশ পানী শোষণ কৰে। প্ৰতিটুকুৰা ইটাৰ জোখ 22.5 চে.মি. × 7.5 চে.মি. × 6.5 চে.মি. হ'লে পানী বাগৰি নোযোৱালৈ কিমান টুকুৰা ইটা ভৰাব পৰা যাব?

4. এটা মাহৰ এটা পযেকত** নদী এখনৰ উপত্যকাত 10 চে.মি. বৰষুণ হৈছিল। অঞ্চলটোৰ কালি 97280 বৰ্গ কিলোমিটাৰ, দেখুওৱা যে মুঠ বৰষুণৰ পৰিমাণ প্ৰায় 1072 কি.মি. দীঘল, 75 মিঃ বহল আৰু 3 মিঃ গভীৰতাৰ তিনিখন নদীত থকা স্বাভাৱিক পানীৰ মুঠ পানীৰ সমান।

* এই অনুশীলনীটো পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

** পযেকৰ অৰ্থ মাহটোৰ আধা অৰ্থাৎ 15 দিন।

5. টিনপাতেৰে বনোৱা এটা তেলৰ চুপিৰ বেলন আকৃতিৰ অংশৰ দৈৰ্ঘ্য 10 চে.মি., এটা শংকুচ্ছেদৰ লগত সংযোগ কৰা হৈছে। যদি মুঠ উচ্চতা 22 চে.মি., বেলন অংশৰ ব্যাস 8 চে.মি. আৰু চুপিৰ ওপৰৰ অংশৰ ব্যাস 18 চে.মি., তেন্তে চুপিটো নিৰ্মাণ কৰিবলৈ প্ৰয়োজন হোৱা টিনপাতৰ কালি উলিওৱা (চিত্ৰ 13.25)।



চিত্ৰ 13.25

6. 13.5 অনুচ্ছেদত দিয়া শংকুচ্ছেদৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি আৰু মুঠ পৃষ্ঠকালিৰ বাবে দিয়া সূত্ৰকেইটা নিৰ্ণয় কৰা (প্ৰতিষ্ঠা কৰা), ব্যাখ্যা কৰা মতে চিহ্ন ব্যৱহাৰ কৰিবা।
7. 13.5 অনুচ্ছেদত দিয়া শংকুচ্ছেদৰ আয়তন সম্বন্ধীয় সূত্ৰটো ব্যাখ্যা কৰা, ব্যাখ্যাত ব্যৱহাৰ কৰা চিহ্ন ব্যৱহাৰ কৰিবা।

13.6. সাৰাংশ (Summary)ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি শিকিলা—

1. দুটা প্ৰাথমিক গোটা বস্তু যেনে, চৌপল বা আয়তীয় ঘনক, শংকু, বেলন, গোলক আৰু অৰ্ধগোলক, সংযোগ কৰি পোৱা বস্তুৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰাৰ কৌশল।
2. চৌপল, শংকু, বেলন, গোলক আৰু অৰ্ধগোলকৰ যিকোনো দুটা সংযোগ কৰি পোৱা বস্তুৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰাৰ কৌশল।
3. এটা লম্বীয় বৃত্তাকাৰ শংকুক ভূমিৰ সমান্তৰালকৈ এখন সমতলেৰে কাটি যেতিয়া সৰু শংকু আকৃতিৰ অংশটো আঁতৰাই দিয়া হয়, এনেকৈ পোৱা গোটাবস্তুক এটা লম্বীয় বৃত্তাকাৰ শংকুৰ শংকুচ্ছেদ (Frustum) বোলা হয়।
4. এটা শংকুৰ শংকুচ্ছেদ টুকুৰাৰ লগত জড়িত সূত্ৰ ঃ

(i) শংকু এটাৰ শংকুচ্ছেদৰ আয়তন $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$.

(ii) শংকু এটাৰ শংকুচ্ছেদৰ বক্ৰপৃষ্ঠকালি $= \pi l(r_1 + r_2)$, য'ত $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

(iii) শংকু এটাৰ শংকুচ্ছেদৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

য'ত h = শংকুচ্ছেদৰ উলম্ব উচ্চতা,

l = শংকুচ্ছেদৰ হেলনীয়া উচ্চতা

r_1 আৰু r_2 শংকুচ্ছেদৰ দুই ভূমি(মূৰ)ৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ।

Z9J1Y5

পৰিসংখ্যা (Statistics)

চর্তুদশ অধ্যায়

There are lies, damned lies and statistics.

— *by Disraeli*

14.1. অৱতাৰণা (Introduction)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে সংঘৰদ্ধ, সংঘৰদ্ধ নোহোৱা বাৰংবাৰতা বিভাজন কৰি প্ৰদত্ত তথ্যৰ শ্ৰেণী বিভাজনৰ বিষয়ে শিকিলা। তথ্য কেনেকৈ বিভিন্ন নক্সা যেনে দণ্ডচিত্ৰ, হিষ্ট'গ্ৰাম বা স্তম্ভলেখ (বিভিন্ন পুতলৰ) আৰু বাৰংবাৰতা বহুভুজৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি তোমালোকে তাকো শিকিলা। মুঠতে তোমালোকে আৰু এখোজ আগুৱাই সংঘৰদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ সাংখ্যিক ৰূপৰ বিষয়েও শিকিলা— ইয়াক কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ বোলে, যেনে— মাধ্য (Mean), মধ্যমা (Median) আৰু বহুলক (Mode)। এই অধ্যায়ত আমাৰ অধ্যয়ন এই তিনিবিধ জোখৰ অৰ্থাৎ, মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ বিষয়ে সংঘৰদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰপৰা সংঘৰদ্ধ তথ্যলৈ সম্প্ৰসাৰণ কৰিম। আমি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা, সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ধাৰণা আৰু কেনেকৈ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা লেখ যাক অ'জিভ (*ogives*) বোলে, অংকন কৰিব পাৰি তাকো অধ্যয়ন কৰিম।

14.2. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মাধ্য (Mean of Grouped Data) ঃ

আমি জানো যে, পৰ্যবেক্ষণৰ মাধ্য হ'ল আটাইবোৰ পৰ্য্যবেক্ষণৰ মুঠ মানক পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যাৰে হৰণ কৰি পোৱা মান। নৱম শ্ৰেণীৰ পৰা মনত পেলাওঁ— যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পৰ্য্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$ তেনেহ'লে ইয়াৰ ইয়াৰ অৰ্থ হ'ব x_1 পৰ্য্যবেক্ষণ f_1 বাৰ, x_2 পৰ্য্যবেক্ষণ f_2 বাৰ আৰু এনেকৈয়ে ওলাই থাকিব।

এতিয়া পৰ্য্যবেক্ষণৰ মানৰ সমষ্টি $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$,

আৰু মুঠ পৰ্য্যবেক্ষণ $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

গতিকে, তথ্যৰ মাধ্য $\overline{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$

মনত পেলোৱা যে, আমি সংক্ষেপে গ্ৰীক আখৰ Σ (বৰফলাৰ চিগ্‌মা) অৰ্থাৎ সমষ্টি, ব্যৱহাৰ কৰি লিখিব পাৰো। সেয়া হ'ল—

$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ যিটো আৰু সংক্ষেপে, লিখা হয় $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i}$, ইয়াত i, 1 ৰ পৰা n অলৈ প্ৰসাৰিত বুলি বুজা যায়। তলৰ উদাহৰণত মাধ্য উলিওৱাত এই সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰোঁহক—

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ তালিকাত এখন বিদ্যালয়ৰ 30 জন দশম শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰই 100 নম্বৰৰ গণিতৰ প্ৰশ্নকাকত এখনত পোৱা নম্বৰ সন্নিৱিষ্ট কৰা হ'ল। ছাত্ৰসকলে লাভ কৰা নম্বৰৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

লাভ কৰা নম্বৰ (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

সমাধান ঃ মনত পেলোৱা যে, মাধ্য নম্বৰ উলিয়াবলৈ হ'লে আমি প্ৰতিটো x_i ৰ লগত অনুৰূপ বাৰংবাৰতা f_i পূৰণ কৰিব লাগিব। গতিকে, এইখিনি তালিকা 14.1.ত দেখুওৱাৰ দৰে এটা স্তম্ভত লিখোঁহক।

তালিকা 14.1

লাভকৰা নম্বৰ (x_i)	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	f_ix_i
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_ix_i = 1779$

এতিয়া, $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{1779}{30} = 59.3$

সেয়ে, লাভ কৰা নম্বৰৰ মাধ্য হ'ল 59.3.

আমাৰ বাস্তৱ জীৱনৰ বহুক্ষেত্ৰত সাধাৰণতে তথ্যৰ পৰিসৰ বহু বেছি হয়, সেয়ে এটা অৰ্থবহ অধ্যয়নৰ বাবে ইয়াক সংঘবদ্ধ তথ্যত আৰদ্ধ কৰাৰ প্ৰয়োজন। সেইবাবে আমি প্ৰদত্ত সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যক সংঘবদ্ধ তথ্যলৈ পৰিবৰ্তন কৰিম আৰু ইয়াৰ গড় নিৰ্ণয়ৰ কিছুমান নিয়ম বাহিৰ কৰিম।

উদাহৰণ-1ৰ সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্য 15 পৰিসৰৰ শ্ৰেণী অন্তৰালত প্ৰকাশ কৰি সংঘবদ্ধ তথ্যলৈ ৰূপান্তৰ কৰোঁহক। মনত পেলোৱা যে, শ্ৰেণী অন্তৰালত বাৰংবাৰতাৰে অন্তৰ্ভুক্ত কৰোতে, অন্তৰালৰ উচ্চসীমাত থকা ছাত্ৰজন পিছৰ শ্ৰেণী অন্তৰালত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়। যেনে, 40 নম্বৰ পোৱা 4 জন ছাত্ৰ 40-55 শ্ৰেণীঅন্তৰালত অনুৰ্ভুক্ত হ'ব আৰু 25-40 ত নহয়। মনত এই ধাৰণা লৈ, আমি এখন সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰোঁহক (তালিকা 14.2)

তালিকা 14.2

শ্ৰেণীবিভাজন	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	2	3	7	6	6	6

এতিয়া, প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাবে আমাক এনে এটা বিন্দু লাগে যি গোটেই শ্ৰেণীটোক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব। এইটো ধৰা হওঁক যে, প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাৰংবাৰতা ইয়াৰ মধ্যবিন্দুত কেন্দ্ৰ কৰি আগুৰি আছে। সেইবাবে প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দু (বা শ্ৰেণী সূচক) এ প্ৰতিটো শ্ৰেণী থকা পৰ্য্যবেক্ষণবোৰ প্ৰতিনিধিত্ব কৰে বুলি বাছি ল'ব পাৰি। মনত পেলোৱা যে, এটা শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দু (বা শ্ৰেণীসূচক) আমি শ্ৰেণীটোৰ উচ্চ আৰু নিম্নসীমাৰ গড় লৈ নিৰ্ণয় কৰোঁ। অৰ্থাৎ,

$$\text{শ্ৰেণী সূচক (Class mark)} = \frac{\text{শ্ৰেণীৰ উচ্চ সীমা (Upper class limit)} + \text{শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা (Lower class limit)}}{2}$$

তালিকা 14.2 সাপেক্ষে 10-25 অন্তৰালৰ শ্ৰেণী সূচক হ'ল $\dfrac{10+25}{2}$, অৰ্থাৎ, 17.5। একেদৰে বাকী শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণী সূচক আমি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ। আমি এইবোৰ তালিকা 14.3 ত বহুৱাওঁ। এই শ্ৰেণী সূচকে আমাক x_i বোৰ নিৰ্দেশ কৰিব। এতিয়া, সাধাৰণতে, i তম শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাবে, আমি x_i শ্ৰেণী সূচকৰ অনুৰূপ বাৰংবাৰতা পাওঁ f_i। আমি, এতিয়া উদাহৰণ-1ৰ দৰে গড় নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আগবাঢ়িব পাৰোঁ।

তালিকা 14.3

শ্ৰেণী অন্তৰাল	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	শ্ৰেণীসূচক (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

শেষৰ স্তম্ভৰ মানবোৰৰ সমষ্টি পাওঁ- $\Sigma f_i x_i$। সেইবাবে, প্ৰদত্ত তথ্যৰ মাধ্য $\overline{x}$ হ'ল—

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

মাধ্য উলিওৱা এই নতুন পদ্ধতিটোক **প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি** (Direct method) বুলি জনা যায়।

আমি দেখা পাওঁ যে, তালিকা 14.1 আৰু 14.3 ত একেখিনি তথ্য আৰু একে সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি মাধ্য উলিওৱা হৈছে কিন্তু ফলাফলৰ পাৰ্থক্য আছে। তোমালোকে ভাবিব পাৰিছানে কিয় এনে হৈছে আৰু কোনটো বেছি নিখুঁত? তালিকা 14.3 ধৰা মধ্যবিন্দুৰ বাবেই দুয়োটা মানৰ পাৰ্থক্য ঘটিছে। 59.3 হ'ল আচল মাধ্য (exact mean) অন্যহাতে 62 এটা আসন্ন মাধ্য (approximate mean)।

কেতিয়াবা, x_i আৰু f_i ৰ সাংখ্যিকমান যেতিয়া ডাঙৰ হয়, x_i আৰু f_i ৰ গুণফল উলিওৱাটো আমনিদায়ক আৰু সময় খৰচী হয়। সেয়ে, এনে অৱস্থাত হিচাব নিকাচ কমাবৰ বাবে আমি এটা পদ্ধতি ভাবোঁহক।

আমি f_i বোৰক একো কৰিব নোৱাৰোঁ, কিন্তু আমি x_i বোৰক সৰু সংখ্যালৈ পৰিবৰ্তন কৰিব পাৰোঁ যাতে আমাৰ গণনা কাৰ্য্য সহজ হয়। আমি এইটো কেনেকৈ কৰিম? প্ৰতিটো x_i ৰ পৰা এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা বিয়োগ কৰিলে কি হ'ব? এই পদ্ধতিটো আমি চেষ্টা কৰোঁহক।

প্ৰথম ঢাপত আমি x_i ৰ মাজৰ এটাক গড় বুলি ধৰিম আৰু ইয়াক 'a' ৰে নিৰ্দেশ কৰিম। গণনা কাৰ্য্য আৰু কমাবলৈ আমি 'a' ক $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ৰ কেন্দ্ৰত থকা x_i ৰ বাবে ল'ম। গতিকে, আমি বাছি ল'ব পাৰোঁ— $a = 47.5$ বা $a = 62.5$. ধৰো $a = 47.5$.

পিচৰ ঢাপত a আৰু প্ৰতিটো x_i ৰ মাজৰ পাৰ্থক্য d_i নিৰ্ণয় কৰিম, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেকটো x_i ৰ পৰা 'a' ৰ বিচ্যুতি (deviation) উলিয়াম।

অৰ্থাৎ, $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

তৃতীয় ঢাপত d_i ৰ লগত অনুৰূপ f_i বোৰৰ গুণফল উলিয়াম, সকলো $f_i d_i$ ৰ সমষ্টি উলিয়াম। এই গণনাসমূহ তালিকা 14.4 ত দেখুওৱা হ'ল-

তালিকা 14.4

শ্ৰেণী অন্তৰাল	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f_i)	শ্ৰেণীসূচক (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

গতিকে, তালিকা 14.4 ৰ পৰা বিচ্যুতিৰ মাধ্য $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$.

এতিয়া আমি $\bar{d}$ আৰু $\bar{x}$ ৰ মাজৰ সম্বন্ধ উলিয়াম—

যিহেতু d_i উলিয়াওঁতে আমি প্ৰতিটো x_i ৰ পৰা 'a' বিয়োগ কৰিছিলো, সেয়ে $\bar{x}$ মাধ্য পাবলৈ আমি $\bar{d}$ ৰ লগত 'a' যোগ কৰিব লাগিব। এইটো গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি যেনে—

বিচ্যুতি মাধ্য $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

গতিকে, $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

গতিকে, $\bar{x} = a + \bar{d}$

অৰ্থাৎ, $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

তালিকা 14.4 ৰ পৰা a, $\Sigma f_i d_i$ আৰু Σf_i ৰ মান বহুৱাই পাওঁ—

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62.$$

গতিকে, ছাত্ৰসকলে লাভ কৰা নম্বৰৰ মাধ্য হ'ল 62.

ওপৰত আলোচনা কৰা পদ্ধতিটোক **বিবেচিত মাধ্য পদ্ধতি** (Assumed Mean Method) বোলা হয়।

কাৰ্য্য 1 : তালিকা 14.3ৰ প্ৰতিটো x_i (অৰ্থাৎ, 17.5, 32.5, আৰু এনেকৈয়ে) 'a' বুলি ধৰি মাধ্য উলিওৱা। তুমি কি দেখিলা? তুমি দেখিবা যে প্ৰত্যেক বাৰতে নিৰ্ণয় কৰা মাধ্য একে অৰ্থাৎ 62 (কিয়?)

গতিকে, আমি ক'ব পাৰোঁ যে, মাধ্যৰ মান বাছি লোৱা 'a' ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে।

এইটো দেখা যায় যে, তালিকা 14.4ত চতুৰ্থ স্তম্ভত মানবোৰ 15ৰ গুণিতক। গতিকে যদি আমি সম্পূৰ্ণ স্তম্ভটোকে 15 ৰে হৰণ কৰোঁ, আমি f_iৰ লগত পূৰণ কৰা ৰাশিবোৰ সৰুকৈ পাম (ইয়াত 15 প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য)।

গতিকে, ধৰো $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$, য'ত a হ'ল বিবেচিত মাধ্য আৰু h শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্য।

এতিয়া, আমি u_i বোৰ এইদৰে গণনা কৰিম আৰু আগৰ দৰে আগ বাঢ়িম। (অৰ্থাৎ, $f_i u_i$ আৰু $\Sigma f_i u_i$ উলিয়াম)। h = 15লৈ তালিকা 14.5 গঠন কৰোঁহক—

তালিকা 14.5

শ্ৰেণীঅন্তৰাল	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
মুঠ	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

ধৰোঁ $\bar{u} = \dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

এতিয়া আকৌ $\overline{u}$ আৰু $\overline{x}$ ৰ মাজৰ সম্বন্ধ নিৰ্ণয় কৰোঁহক।

আমি পাওঁ যে, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

$$\text{সেয়ে, } \overline{u} = \frac{\Sigma f_i \left(\dfrac{x_i - a}{h}\right)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\overline{x} - a]$$

গতিকে, $h\overline{u} = \overline{x} - a$

অৰ্থাৎ, $\overline{x} = a + h\overline{u} = a + h\left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

এতিয়া তালিকা 14.5 ৰ পৰা a, h, $\Sigma f_i u_i$ আৰু Σf_i ৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ—

$$\overline{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

গতিকে, এজন ছাত্ৰই পোৱা মাধ্য নম্বৰ হ'ল 62.

ওপৰত আলোচনা কৰা পদ্ধতি **ঢাপ-বিচ্যুতি পদ্ধতি** (Step-deviation method) বুলি কোৱা হয়।

আমি লক্ষ্য কৰোঁ ঃ

- যদি সকলো d_i ৰ এটা সাধাৰণ উৎপাদক থাকে তেন্তে **ঢাপ-বিচ্যুতি** পদ্ধতি বেছি সুবিধাজনক হয়।
- তিনিওটা পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা মাধ্য সমান।
- বিবেচিত মাধ্য পদ্ধতি আৰু ঢাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰ সৰলীকৃত ৰূপহে মাথোঁ।

- a আৰু h ওপৰত দিয়া ধৰণে নহ'লেও $\bar{x} = a + h\bar{u}$ প্ৰযোজ্য হ'ব, কিন্তু যিকোনো অশূন্য সংখ্যা যাতে $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ হ'ব লাগিব।

এই পদ্ধতিকেইটা আন এটা উদাহৰণত প্ৰয়োগ কৰোঁহক—

উদাহৰণ 2 ঃ ভাৰতৰ বিভিন্ন ৰাজ্য বা কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চলৰ (U. T.) গ্ৰাম্য এলেকাৰ প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত শিক্ষয়িত্ৰী বণ্টন শতাংশত তলৰ তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰা হৈছে। শিক্ষয়িত্ৰীৰ মাধ্য শতাংশ এই অনুচ্ছেদত ব্যাখ্যা কৰা তিনিওটা পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা।

শিক্ষয়িত্ৰীৰ শতাংশ	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
ৰাজ্য/কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চলৰ সংখ্যা	6	11	7	4	4	2	1

উৎস ঃ *NCERTৰ দ্বাৰা প্ৰস্তুত কৰা সপ্তম সৰ্বভাৰতীয় (বিদ্যালয়) স্কুলীয়া শিক্ষাৰ অধ্যয়ন*

সমাধান ঃ প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণীসূচক x_i নিৰ্ণয় কৰি এটা স্তম্ভত লিখা হওঁক।

তালিকা 14.6

শিক্ষয়িত্ৰীৰ সংখ্যা	ৰাজ্য/কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চলৰ সংখ্যা (f_i)	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

ইয়াত আমি লওঁ $a = 50$, $h = 10$, তেন্তে $d_i = x_i - 50$ আৰু $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$.

আমি এতিয়া d_i আৰু u_i উলিয়াম আৰু ইয়াক তালিকা 14.7 ত বহুৱাম.

তালিকা 14.7

শিক্ষয়িত্ৰীৰ শতাংশ	ৰাজ্য/কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চল সংখ্যা (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	f_ix_i	f_id_i	f_iu_i
15 - 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 - 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 - 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
মুঠ	**35**				**1390**	**–360**	**–36**

ওপৰৰ তালিকাৰ পৰা আমি পাওঁ—

$\Sigma f_i = 35, \quad \Sigma f_ix_i = 1390, \quad \Sigma f_id_i = -360, \quad \Sigma f_iu_i = -36.$

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰে,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$$

বিবেচিত মাধ্য পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

ঢাপ বিচুতি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

সেয়ে গ্ৰাম্য অঞ্চলৰ প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ক শিক্ষয়িত্ৰীৰ মাধ্য শতাংশ হ'ল 39.71.

মন্তব্য ঃ তিনিওটা পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা (মাধ্য) ফলাফল একে। সেয়ে x_i আৰু f_iৰ সাংখ্যিক মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি পদ্ধতি নিৰূপণ কৰিব লাগে। যদি x_i আৰু f_i পৰ্য্যাপ্ত পৰিমাণে সৰু, তেন্তে প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিয়েই উপযুক্ত বাছনি। যদি x_i আৰু f_i সাংখ্যিক মানবোৰ ডাঙৰ তেন্তে আমি বিবেচিত গড় পদ্ধতি বা ঢাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ল'ব পাৰোঁ। যদি শ্ৰেণী অন্তৰালৰ শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্য সমান নহয় আৰু x_i ৰ সাংখ্যিকমান ডাঙৰ তেতিয়াও আমি ঢাপবিচ্যুতি পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰিব পাৰো, এইক্ষেত্ৰত সকলো

d_iৰ উৎপাদক হোৱা এটা উপযুক্ত h বাছি ল'ব লাগে।

উদাহৰণ 3 ঃ তলৰ বণ্টনত এদিনীয়া ক্রিকেট খেলত এটা বলাৰে লোৱা উইকেট দেখুওৱা হৈছে। এটা উপযুক্ত পদ্ধতি বাছি লৈ উইকেটৰ মাধ্য নির্ণয় কৰা। মাধ্যই কি সূচায়?

উইকেটৰ সংখ্যা	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
বলাৰৰ সংখ্যা	7	5	16	12	2	3

সমাধান ঃ ইয়াত, শ্রেণীদৈর্ঘ্য ভিন্ন আৰু x_i ৰ মানবোৰ ডাঙৰ। তথাপিও আমি বিচ্যুতি প্রয়োগ কৰিম, $a = 200$ আৰু $h = 20$। তেন্তে আমি তালিকা 14.8ৰ দৰে তথ্য পাম।

তালিকা 14.8

উইকেটৰ সংখ্যা	বলাৰৰ সংখ্যা (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	–160	–8	–56
60 - 100	5	80	–120	–6	–30
100 - 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
মুঠ	**45**				**–106**

গতিকে, $\bar{u} = \frac{-106}{45}$. সেইবাবে, $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89.$

এইটোৱে কয় যে, গড়ে প্রদত্ত 45 টা বলাৰে এদিনীয়া ক্রিকেটত দখল কৰা উইকেটৰ সংখ্যা হ'ল 152.89.

এতিয়া, এই অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰা ধাৰণাবোৰ তোমালোকে কিদৰে সুন্দৰভাবে প্রয়োগ কৰিব পাৰা চোৱাচোন!

কার্য্য 2 ঃ তোমালোকৰ শ্রেণীৰ ছাত্র-ছাত্রীসকল তিনিটা দলত বিভক্ত হোৱা আৰু প্রত্যেক দলক তলৰ যিকোনো এটা কার্য্য কৰিববলৈ কোৱা।

1. তোমালোকৰ বিদ্যালয়ে অনুষ্ঠিত কৰা শেহতীয়া পৰীক্ষাত তোমালোকৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে লাভ কৰা গণিতৰ নম্বৰসমূহ সংগ্ৰহ কৰা। তথ্যসমূহৰপৰা সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা বিভাজন গঠন কৰা।
2. তোমালোকৰ চহৰখনৰ দৈনিক সৰ্বোচ্চ তাপমান 30 দিনৰ বাবে লিখি ৰাখা। এই তথ্যখিনি সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা তালিকাত উপস্থাপন কৰা।
3. তোমালোকৰ শ্ৰেণীৰ সকলো ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ উচ্চতা (চেঃমিঃত) জুখি উলিওৱা আৰু তথ্যখিনি এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত প্ৰকাশ কৰা।

আটাইকেইটা দলে তথ্যসমূহ আহৰণ কৰি আৰু সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰি দলসমূহে প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিব পাৰে, যি পদ্ধতি উপযুক্ত বুলি ভাবে সেয়া প্ৰয়োগ কৰিব।

অনুশীলনী 14.1

1. এদল ছাত্ৰই তেওঁলোকৰ পৰিৱেশ সজাগতা কাৰ্যসূচীৰ অংশহিচাপে এটা অঞ্চলৰ 20টা ঘৰত থকা উদ্ভিদৰ তথ্য ভিত্তিক অধ্যয়ন তলত দেখুওৱা তথ্য সমূহ সংগ্ৰহিত কৰিলে। প্ৰতিটো ঘৰত থকা উদ্ভিদৰ মাধ্য উলিওৱা।

উদ্ভিদৰ সংখ্যা	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
ঘৰৰ সংখ্যা	1	2	1	5	6	2	3

তোমালোকে মাধ্য উলিয়াবলৈ কোনটো পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিবা আৰু কিয়?

2. এটা ফেক্টৰীৰ 50 জন শ্ৰমিকৰ (কৰ্মীৰ) দৈনিক পাৰিশ্ৰমিক হ'ল তলৰ বাণ্টন

দৈনিক পাৰিশ্ৰমিক (টকাত)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
কৰ্মীৰ সংখ্যা	12	14	8	6	10

উপযুক্ত পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি ফেক্টৰীটোৰ শ্ৰমিকৰ মাধ্য দৈনিক পাৰিশ্ৰমিক নিৰ্ণয় কৰা।

3. এটা অঞ্চলৰ শিশুসকলৰ দৈনিক (পকেট) খৰচ তলৰ বিভাজন তালিকাত দেখুৱা হ'ল। মাধ্য হাতখৰচ হ'ল 18টকা। হেৰোৱা বাৰংবাৰতা f নিৰ্ণয় কৰা।

দৈনিক হাত খৰচ (টকাত)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
শিশুৰ সংখ্যা	7	6	9	13	f	5	4

4. এখন চিকিৎসালয়ত এজন চিকিৎসকে 30 গৰাকী মহিলাক পৰীক্ষা কৰে আৰু প্ৰতি মিনিটত

হৃৎপিণ্ডৰ কম্পন সংখ্যা লিখি ৰাখে আৰু তলত দিয়াধৰণে তালিকাবদ্ধ কৰে। উপযুক্ত পদ্ধতি বাছনি কৰি, এই মহিলাসকলৰ প্ৰতিমিনিটত হৃদপিণ্ডৰ মাধ্য কম্পন নিৰ্ণয় কৰা।

প্ৰতি মিনিটত হৃৎপিণ্ডৰ কম্পন সংখ্যা	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
মহিলাৰ সংখ্যা	2	4	3	8	7	4	2

5. খুচুৰা বজাৰত ফলবিক্ৰেতাই আমবোৰ বাকছত ভৰাই বিক্ৰী কৰে। এই বাকচসমূহত ভিন্ন পৰিমাণৰ আম আছে। বাকচৰ সংখ্যা ক্ৰমে আমৰ পৰিমাণ তলত বিস্তৃত কৰি দিয়া হ'ল।

আমৰ সংখ্যা	50 - 52	53 - 55	56 - 58	59 - 61	62 - 64
বাকচৰ সংখ্যা	15	110	135	115	25

এটা বন্ধ বাকচত থকা আমৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা। মাধ্য উলিয়াবলৈ তুমি কি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিবা?

6. এটা অঞ্চলৰ 25 ঘৰ মানুহৰ খাদ্যত দৈনিক খৰচ তলৰ তালিকাত দেখুওৱা হৈছে।

দৈনিক খৰচ (টকাত)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
ঘৰৰ সংখ্যা	4	5	12	2	2

উপযুক্ত নিয়মেৰে খাদ্যত দৈনিক মাধ্য খৰচ নিৰ্ণয় কৰা।

7. বায়ুত SO_2 ৰ গাঢ়তা উলিয়াবলৈ (প্ৰতিমিলিয়ন অংশত, অৰ্থাৎ ppm) এখন চহৰৰ 30 টা অঞ্চলত তথ্য সংগ্ৰহ কৰা হ'ল আৰু তলত দিয়া ধৰণে উপস্থাপন কৰা হ'ল—

SO_2 ৰ গাঢ়তা (ppm)	**বাৰংবাৰতা**
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

বায়ুত SO_2ৰ মাধ্য গাঢ়তা নিৰ্ণয় কৰা।

8. সম্পূৰ্ণ শৈক্ষিক বৰ্ষত এটা শ্ৰেণীত এজন শিক্ষকে লোৱা 40 জন ছাত্ৰৰ অনুপস্থিতিৰ হিচাপ

তলত দিয়া হ'ল। এজন ছাত্রৰ অনুপস্থিতিৰ মাধ্য দিন নিৰ্ণয় কৰা।

দিনৰ সংখ্যা	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
ছাত্রৰ সংখ্যা	11	10	7	4	4	3	1

9. তলৰ তালিকাখনে 35 খন চহৰৰ সাক্ষৰতা হাৰ (শতাংশত) দিয়ে। মাধ্য সাক্ষৰতা হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সাক্ষৰতা হাৰ (%ত)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
চহৰৰ সংখ্যা	3	10	11	8	3

14.3. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক (Mode of Grouped Data) ঃ

নৱম শ্ৰেণীৰ কথা মনত পেলোৱা— পৰ্যবেক্ষণ এটাৰ যিটো মান আটাইতকৈ বেছি উপলব্ধ হয় সেয়াই হ'ল বহুলক অৰ্থাৎ পৰ্যবেক্ষণটোৰ যিটো মানৰ বাৰংবাৰতা সৰ্বোচ্চ। তদুপৰি সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিছিলো। ইয়াত সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় সম্পৰ্কে আমি আলোচনা কৰিম। যদি সম্ভৱ হয়, সেয়া এটাতকৈ বেছি মানৰ সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা থাকিব পাৰে। এই পৰিস্থিতিত তথ্যসমূহক বহু বহুলকযুক্ত বোলে। যদিও সংঘবদ্ধ তথ্য বহুবহুলক (multimodal) যুক্ত হ'ব পাৰে, আমি একক বহুলকযুক্ত তথ্যৰ সমস্যাতে আৱদ্ধ থাকিম।

তলৰ উদাহৰণটোৰ জৰিয়তে আমি সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ বহুলক কিদৰে নিৰ্ণয় কৰে তাক মনত পেলাওঁ—

উদাহৰণ 4 ঃ এটা বলাৰে 10 খন ক্ৰিকেট খেলত দখল কৰা উইকেটৰ সংখ্যা তলত দিয়া ধৰণৰ—

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

তথ্যখিনিৰ বহুলক (Mode) নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত তথ্যৰ বাৰংবাৰতা তালিকা তলত দিয়া হ'ল—

উইকেটৰ সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6
খেলৰ সংখ্যা	1	1	3	2	1	1	1

স্পষ্টভাৱে 2 টা উইকেট দখল কৰা খেলৰ সংখ্যা সৰ্বোচ্চ (অৰ্থাৎ 3)। সেয়ে তথ্যৰ বহুলক হ'ল '2'।

সংঘবদ্ধ বাৰংবাৰতা বিভাজনত বাৰংবাৰতা চাই বহুলক (Mode) নিৰ্ণয় কৰাটো সম্ভৱ নহয়।

ইয়াত আমি মাথো সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতাযুক্ত শ্ৰেণীটোহে দেখুৱাব পাৰো, যাক বহুলক শ্ৰেণী (Modal class) বোলে। বহুলক, বহুলক শ্ৰেণীৰ ভিতৰৰ এটা মান আৰু এইটো তলৰ সূত্ৰই দিয়ে—

$$\text{বহুলক} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

য'ত l = বহুলক শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমা

h = শ্ৰেণী অন্তৰালৰ দৈৰ্ঘ্য (সকলো শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য একে বুলি ধৰা হৈছে)

f_1 = বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা।

f_0 = বহুলক শ্ৰেণীৰ পূৰ্ববৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা।

f_2 = বহুলক শ্ৰেণীৰ পৰবৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা।

এই সূত্ৰৰ ব্যৱহাৰ ব্যাখ্যা কৰিবলৈ তলৰ উদাহৰণটো লোৱা হওক—

উদাহৰণ- 5 ঃ এটা ছাত্ৰৰ দলে এটা অঞ্চলৰ 20 টা পৰিয়ালৰ তথ্যভিত্তিক অধ্যয়ন কৰি পৰিয়ালৰ সদস্যৰ সংখ্যা সন্নিৱিষ্ট কৰি তলৰ বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰিলে।

পৰিয়ালৰ আকাৰ	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
পৰিয়ালৰ সংখ্যা	7	8	2	2	1

এই তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা 8 আৰু এই বাৰংবাৰতাৰ অনুৰূপ শ্ৰেণী হ'ল 3 – 5।

গতিকে বহুলক শ্ৰেণী হ'ল 3 – 5।

এতিয়া বহুলক শ্ৰেণী = 3 – 5, বহুলক শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমা (l) = 3, শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য (h) = 2

বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_1) = 8,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পূৰ্ববতী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_0) = 7,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পৰবতী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_2) = 2.

এতিয়া, মানবোৰ সূত্ৰটোত বহুৱাই আমি পাওঁ—

$$\text{বহুলক} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

সেইবাবে, ওপৰৰ তথ্যৰ বহুলক হ'ল 3.286.

উদাহৰণ- 6 ঃ উদাহৰণ-1 ৰ তালিকা 14.3 ত 30 জন ছাত্ৰই পৰীক্ষাত অংকত পোৱা নম্বৰ সন্নিৱিষ্ট কৰা হৈছে। এই তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা। মাধ্য আৰু বহুলকৰ তুলনা আৰু বৈশিষ্ট্যও লিখা।

সমাধান ঃ উদাহৰণ-1 ৰ তালিকা 14.3 চোৱা। যিহেতু সৰহ সংখ্যক ছাত্ৰই (অৰ্থাৎ 7) 40-55

অন্তৰালত নম্বৰ পাইছিল, বহুলক শ্ৰেণী হ'ল 40-55।

সেয়ে, বহুলক শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমা (l) = 40,

শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্য (h) = 15,

বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_1) = 7,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পূৰ্ববৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_0) = 3,

বহুলক শ্ৰেণীৰ পৰবৰ্তী শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা (f_2) = 6.

এতিয়া সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি, বহুলক $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$,

আমি পাওঁ, বহুলক $= 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$

সেয়ে বহুলক নম্বৰ হ'ল 52 । এতিয়া উদাহৰণ-1 ৰ পৰা জানো যে মাধ্য নম্বৰ = 62 গতিকে, সৰহ সংখ্যক ছাত্ৰই 52 নম্বৰ পাইছিল আৰু গড় হিচাপত নম্বৰ পাইছিল 62।

মন্তব্য ঃ

1. উদাহৰণ-6 ত বহুলক, মাধ্যমানতকৈ কম। কিন্তু অন্য সমস্যাত ই মাধ্যৰ সমান বা বেছিও হ'ব পাৰে।
2. পৰিস্থিতি সাপেক্ষে, আমি ছাত্ৰসকলে লাভ কৰা গড় নম্বৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আগ্ৰহী নে সৰহ সংখ্যক ছাত্ৰই লাভ কৰা গড় নম্বৰ নিৰ্ণয় কৰিম? প্ৰথম ক্ষেত্ৰত মাধ্য দৰকাৰ আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত বহুলক দৰকাৰ।

কাৰ্য্য 3 ঃ কাৰ্য্য 2ৰ দলসমূহ একে ৰাখি আৰু একে অৱস্থাৰ লগত জড়িত কৰি ৰখা হ'ল। দলকেইটাক তথ্যসমূহৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰিবলৈ কোৱা হ'ল। তেওঁলোকে ইয়াক মাধ্য মানৰ লগত তুলনা কৰিব লাগিব আৰু দুয়োটাৰ অৰ্থ দাঙি ধৰিব লাগিব।

মন্তব্য ঃ অসমান শ্ৰেণীদৈৰ্ঘ্যৰ সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলকো নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। অৱশ্যে আমি ইয়াক আলোচনা নকৰোহঁক।

অনুশীলনীঃ 14.2.

1. এবছৰত এখন চিকিৎসালয়ত ভৰ্তি হোৱা ৰোগীৰ বয়স তলৰ তালিকাত দেখুওৱা হ'ল—

বয়স (বছৰ)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
ৰোগীৰ সংখ্যা	6	11	21	23	14	5

ওপৰত দিয়া তথ্যৰ মাধ্য আৰু বহুলক উলিওৱা। দুয়োটা কেন্দ্ৰীয় মাপৰ তুলনা কৰা আৰু তাৎপৰ্য ব্যাখ্যা কৰা।

2. তলৰ তথ্যসমূহে 225 টা বৈদ্যুতিক উপাদানৰ পৰ্য্যবেক্ষণৰ দ্বাৰা উপলব্ধ আয়ুস (ঘণ্টাত) নিৰূপণ কৰে।

আয়ুস (ঘণ্টাত)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
বাৰংবাৰতা	10	35	52	61	38	29

উপাদানসমূহৰ বহুলক আয়ুস নিৰ্ণয় কৰা।

3. এখন গাঁৱৰ 200 টা পৰিয়ালৰ মাহেকীয়া ঘৰুৱা খৰচ তলৰ তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰা হৈছে। পৰিয়ালকেইটাৰ মাহেকীয়া খৰচৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা। মাহেকীয়া খৰচৰ মাধ্যও নিৰ্ণয় কৰা।

খৰচ (টকাত)	পৰিয়ালৰ সংখ্যা
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. তলৰ তথ্যসমূহে ভাৰতৰ বিভিন্ন ৰাজ্যৰ উচ্চতৰ মাধ্যমিক বিধ্যালয়ত শিক্ষক-ছাত্ৰৰ অনুপাত নিৰ্ণয় কৰিছে। এই তথ্যৰ বহুলক আৰু মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা। দুয়োটা মাপৰ তাৎপৰ্য্য লিখা।

এজন শিক্ষকৰ বিপৰীতে ছাত্ৰৰ সংখ্যা	ৰাজ্যৰ সংখ্যা/U.T.
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. বিশ্বৰ কেইজনমান শীৰ্ষ পৰ্য্যায়ৰ ক্ৰিকেটাৰে আন্তঃ ৰাষ্ট্ৰীয় এদিনীয়া খেলত কৰা ৰানৰ সংখ্যা তলত সন্নিৱিষ্ট কৰি দেখুওৱা হ'ল—

ৰানৰ সংখ্যা	বেটচ্‌মেনৰ সংখ্যা
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

তথ্যৰ বহুলক উলিওৱা।

6. এজন ছাত্ৰই 3 মিনিটৰ মূৰে মূৰে এটা ৰাস্তাৰ কোনো এটা ঠাইৰ মাজেৰে পাৰ হোৱা গাড়ীৰ সংখ্যা লিখি ৰাখি কাৰ্যটো 100 বাৰ সমাপন কৰি তলৰ তালিকাত উপস্থাপন কৰিলে তথ্যৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

গাড়ীৰ সংখ্যা	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
বাৰংবাৰতা	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা (Median of Grouped Data) ঃ

তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত পঢ়ি আহিছা যে, মধ্যমা হ'ল কেন্দ্ৰীয় মাপ যি তথ্যৰ একেবাৰে মধ্যম পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান নিৰূপণ কৰে। মনত পেলোৱা যে, সংঘবদ্ধ নোহোৱা তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি প্ৰথমে পৰ্য্যবেক্ষণ কৰা মানবোৰ উৰ্দ্ধক্ৰমত সজাই লওঁ। তেতিয়া যদি n অযুগ্ম, মধ্যমা হ'ল $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পৰ্য্যবেক্ষণ। আৰু যদি n যুগ্ম, তেন্তে মধ্যমা $\frac{n}{2}$তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ গড়।

ধৰা হওক আমি তলৰ তথ্যখিনিৰ মধ্যমা উলিয়াব লাগে য'ত এটা টেষ্টত 100 জন ছাত্ৰই 50 ৰ ভিতৰত পোৱা নম্বৰবোৰ দিয়া আছে।

লাভ কৰা নম্বৰ	20	29	28	33	42	38	43	25
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	6	28	24	15	2	4	1	20

প্ৰথমে আমি নম্বৰবোৰ উৰ্দ্ধক্ৰমত সজাম আৰু তলত দিয়াধৰণে বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰিম।

তালিকা 14.9

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (বাৰংবাৰতা)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
মুঠ	**100**

ইয়াত $n = 100$, যিটো যুগ্ম। মধ্যমা হ'ব $\frac{n}{2}$তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ গড় অৰ্থাৎ 50তম আৰু 51তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ গড়। এই পৰ্য্যবেক্ষণকেইটা উলিয়াবলৈ আমি তলত দিয়া ধৰণে আগবাঢ়িম ঃ

তালিকা 14.10

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা
20	6
25 লৈ	6 + 20 = 26
28 লৈ	26 + 24 = 50
29 লৈ	50 + 28 = 78
33 লৈ	78 + 15 = 93
38 লৈ	93 + 4 = 97
42 লৈ	97 + 2 = 99
43 লৈ	99 + 1 = 100

এতিয়া আমি অন্য এটা স্তম্ভ সংযোগ কৰিম যাতে ওপৰৰ বাৰংবাৰতা তালিকাত এই তথ্য দিব পাৰোঁ আৰু ইয়াক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভ বুলি ক'ম।

তালিকা 14.11

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ওপৰৰ তালিকাৰ পৰা আমি পাওঁ ঃ

50তম পৰ্য্যবেক্ষণ হ'ল 28 (কিয়?)

51তম পৰ্য্যবেক্ষণ হ'ল 29

সেয়ে, মধ্যমা $= \dfrac{28+29}{2} = 28.5$

মন্তব্য ঃ তালিকা 14.11 ৰ আৰু 1নং স্তম্ভৰ 3নং স্তম্ভৰে গঠিত তালিকা অংশক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা তালিকা বোলে। মধ্যমা নম্বৰ 28.5 এ এই তথ্যকে বহন কৰে যে, প্ৰায় 50% ছাত্ৰই 28.5 তকৈ কম নম্বৰ আৰু বাকী 50% ই 28.5 তকৈ বেচি নম্বৰ পাইছে।

এতিয়া কেনেকৈ সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা হয় চোৱা যাওঁক। তলৰ অৱস্থাটো বিবেচনা কৰি—

তলত দিয়া দৰে, এটা পৰীক্ষাত 53 জন ছাত্ৰই 100 নম্বৰৰ ভিতৰত পোৱা নম্বৰসমূহৰ লগত বাৰংবাৰতা বিভাজন বিবেচনা কৰোঁহক।

তালিকা 14.12

নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

ওপৰৰ তালিকাৰপৰা তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিবলৈ চেষ্টা কৰা ঃ

10 তকৈ কম নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা কিমান? উত্তৰ হ'ব 5। কিমান ছাত্ৰই 20 তকৈ কম নম্বৰ পালে? এইটো লক্ষ্য কৰা যে, যিসকলে 20তকৈ কম নম্বৰ পালে তাৰ মাজত 0 - 10 ভিতৰত নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰ আৰু যিসকলে 10 - 20 ভিতৰত নম্বৰ পালে তেওঁলোক অন্তৰ্ভুক্ত। গতিকে 20 তকৈ কম নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা 5 + 3 অৰ্থাৎ 8 জন। আমি কওঁ যে, 10 - 20 ৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 8।

একেদৰে আমি অন্য শ্ৰেণীসমূহৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ, অৰ্থাৎ 30 তকৈ কম, 40তকৈ কম, ..., 100 তকৈ কম নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা। আমি সেইবোৰ তালিকা 14.13 ত উপস্থাপন কৰিছোঁ।

তালিকা 14.13

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা)
10তকৈ কম	5
20তকৈ কম	5 + 3 = 8
30তকৈ কম	8 + 4 = 12
40তকৈ কম	12 + 3 = 15
50তকৈ কম	15 + 3 = 18
60তকৈ কম	18 + 4 = 22
70তকৈ কম	22 + 7 = 29
80তকৈ কম	29 + 9 = 38
90তকৈ কম	38 + 7 = 45
100তকৈ কম	45 + 8 = 53

ওপৰত দিয়া বিভাজনক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন, '(*)ত কৈ কম' প্ৰকাৰ বুলি কোৱা হয়। ইয়াত 10, 20, 30, ... 100 আদি অনুৰূপ অন্তৰালৰ উচ্চ সীমা।

একেদৰে আমি 0ৰ সমান বা বেছি, 10ৰ সমান বা বেছি, 20ৰ সমান বা বেছি আৰু এনেকৈয়ে, নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা তালিকাৰ্ভুক্ত কৰিব পাৰোঁ। তালিকা 14.12ৰ পৰা পাওঁ যে, 53 জন ছাত্ৰৰ আটাইয়ে 0ৰ সমান বা বেছি নম্বৰ পাইছে। যিহেতু তাত 5 জন ছাত্ৰই 0 - 10 ৰ ভিতৰত নম্বৰ পাইছে, গতিকে তাত 53 – 5 = 48 জন ছাত্ৰই 10 ৰ সমান বা বেছি নম্বৰ পাইছে। একেধৰণেৰে আগবাঢ়ি আমি পাওঁ— 20 বা তাতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা 48 – 3 = 45, 30 বা তাতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা 45 – 4 = 41, আৰু এনেকৈয়ে তালিকা 14.14ত দিয়াৰ দৰে পাওঁ।

তালিকা 14.14

লাভ কৰা নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা)
0 ৰ সমান বা বেছি	53
10 ৰ সমান বা বেছি	53 – 5 = 48
20 ৰ সমান বা বেছি	48 – 3 = 45
30 ৰ সমান বা বেছি	45 – 4 = 41
40 ৰ সমান বা বেছি	41 – 3 = 38
50 ৰ সমান বা বেছি	38 – 3 = 35
60 ৰ সমান বা বেছি	35 – 4 = 31
70ৰ সমান বা বেছি	31 – 7 = 24
80 ৰ সমান বা বেছি	24 – 9 = 15
90 ৰ সমান বা বেছি	15 – 7 = 8

ওপৰৰ তালিকাখনক '(*) ৰ বেছি' প্ৰকাৰৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলা হয়। ইয়াত 0, 10, 20, ..., 90 এ অনুৰূপ অন্তৰালৰ নিম্নসীমাক সূচায়।

এতিয়া সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি এই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ যিকোনো এটাক ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ।

তালিকা 14.12 আৰু 14.13 ক লগ লগাই তালিকা 14.15 তলত দিয়া ধৰণে প্ৰস্তুত কৰোঁহক।

তালিকা 14.15

নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

এতিয়া সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যম পৰ্যবেক্ষণ আমি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা চাই কব নোৱাৰোঁ কাৰণ মধ্যম পৰ্যবেক্ষণ এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ কোনোবা এটা মান হ'ব পাৰে।

সেয়ে, এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ ভিতৰত এনে এটা মান বিচাৰিব লাগে যাতে ই সম্পূৰ্ণ বিভাজনটোক সমানে দুটা ভাগত বিভক্ত কৰে। কিন্তু কোনটো শ্ৰেণী এইটো হ'ব?

এই শ্ৰেণীটো উলিয়াবলৈ আমি সকলো শ্ৰেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা আৰু $\frac{n}{2}$ নিৰ্ণয় কৰিম। আমি বাছি ল'ম এনে এটা শ্ৰেণী যাৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা $\frac{n}{2}\cdot$ তকৈ ডাঙৰ (আৰু নিচেই ওচৰৰ)। এই শ্ৰেণীটোক মধ্যমা শ্ৰেণী বোলে। ওপৰৰ বিভাজনটোত $n = 53$, গতিকে $\frac{n}{2} = 26.5$ । এতিয়া $60 - 70$ শ্ৰেণীটোৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 29, $\frac{n}{2}$ তকৈ ডাঙৰ (আৰু নিচেই ওচৰৰ) অৰ্থাৎ 26.5তকৈ ডাঙৰ।

সেইবাবে, $60 - 70$ হ'ল মধ্যমা শ্ৰেণী।

মধ্যমা শ্ৰেণী নিৰূপণৰ পাছত আমি তলৰ সূত্ৰটো মধ্যমা উলিয়াবলৈ ব্যৱহাৰ কৰিম।

$$\text{মধ্যমা} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

য'ত, l = মধ্যমা শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা,

n = পৰ্যবেক্ষণৰ সংখ্যা

cf = মধ্যমা শ্ৰেণীৰ পূৰ্ববৰ্তী শ্ৰেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা

f = মধ্যমা শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা,

h = শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য (শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্যসমূহ সমান বুলি ধৰা হৈছে)

$\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60,\ cf = 22,\ f = 7,\ h = 10$ সূত্ৰত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$\text{মধ্যমা} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

গতিকে, প্ৰায় আধা সংখ্যক ছাত্ৰই 66.4 তকৈ কম আৰু বাকী আধাই 66.4 তকৈ বেছি নম্বৰ পাইছে।

উদাহৰণ 7 ঃ এখন স্কুলৰ দশম শ্ৰেণীৰ 51 গৰাকী ছাত্ৰীৰ উচ্চতা (চেঃমিঃ) সন্দৰ্ভত এটি তথ্য ভিত্তিক অধ্যয়নত তলৰ তথ্য সমূহ পোৱা হ'ল ঃ

উচ্চতা (চেঃমিঃ)	ছোৱালীৰ সংখ্যা
140 তকৈ কম	4
145 তকৈ কম	11
150 তকৈ কম	29
155 তকৈ কম	40
160 তকৈ কম	46
165 তকৈ কম	51

মধ্যমা উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ মধ্যমা উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰিববলৈ মধ্যমা শ্ৰেণী আৰু তাৰ অনুৰূপ বাৰংবাৰতা উলিয়াব লাগিব।

প্ৰদত্ত বিভাজন '(*) তকৈ কম' প্ৰকাৰৰ, 140, 145, 150, . . ., 165 এ অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ উচ্চসীমা দিয়ে। সেয়ে শ্ৰেণীসমূহ 140 তকৈ কম, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165। দেখা যায় যে, প্ৰদত্ত বিভাজনত 4 জনী ছোৱালীৰ উচ্চতা 140 চে.মি.তকৈ কম। এতিয়া 11 জনী

ছোৱালীৰ উচ্চতা 145 তকৈ কম আৰু 4 জনীৰ উচ্চতা 140 তকৈ কম। সেইবাবে, 140 - 145 অন্তৰালত ছোৱালীৰ সংখ্যা হ'ব 11 – 4 = 7, একেদৰে, 145 - 150 ত বাৰংবাৰতা, 29 – 11 = 18, 150 - 155 ত এইটো হ'ব 40 – 29 = 11 আৰু এনেকৈয়ে হৈ থাকিব। সেইবাবে, প্ৰদত্ত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাযুক্ত বাৰংবাৰতা তালিকাখন হ'ল—

তালিকা 14.16

শ্ৰেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
140 তকৈ কম	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

এতিয়া, $n = 51$ । গতিকে, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ । এই পৰ্যবেক্ষণটো 145 - 150 অন্তৰালত পৰিব।

সেয়ে, l (নিম্নসীমা) = 145,

cf (145 - 150 অন্তৰালৰ পূৰ্ববৰ্তী অন্তৰালৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা) = 11,

f (145 - 150 ৰ বাৰংবাৰতা) = 18,

h (অন্তৰালৰ দৈৰ্ঘ্য) = 5

সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি, মধ্যমা $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$,

$$\therefore \quad \text{মধ্যমা} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18}$$

$$= 149.03.$$

গতিকে ছোৱালীৰ মধ্যমা উচ্চতা হ'ল 149.03 চে.মি.

এইটো সূচায় যে, প্ৰায় 50% ছোৱালীৰ উচ্চতা এই উচ্চতাতকৈ কম আৰু 50% এই উচ্চতাতকৈ ওখ।

উদাহৰণ- 8 ঃ তলৰ তথ্যৰ মধ্যমা হ'ল 525। x আৰু y ৰ মান উলিওৱা যদি মুঠ বাৰংবাৰতা 100।

শ্ৰেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

সমাধান ঃ

শ্ৰেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয়ীবাৰংবাৰতা
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

এইটো দিয়া আছে যে, $n = 100$

গতিকে, $76 + x + y = 100$, অৰ্থাৎ, $x + y = 24$ (1)

মধ্যমা দিয়া আছে, 525 যিটো 500 – 600 শ্ৰেণীত পৰে।

গতিকে, $l = 500$, $f = 20$, $cf = 36 + x$, $h = 100$

সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি, মধ্যমা $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) h,$

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

অৰ্থাৎ, $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

অৰ্থাৎ, $25 = 70 - 5x$

অৰ্থাৎ, $5x = 70 - 25 = 45$

গতিকে, $x = 9$

সেইবাবে (1) ৰ পৰা আমি পাওঁ, $9 + y = 24$

অৰ্থাৎ, $y = 15$

তোমালোকে, তিনিটা কেন্দ্ৰীয় মাপৰ বিষয়ে ইতিমধ্যে অধ্যয়ন কৰিলা। এতিয়া এটা বিশেষ প্ৰয়োজনত কোনটো আটাইতকৈ বেছি উপযুক্ত সেয়া আলোচনা কৰোঁহক।

মাধ্য হ'ল আটাইতকৈ বেচি সঘনাই ব্যৱহৃত কেন্দ্ৰীয় মাপ কিয়নো ই সকলো পৰ্য্যবেক্ষণকে সামৰি লয় আৰু চৰম মানৰ মাজত অৱস্থিত অৰ্থাৎ সম্পূৰ্ণ তথ্যৰ আটাইতকৈ ডাঙৰ আৰু আটাইতকৈ সৰুটোৰ মাজত অৱস্থিত। ই দুটা বা ততোধিক বিভাজনক তুলনা কৰাত সহায় কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে বিভিন্ন স্কুলৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰী গড় (মাধ্য) ফলাফল তুলনা কৰি কোন স্কুলৰ কৃতকাৰ্য্যতা ভাল তাৰ সিদ্ধান্ত দিব পাৰি।

অৱশ্যে, চৰম মানে মাধ্যত প্ৰভাৱ পেলায়। উদাহৰণস্বৰূপে বাৰংবাৰতা বা বেছি পৰিমানে প্ৰায় একে থকা শ্ৰেণীসমূহৰ মাধ্যই তথ্যসমূহক ভালদৰে প্ৰতিনিধিত্ব কৰে। কিন্তু, এটা শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা 2 (ধৰোঁ) আৰু আন পাচঁটাৰ বাৰংবাৰতা 20, 25, 20, 21, 18, তেন্তে মাধ্যমানে নিশ্চিতভাৱে তথ্যৰ চৰিত্ৰ প্ৰতিফলিত নকৰে। সেইবাবে এনে ক্ষেত্ৰত মাধ্য তথ্যৰ ভাল প্ৰতিনিধি নহয়।

যিবোৰ সংখ্যাত ব্যক্তিগত পৰ্য্যবেক্ষণৰ গুৰুত্ব কম আৰু আমি এটা 'বিশেষ' পৰ্যবেক্ষণ নিৰ্ণয় কৰিব বিচাৰোঁ, এইক্ষেত্ৰত মধ্যমা বেচি উপযোগী, যেনে— এজন শ্ৰমিকৰ বিশেষ উৎপাদনৰ হাৰ, এখন ৰাষ্ট্ৰৰ গড় মজুৰী আদি। এইবিলাকেই পৰিস্থিতি য'ত চৰম মান থাকিব পাৰে। গতিকে, মাধ্যতকৈ আমি মধ্যমাক বেছি ভাল কেন্দ্ৰীয় মাপ বুলি ধৰোঁ।

যিবোৰ পৰিস্থিতিত সঘন মানৰ বা আটাইতকৈ জনপ্ৰিয় বস্তুৰ স্থিতিৰ দৰকাৰ, বহুলক আটাইতকৈ উত্তম বাছনি যেনে, টি. ভি ত দেখা আটাইতকৈ জনপ্ৰিয় কাৰ্যসূচীটো বাছি উলিওৱা, আটাইতকৈ বেছি বিচৰা গ্ৰাহকৰ বস্তুটো, সৰহ সংখ্যক মানুহে ব্যৱহাৰ কৰা গাড়ীৰ ৰং আদি।

মন্তব্য ঃ

1. তিনিওটা কেন্দ্ৰীয় মাপৰ মাজত এটা পৰিসাংখ্যিক সম্বন্ধ আছে ঃ

3 মধ্যমা = বহুলক + 2 মাধ্য (3 Median = Mode + 2 Mean)

2. ভিন্ন শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্যৰ সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা উলিয়াব পাৰি। অৱশ্যে, আমি ইয়াত এইটো আলোচনা নকৰোঁ।

অনুশীলনী 14.3

1. এটা অঞ্চলৰ 68 জন গ্ৰাহকে মাহেকত খৰচ কৰা বিদ্যুতৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন তলত দিয়া হ'ল। তথ্যৰ মধ্যমা, মাধ্য আৰু বহুলক উলিওৱা আৰু তুলনা কৰা।

মাহেকত খৰচ (ইউনিটত)	গ্ৰাহকৰ সংখ্যা
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. তলৰ বিভাজনৰ মধ্যমা যদি 28.5, তেন্তে x আৰু y ৰ মান উলিওৱা।

শ্ৰেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
মুঠ	60

3. সকলো জীৱনবীমা সদস্যই 100 জন পলিছি গ্ৰাহকৰ বয়সৰ তথ্য বিভাজন তলত দিয়া ধৰণে

পায়। মধ্যমা বয়স উলিওৱা, যদি 18 ৰ পৰা 60 বছৰ কম বয়সৰ ব্যক্তিকহে পলিছি দিয়ে।

বয়স (বছৰত)	পলিছি থকা গ্ৰাহকৰ সংখ্যা
20 বছৰৰ কম	2
25 বছৰৰ কম	6
30 বছৰৰ কম	24
35 বছৰৰ কম	45
40 বছৰৰ কম	78
45 বছৰৰ কম	89
50 বছৰৰ কম	92
55 বছৰৰ কম	98
60 বছৰৰ কম	100

4. এজোপা উদ্ভিদৰ 40 টা পাতৰ দৈৰ্ঘ্য আসন্ন মিলিমিটাৰত জোখা হৈছে আৰু প্ৰাপ্ত তথ্য তলৰ তালিকাত প্ৰকাশ কৰা হৈছে।

দৈৰ্ঘ্য (মিঃমিঃত)	পাতৰ সংখ্যা
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

পাতৰ মধ্যমা দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(**ইংগিত ঃ** তথ্যসমূহ অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীলৈ পৰিবৰ্তন কৰিব লাগিব যিহেতু মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ সূত্ৰটো অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীত ধৰা হৈছে। শ্ৰেণীসমূহ সেয়ে পৰিবৰ্তিত হ'ব— 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5.)

5. 400 টা নিয়ন লেম্পৰ আয়ুস কাল তলৰ তালিকাত বিভাজন কৰি দিয়া হৈছে।

আয়ুস কাল (ঘণ্টাত)	লেম্পৰ সংখ্যা
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

এটা লেম্পৰ মধ্যমা আয়ুস কাল উলিওৱা।

6. এখন স্থানীয় টেলিফোন ডায়েৰীৰপৰা 100 জন ব্যক্তিৰ উপাধি যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল আৰু উপাধিবোৰত থকা ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰৰ সংখ্যা বাৰংবাৰতা বিভাজন কৰি তলত দিয়া হ'ল।

আখৰৰ সংখ্যা	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
উপাধিৰ সংখ্যা	6	30	40	16	4	4

উপাধিবোৰৰ মধ্যমা আখৰৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা। উপাধিবোৰৰ মাধ্য আখৰৰ সংখ্যা উলিওৱা। উপাধিৰ বহুলক আকাৰ উলিওৱা।

7. তলৰ বিভাজনে এটা শ্ৰেণীকোঠাৰ 30 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ ওজন নিৰূপণ কৰে। ছাত্ৰৰ মধ্যমা ওজন নিৰ্ণয় কৰা।

ওজন (কিঃগ্ৰাঃত)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা	2	3	8	6	6	3	2

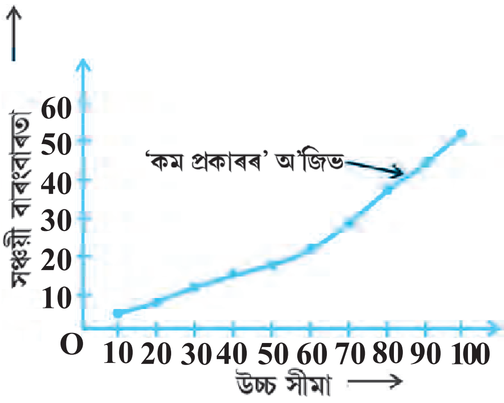
14.5. সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ লৈখিক ৰূপ (Graphical Representation of Cumulative Frequency Distribution) ঃ

আমি সকলোৱে জানো, চিত্ৰই শব্দতকৈ ভালদৰে কয়। এটা চিত্ৰৰূপে প্ৰদত্ত তথ্যক চকুৰ পলকতে বুজাত সহায় কৰে। নৱম শ্ৰেণীত আমি তথ্যসমূহক দণ্ড চিত্ৰ, স্তম্ভলেখ আৰু বাৰংবাৰতা বহুভুজ

জৰিয়তে প্ৰকাশ কৰিছিলোঁ। এতিয়া আমি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনক চিত্ৰেৰে প্ৰকাশ কৰিম।

উদাহৰণস্বৰূপে, তালিকা 14.13 ত দিয়া সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন বিবেচনা কৰোঁহক।

মনত পেলোৱা যে, 10, 20, 30, ..., 100 মানবোৰ অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ উচ্চ সীমা। তালিকাৰ তথ্যসমূহ চিত্ৰত প্ৰকাশ কৰিবলৈ আমি শ্ৰেণী অন্তৰালৰ উচ্চ সীমাবোৰ সমতল অক্ষত (x-অক্ষ) চিহ্নিত কৰিম আৰু সিহঁতৰ অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাবোৰ উলম্ব অক্ষত (y-অক্ষ) চিহ্নিত কৰিম, সুবিধামতে জোখ লৈ। দুয়োঅক্ষত জোখ একে নহ'বও পাৰে। আমি এতিয়া বিন্দুসমূহ, ক্ৰমিত যোৰ (উচ্চসীমা, অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা) অৰ্থাৎ, (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) গ্ৰাফকাগজত বহুৱাম আৰু সিহঁতক এডাল মুক্ত হাতৰ সুষম বক্ৰেৰে সংযোগ কৰিম। এই বক্ৰডালকেই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা এডাল অ'জিভ (তাতকৈ কম প্ৰকাৰৰ) বোলে। (চিত্ৰ 14.1)

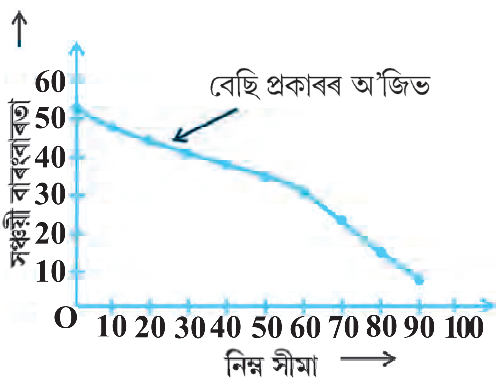


চিত্ৰ 14.1

> ogive শব্দটো অ'জিভ (ojeev) বুলি উচ্চাৰণ কৰা হয় আৰু এইটো ওজি (ogee) শব্দৰ পৰা উৎপন্ন হৈছে। ogee হ'ল এনে এটা আকৃতি যি উত্তল বত্ৰৰ পৰা অৱতল বত্ৰলৈ বৈ থাকে, গতিকে S আকৃতিৰ উলম্ব প্ৰান্তৰ এটা সৈতে বত্ৰ গঠন কৰে। 14তম আৰু 15তম শতিকাৰ গোঠিক (Gothic) কলাৰ এক বিশেষ বৈশিষ্ট্য হ'ল ogee আকৃতি।

এতিয়া পুনৰ আমি তালিকা 14.14 ত দিয়া সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন বিবেচনা কৰোঁহক আৰু ইয়াৰ অ'জিভ অংকন কৰিম (তাতকৈ বেছি প্ৰকাৰৰ)

মনত পেলোৱা যে, ইয়াত 0, 10, 20, ..., 90 হ'ল অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰাল 0-10, 10-20, ..., 90-100ৰ নিম্নসীমা। তাতকৈ বেছি প্ৰকাৰৰ চিত্ৰেৰে প্ৰকাশ কৰিবলৈ আমি নিম্নসীমাক x-অক্ষত আৰু অনুৰূপ সঞ্চয়ী



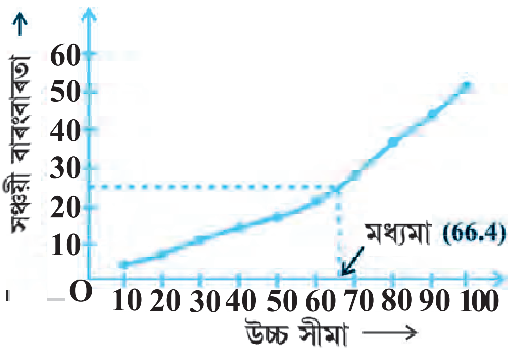
চিত্ৰ 14.2

বাৰংবাৰতা সমূহ y-অক্ষত বহুৱাম। তেতিয়া আমি বিন্দুবোৰ (নিম্নসীমা, অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা) অৰ্থাৎ, (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) গ্ৰাফ কাগজত বহুৱাম আৰু মুক্ত হাতেৰে সুষম বক্ৰ টানি সিহঁতক সংযোগ কৰিম। যিটো বক্ৰ আমি পালো সেয়া সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা এটা অ'জিভ (তাতকৈ বেছি আকাৰৰ) (চিত্ৰ 14.2)

মন্তব্য ঃ মন কৰিবা যে, দুয়োটা অ'জিভ (চিত্ৰ 14.1 আৰু চিত্ৰ 14.2) তালিকা 14.12ত দিয়া একেখিনি তথ্যৰ লগত জড়িত।

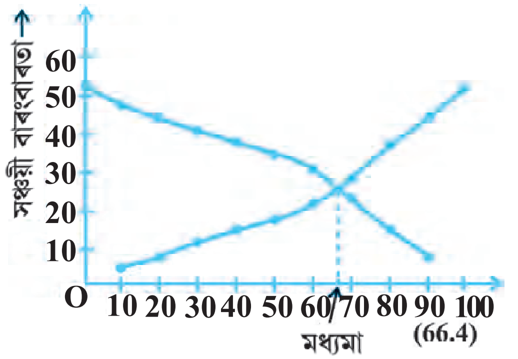
এতিয়া এই অ'জিভবোৰৰ কিবা প্ৰকাৰে মধ্যমাৰ লগত সম্বন্ধ আছে নেকি? এই দুডাল সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰৰ পৰা অনুৰূপ তথ্যৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় সম্ভৱনে আমি চাওঁ—

স্বাভাৱিকতেই $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$, y-অক্ষৰ ওপৰত বাছি উলিয়াব পাৰি। (চিত্ৰ 14.3ত চোৱা)। সেই বিন্দুৰপৰা x-অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ বক্ৰডাললৈ এডাল ৰেখা টানা। বক্ৰডালত কটাকটি বিন্দুৰ পৰা x-অক্ষৰ ওপৰত লম্ব টানা। এই লম্বডালে x-অক্ষক কটাকটি কৰা বিন্দুটোৱে মধ্যমা নিৰূপণ কৰে। (চিত্ৰ 14.3 চোঁৱা)



চিত্ৰ 14.3

মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ অন্য এটা উপায় তলত দিয়া হ'ল। একে অক্ষত দুয়োডাল অ'জিভ অংকন কৰা (অৰ্থাৎ তাতকৈ কম আৰু তাতকৈ বেছি) প্ৰকাৰৰ দুয়োডাল অ'জিভে পৰস্পৰ কটাকটি কৰিব। এই বিন্দুৰপৰা x-অক্ষলৈ লম্ব টানা। যিটো বিন্দুই x-অক্ষত কাটিব সিয়েই মধ্যমা দিব (চিত্ৰ 14.4)।



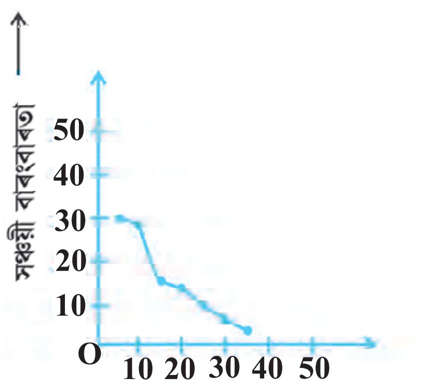
চিত্ৰ 14.4

উদাহৰণ 9 ঃ এটা অঞ্চলত 30 খন দোকানে এবছৰত কৰা লাভৰ পৰিমাণ তালিকাত সন্নিৱিষ্ট কৰা হ'ল।

লাভ (লাখ টকাত)	দোকানৰ সংখ্যা (বাৰংবাৰতা)
5 ৰ সমান বা বেছি	30
10 ৰ সমান বা বেছি	28
15 ৰ সমান বা বেছি	16
20 ৰ সমান বা বেছি	14
25 ৰ সমান বা বেছি	10
30 ৰ সমান বা বেছি	7
35 ৰ সমান বা বেছি	3

ওপৰৰ তথ্যৰ বাবে দুয়োডালে অ'জিভ অংকন কৰা। আৰু মধ্যমা লাভ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ আমি প্ৰথমে লাভৰ নিম্নসীমা সমতল অক্ষৰ দিশত আৰু সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা উলম্ব অক্ষৰ দিশত লৈ অ'জিভ অংকন কৰোঁ। তাৰ পাছত, (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) আৰু (35, 3)বিন্দুবোৰ সংস্থাপন কৰিলো। এই বিন্দবোৰ মুক্তহাতেৰে সুষম (মসৃণ) বক্ৰ অংকন কৰি তাতকৈ বেছি অ'জিভ চিত্ৰ 14.5ত দেখুওৱাৰ দৰে পালো।



চিত্ৰ 14.5

এতিয়া, ওপৰৰ তালিকাৰপৰা শ্ৰেণী অন্তৰাল, তাৰ বাৰংবাৰতা আৰু সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰোঁহক—

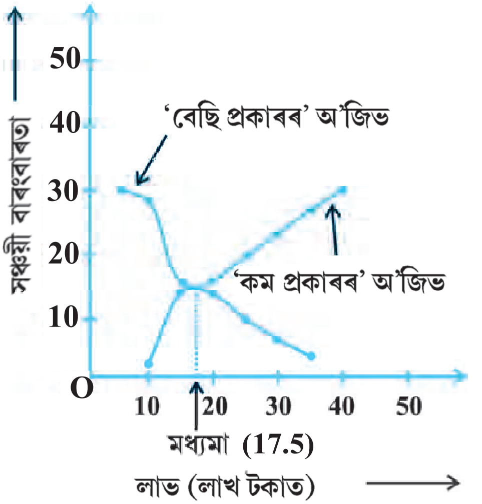
তালিকা 14.17

শ্ৰেণী অন্তৰাল	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
দোকানৰ সংখ্যা	2	12	2	4	3	4	3
সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা	2	14	16	20	23	27	30

এই মানবোৰ লৈ একে অক্ষত (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) বিন্দুবোৰ সংস্থাপন কৰি চিত্ৰ 14.6 দেখুওৱাৰ দৰে তাতকৈ কম অ'জিভ পালো।

সিহঁতৰ ছেদবিন্দুৰ ভুজ প্ৰায় 17.5, যিটো মধ্যমা। এইটো সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিও সত্যাপন কৰিব পাৰি। সেয়ে মধ্যমা লাভ (লাখত) হ'ল 17.5 লাখ টকা।

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ উদাহৰণত শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ অবিচ্ছিন্ন। অ'জিভ অংকনত শ্ৰেণী অন্তৰাল অৱিচ্ছিন্ন বুলি নিশ্চিত হ'বই লাগিব। (নৰম শ্ৰেণীত স্তম্ভ লেখৰ অংকন চোৱা)



চিত্ৰ ঃ 14.6

অনুশীলনী 14.4

1. এটা ফেক্টৰীৰ 50 জন শ্ৰমিকৰ দৈনিক আয় তলৰ বিভাজনটোৱে দিয়ে।

দৈনিক আয় (টকাত)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
শ্ৰমিকৰ সংখ্যা	12	14	8	6	10

ওপৰৰ বিভাজনটো তাতকৈ কম প্ৰকাৰৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনলৈ পৰিবৰ্তন কৰা আৰু ইয়াৰ অ'জিভ আঁকা।

2. এটা শ্ৰেণীৰ 35 ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ স্বাস্থ্য পৰীক্ষা কৰোঁতে ওজন তলত দিয়া ধৰণেৰে পোৱা গৈছিল।

ওজন (কিঃগ্ৰাঃত)	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
38 তকৈ কম	0
40 তকৈ কম	3
42 তকৈ কম	5
44 তকৈ কম	9
46 তকৈ কম	14
48 তকৈ কম	28
50 তকৈ কম	32
52 তকৈ কম	35

তাতকৈ কম প্ৰকৃতিৰ অ'জিভ অংকন কৰা। ইয়াৰপৰা মধ্যমা ওজন চিত্ৰৰ পৰা নিৰূপণ কৰা আৰু সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি সত্যাপন কৰা।

3. এখন গাঁৱৰ 100 খন কৃষিক্ষেত্ৰত প্ৰতি হেক্টৰত ঘেঁহুৰ উৎপাদন তলৰ তালিকাত দিয়া হ'ল—

উৎপাদনৰ পৰিমাণ (কিঃগ্ৰাঃ প্ৰতি হেক্টৰ)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
কৃষিক্ষেত্ৰৰ সংখ্যা	2	8	12	24	38	16

বিভাজনটো, তাতকৈ বেছি আকাৰৰ বিভাজনলৈ পৰিৱৰ্তন কৰা আৰু ইয়াৰ অ'জিভ আঁকা।

14.6. সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি অধ্যয়ন কৰিলা ঃ

1. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মাধ্য উলিয়াব পাৰি তলৰ পদ্ধতি কেইটাৰে

(i) প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি ঃ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) বিবেচিত গড় পদ্ধতি ঃ $\bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) ঢাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ঃ $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$,

য'ত ধৰা হৈছে যে শ্ৰেণীএটাৰ বাৰংবাৰতা ইয়াৰ মধ্যবিন্দুত কেন্দ্ৰীভূত হয়, ইয়াক কোৱা হয় শ্ৰেণীসূচক।

2. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক এই সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাব পাৰি

$$\text{বহুলক} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

য'ত চিহ্নবোৰে সিহঁতৰ সাধাৰণ অৰ্থ বহন কৰিছে।

3. এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা হ'ল সেই শ্ৰেণীটোৰ পূৰ্ববৰ্তী সকলো শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতাৰ সমষ্টি।

4. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা এই সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাব পাৰি

$$\text{মধ্যমা} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

য'ত চিহ্নবোৰে সিহঁতৰ সাধাৰণ অৰ্থবহন কৰিছে।

5. তাতকৈ কম বা তাতকৈ বেছি প্ৰকাৰৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা অ'জিভ হ'ল সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ চিত্ৰৰূপ।

6. সংঘবদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা লেখৰ সহায়ত নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি যিটো হ'ল তথ্যৰ দুয়োডাল অ'জিভ ছেদবিন্দুৰ ভুজ।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note to The Reader)

সংঘবদ্ধ তথ্যৰ বহুলক আৰু মধ্যমা উলিওৱাৰ সময়ত সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰাৰ পূৰ্বেই এইটো নিশ্চিত হ'ব লাগিব যে, শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ অবিচ্ছিন্ন। অ'জিভ অংকনৰ সময়তো একে চৰ্ত প্ৰযোজ্য হ'ব। তদুপৰি, অ'জিভৰ ক্ষেত্ৰত দুয়ো অক্ষত জোখ একে নহ'লেও হ'ব।

সম্ভাৱিতা
(Probability)

পঞ্চদশ
অধ্যায়

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

– R.S. Woodward

15.1. অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে ঘটনাৰ পৰীক্ষালব্ধ (experimental) বা আনুভাৱিক (emperical) সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছিলা। যিবোৰ প্ৰকৃত পৰীক্ষাৰ ফলাফলৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত। এটা মুদ্ৰা 1000 বাৰ টচ্ কৰি পোৱা ফলাফলৰ বাৰংবাৰতা তলত দিয়াৰ দৰে আছিল।

মুণ্ড (Head) : 455 পুচ্ছ (Tail) : 545

এই পৰীক্ষাৰ পৰীক্ষালব্ধ মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{455}{1000}$, অৰ্থাৎ 0.455 আৰু সেয়া পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল 0.545 (নৱম শ্ৰেণীৰ গণিতৰ পাঠ্যপুথিৰ অধ্যায় 15ৰ উদাহৰণ-1 চোৱা)। মন কৰিবা যে, এটা মুদ্ৰা 1000 বাৰ টচ্ কৰি প্ৰকৃত পৰীক্ষাৰদ্বাৰা প্ৰাপ্ত ফলাফলৰ ওপৰত এইবোৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ভৰশীল। এই কাৰণেই সিহঁতক পৰীক্ষালব্ধ বা আনুভৱিক সম্ভাৱিতা বোলে। মুঠতে, পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা, প্ৰকৃত পৰীক্ষাৰ ফলাফল আৰু ঘটনাৰ ফল যথাৰ্থভাৱে লিপিবদ্ধ কৰাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল। তদুপৰি এইবোৰ সম্ভাৱিতা হ'ল মাথো 'মূল্যায়ন'। যদি আমি একে পৰীক্ষাকে আন 1000 বাৰ কৰোঁ, আমি ভিন্ন সম্ভাৱিতা মূল্যায়নৰ ভিন্ন তথ্য পাব পাৰো।

নৱম শ্ৰেণীত, তোমালোকে এটা মুদ্ৰা বহুবাৰ টচ্ কৰিছিলা আৰু মুণ্ড (বা পুচ্ছ) ওলোৱাৰ সংখ্যা লিখি ৰাখিছিলা (অধ্যায়-15 ৰ কাৰ্য্য 1 আৰু 2 দ্ৰষ্টব্য)। তোমালোকে এইটোৱো মন কৰিছিলা যে, টচৰ সংখ্যাবৃদ্ধিৰ লগে লগে, পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা, মুণ্ড (বা পুচ্ছ) পোৱাৰ, ক্ৰমে সংখ্যা $\frac{1}{2}$ৰ ওচৰ চাপি গৈছিল। তোমালোকেই নহয়, বিশ্বৰ বিভিন্ন প্ৰান্তৰ ব্যক্তিয়ে এনেধৰণৰ

পৰীক্ষা কৰিছিল আৰু মুণ্ড ওলোৱাৰ তথ্য লিখি থৈছিল।

উদাহৰণস্বৰূপে, ১৮শ শতিকাত ফ্ৰান্সৰ প্ৰকৃতিবিদ কম্‌তি ডি বাফণে (Comte de Buffon) 4040 বাৰ এটা মুদ্ৰ টচ কৰিছিল আৰু 2048 বাৰ মুণ্ড পাইছিল। এই ক্ষেত্ৰ মুণ্ড ওলোৱাৰ পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা আছিল $\frac{2048}{4040}$ অৰ্থাৎ 0.507। ব্ৰিটেইনৰ জে.ই.কেৰিছ (J.E.Kerrich)এ এটা মুদ্ৰা 10000 বাৰ টচ্ কৰি 5067 বাৰ মুণ্ড পাইছিল। এইক্ষেত্ৰত পৰীক্ষালব্ধ মুণ্ড ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা আছিল $\frac{5067}{10000} = 0.5067$। পৰিসংখ্যাবিদ কাৰ্ল পিয়েৰছন্ (Karl Pearson)এ আৰু বেছি সময় খৰচ কৰি 24000 বাৰ এটা মুদ্ৰা টচ্ কৰিছিল। তেওঁ মুণ্ড পাইছিল 12012 আৰু সেয়ে, মুণ্ড ওলোৱাৰ পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা আছিল 0.5005.

এতিয়া, আমি প্ৰশ্নকৰোঁ, ‘যদি এই পৰীক্ষা এক নিযুত বাৰ বা দহ নিযুতবাৰ সমাপন কৰা হয় তেন্তে মুণ্ড ওলোৱাৰ পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা কি হ'ব?’ আৰু একেদৰে বঢ়াই গৈ থাকিলে কি হ'ব? তোমালোকে অন্তঃদৃষ্টিৰে চাব পাৰা যে, টচৰ সংখ্যা বৃদ্ধি কৰি গৈ থাকিলে, মুণ্ড (বা পুচ্ছ) ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0.5 ৰ আশে-পাশে পোৱা যাব অৰ্থাৎ $\frac{1}{2}$ ৰ কাষতে থাকিব, যাক আমি মুণ্ড (বা পুচ্ছ) পোৱাৰ সূত্ৰগত সম্ভাৱিতা বুলি কওঁ। তোমালোকে পাছৰ অনুচ্ছেদত দেখা পাবা। এই অধ্যায়ত আমি সূত্ৰগত (গাণিতিক বুলিও কয়) সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে পৰিচয় দাঙি ধৰিছোঁ আৰু এই ধাৰণাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত কিছু সমস্যাৰ বিষয়ে ব্যাখ্যা কৰিছোঁ।

15.2. সম্ভাৱিতা (Probability) — এটা তত্ত্বগত উপস্থাপন (A Theoretical Approach)

ধৰোঁ এটা মুদ্ৰা যদৃচ্ছিকভাৱে (Randomly) টচ কৰা হৈছে।

> যেতিয়া আমি এটা মুদ্ৰাৰ কথা কওঁ আমি ধৰোঁ যে এইটো এটা বিশুদ্ধ, অৰ্থাৎ এইটো সমৰূপৰ যাতে কোনো কাৰণতেই এটা পিঠি আনটো পিঠিত কৈ সঘনাই নপৰে। মুদ্ৰাৰ এই ধৰ্মটোক আমি অনভিনত (Unbiased) বুলি কওঁ। ‘Random toss’ খণ্ডবাক্যৰ দ্বাৰা আমি বুজাওঁ যে, মুদ্ৰাটো মুক্ত ভাৱে কোনো বাধা বা পক্ষপাতদুষ্ট নোহোৱাকৈ পৰিবলৈ দিয়া।

আমি আগতীয়াকৈ জানো যে মুদ্ৰাটো মাথো যিকোনো এটা সম্ভাব্য ধৰণে পৰে, মুণ্ড ওপৰফালে বা পুচ্ছ ওপৰফালে (আমি মুদ্ৰাটো একাষৰীয়াকৈ পৰা সম্ভাৱনা নুই কৰো, যিটো হ'বও পাৰে, উদাহৰণস্বৰূপে, যদি ই বালিত পৰে।) আমি যুক্তিপূৰ্ণভাৱেই ধৰো যে মুণ্ড বা পুচ্ছ ফলাফল (outcome), সংঘটিত হোৱাটো আনটোৰ দৰেই সমশক্য। এইটো প্ৰসংগত আমি কওঁ যে, মুণ্ড বা পুচ্ছ ফলাফল সমশক্য (equally likely)।

সমশক্য ফলাফলৰ অন্য এটা উদাহৰণৰ বাবে আমি ধৰো, এটা লুডুগুটি এবাৰ ওপৰলৈ মাৰি পঠিওৱা হ'ল। আমাৰ বাবে, এটা লুডু গুটিয়ে সদায়ে এটা শুদ্ধ লুডুগুটিকহে বুজায়। সম্ভাব্য ফলাফল কি কি? সেইবোৰ হ'ল— 1, 2, 3, 4, 5, 6। প্ৰতিটো সংখ্যা ওপৰফালে ওলোৱাৰ সম্ভাৱনা একে। সেয়ে এটা লুডুগুটি ওপৰলৈ মাৰিলে সমশক্য ফলাফল হ'ল 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6.

সকলো পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য নে? আমি চাওঁ—

ধৰাহ'ল, এটা মোনাত 4 টা ৰঙা আৰু 1 টা নীলা বল আছে আৰু তুমি এটা বল মোনাটোলৈ নোচোৱাকৈ টানিছা। ফলাফল কি পালা? এটা ৰঙা বল আৰু এটা নীলা বলৰ ফলাফল সমশক্য নে? যিহেতু তাত 4 টা ৰঙা বল আৰু মাত্ৰ এটা নীলা বল আছে, তুমি মানি লৈছা যে, তুমি ৰঙা বল পোৱাটো নীলা বল পোৱাতকৈ বেছি আশাবাদী। সেয়ে ফলাফল (এটা ৰঙা বল বা এটা নীলা বল) সমশক্য নহয়। অৱশ্যে, মোনাটোৰপৰা যিকোনো ৰঙৰ এটা বল টনাটো সমশক্য। গতিকে, সকলো পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য হোৱাটো আৱশ্যকীয় নহয়।

অৱশ্যে এই অধ্যায়ত এতিয়াৰপৰা, আমি ধৰিম যে সকলো পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য।

নৱম শ্ৰেণীত, আমি এটা ঘটনা E ৰ পৰীক্ষালব্ধ বা আনুভৱিক সম্ভাৱিতা P(E)ৰ সংজ্ঞা দিছিলো—

$$P(E) = \frac{\text{ঘটনা সংঘটিত হোৱা পৰীক্ষাৰ সংখ্যা}}{\text{মুঠ পৰীক্ষাৰ সংখ্যা}}$$

বহু সংখ্যক পুনৰাবৃত্তি থকা পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত যিকোনো ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত আনুভৱিক সম্ভাৱিতাৰ তাৎপৰ্য প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। পৰীক্ষা এটা পুনৰাবৃত্তি কৰি থকাটোত সীমাৱদ্ধতা আছে— কাৰণ ই খৰচী হব পাৰে বা বহুক্ষেত্ৰত স্থিতিশীল নহ'বও পাৰে। তদুপৰি, ই মুদ্ৰা উলিওৱা বা লুডুগুটি মাৰি পঠিওৱা ক্ষেত্ৰত ফলপ্ৰসূ। কিন্তু, উপগ্ৰহ এটাৰ উৎক্ষেপণৰ সময়ত বিফলতাৰ আনুভৱিক সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ উপগ্ৰহটো কেনেকৈ বাৰে বাৰে উৎক্ষেপণ পৰীক্ষা বা ভূমিকম্পৰ সময়ত বহু মহলীয়া বিল্ডিং এটাৰ ধ্বংস হোৱাৰ আনুভৱিক সম্ভাৱিতা উলিয়াবলৈ ভূমিকম্প হোৱা পৰিঘটনাটো বাৰে বাৰে সম্ভৱনে?

পৰীক্ষাসমূহত, য'ত আমি নিৰ্দিষ্ট ধাৰণা প্ৰতিষ্ঠা কৰিবলৈ প্ৰস্তুত, পৰীক্ষাটো পুনঃপুনঃ কৰা কাৰ্য্যটো এৰাই চলিব পাৰোঁ কাৰণ ধাৰণাসমূহে প্ৰত্যেক্ষভাৱে সঠিক (তত্ত্বগত) সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয়ত সহায় কৰে। সমশক্য ফলাফলৰ ধাৰণাটো (যিটো পৰীক্ষাত স্থিত, ওপৰত দিয়া দুটা উদাহৰণ— এটা মুদ্ৰাৰ আৰু এটা লুডুগুটিৰ দৰে) এটা এনে ধাৰণা যি আমাক এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা তলত দিয়াৰ দৰে দিবলৈ আগবঢ়াই নিয়ে। এটা ঘটনা E ৰ তত্ত্বগত সম্ভাৱিতা (গাণিতিক সম্ভাৱিতা বুলিও কয়) P(E) ৰে বুজোৱা হয় আৰু সংজ্ঞা হ'ল—

$$P(E) = \frac{\text{E ৰ উপযোগী ফলাফলৰ সংখ্যা}}{\text{পৰীক্ষাৰ মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা}}$$

য'ত আমি ধৰো যে, পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য।

আমি তত্ত্বগত সম্ভাৱিতাক সংক্ষেপে সম্ভাৱিতা বুলি কওঁ।

সম্ভাৱিতাৰ এই সংজ্ঞা 1795 চনত পিয়েৰ ছাইমন্ লাপ্লাছে (Pierre Simon Laplace) দিছিল।

পিয়েৰ ছাইমন্ লাপ্লাচ
(1749 – 1827)

১৬শ শতিকাত যেতিয়া ইটালিৰ পদাৰ্থবিদ আৰু গণিতজ্ঞ জে. কাৰ্ডনে তেওঁৰ প্ৰথম কিতাপ *'The Book on Games of Chance'* লিখি উলিয়াইছিল। সেই সময়তেই সম্ভাৱিতাৰ সূত্ৰই স্থিতি লৈছিল। সম্ভাৱিতাৰ অধ্যয়নে আৰম্ভণিৰ পৰাই বহুতো মহান গণিতজ্ঞক আকৰ্ষণ কৰিছিল। জেমচ্ বাৰ্ণুলি (1654–1705), এ.ডি.মইভাৰ (1667–1754) আৰু পিয়েৰ ছাইমন্ লাপ্লাচ হ'ল সেইসকলৰ মাজৰ যিসকলে এইক্ষেত্ৰত অনবদ্য অৱদান দি থৈ গৈছে। লাপ্লাচৰ *'Theorie Analytique des Probabilités'*, 1812, ক এজন ব্যক্তিৰ সম্ভাৱিতা সূত্ৰৰ ক্ষেত্ৰত আটাইতকৈ মহান অৱদান বুলি বিবেচনা কৰা হয়। বৰ্তমান সময়ত, সম্ভাৱিতাৰ বিস্তৃত ব্যৱহাৰ দেখা যায় যেনে জীৱবিদ্যা, অৰ্থনীতি, আনুবংশিক বিজ্ঞান, পদাৰ্থবিজ্ঞান, সমাজবিজ্ঞান আদিত।

আমি কিছুমান ঘটনাৰ, যি পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত, য'ত সমশক্য ধাৰণা অটুট থাকে তাৰ সম্ভাৱিতা উলিয়াওঁ।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা মুদ্ৰা এবাৰ টচ্ কৰিলে এটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা। এটা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিতাও উলিওৱা।

সমাধান ঃ এটা মুদ্ৰা এবাৰ টচ্ কৰা পৰীক্ষাটোত সম্ভাব্য ফলাফল হ'ল দুটা— মুণ্ড (H) আৰু পুচ্ছ (T)। ধৰো E হ'ল 'এটা মুণ্ড পোৱাৰ ঘটনা'। E ৰ উপযোগী ফলাফলৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ এটা মুণ্ড পোৱাৰ) হ'ল 1। গতিকে,

$$P(E) = P\ (\text{মুণ্ড}) = \frac{\text{E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা}}{\text{মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা}} = \frac{1}{2}$$

একেদৰে যদি F 'এটা পুচ্ছ পোৱাৰ ঘটনা' তেন্তে $P(F) = \frac{1}{2}$ (কিয়?)

উদাহৰণ 2 ঃ এটা মোনাত এটা ৰঙা বল, এটা নীলা বল আৰু এটা হালধীয়া বল, সকলো বল সমান আকাৰৰ আছে। কবিতাই বলখিনি নোচোৱাকৈ এটা বল টানি ল'লে।

তাই (i) হালধীয়া বল, (ii) ৰঙা বল, (iii) নীলা বল পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান ঃ কবিতাই বলখিনি নোচোৱাকৈ টানিছে। সেয়ে এইটো সমশক্য যে তাই তাৰ পৰা যিকোনো এটা লব পাৰে।

ধৰো Y হ'ল হালধীয়া বল লোৱা ঘটনা, B হ'ল নীলা বল লোৱা ঘটনা আৰু R হ'ল ৰঙা বল লোৱা ঘটনা।

সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা = 3

(i) Y ৰ পক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা = 1

সেয়ে $P(Y) = \frac{1}{3}$

একেদৰে, (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ আৰু (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$.

মন্তব্য ঃ 1. পৰীক্ষাৰ ফলাফল মাথো এটা থকা একোটা ঘটনাক 'প্ৰাথমিক ঘটনা' (elementary event) বোলে। উদাহৰণ (1)ত দুয়োটা ঘটনা E আৰু F প্ৰাথমিক ঘটনা। একেদৰে উদাহৰণ (2)ত তিনিওটা ঘটনা Y, B আৰু R হ'ল প্ৰাথমিক ঘটনা।

2. উদাহৰণ (1)ত আমি মন কৰোঁ যে, $P(E) + P(F) = 1$

উদাহৰণ (2)ত আমি মন কৰোঁ যে, $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

দেখাগ'ল যে, এটা পৰীক্ষাৰ সকলো প্ৰাথমিক ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সমষ্টি 1। ই সাধাৰণ ক্ষেত্ৰতো সত্য।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰো আমি এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰি পঠিয়াও। (i) 4তকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যা পোৱা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা কি? (ii) 4 বা তাতকৈ সৰু সংখ্যা পোৱা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান ঃ (i) ইয়াত, ধৰো E হ'ল '4 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা'। সম্ভাব্য ফলাফল হ'ল 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6 আৰু E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফল হ'ল 5 আৰু 6। সেইবাবে, E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা হ'ল 2। গতিকে,

$P(E) = P(\text{4তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) ধৰো, F হ'ল '4 বা তাতকৈ সৰু সংখ্যা পোৱাৰ' ঘটনা

সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা = 6, F অৰ পক্ষে ঘটিত ঘটনাৰ ফলাফল হ'ল- 1, 2, 3, 4

গতিকে, F ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা হ'ল 4.

সেয়ে, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ওপৰৰ ঘটনা E আৰু F প্ৰাথমিক ঘটনা নে? নাই, সিহঁত নহয় কাৰণ E ৰ ফলাফল 2 টা আৰু F ৰ ফলাফল 4 টা।

মন্তব্য ঃ উদাহৰণ (1) ৰ পৰা পাওঁ—

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

য'ত E হ'ল 'এটা মুণ্ড পোৱাৰ' ঘটনা আৰু 'F হ'ল এটা পুচ্ছ পোৱাৰ ঘটনা।

উদাহৰণ (3) ৰ (i) আৰু (ii) পৰা আমি পাওঁ—

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

য'ত E হ'ল '4 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱাৰ' ঘটনা আৰু F হ'ল '4 তকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱাৰ' ঘটনা।

মন কৰা যে, 4 তকৈ ডাঙৰ নোহোৱা সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা '4 তকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা' একে আৰু বিপৰীতভাৱেও হয়।

ওপৰৰ (1) আৰু (2) ত F, 'E নহয়' ৰ লগত একে নহয়নে? হয়, এইটো হয়। আমি 'E নহয়' ঘটনাক $\bar{E}$ ৰে বুজাওঁ।

গতিকে, P(E) + P(নহয় E) = 1

অৰ্থাৎ, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, যিটোৱে আমাক দিয়ে $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

সাধাৰণতে, এটা ঘটনা E ৰ বাবে এইটো সত্য যে,

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

'E নহয়'ক নিৰ্দেশ কৰা $\bar{E}$ ঘটনাক E ঘটনাৰ পূৰক (complement) বোলা হয়। আজি এইটোও কওঁ যে, E আৰু $\bar{E}$ পূৰক ঘটনা (complementary event) আৰু অধিক আগবঢ়াৰ আগতে তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ দিবলৈ আমি যত্ন কৰোঁহক।

(i) এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে 8 পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

(ii) এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে 7 তকৈ কম পোৱা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা কি?

আমি (i) ৰ উত্তৰ দিওঁহক ঃ—

আমি জানো যে এবাৰ এটা লুডুগুটি মাৰিলে তাত মাথো ছয়টা সম্ভাব্য ফলাফল আছে। এই ফলাফলবোৰ হ'ল— 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6। যিহেতু লুডুগুটিৰ কোনো পিঠিতে 8 দাগ কটা

নাই, সেইবাবে কোনো ফলাফলেও 8 ৰ পক্ষে নঘটে, অৰ্থাৎ, এনে ফলাফলৰ সংখ্যা শূন্য। আন কথাত, এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে 8 পোৱাটো অসম্ভৱ।

গতিকে, $P(8\text{পোৱা}) = \frac{0}{6} = 0$

অৰ্থাৎ, যিটো ঘটনা ঘটিবলৈ সম্ভাৱিতা শূন্য '0' তেনে ঘটনাক অসম্ভৱ ঘটনা (impossible event) বোলে।

আমি (ii) ৰ উত্তৰ দিওঁহক ঃ—

যিহেতু, লুডুগুটিটোৰ প্ৰতিখন পিঠিতেই দাগ কৰা সংখ্যা 7 তকৈ কম, এইটো নিশ্চিত যে আমি এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে সদায় এটা 7 তকৈ সৰু সংখ্যা পাম। গতিকে সপক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা, মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যাৰ সৈতে একে যিটো হ'ল 6।

সেইবাবে, $P(E) = P(7\text{তকৈ সৰু সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা}) = \frac{6}{6} = 1$

গতিকে, যিটো ঘটনা নিশ্চিত ঘটে তাৰ সম্ভাৱিতা 1, এনে ঘটনাক নিশ্চিত ঘটনা (sure event or certain event) বোলা হয়।

টোকা ঃ P(E) ৰ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি দেখো যে, 'লব' (E ৰ সপক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা) সদায় 'হৰ' (সম্ভাব্য সকলো ফলাফল) তকৈ সৰু বা সমান।

সেইকাৰণে, $0 \leq P(E) \leq 1$

এতিয়া আমি তাচ্ খেলৰ লগত জড়িত উদাহৰণ এটা লওঁ। তোমালোকে তাচ্পাতৰ এটা পেকেট্ দেখিছানে? ই 52 টা কাৰ্ডেৰে গঠিত যিটো 4টা ভাগত ভাগকৰা আছে প্ৰত্যেকতে 13 টাকৈ কাৰ্ড— ইস্কাপন (Spade ♠), হৰতন (Heart ♥), ৰোহিতন (Diamond ♦) আৰু চিৰটন (Club ♣)। চিৰটন আৰু ইস্কাপন কলা ৰঙৰ অন্যহাতে, হৰতন আৰু ৰোহিতনৰ ৰঙ ৰঙা। প্ৰত্যেকটো ভাগত থকা কাৰ্ডবোৰ হ'ল টেক্কা, ৰজা, ৰাণী, গোলাম 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 আৰু 2। ৰজা, ৰাণী আৰু গোলামকেইটাক মুখ কাৰ্ড (face card) বোলা হয়।

উদাহৰণ 4 ঃ 52 টা কাৰ্ডযুক্ত ভালদৰে মিহলোৱা এযোৰ তাচ্পাতৰ জাপৰপৰা এটা কাৰ্ড টনা হ'ল। কাৰ্ডটোৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা—

(i) এটা টেক্কা হোৱা,

(ii) এটা টেক্কা নোহোৱা

সমাধান ঃ ভালদৰে মিলোৱা মানে হ'ল সমশক্য ফলাফল।

(i) তাচ্জাপত টেক্কাৰ সংখ্যা হ'ল 4 টা। ধৰো E হ'ল 'টেক্কা পোৱাৰ' ঘটনা

E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা = 4

সম্ভাব্য মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা = 52 (কিয়?)

সেই কাৰণে, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) ধৰো F হ'ল 'কার্ডটো টেক্কা নোহোৱা ঘটনা'

F ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা = 52 – 4 = 48 (কিয়?)

সম্ভাব্য মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা = 52

সেইকাৰণে, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

মন্তব্য ঃ মন কৰা, F মানে $\bar{E}$. গতিকে, P(F) আমি তলত দিয়াৰ দৰে উলিয়াব পাৰোঁ ঃ

$$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}.$$

উদাহৰণ 5 ঃ দুজন খেলুৱৈ সংগীতা আৰু ৰেচমাই এখন টেবুল টেনিচ্ মেচ খেলিলে। এইটো জনাযায় যে, সংগীতা জয়ী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0.62। ৰেচমা খেলখনত জয়ী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান ঃ ধৰো S আৰু R এ ক্ৰমে সংগীতা খেলখন জয়ী হোৱা আৰু ৰেচমা খেলখন জয়ী হোৱাটো নিৰ্দেশ কৰে।

সংগীতা জয়ী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা = P(S) = 0.62 (দিয়া আছে)

ৰেচমা জয়ী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা = P(R) = 1 – P(S) = 1 – 0.62 = 0.38

[যিহেতু, R আৰু S ঘটনা পৰস্পৰ পূৰক]

উদাহৰণ 6 ঃ সৰিতা আৰু হামিদা বন্ধু। দুয়োগৰাকীৰ (i) ভিন্ন জন্মদিন (ii) একেজন্মদিন হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি? (লিপ্ইয়েৰ বাদদি)

সমাধান ঃ দুয়োগৰাকী বন্ধুৰ এগৰাকী, ধৰোঁ সৰিতাৰ জন্মদিন বছৰৰ যিকোনো এটা দিন হ'ব পাৰে। হামিদাৰ জন্মদিনো 365 দিনৰ যিকোনো এটা দিন হ'ব পাৰে।

আমি ধৰোঁ যে 365 দিনেই সমশক্য ফলাফল।

(i) যদি হামিদাৰ জন্মদিন সৰিতাৰ জন্মদিনৰ ভিন্ন হয়, তেন্তে তাইৰ পক্ষে জন্মদিনৰ ফলাফলৰ সংখ্যা 365 – 1 = 364.

গতিকে, P (হামিদাৰ জন্মদিন, সৰিতাৰ পৰা পৃথক) = $\frac{364}{365}$

(ii) P(সৰিতা আৰু হামিদাৰ জন্মদিন একে) = 1 – P (দুয়োগৰাকীৰ ভিন্ন জন্মদিন)

$= 1 - \frac{364}{365}$ [$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ ব্যৱহাৰ কৰি]

$= \frac{1}{365}$

উদাহৰণ 7 ঃ এখন স্কুলৰ দশম শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা হ'ল 40 য'ত 25 জনী ছোৱালী আৰু 15 জন ল'ৰা। শ্ৰেণীৰ শিক্ষকে এজন ছাত্ৰ/ছাত্ৰীক ক্লাছৰ প্ৰতিনিধি বাচনি কৰিব লাগে। তেওঁ প্ৰত্যেকজন ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ নাম বেলেগ বেলেগ কাৰ্ডত লিখি ল'লে, কাৰ্ডবোৰ একেপ্ৰকাৰৰ। তাৰ পাছত তেওঁ কাৰ্ডবোৰ মোনা এটাত ভৰালে আৰু সেইবোৰ সম্পূৰ্ণৰূপে মিহলি কৰি দিলে। তেওঁ এটা কাৰ্ড মোনাৰ পৰা টানি ল'লে। কাৰ্ডটোত লিখিথোৱা নামটো (i) এগৰাকী ছোৱালীৰ (ii) এজন ল'ৰাৰ হোৱা সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান ঃ তাত 40 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আছে আৰু এটা কাৰ্ডহে বাছিব লাগে।

(i) মুঠ সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা = 40

এজনী ছোৱালীৰ নামৰ সপক্ষে ঘটা ঘটনাৰ ফলাফলৰ সংখ্যা = 25 (কিয়?)

সেয়ে, P(এজনী ছোৱালীৰ নাম থকা) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) এজন ল'ৰাৰ নামৰ সাপেক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা = 15 (কিয়?)

সেয়ে, P(ল'ৰাৰ নামযুক্ত কাৰ্ড) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

টোকা ঃ আমি P(ল'ৰা) এনেদৰেও উলিয়াব পাৰোঁ—

P(ল'ৰা) = 1 – P(ল'ৰা নহয়)

= 1 – P(ছোৱালী)

$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

উদাহৰণ 8 ঃ এটা বাকচত 3 টা নীলা, 2 টা বগা আৰু 4 টা ৰঙা মাৰ্বল আছে। যদি এটা মাৰ্বল যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হয়, তেন্তে এইটো

(i) বগা, (ii) নীলা, (iii) ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান ঃ এটা মাৰ্বল যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা মানে হ'ল যে সকলো মাৰ্বল সমশক্য। সেয়ে, সম্ভাব্য মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা = 3 + 2 + 4 = 9 (কিয়?)

ধৰো W হ'ল 'মাৰ্বলটো বগা', B হ'ল 'মাৰ্বলটো নীলা' আৰু R হ'ল 'মাৰ্বলটো ৰঙা' হোৱা ঘটনা।

(i) W ঘটনাৰ পক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা = 2

গতিকে, $P(W) = \frac{2}{9}$

এনেদৰে, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ আৰু (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

মন কৰা যে, P(W) + P(B) + P(R) = 1.

উদাহৰণ 9 ঃ হৰিয়ে দুটা ভিন্ন মুদ্ৰা একেলগে টচ্ কৰিছে (ধৰা, এটা 1 টকীয়া আৰু আনটো 2 টকীয়া)। তেওঁ অতি কমেও এটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাবিতা কি?

সমাধান ঃ মুণ্ডৰ বাবে H আৰু পুচ্ছৰ বাবে T লিখা। যেতিয়া দুটা মুদ্ৰা একেলগে টচ্ কৰা হয় সম্ভাব্য ফলাফলবোৰ হ'ল— (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) যিবোৰ সমশক্য। ইয়াত, (H,H) মানে হ'ল প্ৰথম মুদ্ৰাত (ধৰো এটকীয়া মুদ্ৰাত) মুণ্ড ওলাইছে আৰু দ্বিতীয় মুদ্ৰাত (2 টকীয়া মুদ্ৰাত) মুণ্ড ওলাইছে। একেদৰে, (H, T) মানে হ'ল প্ৰথম মুদ্ৰাত মুণ্ড আৰু দ্বিতীয় মুদ্ৰাত পুচ্ছ ওলাইছে আৰু এনেদৰে বাকী দুটাৰো অৰ্থ।

E, 'অতিকমেও এটা মুণ্ড' পোৱা ঘটনাৰ পক্ষে ঘটা ফলাফল হ'ল— (H, H), (H, T) আৰু (T, H). (কিয়?)

গতিকে, E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা = 3.

সেয়ে, $P(E) = \frac{3}{4}$, অৰ্থাৎ হৰিয়ে অতিকমেও এটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{3}{4}$.

টোকা ঃ তোমালোকে P(E) তলত দিয়া ধৰণেও উলিয়াব পাৰা—

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad [\text{যিহেতু } P(\text{মুণ্ড নাই}) = \frac{1}{4}]$$

তোমালোকে পৰ্যবেক্ষণ কৰিলানে যে এতিয়ালৈকে যিমান উদাহৰণ ব্যাখ্যা কৰিলো, সম্ভাব্য মুঠ ফলাফল প্ৰত্যেকতে সসীম? যদি নাই কৰা এইটো এতিয়া পৰীক্ষা কৰা।

এনেকুৱা বহুতো পৰীক্ষা আছে যাৰ ফলাফল প্ৰদত্ত দুটা সংখ্যাৰ মাজৰ যিকোনো সংখ্যা হ'ব পাৰে, বা কিছুমানত ফলাফল এটা বৃত্ত বা আয়ত আদিৰ ভিতৰৰ যিকোনো বিন্দু হ'ব পাৰে? তোমালোকে সকলো ফলাফলৰ সংখ্যা গণনা কৰিব পাৰিবানে? তোমালোকে জানা যে এইটো অসম্ভৱ যিহেতু দুটা প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ মাজত অসীম সংখ্যক সংখ্যা থাকে বা এটা বৃত্তৰ ভিতৰত অসীম সংখ্যক বিন্দু থাকে। গতিকে, সম্ভাৱিতাৰ (তত্ত্বগত) সংজ্ঞা যিটো তোমালোকে এতিয়ালৈকে পালা সেইটো এইক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰি। কি পথ বাছি উলিয়াম? এইটো উত্তৰৰ বাবে আমি তলৰ উদাহৰণটো লওঁ—

উদাহৰণ 10* ঃ এটা সংগীত চকীৰ খেলত এজন ব্যক্তিক তেওঁ আৰম্ভ কৰাৰ 2 মিনিটৰ ভিতৰত সংগীতটো যিকোনো সময়ত বন্ধ কৰিববলৈ পৰামৰ্শ দিয়া হ'ল। সংগীতটো আৰম্ভ কৰাৰ প্ৰথম আধা মিনিটত বন্ধ কৰাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান ঃ ইয়াত সম্ভাব্য ফলাফল হ'ল 0 আৰু 2 ৰ মাজৰ যিকোনো সংখ্যা। এইটো সংখ্যাৰেখাৰ 0 ৰ পৰা 2 লৈ অংশটো (চিত্ৰত 15.1. চোৱা)

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

চিত্ৰ 15.1

ধৰো E হ'ল প্ৰথম আধা মিনিটত সংগীতটো বন্ধ কৰা ঘটনা।

E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফল হ'ল সংখ্যাৰেখাৰ 0 ৰ পৰা $\frac{1}{2}$ লৈ বিন্দুবোৰ।

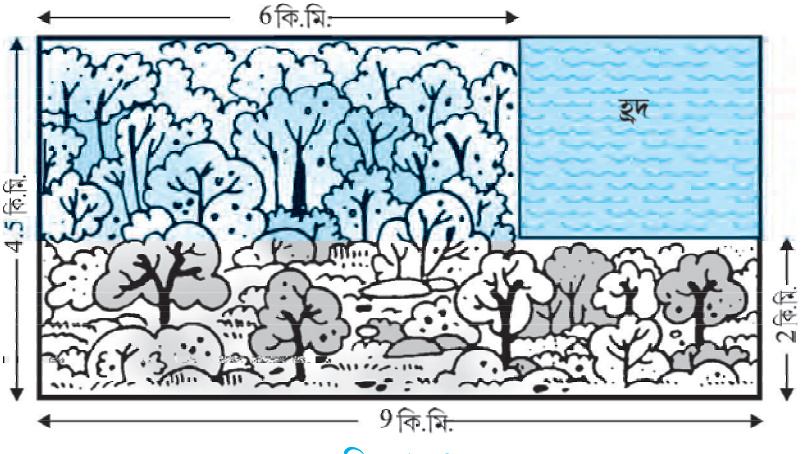
0 ৰ পৰা 2 লৈ দূৰত্ব 2 অন্যহাতে 0 ৰ পৰা $\frac{1}{2}$ লৈ দূৰত্ব $\frac{1}{2}$.

যিহেতু সকলো ফলাফল সমশক্য, আমি যুক্তি দিব পাৰোঁ যে, মুঠ দূৰত্ব 2 ৰ E ৰ পক্ষে দূৰত্ব $\frac{1}{2}$ ।

গতিকে, $P(E) = \frac{\text{E ঘটনাৰ পক্ষে দূৰত্ব}}{\text{ফলাফল থকা অংশৰ মুঠ দূৰত্ব}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

উদাহৰণ (1)ৰ এই ধাৰণাটো আমি মুঠ ক্ষেত্ৰ কালি আৰু ঈপ্সিত কালিৰ অনুপাতৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰণত প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰিমনে?

উদাহৰণ 11* ঃ চিত্ৰ 15.2. ত দেখুওৱাৰ দৰে এখন হেৰোৱা হেলিকপ্টাৰৰ সম্ভেদ দিয়া হৈছে যে ই এটুকুৰা আয়তীয় ক্ষেত্ৰত কোনো ঠাইত ধ্বংস হৈছে। এইখন চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে ভিতৰৰ এটা হ্ৰদত ধ্বংস হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?



চিত্ৰ 15.2

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

সমাধান ঃ ক্ষেত্ৰখনৰ যিকোনো ঠাইত হেলিকপ্টাৰখন ধ্বংস হোৱাটো সমশক্য।

হেলিকপ্টাৰখন ধ্বংস হ'ব পৰা —

ক্ষেত্ৰৰ কালি = (4.5 × 9) বৰ্গ কিঃমিঃ = 40.5 বৰ্গ কিঃমিঃ

হ্ৰদটোৰ ক্ষেত্ৰকালি = (2.5 × 3) বৰ্গ কিঃমিঃ = 7.5 বৰ্গ কিঃমিঃ

সেইকাৰণে, P (হ্ৰদত হেলিকপ্টাৰ ধ্বংস হোৱা) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

উদাহৰণ- 12 ঃ এটা কাৰ্টনত থকা 100 চোলাৰ 88 টা ভাল আৰু 8 টা অলপ পৰিমাণে নষ্ট আৰু 4 টা বেছি পৰিমাণে নষ্ট হৈছে। জিমি, এজন ব্যৱসায়ী যি মাথো ভালবোৰ গ্ৰহণ কৰে। কিন্তু সুজাতা অন্য এজন ব্যৱসায়ী যি মাথো বেছি পৰিমাণে নষ্ট হোৱা চোলাহে বাদ দিয়ে যাদৃচ্ছিকভাৱে কাৰ্টনৰ এটা চোলা টনা হ'ল। সম্ভাৱিতা কি যাতে,

(i) এইটো জিমিৰ গ্ৰহণযোগ্য হয়?

(ii) এইটো সুজাতাৰ গ্ৰহণযোগ্য হয়?

সমাধান ঃ কাৰ্টনৰ 100 টা চোলাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা চোলা টনা হ'ল। সেয়ে সেইবোৰ 100 টা সমশক্য ফলাফল।

(i) জিমিৰ সপক্ষে (অৰ্থাৎ গ্ৰহণযোগ্য) ফলাফলৰ সংখ্যা = 88 (কিয়?)

সেয়ে, P (জিমিৰ গ্ৰহণযোগ্য চোলা) = $\frac{88}{100} = 0.88$

(ii) সুজাতাৰ সপক্ষে ফলাফলৰ সংখ্যা = 88 + 8 = 96 (কিয়?)

গতিকে, P (সূজাতাৰ গ্ৰহণযোগ্য চোলা) = $\frac{96}{100} = 0.96$

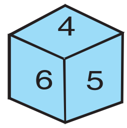
উদাহৰণ- 13 ঃ এটা নীলা আৰু এটা ছাই ৰঙৰ দুটা লুডুগুটি একেলগে মাৰি পঠিওৱা হ'ল। সকলো সম্ভাব্য ফলাফল লিখা। লুডুগুটি দুটাত ওলোৱা সংখ্যাৰ সমষ্টি

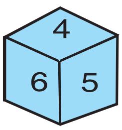
(i) 8

(ii) 13

(iii) 12ত কৈ সৰু বা সমান হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান

সমাধান ঃ যেতিয়া নীলা গুটিটোত '1' দেখায় তেতিয়া ছাই ৰঙৰটোত 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6 ৰ যিকোনো এটা সংখ্যা দেখুৱাব পাৰে। একেদৰে, যেতিয়া নীলাটোত '2', '3', '4', '5' বা '6' দেখায় তেতিয়াও একে। সম্ভাব্য ফলাফলবোৰ তালিকাকৰণ কৰি তলত দেখুওৱা হ'ল; প্ৰতিটো ক্ৰমিত যোৰত প্ৰথম সংখ্যাই নীলা গুটিত ওলোৱা আৰু দ্বিতীয় সংখ্যাই ছাইটোত ওলোৱা সংখ্যা নিৰ্দেশ কৰে।





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

চিত্ৰ 15.3

মন কৰা যে, (1, 4) যোৰটো (4, 1) ৰ পৰা পৃথক (কিয়?)

গতিকে সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা $= 6 \times 6 = 36$.

(i) 'সংখ্যা দুটাৰ সমষ্টি 8' হোৱা ঘটনাৰ সপক্ষে, ফলাফলৰ ঘটনাটোক E ৰে নিৰ্দেশ কৰা হ'ল আৰু সেয়া হ'ল (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (চিত্ৰ 15.3)
অৰ্থাৎ, E ৰ সপক্ষে ফলাফলৰ সংখ্যা = 5.

গতিকে, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) চিত্ৰ 15.3 ত তোমালোকে দেখিছা যে, F : "সংখ্যাদুটাৰ সমষ্টি 13" ৰ সপক্ষে কোনো ফলাফল নাই।

গতিকে, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) চিত্ৰ 15.3 ত তোমালোকে দেখা পাইছা যে, G : "সংখ্যা দুটাৰ সমষ্টি ≤ 12" ৰ সপক্ষে সকলো ফলাফলেই যায়।

গতিকে, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

অনুশীলনী 15.1

1. তলৰ উক্তিবোৰ সম্পূৰ্ণ কৰা ঃ

(i) ঘটনা E ৰ সম্ভাৱিতা + ঘটনা ‘E নহয়’ৰ সম্ভাৱিতা = ________

(ii) কেতিয়াও নঘটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা হ’ল ________ । এনেকুৱা ঘটনাক কয় ________.

(iii) নিশ্চিতভাৱে ঘটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা হ’ল ——— । এনেকুৱা ঘটনাক ——— বোলে।

(iv) এটা পৰীক্ষাৰ সকলো প্ৰাথমিক ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সমষ্টি হ’ল ———।

(v) এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা ——— তকৈ ডাঙৰ বা সমান আৰু ——— তকৈ সৰু বা সমান।

2. তলৰ কোনবোৰ পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য? ব্যাখ্যা কৰা।

(i) এজন ড্ৰাইভাৰে এখন গাড়ী ষ্টাৰ্ট দিবলৈ যত্ন কৰিছে। গাড়ীখন ষ্টাৰ্ট হ’বও পাৰে বা নহ’বও পাৰে।

(ii) এজন খেলুৱৈয়ে এটা বাস্কেট বল ভৰাব বিচাৰিছে। তেওঁ ভৰাব পাৰে বা নোৱাৰিবও পাৰে।

(iii) এটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ সত্য বা অসত্য বুলি দিয়াৰ চেষ্টা কৰা হৈছে। উত্তৰটো শুদ্ধ বা অশুদ্ধ হ’ব পাৰে।

(iv) এটা কেচুঁৱা জন্ম হ’ল। এইটো ল’ৰা বা ছোৱালী হ’ব পাৰে।

3. এখন ফুটফল খেলত কোনটো দলে আৰম্ভণিতে বলটো লব সেয়া সিদ্ধান্ত লবলৈ কিয় এটা বিশুদ্ধ মুদ্ৰাৰ টচ্ কৰাটো দৰকাৰ বুলি বিবেচনা কৰে?

4. তলৰ কোনকেইটা এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা হ’ব নোৱাৰে।

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. যদি $P(E) = 0.05$, তেন্তে ‘E নহয়’ৰ সম্ভাৱিতা কি?

6. এটা মোনাত মাত্ৰ নেমুৰ স্বাদৰ মৰ্টন আছে। মালিনীয়ে মোনাটো নোচোৱাকৈ এটা মৰ্টন ল’লে। তেওঁ লোৱাটোৰ সম্ভাৱিতা কি যাতে

(i) এটা কমলা স্বাদৰ মৰ্টন লয়?

(ii) এটা নেমু স্বাদৰ মৰ্টন লয়?

7. এটা 3 জনীয়া ছাত্ৰৰ দলত দিয়া আছে যে 2 জন ছাত্ৰৰ একে জন্মদিন নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0.992। 2 জন ছাত্ৰৰ একে জন্মদিন হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

8. এটা মোনাত 3টা ৰঙা আৰু 5টা ক'লা ৰঙৰ আছে। মোনাটোৰপৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল। টনা বলটোৰ (i) ৰঙা ৰঙৰ হোৱা (ii) ৰঙা নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

9. এটা বাকচত 5 টা ৰঙা মাৰ্বল, 8 টা বগা মাৰ্বল আৰু 4 টা সেউজীয়া মাৰ্বল আছে। বাকচৰপৰা যিকোনো এটা মাৰ্বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। মাৰ্বলটোৰ

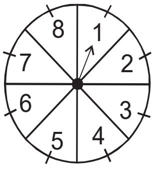
(i) ৰঙা হোৱা (ii) বগা হোৱা (iii) সেউজীয়া নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

10. এটা টেমাত এশটা 50 পইচা, পঞ্চাশটা 1টকীয়া, বিশটা 2 টকীয়া আৰু দহটা 5টকীয়া মুদ্ৰা আছে। টেমাটোৰ ওপৰমুখ তল কৰিলে এটা মুদ্ৰা ওলাই পৰাটো সমশক্য হ'লে, মুদ্ৰাটো (i) 50 পইচা হোৱা (ii) 5 টকীয়া নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

11. গোপীয়ে তেওঁৰ একুৱেৰিয়ামৰ বাবে এখন দোকানৰপৰা এটা মাছ কিনি আনিলে। চিত্ৰ 15.4ত দেখুওৱাৰ দৰে দোকানীজনে 5টা মতা মাছ আৰু 8 মাইকী মাছ থকা চৌৰ্বাচাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে যিকোনো এটা মাছ ধৰি দিলে। মাছটো মতা মাছ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

চিত্ৰ 15.4

12. এখন খেল এডাল চলন্ত কাড়ঁচিনযুক্ত, যিডাল 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 যিকোনো এটা সংখ্যাৰ পিনে টোৱাই ৰৈ যায় আৰু এই ফলাফল সমশক্য। সম্ভাৱিতা কি যাতে এইডালে গৈ ৰয়—



চিত্ৰ 15.5

(i) 8ত?

(ii) এটা অযুগ্ম সংখ্যাত?

(iii) 2তকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যাত?

(iv) 9 তকৈ সৰু এটা সংখ্যাত?

13. এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰি পঠিওৱা হৈছে।

(i) এটা মৌলিক সংখ্যা,

(ii) 2 আৰু 6 ৰ মাজৰ এটা সংখ্যা;

(iii) এটা অযুগ্ম সংখ্যা, পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. ভালদৰে মিহলোৱা 52 টা কাৰ্ড থকা এযোৰ তাচপাতৰপৰা এটা কাৰ্ড টানি লোৱাহ'ল।

(i) এটা ৰঙা ৰঙৰ ৰজা (ii) এটা মুখ কাৰ্ড

(iii) এটা ৰঙা মুখ কাৰ্ড (iv) হৰতনৰ গোলাম

(v) এটা ইস্কাপন (vi) ৰোহিতনৰ ৰাণী, পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

15. ৰোহিতনৰ পাঁচটা কাৰ্ড— দহ, গোলাম, ৰাণী, ৰজা আৰু টেক্কা তলমুৱা কৰি ভালদৰে মিহলোৱা হ'ল। এটা কাৰ্ড যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল।

(i) কাৰ্ডটো ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

(ii) যদি ৰাণী টনা হয় আৰু একাষৰীয়াকৈ ৰখা হয়, দ্বিতীয় কাৰ্ডটো টানিলে (ক) এটা টেক্কা (খ) এজনী ৰাণী পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

16. 12 টা বেয়া কলম দুৰ্ভাগ্যৱশতঃ 132 টা ভাল কলমৰ লগত মিহলি হ'ল। মাত্ৰ চকুৰে চাই এটা কলম ভালনে বেয়া কোৱাটো সম্ভৱ নহয়। গোটটোৰপৰা এটা কলম তুলি লোৱা হ'ল, কলমটো ভাল হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

17. (i) 20 টা বাল্বৰ টোপোলা এটাৰ 4 টা বাল্ব বেয়া। টোপোলাটোৰপৰা এটা বাল্ব যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বাল্বটো বেয়া হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

(ii) ধৰাহ'ল (i)ত টনা বাল্বটো বেয়া নহয় আৰু ইয়াক পুনঃস্থাপন কৰা নহ'ল। এতিয়া বাকীখিনিৰপৰা এটা বাল্ব টনা হ'ল। এই বাল্বটো বেয়া নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

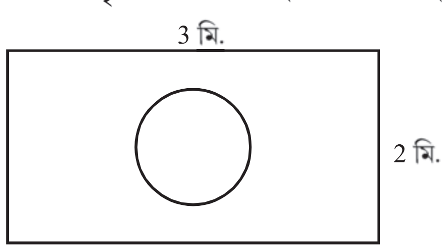
18. এটা বাকচত 1ৰ পৰা 90 নম্বৰ দি থোৱা 90 খন ডিচ্ক (থাল) আছে। যদি এখন থাল যাদৃচ্ছিকভাৱে বাকচৰপৰা টনা হয়, তেন্তে ইয়াত (i) এটা দুটা অংকৰ সংখ্যা, (ii) এটা পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যা, (iii) 5 ৰে হৰণ যোৱা এটা সংখ্যা, লিখি থোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

19. এজন শিশুৰ এটা লুডুগুটি আছে যাৰ ছয়খন পিঠিৰ তলত দেখুওৱাৰ দৰে আখৰ ওলায়।

A	B	C	D	E	A

গুটিটো এবাৰ মাৰি পঠিওৱা হ'ল। (i) A, (ii) D ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

20*. চিত্ৰ 15.6. ত দেখুওৱাৰ দৰে ধৰা হওঁক তুমি এটা লুডুগুটি এখন আয়তাকাৰ ক্ষেত্ৰত পেলাইছা। 1মিঃ ব্যাসৰ এটা বৃত্তৰ ভিতৰত এইটো পতিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?



চিত্ৰ 15.6

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰপৰা নহয়।

21. 144 টা বলপেন থকা এক মুঠা বলপেনত 20 টা বলপেন বেয়া আছে আৰু বাকীবোৰ ভাল। নুৰিয়ে এটা কলম কিনিব যদিহে ই ভাল হয় আৰু বেয়া হ'লে নিকিনে। দোকানীয়ে যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা কলম আনিলে আৰু তাইক দিলে। সম্ভাৱিতা কি যাতে,

(i) তাই এইটো কিনে,

(ii) তাই এইটো নিকিনে?

22. উদাহৰণ (13) লোৱাঁ। (i) তলৰ তালিকাখন সম্পূৰ্ণ কৰা ঃ

ঘটনা 'দুটা গুটিত সংখ্যাৰ সমষ্টি'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
সম্ভাৱিতা	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) এজন ছাত্ৰই যুক্তি দিলে যে, তাত '11 টা সম্ভাব্য ফলাফল 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 আৰু 12। সেইকাৰণে, সিহঁতৰ প্ৰত্যেকৰে সম্ভাৱিতা $\frac{1}{11}$। তুমি এই যুক্তিত একমতনে? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

23. এটা খেল হ'ল— এটা এটকীয়া মুদ্ৰা লৈ 3 বাৰ টচ্ কৰা আৰু প্ৰত্যেকবাৰতে ইয়াৰ ফলাফল লিখি ৰাখা। হানিফ খেলখনত জয়ী হ'ব যদি সি আটাইবোৰ ফলাফল একে পায় অৰ্থাৎ তিনিটা মুণ্ড বা তিনিটা পুচ্ছ পায় আৰু অন্যহাতে পৰাজিত হ'ব। হানিফ খেলখনত পৰাজিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

24. এটা লুডুগুটি দুবাৰ মাৰি পঠিওৱা হ'ল। সম্ভাৱিতা কি যাতে

(i) এবাৰো 5 নোলায়? (ii) অন্ততঃ এবাৰ 5ওলায়?

[**ইংগিত ঃ** এটা লুডুগুটি দুবাৰ আৰু দুটা লুডুগুটি এবাৰ একেলগে মাৰি পঠিওৱা পৰীক্ষা একে বুলি বিবেচনা কৰা হয়]

25. তলৰ কোনকেইটা উক্তি সত্য আৰু কোনকেইটা অসত্য? তোমাৰ উত্তৰৰ কাৰণ দৰ্শোৱা।

(i) যদি দুটা মুদ্ৰা একেলগে টচ্ কৰা হয় তেন্তে তাত তিনিটা ফলাফল থাকে— দুয়োটা মুণ্ড, দুয়োটা পুচ্ছ বা প্ৰত্যেকৰে এটা। সেইবাবে, এই ফলাফলৰ প্ৰতিটোৰে সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{3}$.

(ii) যদি এটা লুডুগুটি দলিওৱা হয়, তাত দুটা ফলাফল থাকে এটা অযুগ্ম সংখ্যা আৰু এটা যুগ্ম সংখ্যা। সেইকাৰণে, এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{2}$.

অনুশীলনী 15.2 (ঐচ্ছিক)*

1. দুজন গ্ৰাহক শ্যাম আৰু একতাই একে সপ্তাহত (মঙ্গলবাৰৰ পৰা শনিবাৰলৈ) এখন দোকানলৈ যায়। যিকোনো দিনত তেওঁলোকে দোকানলৈ যোৱাটো সমশক্য। দুয়োজনে দোকানলৈ যোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি— (i) একেদিনত,
(ii) এদিনৰ পিছত এদিন, (iii) ভিন্ন দিনত?

2. এটা লুডুগুটি এনেধৰণেৰে নম্বৰ দিয়া হৈছে যে ইয়াৰ পিঠিখিনিয়ে 1, 2, 2, 3, 3, 6 সংখ্যা দেখায়। ইয়াক দুবাৰ দলিয়াই দিয়া হ'ল আৰু দুই বাৰৰ মুঠ নম্বৰ লিখি ৰখা হ'ল। তলৰ তালিকাখন সম্পূৰ্ণ কৰা য'ত কেইটামান নম্বৰ দিয়া আছে।

প্ৰথমবাৰ দলিয়াওঁতে পোৱা নম্বৰ

দ্বিতীয়বাৰ দলিয়াওঁতে পোৱা নম্বৰ

+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

মুঠ নম্বৰ (i) যুগ্ম, (ii) 6, (iii) অতিকমেও 6 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

3. এটা মোনাত 5 টা ৰঙা বল আৰু কিছুমান নীলা বল আছে। যদি এটা নীলা বল টনাৰ সম্ভাৱিতা সেয়া ৰঙা বলৰ সম্ভাৱিতাৰ দুগুণ হয় তেন্তে মোনাত থকা নীলা বলৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

4. এটা বাকচত 12 টা বল আছে য'ত x টা বল ক'লা। যদি এটা বল বাকচৰপৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হয় তেন্তে এইটো ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?
যদি 6টা আৰু অতিৰিক্ত ক'লা বল বাকচত ভৰোৱা হয়, ক'লা বল পোৱাৰ সম্ভাৱিতা পূৰ্বতে পোৱা সম্ভাৱিতাৰ দুগুণ। x নিৰ্ণয় কৰা।

5. এটা পাত্ৰত 24 টা মাৰ্বল, কিছুমান সেউজীয়া আৰু আনবোৰ নীলা আছে। যদি এটা মাৰ্বল পাত্ৰৰপৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হয়, আৰু এইটো সেউজীয়া হোৱাৰ সম্ভাৱিতা $\frac{2}{3}$। পাত্ৰটোত থকা নীলা বলৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰপৰা নহয়।

15.3 সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি শিকিলা—

1. পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা আৰু তত্ত্বগত সম্ভাৱিতাৰ পাৰ্থক্য।
2. এটা ঘটনা Eৰ তত্ত্বগত (গাণিতিক) সম্ভাৱিতাক P(E)ৰে লিখা হয় আৰু সংজ্ঞা হ'ল—

$$P\ (E) = \frac{\text{E ৰ সপক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা}}{\text{পৰীক্ষাটোৰ সম্ভাব্য সকলো ফলাফলৰ সংখ্যা}}$$

   য'ত আমি ফলাফলবোৰ সমশক্য বুলি লওঁ।
3. নিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা 1।
4. অসম্ভৱ ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা 0।
5. এটা ঘটনা E ৰ সম্ভাৱিতা P(E) এটা সংখ্যা যাতে

$$0 \leq P\ (E) \leq 1$$

6. মাত্ৰ এটা ফলাফলযুক্ত ঘটনাক প্ৰাথমিক ঘটনা বোলে। এটা পৰীক্ষাৰ সকলো প্ৰাথমিক ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সমষ্টি 1।
7. যিকোনো এটা ঘটনা E ৰ বাবে, $P\ (E) + P\ (\bar{E}) = 1$, য'ত $\bar{E}$ হ'ল 'E নহয়', E আৰু $\bar{E}$ ক পূৰক ঘটনা বোলা।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

এটা ঘটনাৰ পৰীক্ষালব্ধ বা আনুভৱিক সম্ভাৱিতা প্ৰকৃততে কি ঘটিল তাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত, আনহাতে এটা ঘটনাৰ তত্ত্বগত সম্ভাৱিতাই কোনো ধাৰণাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি কি ঘটিব তাৰ পূৰ্বাভাস দিয়ে। যদি পৰীক্ষাৰ নিৰীক্ষণবোৰ ক্ৰমান্বয়ে বঢ়াই গৈ থকা হয় আমি আশা কৰিব পাৰো যে, পৰীক্ষালব্ধ আৰু তত্ত্বগত সম্ভাৱিতা প্ৰায় একে হয়।

গণিতত প্ৰমাণ (Proofs in Mathematics)

পৰিশিষ্ট 1

A1.1. অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত যুক্তি প্ৰদৰ্শন আৰু স্পষ্ট চিন্তাৰ বাবে দক্ষতা অতীব প্ৰয়োজন। উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰাহ'ল এজন ৰাজনীতিবিদে তোমালোকক উদ্দেশি কয়,— 'যদি তোমালোক স্বচ্ছ চৰকাৰৰ বাবে আগ্ৰহী তেন্তে তোমালোকে মোক ভোট দিবা'। তোমালোকক তেওঁ এই বুলি বুজাবলৈ বিচাৰিছে যে যদি তোমালোকে তেওঁক ভোট নিদিয়া তেন্তে তোমালোকে স্বচ্ছ চৰকাৰ নাপাবও পাৰা। একেদৰে এটা বিজ্ঞাপনে তোমালোকক কৈছে, "বুদ্ধিমানীসকলে XYZ জোতা ব্যৱহাৰ কৰে'। কোম্পানীটোৱে তোমালোকক বুজাইছে যে, যদি তোমালোকে XYZ জোতা নিপিন্ধা তেন্তে তোমালোক মুঠেই বুদ্ধিমান নোহোৱা। তোমালোকে নিজেই পৰ্য্যবেক্ষণ কৰিলে দেখা পাবা যে ওপৰৰ দুয়োটা উক্তিয়েই সাধাৰণ মানুহক বিপথে পৰিচালিত কৰিব পাৰে। সেয়ে, যদি আমি যুক্তিৰে শুদ্ধভাবটো বুজি পাওঁ তেন্তে আমি এনে প্ৰলোভনত নপৰোঁ।

গণিতৰ মূলত যুক্তিৰ শুদ্ধ ব্যৱহাৰ আছে, বিশেষভাৱে প্ৰমাণ গঠনত। নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকক প্ৰমাণৰ ধাৰণাৰ লগত পৰিচয় কৰাই দিছিলোঁ আৰু তোমালোকে সচাকৈয়ে বহুতো উক্তিৰ প্ৰমাণ কৰিছিলা, বিশেষভাৱে জ্যামিতিত। মনত পেলোৱা যে, এটা প্ৰমাণ বহুতো গাণিতিক উক্তিৰে গঠিত, যিবোৰ যুক্তিপূৰ্ণভাৱে কোনোবা উক্তিৰ প্ৰমাণত থকা বা উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত থকা বা এটা স্বতঃসিদ্ধ বা প্ৰকল্পৰ পৰা টানি অনা হয়। এই মূল ভেটি য'ত আমি এটা প্ৰমাণ গঠনত ব্যৱহাৰ কৰোঁ, তাক বিশ্লেষণাত্মক যুক্তিৰ ধাৰা বোলা হয়।

আমি এই অধ্যায়ৰ আৰম্ভণি এটা পুনৰালোচনাৰে কৰিম যে এটা গাণিতিক উক্তিনো কি। তাৰ পাছত আমি সাধাৰণ উদাহৰণ লৈ নিগমন যুক্তিৰে আমাৰ দক্ষতা বৃদ্ধিৰ পথত আগ বাঢ়িম। আমি নহয়বোধক ধাৰণাৰ সৈতেও আলোচনা কৰিম আৰু এটা উক্তিৰ বিপৰীতটো নিৰ্ণয় কৰিম। তাৰপাছত আমি ব্যাখ্যা কৰিম যে, এটা উক্তিৰ বিপৰীত উলিয়াবলৈ ইয়াৰ তাৎপৰ্য্য কি। শেষত, বহুতো উক্তিৰ প্ৰমাণ বিশ্লেষণ কৰি নৱম শ্ৰেণীত শিকি অহা এটা প্ৰমাণৰ উপাদানসমূহৰ পুনৰালোচনা কৰিম। ইয়াত, আমি বিৰোধ প্ৰক্ৰিয়াৰে প্ৰমাণৰ ধাৰণাও আলোচনা কৰিম, যিটো তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত পাই আহিছা আৰু এই পুথিৰ বহুতো পাঠত পাইছা।

A1.2. গাণিতিক উক্তিৰ পুনৰীক্ষণ (Mathematical Statements Revisited) ঃ

মনত পেলোৱা যে, উক্তি এটা হ'ল অৰ্থবহ বাক্য যি আদেশ বা ভাববোধক বা প্ৰশ্নবোধক নহয়। উদাহৰণস্বৰূপে, "কোনদুটা দলে ক্ৰিকেটৰ বিশ্বকাপ ফাইনেল খেলিব?"এটা প্ৰশ্নবোধক বাক্য, এটা উক্তি নহয়। 'খোৱা আৰু তোমাৰ ঘৰুৱা কাম শেষ কৰা' এটা আদেশ, এটা উক্তি নহয়। 'কি যে সুন্দৰ গ'ল!' এটা ভাববোধক বাক্য, এটা উক্তি নহয়।

মনতৰাখিবা— সাধাৰণতে উক্তি তলত দিয়া যিকোনো এটা হ'ব পাৰে-

- *সদায় সত্য*
- *সদায় অসত্য*
- *দ্বিঅৰ্থক।*

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে পঢ়িছিলা যে, গণিতত, **এটা উক্তি গ্ৰহণযোগ্য হ'ব যদি ই সত্য বা অসত্য**। গতিকে, দ্বিঅৰ্থক বাক্যবোৰ গাণিতিক উক্তি বুলি ধৰা নহয়।

কিছুমান উদাহৰণ জৰিয়তে, আমি আমাৰ ধাৰণাবোধ পুনৰালোচনা কৰোঁহক।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ উক্তিবোৰ সদায় সত্য নে সদায় অসত্য বা দ্বিঅৰ্থক বাছি উলিওৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা নিৰূপণ কৰা ঃ

(i) সূৰ্য্যই পৃথিৱীক প্ৰদক্ষিণ কৰে।

(ii) যানবাহনৰ চাৰিটা চকা থাকে।

(iii) পোহৰৰ দ্ৰুতি প্ৰায় 3×10^5 কিঃমিঃ/ছেঃ

(iv) কলিকতালৈ যোৱা পথ নৱেম্বৰৰ পৰা মাৰ্চলৈ বন্ধ থাকিব।

(v) সকলো মানুহ মৰণশীল।

সমাধান ঃ

(i) এই বাক্যটো সদায় অসত্য, কিয়নো জ্যোতিৰ্বিদসকলে এইটো প্ৰতিষ্ঠা কৰি থৈছে যে, পৃথিৱী সূৰ্য্যৰ চাৰিওফালে ঘূৰে।

(ii) এই বাক্যটো দ্বিঅৰ্থক কিয়নো আমি সিদ্ধান্ত দিব নোৱাৰো যে এইটো সদায় সত্য বা সদায় অসত্য। এইটো যানবাহনখনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে— যানবাহনৰ চকা 2, 3, 4, 6, 10টা আদি থাকিব পাৰে।

(iii) এই বাক্যটো সদায় সত্য, পদাৰ্থবিদে প্ৰমাণ কৰি গৈছে।

(iv) এই বাক্যটো দ্বিঅৰ্থক কাৰণ, এইটো স্পষ্ট নহয় যে কোনটো ৰাস্তাৰ কথা কৈছে।

(v) এই বাক্যটো সদায় সত্য যিহেতু প্ৰত্যেক মানুহেই কোনো এদিন মৰিব লাগিব।

উদাহৰণ 2 ঃ তলৰ উক্তিবোৰ সত্যনে অসত্য কোৱাঁ আৰু তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততাৰ প্ৰমাণ দিয়া।

(i) সকলো সমবাহু ত্ৰিভুজ সমদ্বিবাহু।

(ii) কিছুমান সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ সমবাহু।

(iii) সকলো সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ সমবাহু।

(iv) কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা।
(v) কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা নহয়।
(vi) সকলো অখণ্ড সংখ্যা পৰিমেয় নহয়।
(vii) যিকোনো দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ মাজত কোনো পৰিমেয় সংখ্যা নাই।

সমাধান ঃ

(i) এই উক্তিটো সত্য কাৰণ সমবাহু ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ সমান আৰু সেইবাবে সমদ্বিবাহু।

(ii) এই উক্তিটো সত্য কাৰণ যিবোৰ সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ ভূমিসংলগ্ন কোণ 60° সেইবোৰ সমবাহু।

(iii) এই উক্তিটো অসত্য। এটা বিৰোধ উদাহৰণ দিয়া।

(iv) এই উক্তিটো সত্য, যিহেতু পৰিমেয় সংখ্যাৰ আকাৰ $\frac{p}{q}$, য'ত p এটা অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q = 1$ হ'লে, অখণ্ড সংখ্যা হয় (উদাহৰণস্বৰূপে, $3 = \frac{3}{1}$)।

(v) এই উক্তিটো সত্য, কাৰণ পৰিমেয় সংখ্যাৰ আকাৰ $\frac{p}{q}$, য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু p ক q ৰে হৰণ নগলে, সংখ্যাটো অখণ্ড নহয় (উদাহৰণস্বৰূপে, $\frac{3}{2}$)

(vi) এই উক্তিটো 'তাত এটা অখণ্ড সংখ্যা আছে যিটো পৰিমেয় নহয়' বোলা কথাষাৰৰ সৈতে একে। এইটো অসত্য কাৰণ সকলো অখণ্ড সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

(vii) এই উক্তিটো অসত্য। তোমালোকে জানা যে, যিকোনো দুটা পৰিমেয় সংখ্যা r আৰু s অৰ মাজত $\frac{r+s}{2}$ আছে, যিটো পৰিমেয় সংখ্যা।

উদাহৰণ 3 ঃ যদি $x < 4$, তলৰ কোনটো উক্তি সত্য? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

সমাধান ঃ

(i) এই উক্তিটো অসত্য, কাৰণ, উদাহৰণস্বৰূপে, $x = 3 < 4$ এ $2x > 8$ক সিদ্ধ নকৰে।
(ii) এই উক্তিটো অসত্য, কাৰণ, উদাহৰণস্বৰূপে, $x = 3.5 < 4$ এ $2x < 6$ক সিদ্ধ নকৰে।
(iii) এই উক্তিটো সত্য, কাৰণ, এইটো $x < 4$ দৰে একে।

উদাহৰণ 4 ঃ যথাযথ চৰ্তৰ সৈতে উক্তিবোৰ পুনৰ লিখা যাতে সিহঁত সত্য উক্তিলৈ ৰূপান্তৰ হয়।

(i) এটা চতুভুৰ্জৰ কৰ্ণদুডাল সমান হ'লে ই এটা আয়ত।

(ii) এটা ত্ৰিভুজৰ দুডাল বাহুৰ ওপৰত থকা দুটা বিন্দুক সংযোগ কৰা ৰেখা তৃতীয় বাহুৰ সমান্তৰাল।

(iii) সকলো অখণ্ড সংখ্যা p ৰ বাবে $\sqrt{p}$ অপৰিমেয় সংখ্যা।

(iv) সকলো দ্বিঘাত সমীকৰণৰ দুটা বাস্তৱ মূল থাকে।

সমাধান ঃ

(i) এটা সামান্তৰিকৰ কৰ্ণদুডাল সমান হ'লে ই এটা আয়ত হ'ব।

(ii) এটা ত্ৰিভুজৰ যিকোনো দুটা বাহুৰ মধ্যবিন্দু সংযোগী ৰেখাডাল তৃতীয়বাহুৰ সমান্তৰাল।

(iii) সকলো মৌলিক সংখ্যা p ৰ বাবে $\sqrt{p}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

(iv) সকলো দ্বিঘাত সমীকৰণৰ অতি বেছি দুটা বাস্তৱ মূল থাকে।

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ উক্তিবোৰ অন্যভাৱেও পুনৰ লিখিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, (iii) ক এনেদৰেও লিখিব পাৰি যে, 'সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা p ৰ বাবে, যিবোৰ পূৰ্ণবৰ্গ নহয়, $\sqrt{p}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।'

অনুশীলনী ঃ A1.1

1. তলৰ উক্তিবোৰ সদায় সত্য নে, সদায় অসত্য বা দ্বিঅৰ্থক কোৰাঁ। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দৰ্শোৱা—

(i) সকলো গণিতৰ পাঠ্যপুথিয়েই আনন্দদায়ক।

(ii) পৃথিৱীৰ পৰা সূৰ্য্যৰ দূৰত্ব প্ৰায় 1.5×10^8 কিঃ মিঃ

(iii) সকলো মানুহেই বুঢ়া হ'ব।

(iv) উত্তৰকাশীৰ পৰা হাৰ্চিললৈ যাত্ৰা কষ্টকৰ।

(v) এগৰাকী মহিলাই এযোৰ দূৰবীক্ষণ যন্ত্ৰৰ দ্বাৰা এটা হাতী দেখিছিল।

2. তলৰ উক্তিবোৰ সত্য নে অসত্য কোৰাঁ। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দিয়া।

(i) সকলো ষড়ভুজ বহুভুজ।

(ii) কিছুমান বহুভুজ পঞ্চভুজ।

(iii) সকলো যুগ্ম সংখ্যাকে 2ৰে হৰণ নাযায়।

(iv) কিছুমান বাস্তৱ সংখ্যা অপৰিমেয়।

(v) সকলো বাস্তৱ সংখ্যা পৰিমেয় নহয়।

3. ধৰাহ'ল a আৰু b বাস্তৱ সংখ্যা যাতে $ab \neq 0$, তেন্তে তলৰ কোনবোৰ উক্তি সত্য? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দৰ্শোৱা।

(i) দুয়োটা a আৰু b শূন্য হ'ব লাগিব।

(ii) দুয়োটা a আৰু b অশূন্য হ'ব লাগিব।

(iii) a বা b অশূন্য হ'ব লাগিব।

4. উপযুক্ত চৰ্ত আৰোপ কৰি তলৰ উক্তিবোৰ পুনৰ কোৰাঁ যাতে সিহঁত সত্য হয়।

(i) যদি $a^2 > b^2$, তেন্তে $a > b$.

(ii) যদি $x^2 = y^2$, তেন্তে $x = y$.

(iii) যদি $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, তেন্তে $x = 0$.

(iv) চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণদুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

A1.3. নিগমন যুক্তি (Deductive Reasoning) ঃ

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকক অৱৰোহণ যুক্তিৰ লগত পৰিচয় কৰি দিয়া হৈছিল। ইয়াত আমি বহুতো উদাহৰণৰ সৈতে কাৰ্য্য কৰিম যি, এটা প্ৰদত্ত উক্তি সত্য বুলি প্ৰতিষ্ঠা কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা নিগমন যুক্তিৰ বিষয়ে ব্যাখ্যা দিব। প্ৰদত্ত উক্তিটোক প্ৰস্তাৱনা (premises) বা অনুমান (প্ৰকল্প) বোলে। আমি কিছুমান উদাহৰণৰ দ্বাৰা আৰম্ভ কৰিম।

উদাহৰণ 5 ঃ দিয়া আছে যে বিজাপুৰ কৰ্ণাটক ৰাজ্যৰ অন্তৰ্গত আৰু ধৰাহ'ল শাবনা বিজাপুৰত বাস কৰে। কোনখন ৰাজ্যত শাবনা বাস কৰে?

সমাধান ঃ ইয়াত আমাৰ দুটা প্ৰস্তাৱনা আছে।

(i) বিজাপুৰ কৰ্ণাটক ৰাজ্যৰ অন্তৰ্গত।

(ii) শাবনা বিজাপুৰত বাস কৰে।

এই প্ৰস্তাৱনা দুটাৰ পৰা আমি বাহিৰ কৰিব পাৰো যে শাবনা কৰ্ণাটক ৰাজ্যত বাস কৰে।

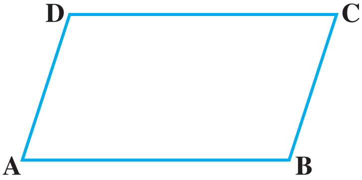
উদাহৰণ 6 ঃ দিয়া আছে, সকলো গণিতৰ পাঠ্যপুথিয়েই মনোগ্ৰাহী আৰু ধৰোঁ তোমালোকে গণিতৰ পাঠ্যপুথি পঢ়ি আছা। তোমালোকে পঢ়ি থকা পাঠ্যপুথিৰ বিষয়ে আমি কি ক'ব পাৰোঁ?

সমাধান ঃ দুটা প্ৰস্তাৱনা (বা অনুমান) ব্যৱহাৰ কৰি আমি ক'ব পাৰোঁ যে তোমালোকে মনোগ্ৰাহী পাঠ্যপুথি পঢ়ি আছা।

উদাহৰণ 7 ঃ দিয়া আছে, $y = -6x + 5$, আৰু ধৰোঁ $x = 3$. y কি?

সমাধান ঃ দুটা অনুমান দিয়া আছে, আমি পাওঁ, $y = -6(3) + 5 = -13$.

উদাহৰণ 8 ঃ দিয়া আছে যে, ABCD এটা সামান্তৰিক আৰু ধৰোঁ AD = 5 ছে.মি., AB = 7 ছে.মি. (চিত্ৰ A1.1 চোৱা)। DC আৰু BC ৰ দৈৰ্ঘ্য সম্বন্ধে তুমি কি কব পাৰা?



চিত্ৰ A1.1

সমাধান ঃ আমাক দিয়া আছে যে, ABCD এটা সামান্তৰিক। গতিকে, আমি নিগমন কৰিব পাৰোঁ যে সামান্তৰিকৰ সকলো ধৰ্ম ABCD সামান্তৰিকে মানি চলে। সেইবাবে, বিশেষভাৱে, 'সামান্তৰিকৰ দুটা মুখামুখি বাহু পৰস্পৰ সমান ধৰ্মটোৱো মানি চলে। যিহেতু আমি জানো যে, AD = 5 চে.মি., আমি পাম যে, BC = 5 চে.মি. একেদৰে আমি বাহিৰ কৰিব পাৰো যে, DC = 7 চে.মি.।

মন্তব্য ঃ এই উদাহৰণত আমি দেখা পালো যে, কেনেকৈ প্ৰায়ে আমি প্ৰস্তাৱনাত নিহিত ধৰ্ম বিচাৰি উলিয়াব লাগে আৰু তাক ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে।

উদাহৰণ - 9 ঃ দিয়া আছে যে, $\sqrt{p}$, সকলো মৌলিক pৰ বাবে অপৰিমেয় আৰু ধৰো 19423 এটা মৌলিক সংখ্যা। $\sqrt{19423}$ ৰ বিষয়ে কি সিদ্ধান্ত তুমি দিব পাৰা?

সমাধান ঃ আমি সিদ্ধান্ত দিওঁ যে $\sqrt{19423}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

ওপৰৰ উদাহৰণবোৰত তোমালোকে দেখিলা নিশ্চয় যে আমি অনুমানবোৰ সত্য হয়নে নহয় নাজানো। আমি ধৰিছোঁ যে সেইবোৰ সত্য আৰু তেতিয়া নিগমন যুক্তি প্ৰয়োগ কৰোঁ। উদাহৰণ (9)ত আমি সত্যাপন কৰা নাই 19423 মৌলিক সংখ্যা হয়নে নহয়, আমি আমাৰ যুক্তিৰ স্বাৰ্থত এইটো মৌলিক বুলি ধৰি লৈছোঁ। আমি এই অনুচ্ছেদত কিহৰ ওপৰত গুৰুত্ব দিছোঁ সেয়া হ'ল, এটা প্ৰদত্ত প্ৰস্তাৱনাৰ পৰা কেনেকৈ নিগমন যুক্তিৰে এটা সিদ্ধান্তত উপনীত হব পাৰোঁ। ইয়াত আচল কথাটো হ'ল যে, আমি যুক্তিৰ শুদ্ধ পথ ব্যৱহাৰ কৰিছোঁ আৰু যুক্তিৰ এই পথটো অনুমানৰ সত্যতা বা অসত্যতাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়। যি কি নহওক, এইটো মন কৰিব লাগে যে, যদি আমি অশুদ্ধ প্ৰস্তাৱনাৰে আৰম্ভ কৰিছোঁ তেন্তে আমি ভুল সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ।

অনুশীলনী ঃ A1.2

1. দিয়া আছে, সকলো মাইকী মানুহ মৰণশীল, আৰু ধৰোঁ যে A এগৰাকী মাইকীমানুহ, A ৰ বিষয়ে আমি কি সিদ্ধান্ত দিব পাৰোঁ?

2. দিয়া আছে, দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ পূৰণফল পৰিমেয় আৰু ধৰোঁ a আৰু b পৰিমেয়, ab ৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্ত দিবা?

3. দিয়া আছে, অপৰিমেয় সংখ্যা দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে শেষ নহয় আৰু পৌনঃ পৌনিকো নহয় আৰু $\sqrt{17}$ এটা অপৰিমেয়, $\sqrt{17}$ ৰ দশমিক বিস্তাৰৰ বিষয়ে আমি কি সিদ্ধান্ত দিব পাৰোঁ?

4. দিয়া আছে, $y = x^2 + 6$ আৰু $x = -1$, y ৰ মানৰ বিষয়ে তুমি কি ক'বা?

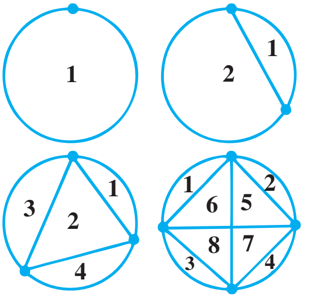
5. দিয়া আছে, ABCD এটা সামান্তৰিক আৰু $\angle B = 80°$, সামান্তৰিকটোৰ বাকী কোণবোৰৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্ত দিবা?

6. দিয়া আছে, PQRS এটা চক্ৰীয় চতুৰ্ভুজ আৰু ইয়াৰ কৰ্ণই পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়। চতুৰ্ভুজটোৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'বা?

7. দিয়া আছে, সকলো মৌলিক সংখ্যা p ৰ বাবে $\sqrt{p}$ অপৰিমেয় আৰু ধৰো 3721 এটা মৌলিক। তুমি ক'ব পাৰানে যে $\sqrt{3721}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা? কিয় বা কিয় নোৱাৰা?

A1.4. পূৰ্বানুমান, উপপাদ্য, প্ৰমাণ আৰু গাণিতিক যুক্তি (Conjectures, Theorems, Proofs and Mathematical Reasoning) ঃ

চিত্ৰ A1.2 লোৱা হওক। প্ৰথম বৃত্তৰ ওপৰত এটা বিন্দু, দ্বিতীয়টোৰ ওপৰত দুটা বিন্দু, তৃতীয়টোৰ ওপৰত তিনিটা বিন্দু আৰু এনেকৈয়ে আছে। প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি সকলো সম্ভাব্য ৰেখা টনা হ'ল।



চিত্ৰ A1.2

ৰেখাবোৰে বৃত্তক পৰস্পৰান্তৰ অংশত (উমৈহতীয়া অংশ নথকা) ভাগ কৰে। আমি গণনা কৰি সেইবোৰক তলত লিখিলো।

বিন্দুৰ সংখ্যা	অংশৰ সংখ্যা
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

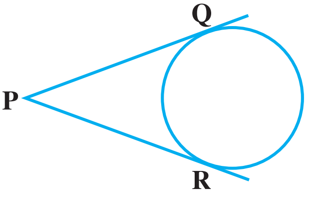
তোমালোকৰ কোনোবাজনে নিশ্চয় প্ৰদত্ত বিন্দুৰ বাবে ক্ষেত্ৰৰ সংখ্যা দিব পৰা এটা সূত্ৰ বাহিৰ কৰিব পাৰিবা। নৱম শ্ৰেণীৰ পৰা তোমালোকে মনত পেলাব পাৰিবা যে এনে বুদ্ধিমান অনুমানক পূৰ্বানুমান (*conjecture*) বোলে।

ধৰাহ'ল, তোমাৰ পূৰ্বানুমানটো হ'ল এটা বৃত্তৰ ওপৰত প্ৰদত্ত 'n' টা বিন্দুক সম্ভাব্য সকলো প্ৰকাৰে সংযাগ কৰিলে 2^{n-1} টা পৰস্পৰ পৃথক ক্ষেত্ৰ পোৱা যায়। এইটো এটা অত্যন্ত স্পৰ্শকাতৰ অনুমান যেন লাগে আৰু যিকোনোৱে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰে যে যদি $n = 5$, আমি 16 টা ক্ষেত্ৰ পাওঁ। গতিকে, $n = 5$ ৰ বাবে সত্যাপন কৰিলেই তুমি সন্তুষ্টনে যে যিকোনো n ৰ বাবে তাত 2^{n-1} টা ক্ষেত্ৰ আছে? যদি সেয়ে হয়, তুমি কেনেদৰে উত্তৰ দিবা, যদি কোনোবা এজনে সোধে যে, $n = 25$ৰ বাবে তুমি এইটো কেনেকৈ নিশ্চিত হ'লা? এনে প্ৰশ্নৰ লগত মোকাবিলা কৰিবলৈ তোমাক এটা প্ৰমাণৰ প্ৰয়োজন হ'ব যিটোৱে সন্দেহাতীতভাৱে সত্যটো প্ৰতিপন্ন কৰিব বা এটা স্পষ্ট উদাহৰণৰ প্ৰয়োজন হ'ব যি দেখুৱায় যে, কিছুমান 'n' ৰ বাবে এইটো সত্য নহয়। প্ৰকৃততে যদি তুমি ধৈৰ্য্যশীল আৰু $n = 6$ৰ বাবে এইটো যত্ন কৰা, তুমি পাবা যে তাত 31 ক্ষেত্ৰ আছে আৰু $n = 7$ৰ বাবে তাত 57 ক্ষেত্ৰ আছে। গতিকে, $n = 6$, পূৰ্বানুমানৰ বাবে এটা বিৰোধ উদাহৰণ। এইটোৱেই বিৰোধ (মুখামুখি) উদাহৰণৰ গুৰুত্বৰ নমুনা দাঙি ধৰে। তোমালোকে মনত পেলাব পাৰিবা যে নৱম শ্ৰেণীত আমি এটা উক্তিক সত্য নহয় বুলি প্ৰমাণৰো ব্যাখ্যা কৰিছিলো, ইয়াৰ বাবে এটা বিপৰীত উদাহৰণ দাঙি ধৰিলেই যথেষ্ট।

তোমালোকে মন কৰিব পাৰা যে, $n = 1, 2, 3, 4$ আৰু 5 ৰ বাবে সত্যাপনৰ বিপৰীতে আমি ক্ষেত্ৰৰ সংখ্যাৰ সন্দৰ্ভত প্ৰমাণৰ ওপৰতহে গুৰুত্ব দিছোঁ। আমি আৰু কিছু অতিৰিক্ত উদাহৰণ লওঁহক। তোমালোকে এইটো ফলাফল (অধ্যায় 5ত দিয়া) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ৰ লগত পৰিচিত। ইয়াৰ সত্যতা প্ৰমাণ কৰিবলৈ $n = 1, 2, 3$ আৰু বহুতোৰ বাবে সত্যাপন কৰিলেই যথেষ্ট নহয় কাৰণ তাত কোনোবা 'n' থাকিব পাৰে যাৰ বাবে এই ফলাফলটো সত্য নহয় (ওপৰৰ উদাহৰণৰ দৰে, ফলাফলটো $n = 6$ ৰ বাবে অসত্য)।

আমি কি বিচাৰো, এটা প্ৰমাণ, যি সন্দেহাতীভাৱে ইয়াৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰে। তোমালোকে ওপৰ শ্ৰেণীত একেখিনিৰ বাবে প্ৰমাণৰ বিষয়ে শিকিবা।

এতিয়া, চিত্ৰ- A1.3 লোৱাহওঁক, য'ত PQ আৰু PR হ'ল P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ টনা স্পৰ্শক।



চিত্ৰ A1.3

তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিছিলা যে PQ = PR (উপপাদ্য 10.2)। তোমালোকে বিভিন্ন এনে চিত্ৰ অংকন কৰি প্ৰতিবাৰতে স্পৰ্শকৰ জোখলৈ আৰু তোমালোকে নিজেই সূত্ৰটো সত্যাপন কৰিও তোমালোক পতিয়ন যোৱা নাছিলা যে ফলাফলটো সত্য আছিল।

তোমালোকে মনত পেলাব পাৰিছানে, প্ৰমাণটোত কি কি আছিল? এইটো উক্তিৰ অনুক্ৰমেৰে গঠিত, যিবোৰ কোনো প্ৰমাণৰ উক্তি, বা আগতে প্ৰমাণ কৰা (আৰু জ্ঞাত) ফলাফল প্ৰমাণ কৰিব লগীয়া ফলাফলৰ পৰা স্বতন্ত্ৰ বা স্বতঃসিদ্ধ বা সংজ্ঞাৰ পৰা বা ধৰিলোৱা উক্তিৰ পৰা তুলি অনা।

আৰু তোমালোকে তোমালোকৰ প্ৰমাণৰ সিদ্ধান্ত দিছিলা যে PQ = PR অৰ্থাৎ, তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিবলৈ বিচৰা উক্তিটো। এই পথেৰেই এটা প্ৰমাণ গঠিত হয়।

আমি এতিয়া, কিছুমান উদাহৰণ, উপপাদ্য আৰু তাৰ প্ৰমাণৰ ব্যাখ্যা লৈ চাম যি আমাক কেনেকৈ সেইবোৰ গঠন কৰা হয় তাক বুজিবলৈ সহায় কৰিব।

আমি তথাকথিত 'প্ৰত্যক্ষ' বা 'নিগমনাত্মক' পদ্ধতিৰে প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি আৰম্ভ কৰিম। এই পদ্ধতিত, আমি বহুতো উক্তি গঠন কৰিম। প্ৰতিটো পূৰ্বৰ উক্তিৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত। যদি প্ৰতিটো উক্তি যুক্তিগতভাৱে শুদ্ধ (অৰ্থাৎ বৈধযুক্তি) হয় তেন্তে ই যুক্তিগতভাৱে শুদ্ধ সিদ্ধান্ত দিয়ে।

উদাহৰণ 10 ঃ দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগফল এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

সমাধান ঃ

ক্ৰমিক নং	উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
1.	ধৰো x আৰু y পৰিমেয় সংখ্যা	যিহেতু ফলাফল পৰিমেয় সম্বন্ধীয়, আমি আৰু x আৰু y যিটো পৰিমেয় তাৰ পৰা আৰম্ভ কৰিম।
2.	ধৰো $x=\frac{m}{n}$, $n \neq 0$ আৰু $y=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ য'ত m, n, p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা	পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি
3.	গতিকে, $x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$	ফলাফলে পৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগফলৰ কথা কৈছে সেয়ে আমি $x+y$ লৈছো।
4.	অখণ্ড সংখ্যাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ $mq+np$ আৰু nq অখণ্ড	অখণ্ড সংখ্যাৰ জ্ঞাত ধৰ্মব্যৱহাৰ কৰি
5.	যিহেতু $n \neq 0$ আৰু $q \neq 0$, ই দিয়ে যে, $nq \neq 0$	অখণ্ড সংখ্যাৰ জ্ঞাত ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি
6.	সেয়ে, $x+y=\frac{mq+np}{nq}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা	পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি।

মন্তব্য ঃ মন কৰা যে, ওপৰৰ প্ৰমাণটোত প্ৰতিটো উক্তি পূৰ্ব্বতে প্ৰতিষ্ঠিত কথা বা সংজ্ঞাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত।

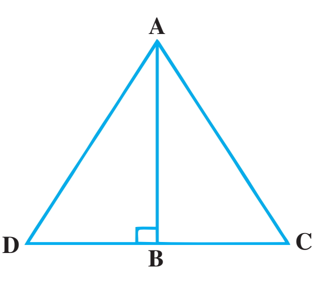
উদাহৰণ 11 ঃ 3 তকৈ ডাঙৰ সকলো মৌলিক সংখ্যাৰ আকাৰ $6k + 1$ বা $6k + 5$, য'ত k কোনো এটা অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান ঃ

ক্ৰমিক নং	উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
1.	ধৰো 3 তকৈ ডাঙৰ এটা মৌলিক সংখ্যা p.	যিহেতু ফলাফলটো 3তকৈ ডাঙৰ মৌলিক সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰিব লাগে, সেয়ে আমি এনে সংখ্যাৰে আৰম্ভ কৰিছোঁ।
2.	p ক 6 ৰে হৰণ কৰিলে আমি পাওঁ 6 ৰ আকাৰ— $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, বা $6k + 5$, য'ত k এটা অখণ্ড সংখ্যা।	ইউক্লিডৰ হৰণৰ প্ৰমেয়িকা (Lemma) প্ৰয়োগ কৰি।
3.	কিন্তু $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$, আৰু $6k + 3 = 3(2k + 1)$ গতিকে, সিহঁত মৌলিক নহয়।	প্ৰদত্ত মৌলিক সংখ্যা p ৰ ভাগশেষ বিশ্লেষণ কৰিছোঁ।
4.	গতিকে, p ৰ আকাৰ $6k + 1$ বা $6k + 5$ হ'বই লাগিব, কিছুমান অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে।	

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ উদাহৰণত, আমি বিভিন্ন সম্ভাৱনীয়তাবোৰ বাহিৰ কৰি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো। এই পদ্ধতিক কেতিয়াবা প্ৰমাণ (proof by exhaustion) বুলিও জনা যায়।

উপপাদ্য A1.1. ঃ ***(পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ বিপৰীত উক্তি) (Converse of the Pythagoras Theorem)*** *যদি এটা ত্ৰিভুজত, এটা বাহুৰ বৰ্গ আন দুটা বাহুৰ বৰ্গৰ সমষ্টিৰ সমান তেন্তে প্ৰথম বাহুৰ বিপৰীত কোণটো এটা সমকোণ।*



চিত্ৰ A1.4

প্ৰমাণ ঃ

ক্ৰমিক নং	উক্তি	বিশ্লেষণ
1.	ধৰো ΔABC এ অনুমানটো মানে অৰ্থাৎ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.	যিহেতু আমি উক্তিটো এনে ত্ৰিভুজৰ ক্ষেত্ৰতহে প্ৰমাণ কৰিম, আমি এইটোলৈ আৰম্ভ কৰিছোঁ।
2.	AB ৰ ওপৰ BD লম্ব অকাঁ হ'ল যাতে BD = BC আৰু A, D সংযোগ কৰা হ'ল।	এইটো এটা অন্তৰ্দৃষ্টিৰ পদক্ষেপ যিটো প্ৰায়ে উপপাদ্য প্ৰমাণৰ বাবে প্ৰয়োজন।
3.	অংকনমতে, ΔABD সমকোণী ত্ৰিভুজ আৰু পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ পৰা আমি পাওঁ $AD^2 = AB^2+BD^2$.	আমি ইতিমধ্যে প্ৰমাণিত পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিছো।
4.	অংকনমতে, BD = BC. গতিকে, আমি পাওঁ- $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	যুক্তিৰে বাহিৰ পৰা ফলাফল।
5.	সেয়ে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ধৰিলোৱা উক্তি আৰু আগৰ উক্তি ব্যৱহাৰ কৰি
6.	যিহেতু AC, AD ধনাত্মক, আমি পাওঁ AC = AD	সংজ্ঞাৰ জ্ঞাত ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি
7.	আমি এইমাত্ৰ দেখুৱালো AC = AD. অংকনমতে BC = BD আৰু AB হ'ল সাধাৰণ বাহু। সেইবাবে বাহু-বাহু -বাহু স্বীকাৰ্যমতে $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.	জ্ঞাত উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি
8.	যিহেতু $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, আমি পাওঁ, $\angle ABC = \angle ABD$ যিটো সমকোণ ■	পূৰ্বতে প্ৰমাণিত সত্যৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত উক্তিৰ যুক্তিগত নিগমন।

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ প্ৰতিটো ফলাফল ঢাপে ঢাপে এটাৰ লগত আনটোৰ সংগতি ৰাখি প্ৰমাণ কৰা হ'ল। সেইবোৰৰ ক্ৰম গুৰুত্বপূৰ্ণ। প্ৰমাণৰ প্ৰতিটো ঢাপে আগৰ ঢাপ আৰু পূৰ্বৰ প্ৰতিষ্ঠিত ফলাফলক অনুকৰণ কৰে (উপপাদ্য 6.9. চোৱা)

অনুশীলনী ঃ A1.3

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নত আমি তোমালোকক এটা উক্তি প্ৰমাণ কৰিবলৈ কৈছোঁ। প্ৰতিটো প্ৰমাণৰ সকলো ঢাপ তালিকাভুক্ত কৰা আৰু প্ৰতিটো ঢাপৰ কাৰণ দৰ্শোৱা ঃ

1. প্ৰমাণ কৰা যে, দুটা ক্ৰমিক অযুগ্ম সংখ্যাৰ যোগফলক 4 ৰে হৰণ যায়।

2. দুটা ক্ৰমিক অযুগ্ম সংখ্যা লোৱা। সিহঁতৰ বৰ্গৰ যোগফল উলিওৱা আৰু তাৰ পাছত 6 যোগ কৰা। প্ৰমাণ কৰা যে, নতুন সংখ্যাটো সদায় 8 ৰে হৰণ যায়।

3. যদি $p \geq 5$, এটা মৌলিক সংখ্যা, দেখুওৱা যে, $p^2 + 2$, 3 ৰে বিভাজ্য।
[**ইংগিত** ঃ উদাহৰণ 11ব্যৱহাৰ কৰা].

4. ধৰো x আৰু y পৰিমেয় সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰা যে xy এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

5. যদি a আৰু b ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে তোমালোকে জানা যে, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, য'ত q এটা পূৰ্ণসংখ্যা। প্ৰমাণ কৰা যে HCF (a, b) = HCF (b, r). [গঃ সাঃ উঃ (a, b) = গঃ সাঃ উঃ (b, r)]
[**ইংগিত** ঃ ধৰো গ.সা.উ. $(b, r) = h$. গতিকে, $b = k_1h$ আৰু $r = k_2h$, য'ত k_1 আৰু k_2 পৰস্পৰ মৌলিক]

6. ABC ত্ৰিভুজৰ BC বাহুৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখাই AB আৰু AC ক ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত কাটিছে। প্ৰমাণ কৰা যে, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5. এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক (Negation of a Statement) ঃ

এই অনুচ্ছেদত, আমি এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক মানেনো কি তাক ব্যাখ্যা কৰিম। আৰম্ভ কৰাৰ আগতে আমি কিছুমান সংজ্ঞাৰ লগত পৰিচয় কৰিব বিচাৰো, যি এই ধাৰণাটো সহজে বুজাত সহায় কৰিব। আৰম্ভ কৰিবলৈ, এটা উক্তিক এটা একক গোট বুলি আমি চাম আৰু ইয়াক এটা নাম দিম। উদাহৰণস্বৰূপে, আমি '2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল' এই উক্তিটোক p ৰে সূচিত কৰিব পাৰোঁ। আমি ইয়াক এনেদৰেও লিখিব পাৰো—

p : 2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল।

একেদৰে, আমি লিখোঁ, আহাঁ

q : সকলো শিক্ষকেই মহিলা।

r : মাইকৰ কুকুৰটোৰ এডাল ক'লা নেজ আছে।

s : $2 + 2 = 4$.

t : ABC ত্ৰিভুজটো সমবাহু।

এই সংজ্ঞাসমূহে উক্তিৰ ধৰ্ম ব্যাখ্যা কৰাত আমাক সহায় কৰিব আৰু সেইবোৰক কেনেদৰে

সংযোগ কৰিব পাৰি চাম। আৰম্ভণিতে, যাক আমি 'সৰল উক্তি' বুলি কওঁ তাৰ সৈতে কাৰ্য্য কৰিম আৰু পৰবৰ্তী পৰ্য্যায়ত যৌগিক উক্তিৰ ফালে গতি কৰিম।

তলৰ তালিকাখন বিবেচনা কৰোহঁক, য'ত প্ৰদত্ত উক্তিৰ পৰা একেটা নতুন উক্তি সজোৱা হৈছে।

মূল উক্তি (Original statement)	নতুন উক্তি (New statement)
p : 2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল।	$\sim p$: এইটো মিছা যে, 2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হৈছিল।
q : সকলো শিক্ষকেই মহিলা	$\sim q$: এইটো অসত্য যে, সকলো শিক্ষকেই মহিলা।
r : মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা	$\sim r$: এইটো অসত্য যে, মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা।
s : $2 + 2 = 4$.	$\sim s$: এইটো অসত্য যে, $2 + 2 = 4$.
t : ABC ত্ৰিভুজটো সমবাহু	$\sim t$: এইটো অসত্য যে, ABC সমবাহু ত্ৰিভুজ

তালিকাখনৰ প্ৰতিটো নতুন উক্তিয়েই অনুৰূপ মূল উক্তিৰ নঞৰ্থক। অৰ্থাৎ, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ আৰু $\sim t$ ক্ৰমে p, q, r, s আৰু t, উক্তিৰ নঞৰ্থক উক্তি। ইয়াত, $\sim p$ ক 'p নহয়' বুলি পঢ়া হয়। p উক্তিৰ দৃঢ়তাক $\sim p$ এ নহয় বুলি কয়। মন কৰিবা যে, সাধাৰণ কথাবতৰাত, আমি $\sim p$ মানে '2005 চনৰ 1 চেপ্তেম্বৰত দিল্লীত বৰষুণ হোৱা নাছিল' বুলি বুজো। যি কি নহওক, আমি এইটো কৰোঁতে, সতৰ্ক হোৱা প্ৰয়োজন। তোমালোকে ভাবিব পাৰা যে, কোনোৱে প্ৰদত্ত উক্তিৰ উপযুক্ত স্থানত 'নহয়' শব্দটো বহুৱাই উক্তিটোৰ নঞৰ্থক উক্তি পাব পাৰে। যেতিয়া, p কথা কওঁ এইয়া সত্য, যেতিয়া আমি 'সকলো' আৰম্ভ কৰা উক্তি লওঁ তেতিয়া সমস্যা জটিল হৈ পৰিল। উদাহৰণস্বৰূপে, q : সকলো শিক্ষকেই মহিলা উক্তিটো লোৱা হওঁক। আমি কৈছো যে, ইয়াৰ নঞৰ্থক উক্তি $\sim q$: এইটো অসত্য যে, সকলো শিক্ষকেই মহিলা। এই উক্তিটো 'তাত কিছুমান শিক্ষক আছে যি পুৰুষ' উক্তিৰ লগত একে। এতিয়া, মাথো 'নহয়' শব্দটো q ত সংযোগ কৰিলে কি হয় চোৱা যাওক। আমি উক্তিটো পাওঁ— 'সকলো শিক্ষকেই মহিলা নহয়' বা 'শিক্ষকসকলো মহিলা নহয়'। প্ৰথম উক্তিয়ে মানুহক বিপথে পৰিচালিত কৰিব পাৰে। এইটোৱে বুজাব পাৰে যে, (যদি আমি 'সকলো' শব্দত জোৰ দিওঁ) সকলো শিক্ষক পুৰুষ। এইটো নিশ্চিতভাৱে qৰ নঞৰ্থক নহয়। যি কি নহওঁক দ্বিতীয়টোৱে $\sim q$ৰ অৰ্থ সূচায় অৰ্থাৎ তাত অতিকমেও এজন শিক্ষক আছে যি মহিলা নহয়। সেয়ে, উক্তিৰ নঞৰ্থক উক্তি লিখোতে সতৰ্ক হোৱা প্ৰয়োজন ! গতিকে, কেনেকৈ আমি সিদ্ধান্ত লম যে আমি শুদ্ধ নঞৰ্থক পাইছো? আমি তলৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰিম ঃ

ধৰো, p এটা উক্তি আৰু $\sim p$ ইয়াৰ নঞৰ্থক। তেন্তে $\sim p$ অসত্য, যেতিয়া p সত্য আৰু $\sim p$ সত্য যেতিয়া p অসত্য।

উদাহৰণস্বৰূপে, যদি এইটো সত্য যে মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা, তেন্তে এইটো অসত্য যে, মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়। যদি এইটো অসত্য যে, 'মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা', তেন্তে এইটো সত্য যে, 'মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়'।

একেদৰে, s আৰু t উক্তিৰ নঞৰ্থক হ'ল—

s : $2 + 2 = 4$; নঞৰ্থক, $\sim s$: $2 + 2 \neq 4$.

t : ABC সমবাহু ত্ৰিভুজ; নঞৰ্থক, $\sim t$: ABC সমবাহু ত্ৰিভুজ নহয়।

এতিয়া, $\sim(\sim s)$ কি? এইটো হ'ব $2 + 2 = 4$, যিটো s। আৰু $\sim(\sim t)$ কি?

এইটো হ'ল,' ABC ত্ৰিভুজটো সমবাহু', অৰ্থাৎ, t । মুঠতে যিকোনো উক্তি $\boldsymbol{p}$ ৰ বাবে $\boldsymbol{\sim(\sim p)}$ হ'ল $\boldsymbol{p}$।

উদাহৰণ 12 ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ নঞৰ্থকবোৰ কোৰাঁ।

(i) মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়।

(ii) সকলো অপৰিমেয় সংখ্যাই বাস্তৱ সংখ্যা।

(iii) $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

(iv) কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা।

(v) সকলো শিক্ষক পুৰুষ নহয়।

(vi) কিছুমান ঘোঁৰাৰ ৰং মুগা নহয়।

(vii) কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x নাই যাতে $x^2 = -1$.

সমাধান ঃ

(i) এইটো অসত্য যে, মাইকৰ কুকৰটোৰ নেজডাল ক'লা নহয়, অৰ্থাৎ, মাইকৰ কুকুৰটোৰ নেজডাল ক'লা।

(ii) এইটো অসত্য যে, সকলো অপৰিমেয় সংখ্যাই বাস্তৱ সংখ্যা অৰ্থাৎ, কিছুমান (অন্ততঃ এটা) অপৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ নহয়। কোনোৱে এনেদৰেও লিখিব পাৰে— 'অপৰিমেয় সংখ্যা আটাইবোৰ বাস্তৱ সংখ্যা নহয়'।

(iii) এইটো অসত্য যে, $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়, অৰ্থাৎ, $\sqrt{2}$ অপৰিমেয় নহয়।

(iv) এইটো অসত্য যে, কিছুমান পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা, অৰ্থাৎ কোনো পৰিমেয় সংখ্যা অখণ্ড নহয়।

(v) এইটো অসত্য যে, সকলো শিক্ষক পুৰুষ নহয়, অৰ্থাৎ, সকলো শিক্ষক পুৰুষ।

(vi) এইটো অসত্য যে, কিছুমান ঘোঁৰা মুগাৰঙৰ নহয়, অৰ্থাৎ সকলো ঘোঁৰাৰ ৰং মুগা।

(vii) এইটো অসত্য যে, কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x নাই যাতে, $x^2 = -1$, অৰ্থাৎ, তাত অতি

কমেও এটা বাস্তৱ সংখ্যা x আছে যাতে $x^2 = -1$.

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ ব্যাখ্যাৰ পৰা তোমালোকে এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক নিৰ্ণয়ৰ বাবে তলৰ কাৰ্য পদ্ধতিত উপনীত হ'লাহি—

(i) প্ৰথমে, উক্তিটো নহয় শব্দৰে লিখা।

(ii) যদি তাত কোনো সন্দেহ থাকে, উপযুক্ত সালসলনি কৰা বিশেষকৈ যিবোৰ উক্তিত 'সকলো' বা "কিছুমান" শব্দ থাকে।

অনুশীলনী A1.4

1. তলৰ উক্তিবোৰৰ নঞৰ্থক উক্তিবোৰ লিখা ঃ

(i) মানুহ মৰণশীল।

(ii) l ৰেখাডাল m ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল।

(iii) এই অধ্যায়ত বহুতো অনুশীলনী আছে।

(iv) সকলো অখণ্ড সংখ্যা পৰিমেয় সংখ্যা।

(v) কিছুমান মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম।

(vi) কোনো ছাত্ৰ এলেহুৱা নহয়।

(vii) কিছুমান মেকুৰী ক'লা নহয়।

(viii) কোনোবাস্তৱ সংখ্যা x নাই, যাতে $\sqrt{x} = -1$.

(ix) 2ৰ দ্বাৰা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্য a হৰণ যায়।

(x) অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b পৰস্পৰ মৌলিক।

2. তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নতে দুটাকৈ উক্তি আছে। দ্বিতীয় উক্তিটো প্ৰথম উক্তিৰ নঞৰ্থক হয়নে নহয় কোৱা।

(i) মমতাজ ভোকাতুৰ।
মমতাজ ভোকাতুৰ নহয়।

(ii) কিছুমান মেকুৰী ক'লা।
কিছুমান মেকুৰী মুগা।

(iii) সকলো হাতী বৃহৎ।
এটা হাতী বৃহৎ নহয়।

(iv) সকলো অগ্নিনিৰ্বাপক ইঞ্জিন ৰঙা ৰঙৰ
সকলো অগ্নিনিৰ্বাপক ইঞ্জিন ৰঙা ৰঙৰ নহয়।

(v) কোনো মানুহ গৰু নহয়।
কিছুমান মানুহ গৰু।

A1.6. উক্তিৰ বিপৰীত উক্তি (Converse of a Statement) ঃ

এতিয়া আমি এটা উক্তিৰ 'বিপৰীত'ৰ সংজ্ঞা অনুসন্ধান কৰিম। ইয়াৰ বাবে, আমাক 'যৌগিক' উক্তিৰ অৰ্থাৎ দুটা বা ততোধিক সৰল উক্তিৰ সংযোজনৰ সংজ্ঞাৰ প্ৰয়োজন। যৌগিক উক্তি গঠনৰ

বহুতো প্ৰক্ৰিয়া আছে, কিন্তু আমি সেইবোৰৰ ওপৰত মনোযোগ ৰাখিম য'ত 'যদি' আৰু 'তেন্তে' শব্দ ব্যৱহাৰ কৰি দুটা সৰল উক্তিক সংযোগ কৰিছে। উদাহৰণস্বৰূপে, 'যদি এতিয়া বৰষুণ দি আছে, তেন্তে এখন চাইকেলেৰে যোৱাটো কষ্টকৰ' উক্তিটো দুটা উক্তিৰে গঠিত ঃ

p : এতিয়া বৰষুণ দি আছে।

q : এখন চাইকেলেৰে যোৱাটো কষ্টকৰ।

আগৰ প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰি, আমি কব পাৰো ঃ যদি p, তেন্তে q। আমি এইটোৰো ক'ব পাৰো যে, 'p এ q ক সূচায়' আৰু এইটো $p \Rightarrow q$ ৰে নিৰ্দ্দেশ কৰোঁ।

এতিয়া, ধৰোঁ তোমাৰ এটা উক্তি হ'ল— 'যদি পানীৰ চৌবাচ্চাটো ক'লা ৰঙৰ তেন্তে ইয়াত কিছু পানী আছে'। ইয়াৰ আকাৰ $p \Rightarrow q$, য'ত অনুমান কৰা হৈছে যে, p (পানীৰ চৌবাচ্চাটো ক'লা) সিদ্ধান্ত হ'ল q (চৌবাচ্চাত কিছু পানী আছে)। ধৰো, আমি অনুমান আৰু সিদ্ধান্ত পৰস্পৰ সলনি কৰো, আমি কি পাম? আমি পাম $q \Rightarrow p$ অৰ্থাৎ, যদি চৌবাচ্চাত থকা পানী সামান্য হয় তেন্তে চৌবাচ্চাটো নিশ্চিতভাৱে ক'লা। এই উক্তিটোক $p \Rightarrow q$ উক্তিৰ বিপৰীত উক্তি বোলে।

সাধাৰণতে, $p \Rightarrow q$ উক্তিৰ বিপৰীত হ'ল $q \Rightarrow p$, য'ত p আৰু q উক্তি। মন কৰা, $p \Rightarrow q$ আৰু $q \Rightarrow p$ পৰস্পৰ এটা আনটোৰ বিপৰীত।

উদাহৰণ 13 ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ বিপৰীত উক্তি লিখা।

(i) যদি জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে, তেন্তে 17 আগষ্ট দেওবাৰ।

(ii) যদি 17 আগষ্ট দেওবাৰ, তেন্তে জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে।

(iii) যদি পলিনৰ খং উঠে তেন্তে তাইৰ মুখমণ্ডল ৰঙা হৈ পৰে।

(iv) যদি এজন ব্যক্তিৰ শিক্ষাতত্বত স্নাতক ডিগ্ৰী আছে, তেন্তে তেওঁক শিকাবলৈ অনুমতি দিয়া হ'ল।

(v) যদি এজন ব্যক্তি ভাইৰেল আক্ৰান্ত, তেন্তে তেওঁ উচ্চ তাপ বহন কৰি ফুৰিছে।

(vi) যদি আহমেদ মুম্বাইত আছে, তেন্তে তেওঁ ভাৰতত আছে।

(vii) যদি ABC ত্ৰিভুজ সমবাহু, তেন্তে ইয়াৰ সকলো অন্তঃকোণ সমান।

(viii) যদি x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা, তেন্তে xৰ দশমিক ৰূপ অশেষ অপৌনঃ পুনিক।

(ix) যদি $x - a$, $p(x)$ বহুপদ ৰাশিৰ উৎপাদকে, তেন্তে $p(a) = 0$.

সমাধান ঃ ওপৰৰ প্ৰতিটো উক্তিৰ আকাৰ $p \Rightarrow q$ । গতিকে, বিপৰীত নিৰ্ণয়ৰ বাবে, আমি প্ৰথমে p আৰু q চিনাক্ত কৰিম আৰু পাছত $q \Rightarrow p$ লিখিম।

(i) p : জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে আৰু q : 17 আগষ্ট দেওবাৰ। সেইবাবে, বিপৰীতটো হ'ল, যদি 17 আগষ্ট দেওবাৰ, তেন্তে জামিলাই এখন চাইকেল চলাইছে।

(ii) এইটো (i) ৰ বিপৰীত। সেইবাবে, ইয়াৰ বিপৰীত হ'ল (i) ত দিয়া উক্তিটো।

(iii) যদি পলিনৰ মুখমণ্ডল ৰঙা পৰিছে, তেন্তে তাইৰ খং উঠিছে।

(iv) যদি এজন ব্যক্তিক শিকাৰলৈ অনুমতি দিয়া হৈছে, তেন্তে তেওঁৰ শিক্ষাতত্ত্বত স্নাতক ডিগ্ৰী আছে।

(v) যদি এজন ব্যক্তি উচ্চ তাপত ভুগিছে, তেন্তে তেওঁ ভাইৰেল আক্ৰান্ত হৈছে।

(vi) যদি আহমেদ ভাৰতত আছে, তেন্তে তেওঁ মুম্বাইত আছে।

(vii) যদি ABC ত্ৰিভুজৰ সকলো অন্তঃকোণ সমান, তেন্তে ই সমবাহু।

(viii) যদি xঅৰ দশমিক ৰূপ অশেষ অপৌনঃপুনিক, তেন্তে xটো অপৰিমেয় সংখ্যা।

(ix) যদি $p(a) = 0$, তেন্তে, $x - a$, $p(x)$ বহুপদ ৰাশিৰ এটা উৎপাদক।

মন কৰিবলগীয়া ওপৰৰ উক্তিসমূহৰ প্ৰত্যেকৰে বিপৰীতটো আমি মাথো লিখিছোঁ, সিহঁত সত্য বা অসত্য ইয়াৰ ভ্ৰূক্ষেপ নকাৰকৈ। উদাহৰণ স্বৰূপে তলৰ উক্তিটো লোৱা হওঁক— যদি আহমেদ মুম্বাইত আছে, তেন্তে তেওঁ ভাৰতত আছে। এই উক্তিটো সত্য। কিন্তু, বিপৰীতটো লোৱা— যদি আহমেদ ভাৰতত আছে, তেন্তে তেওঁ মুম্বাইত আছে। এইটো সদায় সত্য হোৱাটো নিষ্প্ৰয়োজন। তেওঁ ভাৰতৰ অন্য অংশতো থাকিব পাৰে।

গণিতত, বিশেষকৈ জ্যামিতিত, তোমালোক বহুতো অৱস্থাৰ সন্মুখীন হ'বা য'ত $p \Rightarrow q$ সত্য আৰু তোমালোকে সিদ্ধান্ত লব লাগিব যে, বিপৰীতটো অৰ্থাৎ, $q \Rightarrow p$ ও সত্য।

উদাহৰণ 14 ঃ তলৰ উক্তিসমূহৰ বিপৰীত উক্তি লিখা। প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে, বিপৰীতটো সত্য নে অসত্য সিদ্ধান্ত দিয়া।

(i) যদি n যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে, $2n + 1$ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) যদি এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ দশমিক ৰূপ সীমিত, তেন্তে সংখ্যাটো পৰিমেয়।

(iii) যদি এডাল ছেদকে এযোৰ সমান্তৰাল ৰেখাক ছেদ কৰে তেন্তে প্ৰতিযোৰ অনুৰূপ কোণ সমান।

(iv) যদি এটা চতুৰ্ভুজৰ প্ৰতিযোৰ মুখামুখি বাহু সমান, তেন্তে চতুৰ্ভুজটো এটা সামান্তৰিক।

(v) যদি দুটা ত্ৰিভুজ সৰ্বসম, তেন্তে সিহঁতৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান।

সমাধান ঃ

(i) বিপৰীত উক্তি হ'ল— 'যদি $2n + 1$ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে n এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা'। এইটো এটা অসত্য উক্তি (উদাহৰণস্বৰূপে, $15 = 2(7) + 1$, আৰু 7 এটা অযুগ্ম)।

(ii) 'যদি এটা বাস্তৱ সংখ্যা পৰিমেয়, তেন্তে ইয়াৰ দশমিক ৰূপ সীমিত।' এইটো বিপৰীত উক্তি। এইটো এটা অসত্য উক্তি কাৰণ এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ অশেষ পৌনঃ পুনিক দশমিক ৰূপ থাকিব পাৰে।

(iii) বিপৰীতটো হ'ল— 'যদি এডাল ছেদকে দুডাল ৰেখাক এনেদৰে কটাকটি কৰে যে প্ৰতিযোৰ অনুৰূপ কোণ সমান, তেন্তে ৰেখাদুডাল সমান্তৰাল'। আমি ধৰিছিলো, স্বতঃসিদ্ধ

6.4ৰ মতে, নৱম শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথিত, যে এই উক্তিটো সত্য।

(iv) বিপৰীতটো হ'ল— 'যদি এটা চতুৰ্ভুজ সামান্তৰিক, তেন্তে ইয়াৰ প্ৰতিযোৰ মুখামুখি বাহু সমান' এইটো সত্য। (উপপাদ্য 8.1, IX শ্ৰেণীত)।

(v) বিপৰীতটো হ'ল— 'যদি দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান, তেন্তে সিহঁত সৰ্বসম'। এইটো এটা অসত্য উক্তি। আমি, এইটো তোমালোকলৈ এৰিলো, উপযুক্ত বিৰোধ উদাহৰণ বাচি উলিওৱা।

অনুশীলনী ঃ A1.5

1. তলৰ উক্তিবোৰৰ বিপৰীত উক্তি লিখা ঃ

(i) যদি টকিঅ'ত গৰম পৰিছে তেন্তে শাৰংগ যথেষ্ট ঘামিছে।

(ii) যদি শালিনীৰ ভোক লাগিছে তেন্তে তেওঁৰ পেটে কলমলাইছে।

(iii) যদি যশৱন্তই এটা জলপানি পায়, তেন্তে তেওঁ এটা ডিগ্ৰী লব পাৰে।

(iv) যদি এজোপা গছত ফুল আছে, তেন্তে ই জীৱিত।

(v) যদি এটা জন্তু এটা মেকুৰী, তেন্তে ইয়াৰ এডাল নেজ আছে।

2. তলৰ উক্তিবোৰৰ বিপৰীত লিখা। বিপৰীতবোৰ সত্যনে অসত্য বিচাৰ কৰা, প্ৰতিক্ষেত্ৰতে।

(i) যদি ABC ত্ৰিভুজ সমদ্বিবাহু, তেন্তে ইয়াৰ ভূমিসংলগ্ন কোণ সমান।

(ii) যদি এটা অখণ্ডসংখ্যা অযুগ্ম, তেন্তে ইয়াৰ বৰ্গ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

(iii) যদি $x^2 = 1$, তেন্তে, $x = 1$.

(iv) যদি ABCD এটা সামান্তৰিক তেন্তে AC আৰু BD পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

(v) যদি a, b আৰু c পূৰ্ণসংখ্যা তেন্তে $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(vi) যদি x আৰু y দুটা অযুগ্ম সংখ্যা তেন্তে, $x + y$ এটা যুগ্ম সংখ্যা।

(vii) যদি এটা সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰ এটা বৃত্তত থাকে তেন্তে ই এটা আয়ত।

A1.7. বিৰোধাচৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে প্ৰমাণ (Proof by Contradiction) ঃ

বৰ্তমানলৈকে, আমি সকলোবোৰ উদাহৰণতে সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ প্ৰত্যক্ষ যুক্তি ব্যৱহাৰ কৰিছোঁ। এতিয়া আমি পৰোক্ষ যুক্তি অৱতাৰণা কৰিমহঁক, বিশেষভাৱে, গণিতৰ এক শক্তিশালী হাতিয়াৰ যাক 'বিৰোধাচৰণেৰে প্ৰমাণ' বুলি জনা যায়। আমি, ইতিমধ্যে এই পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰথম অধ্যায়ত বহুতো সংখ্যাৰ অপৰিমেয়তা প্ৰতিষ্ঠা কৰিছিলো আৰু অন্যান্য অধ্যায়তো কিছুমান উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত ব্যৱহাৰ কৰি আহিছোঁ। ইয়াত, আমি আৰু কিছুমান উদাহৰণ লৈ ধাৰণাটো ব্যাখ্যা কৰিম।

আমি আৰম্ভ কৰাৰ আগতে, বিৰোধাচৰণনো কি তাক ব্যাখ্যা কৰোঁহক। গণিতত এটা বিৰোধাচৰণ

পোৱা হয় যেতিয়া আমি এটা উক্তি p আৰু ইয়াৰ নঞৰ্থক $\sim p$ দুয়োটা সত্য হয়। উদাহৰণস্বৰূপে,

$p : x = \frac{a}{b}$, য'ত a আৰু b পৰস্পৰ মৌলিক।

q : 2 ৰে 'a' আৰু 'b' দুয়োটাকে হৰণ যায়।

যদি, আমি ধৰোঁ যে p সত্য আৰু q ও সত্য বুলি দেখুওৱাৰ ব্যৱস্থা কৰোঁ, তেন্তে আমি এক বিৰোধাচৰণত উপস্থিত হ'লো কাৰণ q এ দিয়ে যে p ৰ নঞৰ্থক সত্য। তোমালোকে যদি মনত পেলোৱা, আমি $\sqrt{2}$ অপৰিমেয় বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ যত্ন কৰোঁতে যি ঘটিছিল তাৰ সৈতে এইটো একে (1ম অধ্যায় চোৱা)।

কেনেকৈ বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণে কাৰ্য্য কৰে? এটা নিৰ্দিষ্ট উদাহৰণৰ যোগেদি এইটো চোৱা যাওক।

ধৰাহ'ল, আমাক তলত দিয়াখিনি দিয়া হৈছে ঃ

সকলো মহিলা মৰণশীল। A এগৰাকী মহিলা। প্ৰমাণ কৰা যে A মৰণশীল।

যদিও এইটো এটা তেনেই সহজ উদাহৰণ, ইয়াক বিৰোধাচৰণেৰে কেনেকৈ প্ৰমাণ কৰিব পাৰি আমি চাওঁহক।

- আমি ধৰোঁ যে, আমি এটা উক্তি pৰ (ইয়াত আমি p : A মৰণশীল বুলি দেখুৱাব বিচাৰিছোঁ) সত্যতা প্ৰতিষ্ঠা কৰিব বিচাৰিছোঁ।
- সেয়ে, আমি উক্তিটো সত্য নহয় বুলি ধৰি আৰম্ভ কৰোঁহক, অৰ্থাৎ আমি ধৰোঁযে p ৰ নঞৰ্থক (অৰ্থাৎ, A মৰণশীল নহয়) সত্য।
- ইয়াৰ পাচত আমি p ৰ নঞৰ্থকৰ সত্যতাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত যুক্তিৰ এটা শ্ৰেণী বাহিৰ কৰি উলিয়াম।' (যিহেতু A মৰণশীল নহয়, আমি "সকলো মহিলা মৰণশীল।' উক্তিৰ এটা বিৰোধ উদাহৰণ পালো। সেয়ে, এইটো অসত্য যে সকলো মহিলা মৰণশীল।)
- যদি এইটোৰে আমাক এটা বিৰোধাচৰণলৈ আগবঢ়ায়, তেন্তে আমাৰ অশুদ্ধ ধাৰণা যে, p সত্য নহয় বুলি লোৱা বাবেই বিৰোধাচৰণ পোৱা গ'ল। (আমি এটা বিৰোধাচৰণ পালো, যিহেতু আমি দেখুৱালো যে 'সকলো মহিলা মৰণশীল' আৰু ইয়াৰ নঞৰ্থক উক্তি, 'সকলো মহিলা মৰণশীল নহয়' একেসময়তে সত্য। এই বিৰোধাচৰণ পোৱা গ'ল কিয়নো আমি ধৰিছিলো A মৰণশীল নহয়।
- সেইবাবে, আমি ধৰাটো ভুল, অৰ্থাৎ p সত্য হ'ব লাগিব (গতিকে A মৰণশীল) এতিয়া আমি কিছুমান গাণিতিক উদাহৰণ চাওঁহক ঃ

উদাহৰণ 15 ঃ এটা অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যা আৰু এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ পুৰণফল এটা অপৰিমেয়।

সমাধান ঃ

উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
আমি বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰিম। ধৰোঁ r এটা অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যা আৰু x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। ধৰোঁ $r=\frac{m}{n}$, m, n অখণ্ড সংখ্যা আৰু $m \neq 0$, $n \neq 0$ । আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে rx অপৰিমেয়।	
ধৰা হওঁক rx পৰিমেয়	ইয়াত, আমি প্ৰমাণ কৰিবলগীয়া উক্তিৰ নঞৰ্থক ধৰিছোঁ।
তেতিয়া, $rx=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা।	এইটো আগৰ উক্তি আৰু পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞাৰ পৰা অনুকৰণ কৰা হৈছে।
$rx=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ আৰু $r=\frac{m}{n}$ ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ, $x=\frac{p}{rq}=\frac{np}{mq}$.	
যিহেতু np আৰু mq অখণ্ড সংখ্যা আৰু $mq \neq 0$, x এটা পৰিমেয় সংখ্যা।	পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা আৰু অখণ্ড সংখ্যাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি।
এইটো এটা বিৰোধাচৰণ কাৰণ আমি দেখুৱালো। x এটা পৰিমেয় কিন্তু আকাৰ প্ৰকল্পত x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।	এইটো আমি বিচাৰিছিলো - যিটো এটা বিৰোধাচৰণ।
rx পৰিমেয় বুলি কৰা ভুল বিবেচনাৰ বাবেই বিৰোধাচৰণ উদ্ভৱ হ'ল। সেইবাবে rx এটা অপৰিমেয়।	যুক্তিৰে বাহিৰ কৰা হ'ল।

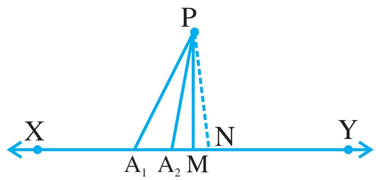
আমি এতিয়া উদাহৰণ (11) প্ৰমাণ কৰিম, কিন্তু এইক্ষেত্ৰত বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰিম। প্ৰমাণটো তলত দিয়া হ'ল ঃ

উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
ধৰা হওক যে, উক্তিটো সত্য নহয়	আগত দেখাৰ দৰে- কোনো এটা যুক্তি ‘বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰৰ আৰম্ভণি বিন্দুৱেই হ’ল এইটো।
গতিকে আমি ধৰিছোঁ যে, $p > 3$, এটা মৌলিক সংখ্যা আছে যিটো $6n + 1$ বা $6n + 5$, য’ত n এটা পূৰ্ণসংখ্যা, আকাৰত নপৰে।	এইটো ফলাফলটোত থকা উক্তিৰ নঞৰ্থক।
ইউক্লিডৰ বিভাজ্য সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি 6 ৰে হৰণ আৰু p, $6n + 1$ বা $6n + 5$ আকাৰৰ নহয় কথাষাৰ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ- $p = 6n$ বা $p = 6n +2$ বা $p = 6n +3$ বা $p = 6n +4$.	পূৰ্বতে প্ৰমাণিত ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰি।
সেইবাবে, p, 2 বা 3 ৰে হৰণ যায়	যক্তিৰে বাহিৰ কৰি লোৱা হ’ল
গতিকে, p এটা মৌলিক সংখ্যা নহয়	যুক্তিৰ ফল।
এইটো এটা বিৰোধাকৰণ, কাৰণ আমাৰ প্ৰকল্প-মতে p মৌলিক।	স্পষ্টকৈ যিটো আমি বিচাৰিছিলো।
এই বিৰোধাচৰণ উদ্ভৱ হ’ল কাৰণ আমি ধৰিছিলো যে এটা মৌলিক সংখ্যা $p > 3$ আছে যিটো $6n + 1$ বা $6n + 5$ আকাৰত নপৰে।	
সেয়ে, 3 তকৈ ডাঙৰ সকলো মৌলিক সংখ্যাৰ আকাৰ $6n + 1$ বা $6n + 5$.	আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হ’লো। ■

মন্তব্য ঃ ওপৰত দিয়া প্ৰমাণৰ উদাহৰণটোৱে তোমালোকক পুনৰ দেখুৱালে যে, এটা ফলাফলৰ প্ৰমাণ বিভিন্ন পন্থাৰে দিব পাৰি।

উপপাদ্য (Theorem) A1.2 ঃ এটা বিন্দুৰপৰা বিন্দুটোৰ মাজেৰে নোযোৱা এডাল ৰেখালৈ টনা সকলো ৰেখাখণ্ডৰ ভিতৰৰ আটাইতকৈ সৰু ৰেখাখণ্ডডাল ৰেখাডালৰ ওপৰত লম্ব।

প্ৰমাণ ঃ



চিত্ৰ A1.5

উক্তি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
ধৰো, XY প্ৰদত্ত ৰেখা, P, XY ৰেখাডালত নথকা এটা বিন্দু আৰু PM, PA_1, PA_2, . . . ইত্যাদি P বিন্দুৰ পৰা XY ৰেখালৈ টনা ৰেখাখণ্ড য'ত PM আটাইতকৈ সৰু (চিত্ৰ A1.5 চোৱা)	যিহেতু PM, PA_1, PA_2, . . . ইত্যাদিৰ মাজৰ আটাইতকৈ সৰুডাল XY ৰ ওপৰত লম্ব বুলি প্ৰমাণ কৰিব লাগে, আমি এই ৰেখাখণ্ডবোৰ লৈ আৰম্ভ কৰিছোঁ।।
ধৰো, PM, XY ৰ ওপৰত লম্ব নহয়	এইটো বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ কৰিব লগীয়া উক্তিৰ নঞৰ্থক।
XY ৰ ওপৰত PN এডাল লম্ব টনা হ'ল, চিত্ৰ A1.5 ও ফুটফুটৰেখাৰে দেখুওৱা হৈছে।	প্ৰায়ে আমি ফলাফল প্ৰমাণৰ সময়ত অংকন কৰিব লাগে।
PN হ'ল PM, PA_1, PA_2, . . . ইত্যাদি ৰেখা-খণ্ডৰ ভিতৰত আটাইতকৈ সৰু ৰেখাখণ্ড যিটোৰে দিয়ে, PN < PM	সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বাহু অতিভুজতকৈ সৰু আৰু সংখ্যাৰ প্ৰতিষ্ঠিত ধৰ্ম।
এইটোৰে, PM যে এনে ধৰণৰ সকলো ৰেখাখণ্ডৰ ভিতৰত আটাইতকৈ সৰু যিটো আমাৰ প্ৰকল্পটোক বিৰোধিতা কৰিছে।	পৰিষ্কাৰভাৱে যি আমাৰ ঈপ্সিত।
সেইবাবে, PM ৰেখাখণ্ড XY ৰ ওপৰত লম্ব	আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো।

অনুশীলনী ঃ A1.6

1. ধৰাহওক, $a + b = c + d$, আৰু $a < c$ । বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণেৰে দেখুওৱা যে $b>d$।
2. ধৰা r এটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু x এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে, $r + x$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।
3. বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে যদি এটা অখণ্ড সংখ্যা a ৰ বাবে a^2 যুগ্ম, তেন্তে a ও যুগ্ম।
   [**ইংগিত ঃ** a যুগ্ম নহয় বুলি ধৰা অৰ্থাৎ ইয়াৰ আকাৰ $2n + 1$, কোনো অখণ্ড সংখ্যা nঅৰ বাবে আৰু তাৰ পাছত আগবাঢ়া]
4. বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে, যদি এটা অখণ্ড সংখ্যা a ৰ বাবে, a^2, 3ৰে বিভাজ্য তেন্তে a ও 3 ৰে বিভাজ্য।

5. বিৰোধাচৰণৰ দ্বাৰা প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে, n ৰ কোনো মান নাই যাৰ বাবে 6^n শূন্য অংকত শেষ হয়।

6. বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণ কৰা যে এখন সমতল দুডাল ভিন্ন ৰেখাই এটাতকৈ বেছি বিন্দুত কটাকটি কৰিব নোৱাৰে।

A1.8. সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই পৰিশিষ্টত ভাগত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি শিকিলা ঃ

1. নৱম শ্ৰেণীত শিকি অহা বিভিন্ন ধাৰণা আৰু প্ৰমাণৰ ভিন্ন উপাদানৰ বিষয়ে।

2. এটা উক্তিৰ নঞৰ্থক।

3. এটা উক্তিৰ বিপৰীত উক্তি।

4. বিৰোধাচৰণৰদ্বাৰা প্ৰমাণ।

গাণিতিক আৰ্হিকৰণ (Mathematical Modelling)

পৰিশিষ্ট 2

A2.1. অৱতাৰণা (Introduction) ঃ

- এজন প্ৰাপ্তবয়স্ক মানুহৰ শৰীৰত প্ৰায় 1,50,000 কি. মি. নাড়ী আৰু সিৰ থাকে যি তেজ বহন কৰে।
- মানুহৰ হৃৎপিণ্ডই প্ৰতি 60 চেকেণ্ডত 5 ৰ পৰা 6 লিটাৰ তেজ শৰীৰত পাম্প কৰিব পাৰে।
- সূৰ্য্যৰ উপৰিভাগত তাপমান প্ৰায় 6,000° চেন্টিগ্ৰেড।

তোমালোকে কেতিয়াবা আশ্চৰ্য্য প্ৰকাশ কৰিছানে কেনেকৈ বিজ্ঞানী আৰু গণিতজ্ঞসকলে এই ফলাফলবোৰৰ সম্ভাব্য জোখমাপ উলিয়াব পাৰিছিল? তেওঁলোকে কোনো প্ৰাপ্তবয়স্ক মৃতদেহৰ পৰা নাড়ী আৰু সিৰ টানি উলিয়াই জোখ লৈছিলনে? তেওঁলোকে এই ফলাফলবোৰ পাবলৈ শৰীৰৰ তেজ উলিয়াই আনিছিলনে? তেওঁলোকে সূৰ্য্যৰ তাপমান নিৰ্ণয় কৰিবলৈ তাপমান যন্ত্ৰলৈ সূৰ্য্যলৈ গৈছিলনে? নিশ্চিতভাৱে নহয়। তেন্তে কেনেকৈ তেওঁলোকে এই সংখ্যাবোৰ পালে?

ঠিক আছে, তোমালোকৰ লগত নৱম শ্ৰেণীত পৰিচয় কৰোৱা গাণিতিক আৰ্হিতেই এইবোৰৰ উত্তৰ আছে। মনত পেলোৱা যে, এটা গাণিতিক আৰ্হি হৈছে কিছুমান বাস্তৱ জীৱনৰ ঘটনাৰ গাণিতিক বিশ্লেষণ। আৰু মনত পেলোৱা যে, গাণিতিক আৰ্হিকৰণ হ'ল এটা সমস্যাৰ গাণিতিক আৰ্হি সৃষ্টিৰ প্ৰক্ৰিয়া আৰু ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি সমস্যাটোৰ বিশ্লেষণ আৰু সমাধান নিৰ্ণয় কৰা।

সেইকাৰণে, গাণিতিক আৰ্হিকৰণত আমি বাস্তৱ জগতৰ সমস্যা লওঁ, আৰু ইয়াক সমতুল্য গাণিতিক সমস্যালৈ ৰূপান্তৰ কৰো। আমি পাছত ইয়াক সমাধান কৰো আৰু বাস্তৱ জগতৰ সমস্যাৰ পৰিৱেশত সমাধানটোৰ ব্যাখ্যা দিওঁ। আৰু পাছত আমি পোৱা সমাধানটোৰ যথাৰ্থতা চোৱাটো গুৰুত্বপূৰ্ণ যিটো আৰ্হিটোৰ স্থিতি যুক্তিসঙ্গত পৰ্য্যায়। কিছুমান উদাহৰণ, য'ত গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ গুৰুত্ব অতি বেছি, সেয়া হ'ল—

(i) এখন নদীৰ যাব নোৱাৰা অংশৰ গভীৰতা আৰু বেধ নিৰ্ণয়।

(ii) পৃথিৱী বা অন্য গ্ৰহৰ ভৰ নিৰ্ণয়।

(iii) পৃথিৱী আৰু অন্য গ্ৰহৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয়।
(iv) এখন ৰাষ্ট্ৰত মৌচুমী অহাৰ আগজাননী দিয়া।
(v) ষ্টক মাৰ্কেটৰ ধাৰা কি তাক অনুমান কৰা।
(vi) এজন ব্যক্তিৰ শৰীৰত থকা তেজৰ আয়তন নিৰ্ণয়।
(vii) 10 বছৰৰ পাছত এখন চহৰৰ জনসংখ্যা ভৱিষ্যৎবাণী কৰা।
(viii) এজোপা গছত থকা পাতৰ সংখ্যা অনুমান কৰা।
(ix) এখন চহৰৰ বায়ুমণ্ডলত থকা বিভিন্ন প্ৰদূষিত উপাদানৰ ppm নিৰ্ণয় কৰা।
(x) বায়ুমণ্ডলৰ প্ৰদূষণৰ প্ৰভাৱ নিৰ্ণয় কৰা।
(xi) সূৰ্য্যৰ উপৰিভাগৰ তাপমান নিৰ্ণয় কৰা।

এই অধ্যয়নত আমি গাণিতিক আৰ্হিকৰণ পদ্ধতি পুনৰ আলোচনা কৰিম আৰু ইয়াক ব্যাখ্যা কৰিবলৈ আমাৰ চাৰিওকাষৰ পৃথিৱীখনৰপৰা উদাহৰণ ল'ম।

অনুচ্ছেদ A2.2 ত আমি তোমালোকক এটা আৰ্হি প্ৰস্তুতকৰণৰ সকলো ঢাপৰ মাজেদি লৈ যাম। অনুচ্ছেদ A2.3 ও আমি বিভিন্ন উদাহৰণ আলোচনা কৰিম। অনুচ্ছেদ A2.4ত গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ গুৰুত্ব বিচাৰ কৰিম।

এটা কথা মনত ৰাখিবা যে, ইয়াত আমাৰ লক্ষ্য হ'ল তোমালোকক এটা গুৰুত্বপূৰ্ণ দিশৰ সম্ভেদ দিয়া য'ত গণিতে বাস্তৱ জগতৰ সমস্যা সমাধানত সহায় কৰে। যি কি নহওঁক, প্ৰকৃতাৰ্থত গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ প্ৰভাৱ প্ৰশংসা কৰিবলৈ তোমালোকে আৰু কিছু বেছি গণিত জনাটো দৰকাৰ হ'ব। উচ্চ শ্ৰেণীত কিছুমান উদাহৰণত এই স্বাদ তোমালোকে পাবা।

A2.2. গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ ঢাপ (Stages in Mathematical Modelling) ঃ

নৱম শ্ৰেণীত, আৰ্হিকৰণত ব্যৱহাৰ হোৱা কিছুমান উদাহৰণ আমি বিবেচনা কৰিছিলো। সেই বোৰে তোমালোকক ইয়াত জড়িত পদ্ধতি আৰু ঢাপ সম্পৰ্কে অন্তঃদৃষ্টি প্ৰদান কৰিছিলনে? গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ বিশেষ ঢাপবোৰ ততাতয়াকৈ পুনৰ বিচাৰ কৰোঁহক—

ঢাপ 1 ঃ **(সমস্যাৰ বোধগম্যতা) (Understanding the problem)** ঃ বাস্তৱ সমস্যাটোৰ সংজ্ঞা দিয়া, আৰু যদি দলগত কাৰ্য্য হয়, কাৰণসমূহ ব্যাখ্যা কৰা যিটো তোমালোকে বুজিব বিচাৰিছা। কিছুমান ধাৰণা লৈ সৰলীকৰণ কৰা আৰু কিছুমান উপাদান উপেক্ষা কৰা যাতে সমস্যাটো নিয়ন্ত্ৰণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰো আমাৰ সমস্যাটো হ'ল, এটা হ্ৰদত থকা মাছৰ পৰিমাণ (সংখ্যা) নিৰ্ণয় কৰা। এইটো সম্ভৱ নহয় যে, ইয়াৰ প্ৰতিটো মাছ ধৰি তাক হিচাপ কৰা। সম্ভৱত, আমি এটা নমুনা লব পাৰো আৰু ইয়াৰ যোগেদি হ্ৰদটোৰ মুঠ মাছৰ সংখ্যা অনুমান কৰিব পাৰো।

ঢাপ 2 ঃ **(গাণিতিক ব্যাখ্যা আৰু সূত্ৰ গঠন) (Mathematical description and formulation)** ঃ সমস্যাটোৰ বিভিন্ন দিশ গাণিতিক ৰূপত ব্যাখ্যা কৰা। বৈশিষ্ট্যসমূহক গাণিতিক ব্যাখ্যা দিয়াৰ কিছুমান নিয়ম হ'ল—

- চলকৰ সংজ্ঞা দিয়া।
- সমীকৰণ বা অসমতা লিখা।
- তথ্যসংগ্ৰহ আৰু তালিকাকৰণ।
- লেখ অংকন।
- সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

উদাহৰণস্বৰূপে, ঢাপ-1ত কোৱাৰ দৰে, এটা নমুনা লোৱা হ'ল, কেনেকৈ আমি গোটেইবোৰ অনুমান কৰিম? আমি তেতিয়া মাছৰ নমুনা চিহ্নিত কৰিব লাগিব, সিহঁতক হ্ৰদৰ বাকীবোৰৰ লগত মিলিবলৈ দিব লাগিব। আকৌ হ্ৰদটোৰ পৰা নমুনা লব লাগে। আৰু নতুন নমুনা আগৰ চিহ্নিত মাছ কিমান আছে চাব লাগিব। তেতিয়া অনুপাত আৰু সমানুপাত ব্যৱহাৰ কৰি আমি মুঠ মাছৰ সংখ্যাৰ এটা অনুমান কৰিব পাৰো। উদাহৰণস্বৰূপে, হ্ৰদৰ 20 টা মাছৰ নমুনা লোৱা হ'ল আৰু সিহঁতক চিহ্নিত কৰা হ'ল আৰু পুনৰ হ্ৰদত এৰি দি বাকী মাছৰ লগত মিলিবলৈ দিয়া হ'ল। আমি পাচত অন্য নমুনা (ধৰো 50) মিশ্ৰিত মাছৰ পৰা ললোঁ আৰু চালো কিমান চিহ্নিত মাছ আছে. গতিকে আমি আমাৰ তথ্য পালো আৰু ইয়াকে ব্যাখ্যা কৰিম।

আমাৰ ধাৰণা যে, আমি চিহ্নিত কৰা মাছখিনি বাকীখিনিৰ লগত সমভাৱে মিলি গৈছে আৰু আমাৰ নমুনাটো মুঠ মাছৰ এটা উপযুক্ত প্ৰতিনিধি।

ঢাপ 3 ঃ **(গাণিতিক সমস্যাৰ সমাধান) (Solving the mathematical problem)** ঃ ঢাপ-2 ত গঠন কৰা সৰল গাণিতিক সমস্যাটোত সমাধান বিভিন্ন গাণিতিক কৌশল প্ৰয়োগ কৰি কৰা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰো উদাহৰণটোৰ ঢাপ-2 ত দ্বিতীয় নমুনাত 5 টা চিহ্নিত মাছ আছিল। গতিকে, $\frac{5}{50}$ অৰ্থাৎ, $\frac{1}{10}$ অংশ মাছ চিহ্নিত কৰা হৈছিল। যদি এইটো, মুঠ মাছৰ আদৰ্শগত সংখ্যা হয় তেন্তে, $\frac{1}{10}$ অংশ মাছ $= 20$.

গতিকে, মুঠ মাছ $= 20 \times 10 = 200$.

ঢাপ 4 ঃ **(সমাধানৰ ব্যাখ্যা) (Interpreting the solution)** ঃ আগৰ ঢাপত পোৱা সমাধানটো চালে পাওঁ— ঢাপ-1ত আৰম্ভ কৰা বাস্তৱ জীৱনৰ সমস্যাৰ এটা ৰূপ।

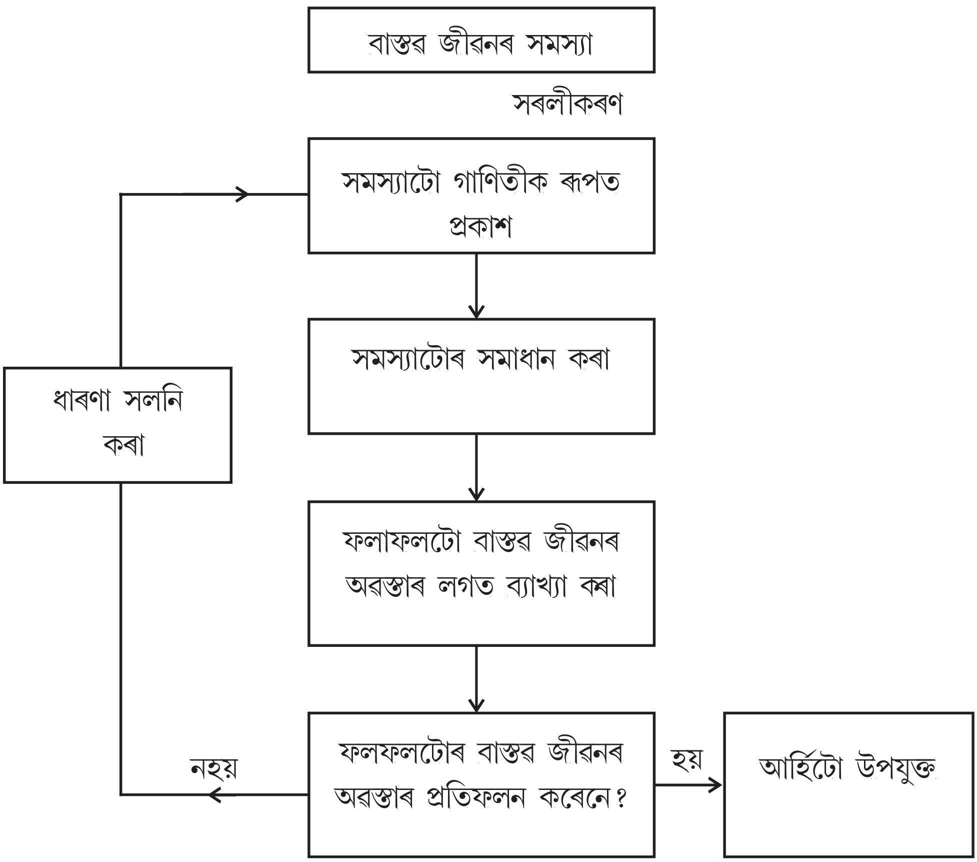
উদাহৰণস্বৰূপে, ঢাপ-3 ত পোৱা সমাধানে মাছৰ সংখ্যা দিয়ে, 200.

ঢাপ 5 ঃ **(আৰ্হিৰ বৈধতা স্থিতি) (Validating the model)** ঃ আমি মূল অৱস্থালৈ উভতি যাওঁ আৰু চাওঁ ফলাফলটোৱে যুক্তিগতভাৱে ক্ৰিয়া কৰে নে নকৰে? যদি কৰে, আমি নতুন তথ্য বা ধাৰণা পৰ্যাপ্ত নোহোৱালৈকে, তাক ব্যৱহাৰ কৰি যাম।

কেতিয়াবা আমি সৰল ধাৰণা লোৱা হেতু, আমি যেতিয়া গাণিতিক ৰূপ দিওঁ, বাস্তৱ সমস্যাটোৰ

আৱশ্যকীয় দিশ হেৰুৱাবলগীয়া হয়। এই ক্ষেত্ৰত, সমাধান প্ৰায়ে অপ্ৰাসংগিক হৈ পৰে, আৰু বাস্তৱ সমস্যাৰ প্ৰতিফলন নকৰে। যদি এইটো ঘটে, আমি ঢাপ-1 ত লোৱা ধাৰণা পুনৰ বিবেচনা কৰোঁহক আৰু সম্ভৱতঃ আগতে গ্ৰহণ নকৰা কিছু উপাদান সংযোগ কৰি সেইবোৰ বেছি বাস্তৱমুখী কৰি পুনৰীক্ষণ কৰা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, ঢাপ- 3 ত আমি মুঠ মাছৰ সংখ্যা অনুমান কৰিছিলো। এইটো পুখুৰীটোৰ মুঠ মাছৰ প্ৰকৃত সংখ্যা নহবও পাৰে। তাৰ পাছত আমি ঢাপ-2 আৰু ঢাপ-3 কিছুসময়ৰ বাবে পুনৰাবৃত্তি কৰি আৰু তাৰ গড় নিৰ্ণয় কৰি চাওঁ যে এই ফলাফলটো ভাল অনুমান হয়নে নহয়। এইটোৱে মাছৰ মুঠ সংখ্যাৰ নিচেই ওচৰৰ অনুমান দিয়ে।



চিত্ৰ A2.1

গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ পদ্ধতি দৃষ্টিগোচৰ কৰিবলৈ অন্য এটা পথ চিত্ৰ A2.1ত দেখুওৱা হ'ল। আৰ্হি প্ৰস্তুতকৰ্তাই সৰলীকৰণ (সমাধানৰ সহজ লভ্যতাৰ বাবে) আৰু শুদ্ধতাৰ মাজত ভাৰসাম্যতা

বজাই ৰাখিবলৈ দৃষ্টি ৰাখে। তেওঁলোকে আশা কৰে যে, আনুমানিক বাস্তৱতাই কিছু প্ৰগতি কৰিবলৈ প্ৰায় পৰ্য্যাপ্ত হ'ব। শ্ৰেষ্ঠ ফলাফলে কি ঘটিব বা ঘটাৰ সম্ভৱনা আছে তাক শুদ্ধভাৱে যুক্তিগত ভৱিষ্যৎবাণী কৰিব পাৰে। মনত ৰাখিবা সমস্যাটো সৰলীকৰণৰ বাবে লোৱা ভিন্ন ধাৰণাই ভিন্ন আৰ্হিৰ দিশে লৈ যাব পাৰে। গতিকে, কোনো আৰ্হি একেবাৰে শুদ্ধ নহয়। তাত ভাল আছে আৰু তাতকৈও ভাল এটা আছে।

অনুশীলনী ঃ A2.1

1. তলৰ অৱস্থাটো বিবেচনা কৰা ঃ

13 শতিকাৰ আগভাগত লিওনাৰ্ডো ফিবোনাচ্ছিয়ে, এটা সমস্যাত সুধিছিল— তুমি দুটা শহাপহুৰে আৰম্ভ কৰি সিহঁতক জন্মদিবলৈ দি কিমান শহাপহু পাবা? ধৰি লোৱা হৈছে যে, এযোৰ শহা পহুৰে প্ৰতিমাহত এযোৰ শহাপহু জন্ম দিয়ে আৰু প্ৰতিযোৰ শহাপহুৱে 2 মাহ বয়সত প্ৰথম জন্ম দিয়ে। মাহে মাহে শহাপহুৰ সংখ্যা দিয়া হৈছে— আগৰ দুটা মাহৰ শহাপহুৰ সমষ্টি পিছৰ মাহৰ শহাপহুৰ সংখ্যা, 0তম আৰু 1ম মাহক বাদ দি। 16 মাহৰ অন্তত তোমালোকে প্ৰায় মুঠ 1600 যে শহাপহু পাবা!

মাহ	শহাপহুৰ যোৰ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

পৰিষ্কাৰভাৱে, সমস্যাটো কোৱা আৰু এই অৱস্থাৰ বিভিন্ন ঢাপ উল্লেখ কৰি গাণিতিক আৰ্হি প্ৰস্তুত কৰা।

A2.3. কিছু ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ (Some Illustrations) ঃ

এতিয়া আমি গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ কিছুমান উদাহৰণ লওঁ—

উদাহৰণ 1 ঃ (এযোৰ লুডুগুটি ঘূৰোৱা) (Rolling of a pair of dice) ঃ ধৰাহ'ল, তোমালোকৰ শিক্ষকে তোমালোকক তলৰ অনুমান কৰিবলগীয়া খেলখনলৈ আহ্বান কৰিছে? তেওঁ এযোৰ লুডুগুটি ওপৰলৈ মাৰি পঠিয়াব আৰু পৰাৰ আগতে তোমালোকে লুডুগুটি দুটাৰ ওপৰলৈ ওলোৱা সংখ্যাৰ সমষ্টি ক'ব লাগে। প্ৰতিটো শুদ্ধ উত্তৰৰ বাবে তোমালোকে দুটা নম্বৰ পাবা আৰু অশুদ্ধ অনুমানৰ বাবে দুটা নম্বৰ হেৰুৱাবা। কোনটো সংখ্যা আটাইতকৈ ভাল অনুমান হ'ব?

সমাধান ঃ

চাপ 1 ঃ (সমস্যাটোৰ উপলব্ধি) (Understanding the problem) ঃ তোমালোকে জনাটো দৰকাৰ যে কোনটো কোনটো সংখ্যা ওপৰলৈ ওলোৱাৰ সম্ভাৱনা বেছি।

চাপ 2 ঃ (গাণিতিক ৰূপ) (Mathematical description) ঃ গাণিতিক কথাত সমস্যাটোৰ ৰূপান্তৰ হ'ল লুডুগুটি দুটাত ওপৰলৈ ওলোৱা সংখ্যাৰ সমষ্টিৰ বিভিন্ন সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

আমি অৱস্থাটোৰ আৰ্হি সহজভাৱে এযোৰ লুডু গুটি এবাৰ মাৰি পঠিয়ালে খেলিমেলিকৈ তলৰ ছয়ত্ৰিশটাযোৰৰ যিকোনো এটাৰ বাছনিৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰো ঃ

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

প্ৰতিযোৰৰ প্ৰথম সংখ্যাই প্ৰথম লুডুগুটিত ওলোৱা সংখ্যা আৰু দ্বিতীয় সংখ্যাই দ্বিতীয় লুডুগুটিত ওলোৱা সংখ্যাক সূচিত কৰে।

চাপ- 3 ঃ (গাণিতিক সমস্যাৰ সমাধান) (Solving the mathematical problem) ঃ ওপৰৰ প্ৰতি যোৰৰ সংখ্যাবোৰ যোগ কৰিলে আমি তলৰ সম্ভাব্য সমষ্টিবোৰ পাওঁ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 আৰু 12। আমি প্ৰত্যেকৰে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে, সকলো 36 যোৰ সমভাৱাপন্ন বুলি ধৰি লওঁ।

আমি এইটো তলৰ তালিকাত কৰিছোঁ—

সমষ্টি	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
সম্ভাৱিতা	$\frac{1}{36}$										

লক্ষ্য কৰা যে, সম্ভাব্য সমষ্টি সমূহৰ ভিতৰত 7 পোৱাৰ সম্ভাৱিতা $\frac{1}{6}$ হ'ল আটাইতকৈ বেছি।

ঢাপ 4 ঃ (সমাধানৰ ব্যাখ্যা) (Interpreting the solution) ঃ যিহেতু সমষ্টি 7 ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা আটাইতকৈ বেছি সেয়ে তোমালোকে বাৰে বাৰে সাত সংখ্যাটো আশা কৰিব পাৰা।

ঢাপ 5 ঃ (আৰ্হিৰ বৈধতা গ্ৰহণযোগ্যতা) (Validating the model) ঃ এযোৰ লুডুগুটি বহু সংখ্যক বাৰ মাৰি পঠিয়াই এখন আপেক্ষিক বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰি লোৱা। আপেক্ষিক বাৰংবাৰতা অনুৰূপ সম্ভাৱিতাৰ লগত তুলনা কৰা। যদি এইবোৰ ওচৰা-উচৰি নহয় তেন্তে লুডুগুটিটো পক্ষপাতদুষ্ট হব পাৰে। তেতিয়া, আমি তথ্য সংগ্ৰহ কৰি সংখ্যাটো নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব যিটোৰ প্ৰতি পক্ষপাতিত্ব আছে।

পৰবৰ্তী উদাহৰণলৈ যোৱাৰ আগতে তোমালোকে কিছু আঁৰৰ কথা জানি লব পাৰা—

টকা নোহোৱাকৈ তোমালোকে বিচাৰিছা কেতিয়া ইয়াৰ প্ৰয়োজন, এইটো বহুতো ব্যক্তিৰ সাধাৰণ অভিজ্ঞতা। দৈনন্দিন জীৱনৰ প্ৰয়োজনীয় সামগ্ৰী কিনিবলৈ বা আৰামদায়ক বস্তুৰ বাবে পৰ্যাপ্ত টকা হয়নে নহয়? আমাক সদায় টকা লাগে। গ্ৰাহকক সীমিত পুঁজিৰে গাড়ী, স্কুটাৰ, ৰেফ্ৰিজিৰেটৰ টেলিভিচন ইত্যাদি বস্তু কিনিব পৰাকৈ একোটা আঁচনি ব্যৱসায়ীসকলে প্ৰস্তুত কৰে যাক কিস্তিগত আঁচনি বুলি জনা যায়।

ব্যৱসায়ী উদ্দেশ্যলৈ কেতিয়াবা ব্যৱসায়ীসকলে উদ্ভাৱন কৰা একোখন আঁচনিৰ দ্বাৰা এনেবোৰ বস্তু গ্ৰাহকসকলে কিনাৰ ব্যৱস্থা কৰে। কিস্তিগত আঁচনিৰ অধীনত গ্ৰাহকজনে একেসময়ত সমুদায় ধন আদায় দিব নালাগে। তেওঁক এটা অংশ কিনোতে দিবলৈ দি বাকীখিনি কিস্তিভাবে দিবলৈ অনুমতি প্ৰদান কৰা হয় যিটো মাহেকীয়া, তিনিমহীয়া, ছমহীয়া বা আনকি বছৰেকীয়াও হব পাৰে। তাৰোপৰি, গ্ৰাহকজনে আঁচনিৰ কিস্তিতকৈ বেছিও দিব লগীয়া হয় কাৰণ বিক্ৰেতাই কিছু সুত ধন আদায় দিয়া তাৰিখ পলম হ'লে (পলম হোৱা দেয়ধন বুলি কয়) আৰোপ কৰে। কিস্তি আঁচনি ভালদৰে বুলিবলৈ কিছু উদাহৰণ লোৱাৰ আগতে আমি এই ক্ষেত্ৰত সঘনাই ব্যৱহৃত শব্দৰ ধাৰণা বুজি লওঁ।

নগদ ধন (Cash price) হ'ল এজন গ্ৰাহকে এটা বস্তু কিনোতে আদায় দিবলগীয়া সম্পূৰ্ণ ধনৰাশি। নগদ আমানত ধন (cash down payment) হ'ল গ্ৰাহকজনে বস্তুটো কিনাৰ সময়ত তাৰ মূল্যৰ কিছু অংশ দিবলগীয়া ধনৰ পৰিমাণ।

মন্তব্য ঃ যদি কিস্তি আঁচনিখন এনেকুৱা যে বাকী থকা ধনৰাশি সম্পূৰ্ণৰূপে বস্তুটো কিনাৰ এবছৰৰ ভিতৰত আদায় দিব লাগে তেন্তে পলম হোৱা ধনৰ ওপৰত সৰল সুত আৰোপ কৰে।

> অতীতত ধাৰে লোৱা ধনৰ ওপৰত সুত আৰোপ কৰাটো একৰকম অপৰাধ আছিল আৰু বিশেষতঃ বাধা আছিল। সুত আদায়ৰ বিপৰীতে এটা মুদ্ৰাত ধাৰে লোৱা ধন, অন্য মুদ্ৰাত আদায় দিব লাগে, মুদ্ৰা পৰিবৰ্তনৰ হাৰ সুত গোপনে ৰখা হৈছিল।

এতিয়া আমি এটা ইয়াৰ লগত সংগত থকা গাণিতিক আৰ্হিকৰণ সমস্যা লওঁহক।

উদাহৰণ 2 ঃ যোশীয়ে এখন বাইচাইকেল কিনিবলৈ বিচাৰে। তেওঁ বজাৰলৈ গ'ল আৰু তেওঁ ভাল লগা চাইকেলখন 1800 টকাত বিচাৰি পালে। যোশীৰ হাতত 600 টকা আছে। সেইবাবে তেওঁ দোকানীজনক কলে যে, তেওঁ কিনিবলৈ অপাৰগ। দোকানীজনে কিছুমুহূৰ্তৰ হিচাপৰ অন্তত তলৰ সুবিধাটো দিলে। তেওঁ যোশীক কলে যে, তেওঁ 600 টকা আমানত ধন দি চাইকেলখন লৈ যাব পাৰিব আৰু বাকীধন দুটা কিস্তিত 610 টকাকৈ আদায় দিব পাৰিব। যোশীৰ দুটা ব্যৱস্থা আছে— এফালে কিস্তি আঁচনি গ্ৰহণ কৰিব পাৰে বা বেংকৰ পৰা বছৰি 10% সৰল হাৰসুতে ধাৰ লৈ নগদ ধন দি চাইকেলখন নিব পাৰে। কোনটো ব্যৱস্থা তেওঁৰ বাবে বেছি লাভজনক?

সমাধান ঃ

চাপ 1 ঃ (সমস্যাটো হৃদয়ঙ্গম কৰা) (Understanding the problem) ঃ যোশীয়ে নিৰ্ণয় কৰিবলগীয়া কথাটো হ'ল তেওঁ দোকানীজনে দিয়া সুবিধাটো গ্ৰহণ কৰাটো উচিত হয় নে নহয়। এইকাৰণে, তেওঁ দুয়োটা সুতৰ হাৰ— এটা কিস্তিত আঁচনিমতে আৰোপিত আৰু আনটো বেংকৰ দ্বাৰা আৰোপিত (অৰ্থাৎ 10%)।

চাপ 2 ঃ (গাণিতিক ৰূপ) (Mathematical description) ঃ আঁচনিখন গ্ৰহণ কৰা বা অগাহ্য কৰিবলৈ তেওঁ, বেংকৰ দ্বাৰা আৰু দোকানীজনে আৰোপ কৰা সুতৰ হাৰৰ তুলনা কৰাটো দৰকাৰ। লক্ষ্যকৰা যে, সম্পূৰ্ণ ধন এবছৰৰ ভিতৰত আদায় দিব লাগে, সুতৰ হাৰ সৰল হ'ব।

আমি জানো যে, চাইকেলখনৰ নগদ ধন = 1800 টকা

আৰু আমানত ধন - কিস্তি আঁচনিত = 600 টকা

গতিকে, কিস্তি আঁচনিত বাকী হিচাপে থকা ধনৰ পৰিমাণ = (1800 – 600) টকা
= 1200 টকা

ধৰো, দোকানীজনে আৰোপ কৰা সুতৰ হাৰ r %

প্ৰতিটো কিস্তিৰ মূল্য = 610 টকা

কিস্তিত দিয়া ধন = 610 + 610 = 1220 টকা

কিস্তি আঁচনিত দিয়া সুত = 1220 – 1200 = 20 টকা ..... (1)

যিহেতু যোশীয়ে এমাহৰ বাবে 1200 টকা ৰাখিব, সেইবাবে

প্ৰথম মাহৰ মুলধন = 1200 টকা

দ্বিতীয় মাহৰ মুলধন = (1200 – 610) টকা = 590 টকা

দ্বিতীয় কিস্তিৰ মুলধন 590 টকা + আৰোপিত সুত (20 টকা) = মাহেকীয়া কিস্তি (610 টকা) = দ্বিতীয় কিস্তি।

গতিকে, এমাহৰ মুঠ মুলধন = 1200 + 590 টকা = 1790 টকা

এতিয়া সুত $= \dfrac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ টকা ..... (2)

ঢাপ 3 ঃ (সমস্যা সমাধান) (Solving the problem) ঃ

$$(1) \text{ আৰু } (2) \text{ ৰ পৰা } \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

$$\text{বা } r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \quad (\text{আসন্ন})$$

ঢাপ 4 ঃ (সমাধানৰ ব্যাখ্যা) (Interpreting the solution) ঃ

কিস্তি আঁচনিত আৰোপিত সুতৰ হাৰ = 13.14 %.

বেংকৰ দ্বাৰা আৰোপিত সুতৰ হাৰ = 10%

সেইবাবে, তেওঁ বেংকৰ পৰা ধাৰ লৈ চাইকেলখন কিনাটো উচিত যিটো তেওঁৰ বাবে বেছি লাভদায়ক।

ঢাপ 5 ঃ (আৰ্হিৰ যথাৰ্থতা) (Validating the model) ঃ এইক্ষেত্ৰত এই ঢাপটোৰ বিশেষ গুৰুত্ব নাই কাৰণ সংখ্যাটো নিৰ্দ্ধাৰিত। যি কি নহওক, ঋণ লোৱাৰ বাবে কৰিবলগীয়া আনুষ্ঠানিকতা যেনে দলিলৰ খৰচ ইত্যাদি, যিটোৱে কিস্তি আঁচনিৰ হাৰতকৈ বেছি সুতৰ হাৰ কৰিব পাৰে তেতিয়া তেওঁৰ সিদ্ধান্ত সলনি কৰিব পাৰে।

মন্তব্য ঃ সুতৰ হাৰৰ আৰ্হিকৰণ বৰ্তমানেও ইয়াৰ প্ৰাথমিক পৰ্য্যায়ত আছে আৰু যথাৰ্থতা (গ্ৰহণযোগ্যতা) এতিয়াও অৰ্থনীতিৰ বজাৰত এটা সমস্যা হৈয়ে আছে। মুঠতে, বিভিন্ন সুতৰ হাৰ আৰোপ কৰি কিস্তি, গ্ৰহণযোগ্যতা ব্যৱস্থা কৰাটো এটা গুৰুত্বপূৰ্ণ সমস্যা।

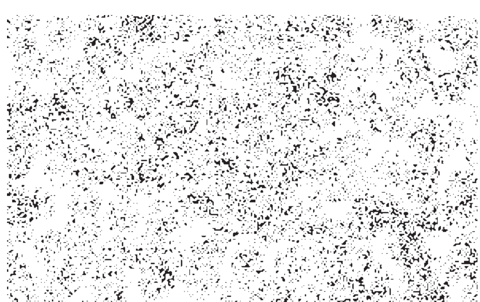
অনুশীলনী ঃ A2.2

তলৰ প্ৰতিটো সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত, সমস্যা সমাধানৰ বাবে গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ বিভিন্ন ঢাপবোৰ দেখুওৱা ঃ

1. এজন পক্ষীবিদে এখন বিশাল ক্ষেত্ৰৰ ভাটৌৰ সংখ্যা হিচাপ কৰিব বিচাৰিলে। তেওঁ এখন জাল ব্যৱহাৰ কৰি কিছুমান চৰাই ধৰিবলৈ মনস্থ কৰিলে আৰু 32 টা ভাটৌ ধৰিলে, যিবোৰক তেওঁ আঙুঠি পিন্ধালে আৰু এৰি দিলে। পিছৰ সপ্তাহত তেওঁ 40 টা ভাটৌ জালত পেলালে, তাৰে 8 টা আঙুঠি আছিল।

(i) তেওঁ দ্বিতীয়বাৰ ধৰা চৰাইৰ কিমান অংশৰ আঙঠি আছিল?

(ii) ক্ষেত্ৰখনত মুঠ কিমান ভাটৌ আছিল তাৰ এটা হিচাপ দিয়া।



2. ধৰো সংলগ্ন ছবিটোৱে এখন হাবিৰ আকাশমাৰ্গৰ পৰা লেৱো ফটোগ্ৰাফ নিৰ্দেশ কৰিছে য'ত প্ৰতিটো ডটে এডাল গছ বুজাইছে। পৰিবেশ পিয়লৰ অংশ হিচাপে এই ঠাইত থকা গছৰ সংখ্যা নিৰূপণ কৰাটো তোমাৰ উদ্দেশ্য।

3. এটা টেলিভিচন নগদ 24000 টকাত বা আমানত ধন 8000 টকা দি বাকীখিনি ছয়টা মাহেকীয়া কিস্তি 2800 টকাকৈ দি কিনিব পাৰি। আলী বজাৰলৈ টেলিভিচন কিনিবলৈ গ'ল আৰু তেওঁৰ হাতত 8000 টকা আছে। তেওঁৰ দুটা সুবিধা আছে। এফালে তেওঁ কিস্তিত কিনিব পাৰে অথবা তেওঁ কোনো টকা ধাৰে দিয়া সমিতিৰ পৰা ঋণ লৈ কিনিব পাৰে। সমিতিখনে বছৰি সৰল সুতৰ হাৰ 18% আৰোপ কৰিছে। আলীৰ বাবে কোনটো সুবিধা ভাল?

A2.4. কিয় গাণিতিক আৰ্হিকৰণ গুৰুত্বপূৰ্ণ? (Why is Mathematical Modelling Important?) ঃ

আমি উদাহৰণবোৰত দেখাৰ দৰে গাণিতিক আৰ্হিকৰণ হ'ল উমৈহতীয়া বিষয়। গণিতজ্ঞ আৰু আন ক্ষেত্ৰৰ পাৰদৰ্শী ব্যক্তিসকলে তেওঁলোকৰ জ্ঞানৰ আদান প্ৰদান কৰে আৰু বৰ্তমান থকা বস্তুবোৰৰ উন্নতি আৰু ভাল সৃষ্টি বা নিৰ্দিষ্ট বস্তুৰ বৈশিষ্ট্যৰ আগজাননী দিয়াত শ্ৰেষ্ঠতা উজাৰি দিয়ে।

- **বোধগম্যতা বৃদ্ধিৰ বাবে ঃ** যদি আমি বাস্তৱ পৃথিৱীখনৰ সুত ব্যৱস্থাৰ আৱশ্যকীয় চৰিত্ৰ প্ৰতিফলিত কৰিব পৰা এটা গাণিতিক আৰ্হি পাওঁ, আৰ্হিটো বিশ্লেষণ কৰি ব্যৱস্থাটো ভালদৰে বুজিব পাৰো। ইয়াৰ উপৰিও, আৰ্হি প্ৰস্তুত কৰণৰ পদ্ধতিত আমি পাওঁ যে ব্যৱস্থাটোৰ কোনটো উপাদান আটাইতকৈ বেছি গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰু কেনেকৈ অন্যান্য দিশসমূহৰ সম্বন্ধ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।
- **ভৱিষ্যৎবাণী বা আগজাননী বা বাজীধৰা ঃ** প্ৰায়ে আমি জানিব বিচাৰো যে এটা বাস্তৱ পৃথিৱীৰ অৱস্থা ভৱিষ্যতে কি হ'ব, কিন্তু ব্যৱস্থাটোৰ লগত প্ৰত্যক্ষভাৱে পৰীক্ষা কৰিবলৈ এইটো খৰচী, অব্যৱহাৰিক, অসম্ভৱ। উদাহৰণস্বৰূপে, বতৰৰ আগজাননী, মানুহৰ ওপৰত দৰৱৰ ফলাফল অধ্যয়ন, এটা নিউক্লীয়েৰ ৰিয়েক্টৰৰ সৰ্বোত্তম চানেকি নিৰ্ণয় আৰু বহুতো।

বহুতো সংগঠনৰ (সংস্থাৰ) বাবে আগজাননী এটা গুৰুত্বপূৰ্ণ বিষয়, কিয়নো সিদ্ধান্ত লোৱা পদ্ধতিত ভৱিষ্যতৰ ঘটনাবোৰৰ আগজাননী প্ৰাধান্য দিব লাগিব। উদাহৰণস্বৰূপে, বজাৰ বিভাগত প্ৰয়োজনীয়তাৰ গ্ৰহণযোগ্য আগজাননীয়ে বিক্ৰীনীতিৰ আঁচনি ৰূপায়ণত সহায় কৰে।

এখন শিক্ষা ব'ৰ্ডে বিভিন্ন জিলাত স্কুললৈ যোৱা ল'ৰা-ছোৱালীৰ বৰ্দ্ধিত সংখ্যাৰ আগজাননী দিবলৈ সক্ষম হোৱা দৰকাৰ যাতে ক'ত আৰু কেতিয়া নতুন বিদ্যালয় স্থাপনৰ সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰে।

প্ৰায়ে, আগজাননী দিওঁতাসকলে ভৱিষ্যতৰ আগজাননী দিবলৈ পুৰণা (অতীতৰ) তথ্য ব্যৱহাৰ কৰে। তেওঁলোকে তথ্যসমূহ এটা ক্ৰমত বিশ্লেষণ কৰি এটা চানেকি তৈয়াৰ কৰে যিটোৱে ইয়াক ব্যাখ্যা কৰিব পাৰে। তাৰ পাছত এই তথ্য আৰু চানেকিৰ পৰিসৰ বৃদ্ধি কৰে আৰু ভৱিষ্যতৰ আগজাননী প্ৰস্তুত কৰে। এই প্ৰাথমিক নীতি সৰহ সংখ্যক আগজাননী ব্যৱস্থাতে প্ৰয়োগ কৰে আৰু ধাৰণা কৰি লয় যে নিৰ্ণয় কৰা চানেকিটো ভৱিষ্যতলৈও চলি থাকিব।

- **অনুমান নিৰূপণ কৰিবলৈ ঃ** প্ৰায়ে আমি বৃহৎ সংখ্যাৰ অনুমান কৰিব লাগে। তোমালোকে হাবিৰ গছৰ সংখ্যা, হ্ৰদৰ মাছৰ সংখ্যা, ইত্যাদি উদাহৰণবোৰ দেখিলা। আন এটা উদাহৰণ হ'ল— নিৰ্বাচনৰ আগত প্ৰতিযোগী দলসমূহে তেওঁলোকৰৰ দলে নিৰ্বাচনত জয়লাভ কৰাৰ সম্ভাৱিতাৰ ভৱিষ্যতবাণী কৰিবলৈ বিচাৰে। বিশেষত ঃ তেওঁলোকে তেওঁলোকৰ সমষ্টিৰ কিমান ভোটাৰে তেওঁলোকৰ দলক ভোট দিব তাক জানিবলৈ বিচাৰে। তেওঁলোকৰ ভবিষ্যৎবাণীৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি তেওঁলোকে নিৰ্বাচনী প্ৰচাৰ নীতিৰ সিদ্ধান্ত লব পাৰে। নিৰ্বাচনী সমীক্ষাক বিস্তৃতভাৱে ব্যৱহাৰ কৰি এটা দলে নিৰ্বাচনত কিমান আসন লাভ কৰিব তাক ভৱিষ্যৎবাণী কৰে।

অনুশীলনী ঃ A2.3

1. যোঁৱা পাঁচ বছৰৰ তথ্য লৈ তোমালোকৰ বিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰই গণিতত দশম শ্ৰেণীৰ ব'ৰ্ডৰ বছেৰেকীয়া পৰীক্ষাত লাভ কৰা গড় শতাংশ উলিয়াবলৈ যত্ন কৰা আৰু ভৱিষ্যৎবাণী কৰা।

A2.5. সাৰাংশ (Summary) ঃ

এই পৰিশেষ অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি অধ্যয়ন কৰিলা ঃ

1. এটা গাণিতিক আৰ্হি হ'ল এটা বাস্তৱ জীৱনৰ অৱস্থাৰ এক গাণিতীক ব্যাখ্যা। গাণিতিক আৰ্হিকৰণ হ'ল, এটা গাণিতিক আৰ্হিৰ সৃষ্টি। ইয়াৰ সমাধান আৰু বাস্তৱ জীৱনৰ সমস্যা উপলব্ধিত ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা প্ৰক্ৰিয়া।

2. আৰ্হিকৰণৰ লগত জড়িত বিভিন্ন ঢাপবোৰ হ'ল— সমস্যাৰ বোধগম্যতা, গাণিতিক আৰ্হি প্ৰস্তুতকৰণ, ইয়াৰ সমাধান, বাস্তৱজীৱনৰ অৱস্থাৰ লগত ইয়াৰ ব্যাখ্যা আৰু বিশেষ গুৰুত্বপূৰ্ণভাৱে, আৰ্হিৰ বৈধ্যতা।

3. কিছুমান গাণিতিক আৰ্হিৰ গঠন।

4. গাণিতিক আৰ্হিকৰণৰ গুৰুত্ব।

উত্তৰ / ইংগিত (Answers/Hints)

পুণৰালোচনা

অনুশীলনী ঃ R–1

1. (a) 12 : 21 আৰু 32 : 56
2. (b) 10, 20, 30, 60
3. (i) বাঢ়ে, কমে, (ii) (a) প্ৰত্যক্ষ, (b) 24, (c) 7, (d) 9
4. (c) 10
5. (c) 4

অনুশীলনী ঃ R–2

1. (i) 4 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 9
2. (i) এককৰ স্থানত 7 থাকিলে পূৰ্ণবৰ্গ নহয়
   (ii) এককৰ স্থানত 8 থাকিলে পূৰ্ণবৰ্গ নহয়
   (iii) এককৰ স্থানত 2 থাকিলে পূৰ্ণবৰ্গ নহয়
   (iv) পূৰ্ণবৰ্গ হ'বলৈ সোঁফালে দুটা শূন্য একেলগে থাকিব লাগিব।
3. (i) 361 (ii) 1369 (iii) 2809 (iv) 6084
4. (i) 42 (ii) 96 (iii) 88 (iv) 99
5. (i) 61 (ii) 7 (iii) 3 (iv) 3
6. (i) 13 (ii) 11 (iii) 5 (iv) 5
7. 42
8. 900
9. (i) 46 (ii) 69 (iii) 24 (iv) 78
10. (i) 3.5 (ii) 4.9 (iii) 12.1 (iv) 10.1
11. (a) 169 (b) 19^2 (c) 36 (d) 572 (e) 4.5

অনুশীলনী ঃ R–3

1. (i) আৰু (iii) পূৰ্ণঘন নহয়।

2. (i) 6859 (ii) 9261 (iii) 12,167 (iv) 19,683
3. (i) 4 (ii) 2 (iii) 7 (iv) 3
4. (i) 2 ৰে (ii) 3 ৰে (iii) 5 ৰে (iv) 9 ৰে
5. (i) 6 ৰে (ii) 3 ৰে (iii) 5 ৰে (iv) 2 ৰে
6. (i) 11 (ii) 12 (iii) 13 (iv) 14
7. (i) 15 (ii) 17 (iii) 21 (iv) 24
8. (i) 23 (ii) 20 (iii) 16 (iv) 18
9. 1.728 ঘন ছে.মি.। 10. 19 ছে.মি.।
11. (a) 7 (b) 343 (c) 10 (d) m^3 (e) 9

অনুশীলনী ঃ R–4

1. (i) 1331 (ii) 2000 (iii) 32 (iv) $\frac{1}{16}$
2. (i) 3^6 (ii) 5^3 (iii) $2^4\times3^2\times5^2$ (iv) $2^8\times3^4$
3. (i) 225 (ii) 65,536 (iii) 1 (iv) $\frac{512}{125}$
4. (i) $2^8 > 8^2$ (ii) $2.7\times10^{12} > 1.5 \times10$
5. (i) $\frac{1}{(-14)^3}$ (ii) $\frac{1}{5^4}$
6. (i) 3.43×10^6 (ii) 7.001×10^{10}
   (iii) 1.5510^{-7} (iv) 1.436×10^{-5}
7. (i) 1000100000 (ii) 0.00000302
8. 1 9. 1.275×10^{-5}
10. 100.08 ছে.মি.
11. (a) (iii) $\frac{1}{3^3}$ (b) (iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ (c) (ii) $\frac{16}{81}$ (d) (iv) 6.4×10^{-5}
    (e) (ii) 0.0000203

অনুশীলনী ঃ R–5

1. (i) $14pq$ (ii) $4x$

	(iii)	10	(iv) $x^2\ y^2$
2.	(i)	$4a^2\,(1+2a)$	(ii) $7xy\ (x-3y)$
	(iii)	$abc\ (a+b+c)$	(iv) $a^2\,(a-b^2)$
3.	(i)	$(x+y)\ (x+6)$	(ii) $(y+1)\ (x+1)$
	(iii)	$2\times3x\ (2x-1)\ (2y+1)$	(iv) $(7-z)\ (xy-1)$
4.	(i)	$(2x+3)\ (2x+3)$	(ii) $(5m+3)\ (5m+3)$
	(iii)	$(x-5)\ (x-5)$	(iv) $(11b-4c)\ (11b-4c)$
	(v)	$(3p+4q)\ (3p-4q)$	(vi) $4\ lm$
	(vii)	$(x-15)\ (x-2)$	(viii) $(y-9)\ (y+4)$
	(ix)	$(y-7)\ (4y-3)$	(x) $3x^2\ (x^4-2y-15y^2)$
5.	(i)	$3y^4-4y^2+15$	(ii) $1-p^3$
6.	(i)	5	(ii) $4\ (y^2+5y+3)$
7.	(i)	$(4x-3)$	(ii) $(m-16)$

অনুশীলনী ঃ R–6

1. পৰিসীমা = 32 ছে.মি. আৰু কালি = 48 বৰ্গ ছে.মি.

2. পৰিসীমা = 40 ছে.মি. আৰু কালি = 75 বৰ্গ ছে.মি.

3. 49 বৰ্গ ছে.মি.

4. 18 বৰ্গ ছে.মি.

5. 32 বৰ্গ ছে.মি.

6. 5312.5 বৰ্গমিটাৰ

7. (i) 52 মিটাৰ, (ii) 120 বৰ্গমি.

8. 20 মি.

9. 6 মিটাৰ।

10. 6 ডেকামিটাৰ

11. 96 মিটাৰ

12. 3096 বৰ্গমিটাৰ

13. 13 মিটাৰ

14. 35 বৰ্গমিটাৰ

15. 30 মিটাৰ

16. 7.60 বৰ্গমিটাৰ

17. 176 ছে.মি.

18. 38.5 বৰ্গছে.মি.

19. 15 মিটাৰ

20. 808.5 বৰ্গমিটাৰ

21. প্ৰথম ঘনকটোৰ পৃষ্ঠকালিৰ পৰিমাণ বেছি, দুয়োটাৰে পৃষ্ঠকালিৰ পাৰ্থক্য 430 ছে.মি.^{2}, প্ৰথমটোৰ আয়তন 2850 ছে.মি.^{3}।

22. 20 মিটাৰ

23. 10 মিটাৰ

24. 202 খন (প্ৰায়) 25. 17600 ছে.মি.^{3}

26. B ৰ আয়তন অধিক 27. 1 মিটাৰ

28. (i) 748 বৰ্গমিটাৰ, (ii) 241.37 বৰ্গমিটাৰ, (iii) 2288 বৰ্গমিটাৰ

29. (i) 1760 বৰ্গছে.মি. (ii) 2992 বৰ্গ ছে.মি. (iii) 12320 ঘন ছে.মি.

30. (i) 8 মিটাৰ (ii) 9 মিটাৰ।

অনুশীলনী ঃ 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51 (iv) 8 (v) 45 (vi) 5 (vii) 24 (viii) 22

2. এটা অখণ্ড সংখ্যা $6q$, $6q + 1$, $6q + 2$, $6q + 3$, $6q + 4$ বা $6q + 5$ আকাৰৰ হ'ব পাৰে।

3. 8 টা স্তম্ভ।

4. এটা অখণ্ড সংখ্যা $3q$, $3q + 1$ বা $3q + 2$ আকাৰৰ হ'ব পাৰে। সকলোবোৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ।

5. এটা অখণ্ড সংখ্যা $9q$, $9q + 1$, $9q + 2$, $9q + 3$, . . ., বা $9q + 8$ আকাৰৰ হ'ব পাৰে।

6. 25 টা **7.** 16 ছে.মি.

অনুশীলনী ঃ 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) ল.সা.উ. = 182; গ.সা.উ. = 13 (ii) ল.সা.উ. = 23460; HCF = 2

(iii) ল.সা.উ. = 3024; গ.সা.উ. = 6

3. (i) ল.সা.উ. = 420; গ.সা.উ. = 3 (ii) ল.সা.উ. = 11339; HCF = 1

(iii) ল.সা.উ. = 1800; গ.সা.উ. = 1

4. 22338 **7.** 36 মিনিট **8.** (i) 300 (ii) 180 চেকেণ্ড (iii) 5 বাৰ

অনুশীলনী ঃ 1.4

1. (i) পৰিসমাপ্ত (সাৰধি) (ii) পৰিসমাপ্ত (সাৰধি)

(iii) নিৰবধি (অপৰিসমাপ্ত) পৌনঃপুনিক (iv) পৰিসমাপ্ত বা সাৰধি

(v) নিৰবধি (অপৰিসমাপ্ত) পৌনঃপুনিক (vi) পৰিসমাপ্ত বা সাৰধি

(vii) নিৰবধি (অপৰিসমাপ্ত) পৌনঃপুনিক (viii) পৰিসমাপ্ত বা সাৰধি

(ix) পৰিসমাপ্ত বা সাৰধি (x) নিৰবধি (অপৰিসমাপ্ত) পৌনঃপুনিক

2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375 (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) পৰিমেয়, qৰ মৌলিক উৎপাদক 2 বা 5 বা উভয়।

(ii) পৰিমেয় নহয়।

(iii) পৰিমেয়, qৰ মৌলিক উৎপাদকৰো 2 বা 5ৰ বাহিৰে অন্য এটা উৎপাদক থাকিব।

অনুশীলনী ঃ 2.1

1. (i) শূন্য নাই (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

অনুশীলনী ঃ 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ (iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

3. (i) $2x^2 + 5x - 12$ (ii) $x^2 - 3x - 10$ (iii) $3x^2 + 2x - 1$

(iv) $2x^2 + x - 6$

অনুশীলনী ঃ 2.3

1. (i) ভাগফল $= x - 3$ আৰু ভাগশেষ $= 7x - 9$

(ii) ভাগফল $= x^2 + x - 3$ আৰু ভাগশেষ $= 8$

(iii) ভাগফল $= -x^2 - 2$ আৰু ভাগশেষ $= -5x + 10$

(iv) ভাগফল $= 2x^2 + 3x + 4$ আৰু ভাগশেষ $= 0$

(v) ভাগফল $= 2x^2 + 5x - 6$ আৰু ভাগশেষ $= -2$

(vi) ভাগফল $= 2x^2 - 5x + 7$ আৰু ভাগশেষ $= -3$

2. (i) হয় (ii) হয় (iii) নহয় **3.** $-1, -1$ **4.** $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$

(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

(i), (ii) আৰু (iii)ৰ যথেষ্ট সংখ্যক উদাহৰণ থাকিব।

6. (i) $-2, 6$ (ii) $2, -3$ (iii) $1, 1$

7. (i) $2x^3 - x^2 - 5$ (ii) $2x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 11x + 18$

অনুশীলনী ঃ 2.4 (Optional)*

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ **3.** $a = 1, b = \pm\sqrt{2}$

4. $-5, 7$ **5.** $k = 5$ আৰু $a = -5$

অনুশীলনী ঃ 3.1

1. বীজগাণিতিকভাৱে পৰিস্থিতি দুটা তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$x - 7y + 42 = 0$; $x - 3y - 6 = 0$, য'ত x আৰু yয়ে যথাক্ৰমে ৰহিম আৰু তেওঁৰ জীয়েকৰ বৰ্তমান বয়স বুজাইছে। অৱস্থা দুটা লৈখিক পদ্ধতিৰে বুজাবলৈ তুমি ৰৈখিক সমীকৰণ দুটাৰ লেখ অংকন কৰিব পাৰা।

2. বীজগাণিতিকভাৱে পৰিস্থিতি দুটা তলত দেখুওৱা দৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$x + 2y = 1300$; $x + 3y = 1300$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে এখন বেট আৰু এটা বলৰ দাম (টকাত)। লৈখিকভাৱে দেখুৱাবলৈ তুমি ৰৈখিক সমীকৰণদুটাৰ লেখ অংকন কৰিব পাৰা।

3. বীজগাণিতিকভাৱে পৰিস্থিতি দুটা তলত দেখুওৱাৰ দৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি!

$2x + y = 160$; $4x + 2y = 300$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে প্ৰতি কেজি আপেল আৰু আঙুৰৰ দাম। এই পৰিস্থিতিটো লৈখিখভাৱে প্ৰদৰ্শন কৰিববলৈ তুমি এই ৰৈখিক সমীকৰণ দুটাৰ লেখ অংকন কৰিব পাৰা।

অনুশীলনী ঃ 3.2

1. (i) নিৰ্ণেয় ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰটো হ'ল—

$x + y = 10$; $x - y = 4$, য'ত x ছোৱালীৰ সংখ্যা আৰু y ল'ৰাৰ সংখ্যা।

লৈখিকভাৱে সমাধান কৰিবলৈ এখন লেখ কাকতত একে অক্ষ ব্যৱহাৰ কৰি সমীকৰণ দুটাৰ লেখ অংকন কৰা।

ছোৱালী = 7, ল'ৰা = 3.

(ii) নির্ণেয় ৰৈখিক সমীকৰণৰ যোৰ হ'ল—

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, য'ত x হ'ল এডাল পেঞ্চিলৰ দাম (টকাত) আৰু y হ'ল এটা কলমৰ দাম (টকাত)।

লৈখিকভাৱে সমাধান কৰিবলৈ এখন লেখ কাকতত একে অক্ষ ব্যৱহাৰ কৰি সমীকৰণ দুটাৰ লেখ অংকন কৰা।

এডাল পেঞ্চিলৰ দাম = 3টকা, এটা কলমৰ দাম = 5 টকা।

2. (i) এটা বিন্দুত ছেদ কৰে। (ii) মিলি যোৱা (iii) সমান্তৰাল

3. (i) সংগত (ii) অসংগত (iii) সংগত

(iv) সংগত (v) সংগত

4. (i) সংগত (ii) অসংগত (iii) সংগত (iv) অসংগত

ওপৰৰ (i)ৰ সমাধান $y = 5 - x$ৰ দ্বাৰা দিয়া হয়, য'ত xএ যিকোনো মান ল'ব পাৰে, অর্থাৎ ইয়াৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে।

(iii)ৰ সমাধান $x = 2, y = 2$ অর্থাৎ অদ্বিতীয় সমাধান।

5. দীঘ = 20 মি. আৰু প্রস্থ = 16 মি.

6. একোটা সম্ভৱপৰ উত্তৰ হ'ব ঃ

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. ত্রিভুজটোৰ শীর্ষবিন্দুকেইটা হ'ল (–1, 0), (4, 0) আৰু (2, 3).

অনুশীলনী ঃ 3.3

1. (i) $x = 9, \; y = 5$ (ii) $s = 9, \; t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

য'ত x য়ে যিকোনো মান ল'ব পাৰে, অর্থাৎ অসীম সংখ্যক সমাধান।

(iv) $x = 2, \; y = 3$ (v) $x = 0, \; y = 0$ (vi) $x = 2, \; y = 3$

2. $x = -2, \; y = 5; \; m = -1$

3. (i) $x - y = 26, \; x = 3y$, য'ত x আৰু y দুটা সংখ্যা ($x > y$); $x = 39, y = 13$.

(ii) $x - y = 18,\ x + y = 180$, য'ত x আৰু y দুটা কোণৰ ডিগ্ৰী মাপ; $x = 99,\ y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800,\ 3x + 5y = 1750$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে এখন বেট আৰু এটা বলৰ কিনা দাম (টকাত)। $x = 500,\ y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105,\ x + 15y = 155$, য'ত x নিৰ্দিষ্ট খৰচ (টকাত) আৰু y প্ৰতি কিলোমিটাৰত হোৱা খৰচ (টকাত); $x = 5,\ y = 10$; 255 টকা।

(v) $11x - 9y + 4 = 0,\ 6x - 5y + 3 = 0$, য'ত x এটা লব আৰু y এটা হৰ; $\frac{7}{9}$ $(x = 7,\ y = 9)$.

(vi) $x - 3y - 10 = 0,\ x - 7y + 30 = 0$, য'ত x হ'ল জেকবৰ বয়স (বছৰত), y হ'ল তেওঁৰ পুত্ৰৰ বয়স (বছৰত); $x = 40,\ y = 10$.

অনুশীলনী ঃ 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5},\ y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2,\ y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13},\ y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2,\ y = -3$ (v) $x = \frac{141}{38},\ y = \frac{53}{19}$ (vi) $x = 9,\ y = 6$

(vii) $x = 2,\ y = 3$

2. (i) $x - y + 2 = 0,\ 2x - y - 1 = 0$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে ভগ্নাংশটোৰ লব আৰু হৰ; $\frac{3}{5}$.

(ii) $x - 3y + 10 = 0,\ x - 2y - 10 = 0$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে নুৰ আৰু চুনুৰ বয়স (বছৰত)। নুৰৰ বয়স $(x) = 50$, চুনুৰ বয়স $(y) = 20$.

(iii) $x + y = 9,\ 8x - y = 0$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে সংখ্যাটোৰ দহক আৰু এককৰ স্থানৰ অংক; 18.

(iv) $x + 2y = 40,\ x + y = 25$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে 50 টকীয়া আৰু 100 টকীয়া নোটৰ সংখ্যা; $x = 10,\ y = 15$.

(v) $x + 4y = 27,\ x + 2y = 21$, য'ত x হৈছে নিৰ্দিষ্ট খৰচ (টকাত) আৰু y হৈছে প্ৰতিদিনৰ অতিৰিক্ত খৰচ (টকাত); $x = 15,\ y = 3$.

অনুশীলনী ঃ 3.5

1. (i) কোনো সমাধান নাই (ii) অদ্বিতীয় সমাধান; $x = 2,\ y = 1$

(iii) অসীম সংখ্যক সমাধান (iv) অদ্বিতীয় সমাধান; $x = 4,\ y = -1$

(v) অসীম সংখ্যক সমাধান (vi) কোনো সমাধান নাই

(vii) অদ্বিতীয় সমাধান; $x = -a,\ y = b$ (viii) অদ্বিতীয় সমাধান; $x = 4,\ y = 7$

2. (i) $a = 5, b = 1$ (ii) $k = 2$

(iii) $p \neq 3$ (অৰ্থাৎ 3ৰ বাহিৰে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা) (iv) $k = -1$ (v) $m = 8$

3. (i) $x = -2,\ y = 5$ (ii) $x = 5, y = -1$ (iii) $x = 1, y = 3$ (iv) $x = 1, y = 2$

4. (i) $x + 20y = 1000,\ x + 26y = 1180$, য'ত x নিৰ্দিষ্ট খৰচ (টকাত) আৰু y হৈছে প্ৰতিদিনত খাদ্যৰ বাবদ খৰচ (টকাত); $x = 400,\ y = 30$.

(ii) $3x - y - 3 = 0,\ 4x - y - 8 = 0$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে ভগ্নাংশটোৰ লব আৰু হৰ; $\frac{5}{12}$.

(iii) $3x - y = 40,\ 2x - y = 25$, য'ত x আৰু y যথাক্ৰমে শুদ্ধ আৰু ভুল উত্তৰৰ সংখ্যা; 20.

(iv) $u - v = 20,\ u + v = 100$, য'ত u আৰু v যথাক্ৰমে গাড়ী দুখনৰ দ্ৰুতি (কি.মি./ঘণ্টাত); $u = 60, v = 40$.

(v) $3x - 5y - 6 = 0,\ 2x + 3y - 61 = 0$, য'ত x আৰু y ক্ৰমে আয়তৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থ বুজাইছে; দৈৰ্ঘ্য $(x) = 17$, প্ৰস্থ $(y) = 9$.

অনুশীলনী ঃ 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4,\ y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5},\ y = -2$

(iv) $x = 4,\ y = 5$ (v) $x = 1,\ y = 1$ (vi) $x = 1,\ y = 2$

(vii) $x = 3,\ y = 2$ (viii) $x = 1,\ y = 1$

2. (i) $u + v = 10,\ u - v = 2$, য'ত u আৰু v য়ে যথাক্ৰমে নাওঁ আৰু পানীৰ বেগ (কিমি/ঘণ্টা) বুজাইছে; $u = 6, v = 4$.

(ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4},\ \frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, য'ত n হৈছে এজনী মহিলাক কামটো কৰিবলৈ লগা দিনৰ সংখ্যা আৰু m হৈছে এজন পুৰুষক কামটো কৰিবলৈ লগা দিনৰ সংখ্যা; $n = 18, m = 36$.

(iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4,\ \frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, য'ত u আৰু v ক্ৰমে ৰে'লগাড়ী আৰু বাছৰ দ্ৰুতি (কি.মি./ঘণ্টা); $u = 60,\ v = 80$.

অনুশীলনী ঃ 3.7 (Optional)*

1. এনিৰ বয়স 19 বছৰ আৰু বিজুৰ বয়স 16 বছৰ বা এনিৰ বয়স 21 বছৰ আৰু বিজুৰ বয়স 24 বছৰ।

2. 40 টকা, 170 টকা। ধৰা হ'ল প্ৰথমজন ব্যক্তিৰ লগত থকা টকাৰ পৰিমাণ x টকা আৰু দ্বিতীয়জনে ব্যক্তিৰ লগত থকা টকাৰ পৰিমাণ y টকা।

$x + 100 = 2(y - 100),\ y + 10 = 6\,(x - 10)$

3. 600 কিমি. **4.** 36 **5.** $\angle A = 20°,\ \angle B = 40°,\ \angle C = 120°$

6. ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটাৰ স্থানাংক (1, 0), (0, –3), (0, –5).

7. (i) $x = 1,\ y = -1$ (ii) $x = \dfrac{c(a-b)-b}{a^2-b^2},\ y = \dfrac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$

(iii) $x = a,\ y = b$ (iv) $x = a + b,\ y = -\dfrac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2,\ y = 1$

8. $\angle A = 120°,\ \angle B = 70°,\ \angle C = 60°,\ \angle D = 110°$

অনুশীলনী ঃ 4.1

1. (i) হয় (ii) হয় (iii) নহয় (iv) হয়

(v) হয় (vi) নহয় (vii) নহয় (viii) হয়

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, য'ত x মাটিডৰাৰ প্ৰস্থ (মিটাৰত)।

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, য'ত x টো সৰু ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, য'ত x হ'ল ৰামৰ বৰ্ত্তমান বয়স (বছৰত)

(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, য'ত u হ'ল ৰে'লগাড়ীখনৰ দ্ৰুতি (কি.মি./ঘণ্টা)

অনুশীলনী ঃ 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \dfrac{3}{2}$ (iii) $-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (iv) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$ (v) $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}$

(vi) $2, \dfrac{3}{2}$ (vii) $16, -6$ (viii) $-\sqrt{3}, \dfrac{-7}{\sqrt{3}}$ (ix) $-\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (x) $5, -\dfrac{1}{3}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. সংখ্যাদুটা হ'ল 13 আৰু 14.

4. ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা 13 আৰু 14.

5. 5 চে.মি. আৰু 12 চে.মি.

6. বস্তুৰ সংখ্যা = 6, প্ৰতিটো বস্তুৰ দাম = 15 টকা

অনুশীলনী ঃ 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}, 3$ (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) মূল নাই (v) $-2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$ (vi) $\frac{3}{4}, -1$

2. প্ৰশ্ন নং 1ৰ সৈতে একে।

3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2 (iii) $-1, \frac{3}{2}$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (v) 1, 1

(vi) $3, -\frac{3}{7}$

4. 7 বছৰ

5. গণিতৰ নম্বৰ = 12, ইংৰাজীৰ নম্বৰ = 18;
বা গণিতৰ নম্বৰ = 13, ইংৰাজীৰ নম্বৰ = 17

6. 120 মি., 90 মি.

7. 18, 12 বা 18, –12

8. 40 কি.মি./ঘণ্টা

9. 15 ঘণ্টা, 25 ঘণ্টা

10. যাত্ৰীবাহী ৰে'লগাড়ীৰ দ্ৰুতি = 33 কি.মি./ঘণ্টা, দ্ৰুতবেগী ৰে'লগাড়ীৰ দ্ৰুতি = 44 কি.মি./ঘণ্টা

11. 18 মি., 12 মি.

অনুশীলনী ঃ 4.4

1. (i) বাস্তৱ মূল নাই (ii) সমান মূল; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) স্পষ্ট (ভিন্ন) মূল; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

(iv) বাস্তৱ; $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ (v) বাস্তৱ মূল নাই (vi) বাস্তৱ মূল নাই

(vii) বাস্তৱ; $\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$ (iii) $k = \pm 2$ (iv) $k = -2$, (v) $k = 4$ (vi) $k = 14$

3. হয়। 40 মি., 20 মি.

4. নহয়

5. হয়। 20 মি., 20 মি.

অনুশীলনী ৪ 5.1

1. (i) হয়। 15, 23, 31, . . . এ এটা সমান্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰে, কিয়নো পূৰ্বৱৰ্তী পদৰ লগত 8 যোগ কৰিলে পৰৱৰ্তী পদটো পোৱা যায়।

(ii) নহয়। আয়তনসমূহ V, $\frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2$ V, ⋯ (iii) হয়, 150, 200, 250, . . . এ সমান্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰে।

(iv) নহয়। সবৃদ্ধিমূল (সমূল)সমূহ $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)$, $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$, $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$,......

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2 (iii) 4, 1, – 2, – 5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) – 1.25, – 1. 50, – 1.75, – 2.0

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) নহয় (ii) হয়। $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) হয়। $d = -2; -9.2, -11.2, -13.2$ (iv) হয়। $d = 4;\ 6, 10, 14$

(v) হয়। $d = \sqrt{2}$; $3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) নহয়

(vii) হয়, $d = -4;\ -16, -20, -24$ (viii) হয়। $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) নহয় (x) হয়। $d = a$; $5a, 6a, 7a$

(xi) নহয় (xii) হয়। $d = \sqrt{2}$; $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) নহয় (xiv) নহয় (xv) হয়। $d = 24$; 97, 121, 145

অনুশীলনী ৪ 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$

(v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16 তম পদ

5. (i) 34 (ii) 27

6. নহয়

7. 178

8. 64

9. 5 তম পদ

10. 1

11. 65 তম পদ

12. 100

13. 128

14. 60

15. 13

16. 4, 10, 16, 22, . . .

17. অন্তিম পদটোৰপৰা 20তম পদটো হ'ল 158.

18. –13, –8, –3

19. 11তম বছৰ

20. 10

অনুশীলনী ঃ 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) – 8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12। $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ সূত্ৰত $a = 9, d = 8, S = 636$ বহুৱাই আমি এটা দ্বিঘাত সমীকৰণ $4n^2 + 5n - 636 = 0$ পাওঁ। সমীকৰণটো সমাধান কৰি $n = -\frac{53}{4}$, 12 পোৱা গ'ল। এই মূল দুটাৰ 12 মূলটোহে হ'ল গ্ৰহণযোগ্য মূল।

5. $n = 16,\ d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38,\ S = 6973$ **7.** যোগফল = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4;\ a_2 = S_2 - S_1 = 1;\ S_3 = 3,\ a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15;\ a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** 27750 টকা

16. পুৰস্কাৰসমূহৰ মূল্য (টকাত) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 চে.মি.

19. 16 শাৰী, একেবাৰে শীৰ্ষ শাৰীত 5 টা কাঠৰ টুকুৰা থোৱা হ'ল। যোগফলৰ সূত্ৰ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, ত $S = 200,\ a = 20,\ d = -1$ বহুৱাই আমি পাওঁ $41n - n^2 = 400$। সমাধান কৰি $n = 16, 25$ পোৱা গ'ল। সেইবাবে শাৰীৰ সংখ্যা হ'ব 16 বা 25। $a_{25} = a + 24\,d = -4$
অৰ্থাৎ 25তম শাৰীত কাঠৰ টুকুৰাৰ সংখ্যা – 4 যিটো সম্ভৱ নহয়। সেয়ে $n = 25$ সম্ভৱ নহয়। $n = 16$ৰ বাবে $a_{16} = 5$। সেইবাবে, মুঠ শাৰীৰ সংখ্যা 16 আৰু একেবাৰে শীৰ্ষ শাৰীত কাঠৰ টুকুৰাৰ সংখ্যা 5।

20. 370 মি.

অনুশীলনী ঃ 5.4 (ঐচ্ছিক)*

1. 32 তম পদ **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 চে.মি.

4. 35 **5.** 750 মি.^{3}

অনুশীলনী ঃ 6.1

1. (i) সদৃশ (ii) সদৃশ (iii) সমবাহু
(iv) সমান, সমানুপাতিক **3.** নহয়।

অনুশীলনী ঃ 6.2

1. (i) 2 চে.মি. (ii) 2.4 চে.মি.

2. (i) নহয় (ii) হয় (iiii) হয়।

9. O বিন্দুৰ মাজেদি DCৰ সমান্তৰালকৈ এটা ৰেখা অংকন কৰা, যিয়ে AD আৰু BC ক যথাক্ৰমে E আৰু F বিন্দুত কাটে।

অনুশীলনী ঃ 6.3

1. (i) হয়। AAA, Δ ABC ~ Δ PQR (ii) হয়। SSS, Δ ABC ~ Δ QRP
(iii) নহয় (iv) হয়। SAS, Δ MNL ~ Δ QPR
(v) নহয় (vi) হয়। AA, Δ DEF ~ Δ PQR

2. 55°, 55°, 55°

14. AD বাহুটোক E বিন্দুলৈ এনেদৰে বঢ়াই দিয়া যাতে AD = DE আৰু PMক N বিন্দুলৈ বঢ়াই দিয়া যাতে PM = MN। E,C আৰু N,R সংযোগ কৰা।

15. 42 মি.

অনুশীলনী ঃ 6.4

1. 11.2 চে.মি. **2.** 4 : 1 **5.** 1 : 4 **8.** C **9.** D

অনুশীলনী ঃ 6.5

1. (i) হয়, 25 চে.মি. (ii) নহয় (iii) নহয় (iv) হয়, 13 চে.মি.

6. $a\sqrt{3}$ **9.** 6 মি. **10.** $6\sqrt{7}$ মি. **11.** $300\sqrt{61}$ কি.মি.

12. 13 মি. **17.** C

অনুশীলনী ঃ 6.6 (ঐচ্ছিক)*

1. বৰ্ধিত QPক T বিন্দুত কটাকৈ R ৰ মাজেদি SPৰ সমান্তৰালকৈ এটা ৰেখা অংকন কৰা। দেখুওৱা যে PT = PR.

6. এই অনুশীলনীৰ প্ৰশ্ন নং 5ৰ (iii)ৰ ফল ব্যৱহাৰ কৰা। **7.** 3 মি., 2.79 মি.

অনুশীলনী ঃ 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 কি.মি. **3.** নহয় **4.** হয় **5.** চম্পা শুদ্ধ

6. (i) বৰ্গ (ii) চতুৰ্ভুজ নহয় (iii) সামান্তৰিক।

7. $(-7, 0)$ **8.** $-9, 3$ **9.** ± 4, $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

অনুশীলনী ঃ 7.2

1. $(1, 3)$ **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ মি., 5ম ৰেখাটো 22.5 মি. দূৰত্বত আছে। **4.** $2 : 7$

5. $1 : 1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6,\ y = 3$ **7.** $(3, -10)$

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0, 5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10.** 24 বৰ্গ একক

অনুশীলনী ঃ 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ বৰ্গ একক (ii) 32 বৰ্গ একক **2.** (i) $k = 4$ (ii) $k = 3$

3. 1 বৰ্গ একক $1 : 4$ **4.** 28 বৰ্গ একক

অনুশীলনী ঃ 7.4 (ঐচ্ছিক)*

1. $2 : 9$ **2.** $x + 3y - 7 = 0$ **3.** $(3, -2)$ **4.** $(1, 0), (1, 4)$

5. (i) (4, 6), (3, 2), (6, 5); AD আৰু AB স্থানাংক অক্ষ হিচাপে।

(ii) (12, 2), (13, 6), (10, 3); CB আৰু CDক স্থানাংক অক্ষ হিচাপে লৈ। $\frac{9}{2}$ বৰ্গ একক; $\frac{9}{2}$ বৰ্গ একক; উভয় ক্ষেত্ৰতে কালি একে।

6. $\frac{15}{32}$ বৰ্গ একক; $1 : 16$

7. (i) $D\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) $P\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) $Q\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $R\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R একে বিন্দু।

(v) $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ **8.** বস্বাচ।

অনুশীলনী ঃ 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8.** হয়

9. (i) 1 (ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11.(i) অসত্য (ii) সত্য (iii) অসত্য (iv) অসত্য (v) অসত্য

অনুশীলনী ঃ 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$ (vi) 1

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C

3. (i) $\angle A = 45°, \angle B = 15°$ (ii) $x = 60°, y = 30°$

4. (i) অসত্য (ii) সত্য (iii) অসত্য (iv) অসত্য (v) সত্য

অনুশীলনী ঃ 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0 (v) 0 (vi) 1 (vii) 0 (viii) 7 (ix) 1

3. $\angle A = 36°$ **5.** $\angle A = 22°$ **7.** $\cos 23° + \sin 15°$

8. (i) $\theta = 21°$ (ii) $A = 57°$ (iii) $A = 25°$ (iv) $x = 14°$

অনুশীলনী ঃ 8.4

1. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\sec A = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \dfrac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) 1 (ii) 1
4. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

অনুশীলনী ঃ 9.1

1. 10 মি.
2. $8\sqrt{3}$ মি.
3. 3 মি. $2\sqrt{3}$ মি.
4. $10\sqrt{3}$ মি.
5. $40\sqrt{3}$ মি.
6. $19\sqrt{3}$ মি.
7. $20(\sqrt{3}-1)$ মি.
8. $0.8(\sqrt{3}+1)$ মি.
9. $16\frac{2}{3}$ মি.
10. $20\sqrt{3}$ মি., 20 মি., 60 মি.
11. $10\sqrt{3}$ মি.,10 মি.
12. $7(\sqrt{3}+1)$ মি.
13. $75(\sqrt{3}-1)$ মি.
14. $58\sqrt{3}$ মি.
15. 3 ছেকেণ্ড

অনুশীলনী ঃ 10.1

1. অসীম সংখ্যক
2. (i) এটা (ii) ছেদক (iii) দুটা (iv) স্পৰ্শ বিন্দু
3. D

অনুশীলনী ঃ 10.2

1. A
2. B
3. A
6. 3 চে.মি.
7. 8 চে.মি.
12. AB = 15 চে.মি., AC = 13 চে.মি.

অনুশীলনী ঃ 12.1

1. 28 চে.মি. **2.** 10 চে.মি.

3. সোণালী ঃ 346.5 চে.মি.^{2}; ৰঙা ঃ 1039.5 চে.মি.^{2}; নীলা ঃ 1732.5 চে.মি.^{2}; ক'লা ঃ 2425.5 চে.মি.^{2}; বগা ঃ 3118.5 চে.মি.^{2}.

4. 4375 **5.** A

অনুশীলনী ঃ 12.2

1. $\frac{132}{7}$ চে.মি.^{2} **2.** $\frac{77}{8}$ চে.মি.^{2} **3.** $\frac{154}{3}$ চে.মি.^{2}

4. (i) 28.5 চে.মি.^{2} (ii) 235.5 চে.মি.^{2}

5. (i) 22 চে.মি. (ii) 231 চে.মি.^{2} (iii) $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ চে.মি.^{2}

6. 20.4375 চে.মি.^{2} ; 686.0625 চে.মি.^{2}

7. 88.44 চে.মি.^{2}

8. (i) 19.625 মিটাৰ^2 (ii) 58.875 চে.মি.^{2}

9. (i) 285 মি.মি. (ii) $\frac{385}{4}$ মি.মি.^{2}

10. $\frac{22275}{28}$ চে.মি.^{2} **11.** $\frac{158125}{126}$ চে.মি.^{2} **12.** 189.97 কি. মি.^{2}

13. Rs 162.68 টকা **14.** D

অনুশীলনী ঃ 12.3

1. $\frac{4523}{28}$ চে.মি.^{2} **2.** $\frac{154}{3}$ চে.মি.^{2} **3.** 42 চে.মি.^{2}

4. $\left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right)$ চে.মি.^{2} **5.** $\frac{68}{7}$ চে.মি.^{2}

6. $\left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right)$ চে.মি.^{2} **7.** 42 চে.মি.^{2}

8. (i) $\frac{2804}{7}$ মিটাৰ (ii) 4320 মিটাৰ^2

9. 66.5 চে.মি.^{2} **10.** 1620.5 চে.মি.^{2} **11.** 378 চে.মি.^{2}

12. (i) $\frac{77}{8}$ চে.মি.^{2} (ii) $\frac{49}{8}$ চে.মি.^{2} **13.** 228 চে.মি.^{2}

14. $\frac{308}{3}$ চে.মি.^{2} **15.** 98 চে.মি.^{2} **16.** $\frac{256}{7}$ চে.মি.^{2}

অনুশীলনী ঃ 13.1

1. 160 চে.মি.^{2} **2.** 572 চে.মি.^{2} **3.** 214.5 চে.মি.^{2}

4. বৃহত্তম ব্যাস = 7 চে.মি., পৃষ্ঠকালি = 332.5 চে.মি.^{2}

5. $\frac{1}{4}l^2\ (\pi + 24)$ **6.** 220 মি.^{2} **7.** 44 মি.^{2}, Rs 22000

8. 18 চে.মি.^{2} **9.** 374 চে.মি.^{2}

অনুশীলনী ঃ 13.2

1. π চে.মি.^{3}

2. 66 চে.মি.^{3}। আৰ্হিটোৰ ভিতৰৰ বায়ুৰ আয়তন = ভিতৰৰ বায়ুৰ আয়তন(শংকু + বেলন + শংকু) = $\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$, য'ত r হ'ল শংকু আৰু বেলনৰ ব্যাসাৰ্ধ, h_1 হ'ল শংকুৰ উচ্চতা আৰু h_2 হ'ল বেলনৰ উচ্চতা।

নিৰ্ণেয় আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$.

3. 338 চে.মি.^{3} **4.** 523.53 চে.মি.^{3} **5.** 100 **6.** 892.26 কে.জি.

7. 1.131 মি.^{3} (প্ৰায়) **8.** শুদ্ধ নহয়। শুদ্ধ উত্তৰটো হ'ল 346.51 চে.মি.^{3}

অনুশীলনী ঃ 13.3

1. 2.74 চে.মি. **2.** 12 চে.মি. **3.** 2.5 মি.

4. 1.125 মি. **5.** 10 **6.** 400

7. 36cm; $12\sqrt{13}$ cm চে.মি. **8.** 562500 মি.^{2} বা 56.25 হেক্টৰ **9.** 100 মিনিট

অনুশীলনী ঃ 13.4

1. $102\frac{2}{3}$ চে.মি.^{3} **2.** 48 চে.মি.^{2} **3.** $710\frac{2}{7}$ চে.মি.^{2}

4. গাখীৰৰ দাম 209 টকা আৰু ধাতুৰ পাতৰ দাম 156.75 টকা **5.** 7964.4 মি.

অনুশীলনী ঃ 13.5 (ঐচ্ছিক)*

1. 1256 চে.মি.; 788 গ্ৰাম (প্ৰায়)

2. 30.14 চে.মি.^{3}; 52.75 চে.মি.^{2}

3. 1792

5. $782\frac{4}{7}$ চে.মি.^{2}

অনুশীলনী ঃ 14.1

1. 8.1 জোপা গছ। ইয়াত প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে, কিয়নো x_i আৰু f_i ৰ সাংখিক মানসমূহ সৰু।

2. 145.20 টকা **3.** $f = 20$ **4.** 75.9 **5.** 57.19

6. 211 টকা **7.** 0.099 পি পি এম (parts per million *i.e* ppm)

8. 12.38 দিন **9.** 69.43 %

অনুশীলনী ঃ 14.2

1. বহুলক = 36.8 বছৰ, মাধ্য = 35.37 বছৰ। হাস্পতালত ভৰ্তি কৰা ৰোগীসকলৰ সৰহ সংখ্যকৰ বয়স প্ৰায় 36.8 বছৰ, আনহাতে হাস্পতালত ভৰ্তি কৰা ৰোগীসকলৰ গড় বয়স 35.37 বছৰ।

2. 65.625 ঘণ্টা।

3. মাহেকীয়া খৰচৰ বহুলক = 1847.83 টকা। মাহেকীয়া খৰচৰ মাধ্য = 2662.5 টকা

4. বহুলক : 30.6, মাধ্য = 29.2। সৰহসংখ্যক ৰাজ্য/কেন্দ্ৰীয় শাসিত অঞ্চলৰ ছাত্ৰ-শিক্ষকৰ অনুপাত 30.6 আৰু গড় হিচাপে এই অনুপাত 29.2।

5. বহুলক = 4608.7 ৰাণ। **6.** বহুলক = 44.7 খন গাড়ী (car)

অনুশীলনী ঃ 14.3

1. মধ্যমা = 137 একক, মাধ্য = 137.05 একক, বহুলক = 135.76 একক।

এই ক্ষেত্ৰত তিনিওটা জোখ প্ৰায় একেই।

2. $x = 8, y = 7$

3. বয়সৰ মধ্যমা = 35.76 বছৰ

4. দৈৰ্ঘ্যৰ মধ্যমা = 146.75 মি.মি.

5. জীৱন কালৰ মধ্যমা = 3406.98 ঘণ্টা

6. মধ্যমা = 8.05, মাধ্য = 8.32, আকাৰৰ বহুলক = 7.88

7. ওজনৰ মধ্যমা = 56.67 কে.জি.

অনুশীলনী ঃ 14.4

1.

দৈনিক আয় (টকাত)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
120তকৈ কম	12
140তকৈ কম	26
160তকৈ কম	34
180তকৈ কম	40
200তকৈ কম	50

(120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) আৰু (200, 50) বিন্দুসমূহ বহুৱাই অ'গিভ অংকন কৰা।

2. (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) আৰু (52, 35) বিন্দুসমূহ বহুৱাই অ'গিভ অংকন কৰা। ইয়াত $\frac{n}{2} = 17.5$। 17.5 y-স্থানাংক বিশিষ্ট বিন্দুটো অ'গিভৰপৰা বাছি উলিওৱা। এই বিন্দুটোৰ x-স্থানাংকই হ'ব মধ্যমা।

3.

উৎপাদন (কে.জি./হেক্টৰ)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
50ৰ বেছি বা সমান	100
55ৰ বেছি বা সমান	98
60ৰ বেছি বা সমান	90
65ৰ বেছি বা সমান	78
70ৰ বেছি বা সমান	54
75ৰ বেছি বা সমান	16

এতিয়া (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) আৰু (75, 16) বিন্দুসমূহ সংস্থাপন কৰি অ'গিভ অংকন কৰা।

অনুশীলনী ঃ 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, অসম্ভৱ ঘটনা (iii) 1, নিশ্চিত ঘটনা

(iv) 1 (v) 0, 1

2. পৰীক্ষা (iii) আৰু (iv) ফলাফল সমশক্য

3. এটা মুদ্ৰা টচ্ কৰিলে মুণ্ড বা পুচ্ছ ফলাফল সমশক্য। গতিকে এটা মুদ্ৰা এবাৰ টচ্ কৰি পোৱা ফলাফলৰ ভৱিষ্যৎ বাণী কৰাটো অসম্ভৱ।

4. B **5.** 0.95 **6.** (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 **8.** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ **10.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.** (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

দুটা পাশাগুটিৰ পৃষ্ঠত যোগফল	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
সম্ভাৱিতা	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) নহয়। এই 11 টা ফলাফল সমশক্য নহয়।

23. $\frac{3}{4}$; সম্ভৱপৰ ফলাফল ঃ HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH.

ইয়াত THH ৰ অৰ্থ হ'ল প্ৰথম টচ্ কাৰ্যত পুচ্ছ, দ্বিতীয় টচ্ কাৰ্যত মুণ্ড আৰু তৃতীয় টচ্ কাৰ্যত মুণ্ড আৰু এই অনুক্ৰমে।

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) অশুদ্ধ। আমি ফলাফলবোৰক এইদৰে শ্ৰেণীভুক্ত কৰিব পাৰোঁ যদিও সিহঁত সমশক্য নহয়। কাৰণ প্ৰত্যেক টছেই দুই ধৰণৰ ফলাফল দেখুৱাব পাৰে— প্ৰথম মুদ্ৰাত মুণ্ড আৰু দ্বিতীয় মুদ্ৰাত পুচ্ছ নাইবা ইয়াৰ ওলোটাটো। ইয়ে দুবাৰকৈ দুটা মুণ্ড বা দুটা পুচ্ছ ফল ওলোৱাৰ সম্ভাৱনা দেখুৱায়।

(ii) শুদ্ধ। প্ৰশ্নটোত বিবেচিত ফলাফল দুটা সমশক্য।

অনুশীলনী ঃ 15.2 (ঐচ্ছিক)*

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 **4.** $\frac{x}{12}, x = 3$ **5.** 8

অনুশীলনী ঃ A1.1

1. (i) দ্ব্যৰ্থবোধক (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) দ্ব্যৰ্থবোধক

(v) দ্ব্যৰ্থবোধক

2. (i) সত্য (ii) সত্য (iii) অসত্য (iv) সত্য (v) সত্য

3. মাত্ৰ (ii) সত্য

4. (i) যদি $a > 0$ আৰু $a^2 > b^2$, তেন্তে $a > b$.

(ii) যদি $xy \geq 0$ আৰু $x^2 = y^2$, তেন্তে $x = y$.

(iii) যদি $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ আৰু $y \neq 0$, তেন্তে $x = 0$.

(iv) সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুডালে পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

অনুশীলনী ঃ A1.2

1. A মৰণশীল **2.** ab পৰিমেয়

3. $\sqrt{17}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতি নিৰবধি অপৌনঃপুনিক।

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 180°$

6. PQRS এটা আয়ত

7. প্ৰস্তাৱনা (premise) টোৰ বাবে হয়। নহয়, কাৰণ $\sqrt{3721} = 61$, যিটো অপৰিমেয় নহয়। যিহেতু প্ৰস্তাৱনা ভুল, গতিকে সিদ্ধান্তটো অসত্য।

অনুশীলনী ঃ A1.3

1. একে অখণ্ড সংখ্যা nৰ বাবে $2n + 1$ আৰু $2n + 3$ দুটা ক্ৰমিক অযুগ্ম সংখ্যা লোৱা।

অনুশীলনী ঃ A1.4

1. (i) মানুহ মৰণশীল নহয়।

(ii) l ৰেখাটো m ৰেখাৰ সমান্তৰাল নহয়।

(iii) এই অধ্যায়টোত বেছি অনুশীলনী নাই।

(iv) সকলো অখণ্ড সংখ্যা পৰিমেয় নহয়।

(v) সকলো মৌলিক সংখ্যাই অযুগ্ম নহয়।

(vi) কিছুমান ছাত্ৰ-ছাত্ৰী এলেহুৱা।

(vii) সকলো মেকুৰী ক'লা।

(viii) অতি কমেও এটা বাস্তৱ সংখ্যা x আছে, যাতে $\sqrt{x} = -1$.

(ix) 2 য়ে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a ক হৰণ নকৰে।

(x) অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b সহমৌলিক নহয়।

2. (i) হয় (ii) নহয় (iii) নহয় (iv) নহয় (v) হয়

অনুশীলনী ঃ A1.5

1. (i) যদি শাৰংগ বেছিকৈ ঘামিছে, তেন্তে টকিঅ'ত বৰ গৰম পৰিছে।

(ii) যদি শালিনীৰ পেটে গোঁগোঁৱাই (grumbles), তেন্তে তাই ভোকাতুৰ।

(iii) যদি যশৱন্তই এটা ডিগ্ৰী ল'ব পাৰে, তেন্তে তেওঁ এটা বৃত্তি পায়।

(iv) যদি গছজোপা জীৱিত, তেন্তে ইয়াৰ ফুল আছে।

(v) যদি এটা জন্তুৰ এডাল নেজ আছে, তেন্তে ই এটা মেকুৰী।

2. (i) যদি এটা ত্ৰিভুজ ABCৰ ভূমি সংলগ্ন কোণকেইটা সমান, তেন্তে ই এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজ। সত্য।

(ii) যদি এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ এটা অযুগ্ম সংখ্যা, তেন্তে অখণ্ড সংখ্যাটো এটা অযুগ্ম। সত্য।

(iii) যদি $x = 1$, তেন্তে $x^2 = 1$। সত্য।

(iv) যদি AC আৰু BD য়ে পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, তেন্তে ABCD এটা সামান্তৰিক। সত্য।

(v) যদি $a + (b + c) = (a + b) + c$, তেন্তে a, b আৰু c পূৰ্ণ সংখ্যা। অসত্য।

(vi) যদি $x + y$ এটা যুগ্ম সংখ্যা, তেন্তে x আৰু y অযুগ্ম। অসত্য।

(vii) যদি এটা সামান্তৰিক এটা আয়ত, তেন্তে ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দুকেইটা এটা বৃত্তত থাকে। সত্য।

অনুশীলনী ঃ A1.6

1. $b > d$ ৰ বিপৰীতে $b \leq d$ বুলি ধৰি লোৱা।

3. অধ্যায় 1ৰ উদাহৰণ 10 চোৱা।

6. নৱম শ্ৰেণীৰ গণিত পাঠ্যপুথিৰ উপপাদ্য 5.1 চোৱা।

অনুশীলনী ঃ A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. 1 চে.মি.^{2} কালি লোৱা আৰু ইয়াত থকা ফুট চিহ্নবোৰ গণি সংখ্যাটো উলিওৱা। এই সংখ্যাটো আৰু মুঠ কালিৰ (বৰ্গ চে.মি.^{2} অত) পূৰণফলেই হ'ব মুঠ গছৰ সংখ্যা।

3. সুতৰ হাৰ হ'ব 17.74 %, যিটো 18 % অতকৈ ক'ম।

অনুশীলনী ঃ A2.3

1. ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে নিজাকৈ উত্তৰ নিৰ্ণয় কৰিব।