missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

कक्षा-9

गणित

RECORDED VIDEOS | LIVE CLASSES | PDF NOTES | e-BOOKS | QUIZ | TEST SERIES

GET IT ON Google Play

DOWNLOAD MISSION GYAN MOBILE APP

विषय-सूची

क्र.सं.	अध्याय	पृष्ठ संख्या
1.	संख्या पद्धति	1-5
2.	बहुपद	6-11
3.	निर्देशांक ज्यामिति	12-15
4.	दो चरों वाले रैखिक समीकरण	16-19
5.	यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय	20-21
6.	रेखाएँ और कोण	22-28
7.	त्रिभुज	29-39
8.	चतुर्भुज	40-46
9.	वृत्त	47-59
10.	हीरोन का सूत्र	60-64
11.	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	65-74
12.	सांख्यिकी	75-78

1 संख्या पद्धति

वास्तविक संख्याएँ एवं उनके दशमलव प्रसार

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होता है क्योंकि इसे लिखा जा सकता है–

(अ) $\frac{m}{0}$ के रूप में

(ब) $\frac{m}{1}$ के रूप में

(स) $m \times m$ के रूप में

(द) $\frac{1}{m}$ के रूप में **(ब)**

2. किन्हीं दो दी गई परिमेय संख्याओं के बीच में कितनी परिमेय संख्याएँ होती है?

(अ) केवल एक

(ब) केवल दो

(स) निश्चित (सीमित)

(द) अपरिमित (अनंत) रूप से अनेक **(द)**

3. निम्नलिखित में से कौन–सी एक अपरिमेय संख्या है?

(अ) $\sqrt{4}$ (ब) $\sqrt{9}$

(स) $\sqrt{2}$ (द) $\frac{2}{3}$ **(स)**

4. $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच की एक परिमेय संख्या है–

(अ) $\frac{7}{10}$ (ब) $\frac{7}{5}$

(स) $\frac{1}{5}$ (द) $\frac{8}{5}$ **(अ)**

5. निम्नलिखित में से कौन–सा कथन सत्य है?

(अ) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृत संख्या होती है।

(ब) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक होती हैं।

(स) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होती हैं।

(द) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।

(स)

6. परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के सम्मिलित संग्रह को क्या कहते हैं?

(अ) काल्पनिक संख्याएँ

(ब) वास्तविक संख्याएँ

(स) प्राकृत संख्याएँ

(द) सम्मिश्र संख्याएँ **(ब)**

7. यदि हम एक इकाई वर्ग के विकर्ण की लम्बाई मापें, तो वह किसके बराबर होगी?

(अ) 1 (ब) $\sqrt{2}$

(स) $\sqrt{3}$ (द) 2 **(ब)**

8. निम्नलिखित में से कौन–सी संख्या अपरिमेय हैं?

(अ) 0.25 (ब) $\sqrt{15}$

(स) $\sqrt{225}$ (द) $\frac{22}{7}$ **(ब)**

9. π किस प्रकार की संख्या है?

(अ) परिमेय संख्या (ब) पूर्णांक

(स) अपरिमेय संख्या (द) प्राकृत संख्या **(स)**

10. $\frac{7}{8}$ का दशमलव प्रसार कैसा है?

(अ) अनवसानी आवर्ती

(ब) अनवसानी अनावर्ती

(स) सांत

(द) असांत अनावर्ती **(स)**

11. $\frac{1}{3}$ का दशमलव प्रसार क्या होगा?

(अ) 0.3 (ब) 0.3333... $(0.\bar{3})$

(स) 0.25 (द) 0.1313... **(ब)**

12. यदि किसी भिन्न का शेषफल कुछ चरणों के बाद शून्य हो जाता है, तो उसका दशमलव प्रसार कहलाता है–

(अ) सांत (ब) अनवसानी अनावर्ती

(स) अनवसानी आवर्ती (द) इनमें से कोई नहीं **(अ)**

13. परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार कैसा हो सकता है?

(अ) केवल अनवसानी आवर्ती

(ब) केवल सांत

(स) या तो सांत या अनवसानी आवर्ती

(द) अनवसानी अनावर्ती **(स)**

मिशन ज्ञान
फ़ीचर चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

14. 0.47777...$(0.4\overline{7})$ का $\frac{p}{q}$ रूप क्या है?

(अ) $\frac{47}{99}$ (ब) $\frac{43}{90}$

(स) $\frac{47}{90}$ (द) $\frac{4}{7}$ **(ब)**

15. निम्नलिखित में से कौन–सी संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती (अपरिमेय) है?

(अ) 0.142857 (ब) 0.150150015000150000...

(स) 0.456 (द) $\frac{22}{7}$ **(ब)**

16. वास्तविक संख्या 0.10110111011110... है एक–

(अ) परिमेय संख्या (ब) अपरिमेय संख्या

(स) पूर्णांक (द) प्राकृत संख्या **(ब)**

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. 0 और 1 के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : 3 संख्याएँ ज्ञात करने के लिए (3 + 1) = 4 का उपयोग करेंगे।

$$0=\frac{0\times4}{4}=\frac{0}{4}$$

$$1=\frac{1\times4}{4}=\frac{4}{4}$$

$\frac{0}{4}$ और $\frac{4}{4}$ के बीच की संख्याएँ –

$$\frac{1}{4},\frac{2}{4}\left(\text{या } \frac{1}{2}\right),\frac{3}{4}$$

2. नीचे दिया गया कथन सत्य है या असत्य, कारण के साथ बताइए–

"प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।"

हल : असत्य।

कारण: परिमेय संख्याएँ जैसे– $-\frac{2}{3},-\frac{5}{7}$ पूर्णांक रूप में पूर्ण नहीं होती, इसलिए ये पूर्ण संख्याएँ नहीं हैं।

3. नीचे दिया गया कथन सत्य है या असत्य, कारण के साथ बताइए–

"प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।"

हल : सत्य।

कारण: पूर्ण संख्याओं के संग्रह (0, 1, 2, 3, ...) में सभी प्राकृत संख्याएँ (1, 2, 3, ...) शामिल होती है।

4. $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ दोनों संख्याओं के हर अलग–अलग हैं। सबसे पहले हम इनके हर समान करेंगे। 3 और 2 का ल.स. 6 होता है।

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$$

अब 3 संख्याएँ ज्ञात करने के लिए अंश और हर में (3 + 1) = 4 से गुणा करने पर।

$$\frac{2}{6}=\frac{2\times4}{6\times4}=\frac{8}{24}$$

$$\frac{3}{6}=\frac{3\times4}{6\times4}=\frac{12}{24}$$

$\frac{8}{24}$ और $\frac{12}{24}$ के बीच की संख्याएँ :

$\frac{9}{24},\frac{10}{24},\frac{11}{24}$ (सरल रूप में : $\frac{3}{8},\frac{5}{12},\frac{11}{24}$)

5. 2.5 और 3 के बीच कोई दो परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल : हम जानते हैं कि 2.5 को भिन्न के रूप में $\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$ लिख सकते हैं।

इसी प्रकार 3 को $\frac{6}{2}$ लिख सकते हैं।

इनके बीच आसानी से संख्याएँ देखने के लिए हम इन्हें दशमलव में ही सोच सकते हैं। 2.5 और 3.0 के बीच आने वाली संख्याएँ जैसे– 2.6, 2.7, 2.8 आदि है।

इन्हें परिमेय रूप $\frac{p}{q}$ में बदलने पर,

$$2.6=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}$$

$$2.7=\frac{27}{10}$$

$\frac{13}{5}$ और $\frac{27}{10}$ (या सीधे दशमलव में 2.6 और 2.7 भी लिख सकते हैं, क्योंकि सांत दशमलव परिमेय संख्याएँ ही होते हैं।)

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

6. $-\frac{2}{3}$ और $-\frac{1}{3}$ के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ दोनों संख्याओं के हर समान है और दोनों संख्याएँ ऋणात्मक हैं। 3 संख्याएँ ज्ञात करने के लिए हम अंश और हर में $(3+1)=4$ से गुणा करते है।

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times4}{3\times4}=\frac{-8}{12}$$

$$\frac{-1}{3}=\frac{-1\times4}{3\times4}=\frac{-4}{12}$$

$\frac{-8}{12}$ और $\frac{-4}{12}$ के बीच की संख्याएँ

$\frac{-7}{12}, \frac{-6}{12}$ (या $\frac{-1}{2}$), $\frac{-5}{12}$

5. मिश्रित भिन्न $4\frac{1}{8}$ का दशमलव प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल : $4\frac{1}{8}=\frac{4\times8+1}{8}=\frac{33}{8}$

33 को 8 से भाग देने पर 4.125 प्राप्त होता है।
4.125 इसका दशमलव प्रसार सांत हैं।

6. भिन्न $\frac{2}{11}$ का दशमलव प्रसार किस प्रकार का हैं?

हल : चूँकि $\frac{1}{11}=0.\overline{09}$ है, इसलिए $\frac{2}{11}=2\times0.\overline{09}=0.\overline{18}$

$0.\overline{18}$ यह अनवसानी पुनरावर्ती प्रसार है।

6. $0.\overline{6}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, यहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q\neq0$ हैं।

हल : माना $x = 0.6666...$ ..... (1)

दोनों तरफ 10 से गुणा करने पर,

$10x = 6.6666...$ ..... (2)

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$$9x = 6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

7. $0.\overline{35}$ को भिन्न के रूप में बदलिए।

हल : माना $x = 0.353535...$ ..... (1)

दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है, इसलिए 100 से गुणा करने पर,

$100x = 35.353535...$ .....(2)

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$$99x = 35 \Rightarrow x=\frac{35}{99}$$

वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन–सी संख्या अनवसानी अनावर्ती (अपरिमेय) दशमलव प्रसार को दर्शाती है?

(अ) 0.142857
(ब) 0.232323...
(स) 2.01001000100001...
(द) $4.5678\overline{}$ **(स)**

2. सर्वसमिका $\sqrt{ab}$ किसके बराबर होती है?

(अ) $a\sqrt{b}$ (ब) $b\sqrt{a}$
(स) $a+b$ (द) $\sqrt{a}\sqrt{b}$ **(द)**

3. व्यंजक $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ का सरलीकृत मान क्या होगा?

(अ) a^2-b^2 (ब) $a+b$
(स) $a-b$ (द) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ **(स)**

4. व्यंजक $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ का मान क्या होगा?

(अ) $10+2\sqrt{21}$ (ब) 58
(स) $10+\sqrt{21}$ (द) 10 **(अ)**

5. $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$ का मान निम्नलिखित में से कौन–सा है?

(अ) 4 (ब) 18
(स) $\sqrt{4}$ (द) 77 **(अ)**

6. एक शून्येतर परिमेय संख्या के साथ एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल होता है।

(अ) परिमेय संख्या (ब) पूर्ण संख्या
(स) अपरिमेय संख्या (द) प्राकृत संख्या **(स)**

7. निम्नलिखित में से कौन–सा व्यंजक एक अपरिमेय संख्या को दर्शाता है?

(अ) $2-\sqrt{5}$ (ब) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$
(स) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ (द) $\left(\sqrt{2}\right)^2$ **(अ)**

8. भिन्न $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर को परिमेय संख्या में बदलने के लिए अंश और हर में किससे गुणा करना होगा?

(अ) 2 से (ब) $\sqrt{2}$ से
(स) 1 से (द) $-\sqrt{2}$ से **(ब)**

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

9. व्यंजक $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ का सरलतम रूप है–

(अ) $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ (ब) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$

(स) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{13}$ (द) 1 **(ब)**

10. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण करने पर प्राप्त मान है–

(अ) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (ब) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

(स) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{7}$ (द) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ **(अ)**

11. $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ के हर का परिमेयकरण करने पर हर में कौन–सी संख्या बचेगी?

(अ) 5 (ब) 3

(स) 9 (द) 1 **(ब)**

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$ को सरल कीजिए।

हल : पदों का आपस में वितरण नियम से गुणा करेन पर,

$= 3(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}(2+\sqrt{2})$

$= (3\times 2)+(3\times\sqrt{2})+(\sqrt{3}\times 2)+(\sqrt{3}\times\sqrt{2})$

$= 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

2. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ को सरल कीजिए।

हल : सर्वसमिका $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{ab}+b$ का उपयोग करने पर,

यहाँ $a = 5$ और $b = 2$ है।

$= 5+2\sqrt{5\times 2}+2$

$= 5+2\sqrt{10}+2$

$= 7+2\sqrt{10}$

3. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : हर $(\sqrt{7}-\sqrt{6})$ का परिमेयकारी गुणक $(\sqrt{7}+\sqrt{6})$ है।

अंश और हर में इससे गुणा करने पर,

$= \frac{1\times(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}$

सर्वसमिका $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$ लगाने पर,

$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6}$

$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$

4. $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : अंश और हर में $(\sqrt{7}+2)$ से गुणा करने पर,

$= \frac{1\times(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ लगाने पर,

$= \frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7})^2-(2)^2} = \frac{\sqrt{7}+2}{7-4}$

$= \frac{\sqrt{7}+2}{3}$

5. $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए।

हल : अंश और हर में $(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ से गुणा करने पर,

$= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}$

$= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2}$

$= -\frac{5}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक नियम

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ का सरलतम मान क्या होगा?

(अ) $2^{\frac{2}{9}}$ (ब) $4^{\frac{3}{3}}$

(स) 2 (द) 1 **(स)**

2. व्यंजक $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ का मान निम्नलिखित में से कौन–सा है?

(अ) $3^{\frac{4}{5}}$ (ब) $3^{\frac{1}{20}}$

(स) $12^{\frac{1}{5}}$ (द) 3^5 **(अ)**

3. व्यंजक $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$ का मान क्या होगा?

(अ) $30^{\frac{1}{5}}$ (ब) $221^{\frac{2}{5}}$

(स) $221^{\frac{1}{5}}$ (द) 221 **(स)**

4. $64^{\frac{1}{2}}$ का सही मान क्या है?

(अ) 32 (ब) 8

(स) 4 (द) 16 **(ब)**

5. $9^{\frac{3}{2}}$ का मान क्या होगा?

(अ) 27 (ब) 9

(स) 3 (द) 81 **(अ)**

6. $16^{\frac{3}{4}}$ को सरल करने पर क्या प्राप्त होता है?

(अ) 4 (ब) 8

(स) 12 (द) 16 **(ब)**

7. $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$ का मान निम्नलिखित में से कौन–सा है?

(अ) $56^{\frac{1}{4}}$ (ब) $15^{\frac{1}{2}}$

(स) $56^{\frac{1}{2}}$ (द) 56 **(स)**

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. मान ज्ञात कीजिए– $\left(\frac{64}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$

हल : ऋणात्मक घात को धनात्मक बनाने के लिए भिन्न को पलट देते है।

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}\right) = \left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$$

हम जानते हैं कि $125 = 5^3$ और $64 = 4^3$

अतः इसे $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ लिख सकते हैं।

$$= \left[\left(\frac{5}{4}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$

नियम $(a^p)^q = a^{pq}$ से घातों का गुणा करने पर,

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^{3\times\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

2. सरल कीजिए– $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

हल : $\frac{81}{16} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

ऋणात्मक घात को धनात्मक बनाने के लिए भिन्न को पलट देते हैं।

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

3. मान ज्ञात कीजिए– $\frac{2^0 + 3^{-1}}{3^{-2} + 2^{-1}}$

हल : प्रत्येक पद का सरल मान रखने पर,

अंश $= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

हर $= \frac{1}{9} + \frac{1}{2} = \frac{2+9}{18} = \frac{11}{18}$

अब, $= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{11}{18}} = \frac{4}{3} \times \frac{18}{11} = \frac{4\times 6}{11} = \frac{24}{11}$

4. यदि $2^{x-1} = 8$ है, तो x का मान क्या होगा?

हल : 8 को 2 की घात के रूप में लिखने पर,

$8 = 2^3$

$2^{x-1} = 2^3$

घातों की तुलना करने पर,

$x - 1 = 3$

$\Rightarrow x = 3 + 1 = 4$

मिशन ज्ञान
जहाँ चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

2 बहुपद

बहुपद

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. बहुपद किसे कहते हैं?

(अ) ऐसा व्यंजक जिसमें चर की घात ऋणात्मक हो।

(ब) ऐसा व्यंजक जिसमें चर की घात शून्य अथवा धनात्मक पूर्णांक हो।

(स) ऐसा व्यंजक जिसमें चर हर में हो।

(द) ऐसा व्यंजक जिसमें चर वर्गमूल में हो। **(ब)**

2. बहुपद $8y^3 - 2y + 1$ में y^3 का गुणांक है–

(अ) 3 (ब) 8

(स) – 2 (द) 1 **(ब)**

3. निम्नलिखित में से कौन–सा बहुपद एकपद है?

(अ) $9x^4$ (ब) $x + 5$

(स) $x^2 + x + 1$ (द) $5a - 3b$ **(अ)**

4. निम्नलिखित में से कौन–सा बहुपद द्विपद है?

(अ) $3x + 7$ (ब) $x^2 + x + 4$

(स) $9x^3$ (द) 666 **(अ)**

5. निम्नलिखित में से कौन–सा बहुपद त्रिपद है?

(अ) $x^2 + 5x + 6$ (ब) $7x$

(स) $x - 8$ (द) 999 **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. केवल एक पद वाले बहुपद को ..... कहते हैं।

हल : एकपदी

2. एक अचर बहुपद की घात ..... होती है।

उत्तर : शून्य (0)

3. बहुपद $p(x) = 3x^2 + 5x - 7$ में x का गुणांक ..... है।

हल : 5

4. रैखिक बहुपद की अधिकतम घात ..... होती है।

हल : 1

5. शून्य बहुपद की घात ..... होती है।

हल : अपरिभाषित

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. रैखिक बहुपद किसे कहते हैं?

हल : जिस बहुपद की उच्चतम घात 1 हो, उसे रैखिक बहुपद कहते हैं।

2. द्विघात बहुपद किसे कहते हैं?

हल : जिस बहुपद की उच्चतम घात 2 हो, उसे द्विघात बहुपद कहते हैं।

3. त्रिघात बहुपद किसे कहते हैं?

हल : जिस बहुपद की उच्चतम घात 3 हो, उसे त्रिघात बहुपद कहते हैं।

4. यदि $p(x) = 5x^2 - 7x + 4$ है, तो $p(3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $p(3) = 5(3)^2 - 7(3) + 4$

$= 45 - 21 + 4$

$= 28$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. यदि $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 7$ है, तो $p(2)$, $p(-1)$ तथा $p(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

$p(2) = 4(2)^3 - 5(2)^2 + 2(2) + 7$

$= 4(8) - 5(4) + 4 + 7$

$= 32 - 20 + 4 + 7$

$= 23$

$p(-1) = 4(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 7$

$= 4(-1) - 5(1) - 2 + 7$

$= -4 - 5 - 2 + 7$

$= -4$

$p(0) = 4(0)^3 - 5(0)^2 - 2(0) + 7$

$= 0 - 0 - 0 + 7 = 7$

2. निम्न बहुपदों की घात तथा पदों की संख्या ज्ञात कीजिए–

(i) $8x^4 - 5x + 2$

(ii) $3x^2 - 7$

(iii) $6x^5 + 4x^2 - x + 9$

हल : (i) घात = 4, पद = 3

(ii) घात = 2, पद = 2

(iii) घात = 5, पद = 4

मिशन ज्ञान
पढ़ना चाहें, जहाँ चाहें जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

बहुपद के शून्यक

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. किसी बहुपद का शून्यक वह मान होता है, जिसके लिए–

(अ) बहुपद का मान 1 हो जाता है।

(ब) बहुपद का मान शून्य हो जाता है।

(स) बहुपद का मान ऋणात्मक हो जाता है।

(द) बहुपद का मान अपरिभाषित हो जाता है। **(ब)**

2. यदि $p(4) = 0$, तो 4 क्या कहलाएगा?

(अ) गुणांक (ब) घात

(स) शून्यक (द) स्थिर पद **(स)**

3. रैखिक बहुपद के बहुपद अधिकतम कितने शून्यक हो सकते हैं?

(अ) 0 (ब) 1

(स) 2 (द) 3 **(ब)**

4. यदि किसी रैखिक बहुपद का शून्यक 5 है, तो उस बहुपद का मान $x = 5$ पर होगा–

(अ) 5 (ब) 1

(स) 0 (द) –5 **(स)**

5. बहुपद के शून्यक का संबंध किस अक्ष से होता है?

(अ) X–अक्ष (ब) Y–अक्ष

(स) दोनों अक्षों से (द) किसी भी अक्ष से नहीं **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का शून्यक ..... होगा।

हल : $-\frac{5}{2}$

2. किसी बहुपद के शून्यक का मान रखने पर बहुपद का मान ..... हो जाता है।

उत्तर : शून्य (0)

3. एक द्विघात बहुपद के अधिकतम ..... शून्यक हो सकते हैं।

हल : 2

4. यदि $p(x) = x^2 - 4$ है, तो $p(2)$ का मान ..... होगा।

हल : 0

5. अचर बहुपद का कोई ..... नहीं होता है।

हल : शून्यक

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि $p(x) = 4x - 20$ है, तो बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बहुपद का शून्यक ज्ञात करने के लिए, हम बहुपद को शून्य (0) के बराबर रखते हैं। अर्थात,

$p(x) = 0$

$4x - 20 = 0$

$4x = 20$

$x = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 5$

अतः बहुपद का शून्यक 5 है।

2. जाँच कीजिए कि 3, बहुपद $p(x) = 5x - 15$ का शून्यक है या नहीं।

हल : $p(x) = 5x - 15$

$x = 3$ रखने पर,

$p(3) = 5(3) - 15$

$p(3) = 15 - 15$

$p(3) = 0$

चूँकि $p(3)$ का मान 0 है,

अतः 3, दिए गए बहुपद का एक शून्यक है।

3. जाँच कीजिए कि -4, बहुपद $p(x) = 2x + 8$ का शून्यक है या नहीं।

हल : $p(x) = 2x + 8$

$x = -4$ रखने पर,

$p(-4) = 2(-4) + 8$

$p(-4) = -8 + 8$

$p(-4) = 0$

चूँकि मान शून्य (0) प्राप्त हुआ है,

अतः -4, दिए गए बहुपद का एक शून्यक है।

4. यदि $p(x) = 3x - 9$ है, तो जाँच कीजिए कि 2 इसका शून्यक है या नहीं।

हल : बहुपद $p(x) = 3x - 9$ में $x = 2$ रखने पर,

$p(2) = 3(2) - 9$

$p(2) = 6 - 9$

$p(2) = -3$

चूँकि $p(2)$ का मान शून्य के बराबर नहीं है $(p(2) \neq 0)$,

अतः 2 इस बहुपद का शून्यक नहीं है।

5. यदि $p(x) = 5x - 25$ है, तो $x = 6$ रखने पर बहुपद का मान ज्ञात कीजिए। क्या 6 इसका शून्यक है?

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल : $p(x) = 5x - 25$

$x = 6$ रखने पर बहुपद का मान,

$p(6) = 5(6) - 25$

$p(6) = 30 - 25$

$p(6) = 5$

शून्यक की जाँच: चूँकि $x = 6$ रखने पर बहुपद का मान 5 प्राप्त हुआ है, जो कि शून्य नहीं है $(p(6) \neq 0)$,

अतः 6 इस बहुपद का शून्यक नहीं है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. यदि $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ है, तो जाँच कीजिए कि 1 तथा 3 इसके शून्यक हैं या नहीं।

हल: (i) $x = 1$ के लिए:

$p(1) = 2(1)^2 - 8(1) + 6$

$= 2 - 8 + 6 = 0$ (अतः 1 शून्यक है।)

(ii) $x = 3$ के लिए:

$p(3) = 2(3)^2 - 8(3) + 6$

$= 18 - 24 + 6 = 0$ (अतः 3 भी शून्यक है।)

2. यदि $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ है, तो जाँच कीजिए कि 1, 2 तथा 3 इसके शून्यक हैं या नहीं।

हल: (i) $x = 1$ पर,

$p(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$ (शून्यक है)

(ii) $x = 2$ पर,

$p(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 0$ (शून्यक है)

(iii) $x = 3$ पर,

$p(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 0$ (शून्यक है)

3. यदि $p(x) = x^2 + 4x + 3$ है, तो इसके शून्यक ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए।

हल : $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 3x + x + 3 = 0$

$x(x + 3) + 1(x + 3) = 0$

$(x + 3)(x + 1) = 0$

अतः $x = -3$ या $x = -1$

सत्यापन:

$p(-3) = (-3)^2 + 4(-3) + 3$

$= 9 - 12 + 3 = 0$

$p(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 3$

$= 1 - 4 + 3 = 0$

अतः -3 तथा -1 दोनों बहुपद के शून्यक हैं।

गुणनखंड एवं गुणनखंड प्रमेय

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि $(x - 2)$, बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है, तो निम्न में से कौन–सा कथन सत्य है?

(अ) $p(2) = 1$ (ब) $p(2) = 0$

(स) $p(-2) = 0$ (द) $p(0) = 2$ **(ब)**

2. गुणनखंड प्रमेय के अनुसार यदि $p(a) = 0$, तो–

(अ) $(x + a)$, $p(x)$ का गुणनखंड होगा।

(ब) $(x - a)$, $p(x)$ का गुणनखंड होगा।

(स) a, गुणांक होगा।

(द) a, स्थिर पद होगा। **(ब)**

3. यदि $p(-3) = 0$ तो निम्न में से कौन–सा गुणनखंड होगा?

(अ) $(x - 3)$ (ब) $(x + 3)$

(स) $(3x + 1)$ (द) $(x - 1)$ **(ब)**

4. यदि $(x - 5)$, किसी बहुपद का गुणनखंड है, तो उसका एक शून्यक होगा–

(अ) -5 (ब) 0

(स) 5 (द) 10 **(स)**

5. यदि $(x + 2)$, किसी बहुपद का गुणनखंड है, तो उसका शून्यक होगा–

(अ) 2 (ब) -2

(स) 0 (द) 4 **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. यदि $p(a) = 0$ हो, तो $(x - a)$, बहुपद $p(x)$ का एक ..... होता है।

हल : गुणनखंड

2. यदि $(x + 1)$, बहुपद $x^2 + k$ का एक गुणनखंड है, तो k का मान ..... होगा।

उत्तर : -1

3. किसी त्रिघात बहुपद के अधिकतम ..... रेखीय गुणनखंड हो सकते हैं।

हल : 3

4. $a^2 - b^2$ का गुणनखण्ड़ रूप ..... होता है।

हल : $(a + b)(a - b)$

5. यदि $(x - 1)$, बहुपद $p(x) = x^2 + x + k$ का एक गुणनखंड है, तो k का मान ..... होगा।

हल : -2

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि (x – 2), बहुपद $p(x) = x^3 – 4x^2 + x + 6$ का गुणनखंड है या नहीं।

हल : $p(x) = x^3 – 4x^2 + x + 6$

$x = 2$ रखने पर,

$p(2) = (2)^3 – 4(2)^2 + (2) + 6$

$p(2) = 8 – 4(4) + 2 + 6$

$p(2) = 8 – 16 + 2 + 6$

$p(2) = 16 – 16$

$p(2) = 0$

चूँकि शेषफल $p(2) = 0$ है,

अतः $(x – 2)$, बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

2. गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि (x + 3), बहुपद $p(x) = x^2 + 2x – 15$ का गुणनखंड है या नहीं।

हल : $p(x) = x^2 + 2x – 15$

$x = –3$ रखने पर,

$p(–3) = (–3)^2 + 2(–3) – 15$

$p(–3) = 9 – 6 – 15$

$p(–3) = 9 – 21$

$p(–3) = –12$

चूँकि शेषफल $p(–3) \neq 0$ (शून्य नहीं) है,

अतः $(x + 3)$, बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड नहीं है।

3. बहुपद $x^2 – 8x + 15$ का गुणनखंड कीजिए तथा उसके शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x) = x^2 – 5x – 3x + 15$

$= x(x – 5) – 3(x – 5)$

$= (x – 5)(x – 3)$

शून्यक ज्ञात करना,

यदि $x – 5 = 0$, तो $x = 5$

यदि $x – 3 = 0$, तो $x + 3$

अतः, बहुपद के गुणनखंड $(x – 5)(x – 3)$ हैं तथा शून्यक 3 और 5 हैं।

4. बहुपद $x^2 – 25$ का गुणनखंड कीजिए तथा उसके शून्यक लिखिए।

हल : $x^2 – 25 = (x)^2 – (5)^2$

सर्वसमिका $(a^2 – b^2) = (a – b)(a + b)$ का प्रयोग करने पर $= (x – 5)(x + 5)$

शून्यक ज्ञात करना,

यदि $x – 5 = 0$, तो $x = 5$

यदि $x + 5 = 0$, तो $x = –5$

अतः, बहुपद के गुणनखंड $(x – 5)(x – 5)$ हैं तथा इसके शून्यक 5 और $–5$ हैं।

5. बहुपद $3x^2 – 27$ का पूर्ण गुणनखंड कीजिए।

हल : दिया गया बहुपद, $p(x) = 3x^2 – 27$

$= 3(x^2 – 9)$

$= 3[(x)^2 – (3)^2]$

सर्वसमिका $(a^2 – b^2) = (a – b)(a + b)$ का प्रयोग करने पर,

$= 3(x – 3)(x + 3)$

अतः, बहुपद का पूर्ण गुणनखंड $3(x – 3)(x + 3)$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि (x – 2), बहुपद $p(x) = x^3 – 5x^2 + 6x$ का एक गुणनखंड है। इसके बाद बहुपद का पूर्ण गुणनखंड कीजिए।

हल : दिया गया बहुपद है: $p(x) = x^3 – 5x^2 + 6x$

$x = 2$ रखने पर,

$p(2) = (2)^3 – 5(2)^2 + 6(2)$

$p(2) = 8 – 5(4) + 12$

$p(2) = 8 – 20 + 12$

$p(2) = 20 – 20$

$p(2) = 0$

चूँकि शेषफल $p(2)$ का मान 0 है, अतः गुणनखंड प्रमेय के अनुसार $(x – 2)$, बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है। यह सिद्ध हुआ।

बहुपद का पूर्ण गुणनखंड, $p(x) = x^3 – 5x^2 + 6x$

$= x(x^2 – 5x + 6)$

$= x [x^2 – 2x – 3x + 6]$

$= x [x(x – 2) – 3(x – 2)] = x (x – 2)(x – 3)$

अतः, बहुपद का पूर्ण गुणनखंड $x(x – 2)(X – 3)$ है।

2. बहुपद $x^3 – 9x$ का पूर्ण गुणनखंड कीजिए तथा उसके सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : बहुपद का पूर्ण गुणनखंड, $p(x) = x^3 – 9x$

$= x(x^2 – 9)$

$= x [x^2 – (3)^2]$

सर्वसमिका $(a^2 – b^2) = (a – b)(a + b)$ का प्रयोग करने पर: यहाँ $a = x$ और $b = 3$ रखने पर,

$= x(x – 3)(x + 3)$

अतः बहुपद का पूर्ण गुणनखंड $x(x – 3)(x + 3)$ है।

बहुपद के शून्यक ज्ञात करना:

1. यदि $x = 0$ हो, तो पहला शून्यक $x = 0$
2. यदि $x - 3 = 0$ हो, तो $x = 3$ (दूसरा शून्यक)
3. यदि $x + 3 = 0$ हो, तो $x = -3$ (तीसरा शून्यक)

अतः बहुपद के सभी शून्यक 0, 3 और -3 हैं।

3. बहुपद $x^4 - 16$ का पूर्ण गुणनखंड कीजिए तथा उसके रैखिक गुणनखंड लिखिए।

हल : दिया गया बहुपद है, $p(x) = x^4 - 16$

$= (x^2)^2 - (4)^2$

सर्वसमिका $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ का प्रयोग करने पर:

यहाँ $a = x^2$ और $b = 4$ है,

$= (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

$= [x^2 - (2)^2](x^2 + 4)$

$= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

अतः बहुपद का पूर्ण गुणनखंड $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ है।

रैखिक गुणनखंड : रैखिक गुणनखंड वे होते हैं जिनमें चर की अधिकतम घात 1 होती है। यहाँ ऊपर प्राप्त गुणनखंडों में:

- $(x - 2)$ की घात 1 है (यह रैखिक है)।
- $(x + 2)$ की घात 1 है (यह रैखिक है)।
- $(x^2 + 4)$ की घात 2 है (यह द्विघाती है, रैखिक नहीं)।

अतः इस बहुपद के रैखिक गुणनखंड $(x - 2)$ तथा $(x + 2)$ हैं।

बीजीय सर्वसमिकाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. $(a + b)^2$ का सही विस्तार है–

(अ) $a^2 + b$ (ब) $a^2 + 2ab + b^2$

(स) $a^2 - 2ab + b$ (द) $a^2 + b^2$ **(ब)**

2. $(a - b)^2$ का सही विस्तार है–

(अ) $a^2 + 2ab + b^2$ (ब) $a^2 + b$

(स) $a^2 - 2ab + b^2$ (द) $a^2 + ab + b$ **(स)**

3. $a^2 - b^2$ का गुणनखंड है–

(अ) $(a + b)$ (ब) $(a - b)$

(स) $(a + b)(a - b)$ (द) $(a + b)(a + b)$ **(स)**

4. $(x + 5)^2$ के विस्तार में स्थिर पद होगा –

(अ) 10 (ब) 25

(स) 5 (द) 15 **(ब)**

5. $(3a - b)^2$ के विस्तार का प्रथम पद होगा–

(अ) $3a$ (ब) $9a^2$

(स) $6ab$ (द) b^2 **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. सर्वसमिका: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab +$ .....

हल : b^2

2. सर्वसमिका: $(a + b)(a - b) =$ .....

उत्तर : $a^2 - b^2$

3. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x +$ .....

हल : ab

4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc +$ .....

हल : 2ca

5. यदि $a + b + c = 0$ हो, तो $a^3 + b^3 + c^3 =$ .....

हल : 3abc

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. सर्वसमिका का प्रयोग करके $(2x + 5)^2$ का विस्तार कीजिए।

हल : सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

दिए गए व्यंजक में $a = 2x$ और $b = 5$ है।

सूत्र में मान रखने पर, $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5) + (5)^2$

$(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

अतः विस्तार करने पर प्राप्त मान $4x^2 + 20x + 25$ है।

2. सर्वसमिका का प्रयोग करके $(3a - 4)^2$ का विस्तार कीजिए।

हल : सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

दिए गए व्यंजक में $a = 3a$ और $b = 4$ है।

सूत्र में मान रखने पर,

$(3a - 4)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(4) + (4)^2$

$(3a + 4)^2 = 9a^2 - 24a + 16$

अतः विस्तार करने पर प्राप्त मान $9a^2 - 24a + 16$ है।

3. सर्वसमिका का प्रयोग करके $49x^2 - 121$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : दिया गया व्यंजक: $49x^2 - 121$

$= (7x)^2 - (11)^2$

सर्वसमिका $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ का प्रयोग करने पर (यहाँ $a = 7x$ और $b = 11$ है):

$= (7x - 11)(7x + 11)$

अतः अभीष्ट गुणनखंड $(7x - 11)(7x + 11)$ है।

4. यदि $a + b = 15$ तथा $ab = 56$ है, तो $a^2 + b^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है: $a + b = 15$ और $ab = 56$

सर्वसमिका है: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

इसे व्यवस्थित करने पर, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

दिए गए मानों को सूत्र में रखने पर:

$a^2 + b^2 = (15)^2 - 2(56)$

$a^2 + b^2 = 225 - 112$

$a^2 + b^2 = 113$

अतः $a^2 + b^2$ का मान 113 है।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

5. सर्वसमिका का प्रयोग करके (5m + 3)(5m – 3) का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वसमिका $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$ का प्रयोग

दिए गए व्यंजक में $a = 5m$ और $b = 3$ है।

मान रखने पर, $(5m + 3)(5m – 3) = (5m)^2 – (3)^2$

$(5m + 3)(5m – 3) = 25m^2 – 9$

अतः सरल करने पर प्राप्त मान $25m^2 – 9$ है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. सर्वसमिका का प्रयोग करके $(3x + 4)^2 – (3x – 4)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण बीजीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करेंगे।

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$

$(3x + 4)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4) + (4)^2$

$= 9x^2 + 24x + 16$ ..... (1)

$(3x – 4)^2 = (3x)^2 – 2(3X)(4) + (4)^2$

$= 9x^2 – 24x + 16$ ..... (2)

समीकरण 1 में से समीकरण 2 को घटाने पर,

$(3x + 4)^2 – (3x – 4)^2$

$= (9x^2 + 24x + 16) – (9x^2 – 24x + 16)$

$= 9x^2 + 24x + 16 – 9x^2 + 24x – 16$

$= (9x^2 – 9x^2) + (24x + 24x) + (16 – 16)$

$= 0 + 48x + 0 = 48x$

अतः $(3x + 4)^2 – (3x – 4)^2$ का मान $48x$ है।

2. सर्वसमिका का प्रयोग करके $(2a + 5)^2 + (2a – 5)^2$ को सरल कीजिए।

हल : दिए गए व्यंजक को सरल करने के लिए हम निम्नलिखित सर्वसमिकाओं का प्रयोग करेंगे।

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x – y)^2 = x^2 – 2xy + y^2$

$(2a + 5)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(5) + (5)^2$

$= 4a^2 + 20a + 25$ ..... (1)

$(2a – 5)^2 = (2a)^2 – 2(2a)(5) + (5)^2$

$= 4a^2 – 20a + 25$ ..... (2)

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$(2a + 5)^2 + (2a – 5)^2$

$= (4a^2 + 20a + 25) + (4a^2 – 20a + 25)$

$= 4a^2 + 4a^2 + 20a – 20a + 25 + 25$

$= (4a^2 + 4a^2) + (25 + 25)$

$= 8a^2 + 50$ या $2(4a^2 + 25)$

अतः सरल करने पर प्राप्त मान $8a^2 + 50$ या $2(4a^2 + 25)$ है।

3. यदि $x + y = 18$ तथा $xy = 77$ है, तो $x^2 + y^2$ तथा $(x – y)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

- $x + y = 18$
- $xy = 77$

(i) $x^2 + y^2$ का मान ज्ञात करना

सर्वसमिका है: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

सर्वसमिका को व्यवस्थित करने पर $x^2 + y^2 = (x + y)^2 – 2xy$

दिए गए मानों ($x + y = 18$ और $xy = 77$) को सूत्र में रखने पर,

$x^2 + y^2 = (18)^2 – 2(77)$

$x^2 + y^2 = 324 – 154$

$x^2 + y^2 = 170$

(ii) $(x – y)^2$ का मान ज्ञात करना

सर्वसमिका के अनुसार: $(x – y)^2 = x^2 – 2xy + y^2$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

$(x – y)^2 = (x^2 + y^2) – 2xy$

ऊपर ज्ञात किया गया मान ($x^2 + y^2 = 170$) और दिया गया मान ($xy = 77$) यहाँ रखने पर:

$(x – y)^2 = 170 – 2(77)$

$(x – y)^2 = 170 – 154$

$(x – y)^2 = 16$

अतः अभीष्ट मान $x^2 + y^2 = 170$ तथा $(x – y)^2 = 16$ हैं।

4. सर्वसमिका का प्रयोग करके $64m^2 – 144n^2$ का पूर्ण गुणनखंड कीजिए।

हल : दिया गया व्यंजक है: $64m^2 – 144n^2$

$= 16(4m^2 – 9n^2)$

$= 16[(2m)^2 – (3n)^2]$

$(a^2 – b^2) = (a – b)(a + b)$ का प्रयोग करने पर:

$= 16(2m – 3n)(2m + 3n)$

अतः $64m^2 – 144n^2$ का पूर्ण गुणनखंड $16(2m – 3n)(2m + 3n)$ है।

5. सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि: $(5x + 2)^2 – (5x – 2)^2 = 40x$

हल : बाँया पक्ष (LHS) $= (5x + 2)^2 – (5x – 2)^2$

यहाँ हम दो सर्वसमिकाओं का प्रयोग करेंगे:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a + b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$

$(5x + 2)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(2) + (2)^2$

$= 25x^2 + 20x + 4$

$(5x + 2)^2 = (5x)^2 – 2(5x)(2) + (2)^2$

$= 25x^2 – 20x + 4$

मान LHS में रखने पर,

LHS $= (25x^2 + 20x + 4) – (25x^2 – 20x + 4)$

LHS $= 25x^2 + 20x + 4 – 25x^2 + 20x – 4$

LHS $= 20x + 20x$

LHS $= 40x =$ RHS

3 निर्देशांक ज्यामिति

भूमिका

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक (–5, 4) हैं, तो वह किस चतुर्थांश में स्थित होगा?
   (अ) प्रथम (ब) द्वितीय
   (स) तृतीय (द) चतुर्थ (ब)
2. यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक (6, –2) हैं, तो वह किस चतुर्थांश में स्थित होगा?
   (अ) प्रथम (ब) द्वितीय
   (स) तृतीय (द) चतुर्थ (द)
3. निम्न में से कौन–सा बिन्दु x-अक्ष पर स्थित है?
   (अ) (0, 5) (ब) (4, 0)
   (स) (–3,2) (द) (2,–4) (ब)
4. निम्न में से कौन–सा बिन्दु y-अक्ष पर स्थित है?
   (अ) (5,0) (ब) (0,–7)
   (स) (3,4) (द) (–2,5) (ब)
5. निम्नलिखित में से कौन–सा बिन्दु मूलबिन्दु को दर्शाता है?
   (अ) (1, 1) (ब) (0, 1)
   (स) (0, 0) (द) (1, 0) (स)

रिक्तस्थान –

1. समतल में किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज रेखा को ..... कहते हैं।

हल : x-अक्ष

2. समतल में किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने वाली उर्ध्वाधर रेखा को ..... कहते हैं।

उत्तर : y-अक्ष

3. x-अक्ष और y-अक्ष के प्रतिच्छेद बिंदु को ..... कहते हैं।

हल : मूल बिंदु

4. निर्देशांक तल पूरे समतल को ..... भागों (चतुर्थांशों) में विभाजित करता है।

हल : 4

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. निम्नलिखित बिन्दुओं का चतुर्थांश ज्ञात कीजिए–
   (i) A(4, 5) (ii) B(–6, 3)
   (iii) C(– 2, – 7) (iv) D(8, –1)

   हल : A(4, 5) → प्रथम चतुर्थांश
   B(–6, 3) → द्वितीय चतुर्थांश
   C(–2, –7) → तृतीय चतुर्थांश
   D(8, –1) → चतुर्थ चतुर्थांश

2. निम्नलिखित बिन्दुओं में से बताइए कौन–सा बिन्दु x–अक्ष, y–अक्ष तथा मूलबिन्दु पर स्थित है–
   (5, 0), (0,– 4), (0, 0), (3, 2)

   हल : (5, 0) → x–अक्ष
   (0, 4) → y–अक्ष
   (0, 0) → मूलबिन्दु
   (3, 2) → प्रथम चतुर्थांश

3. यदि किसी बिन्दु का x-निर्देशांक धनात्मक तथा y-निर्देशांक ऋणात्मक है, तो उसका एक उपयुक्त उदाहरण दीजिए तथा उसका चतुर्थांश लिखिए।

   हल : एक उदाहरण: (6,– 5)
   बिंदु **चतुर्थ चतुर्थांश** में स्थित होगा।

4. मान लीजिए आपकी कक्षा में रोहन तीसरी पंक्ति और पाँचवें स्तम्भ/कतार में बैठा है। निर्देशांक ज्यामिति के अनुसार उसकी स्थिति को किस प्रकार निरूपित किया जाएगा?

   हल : यदि हम स्तंभ को x-अक्ष और कतार को y-अक्ष मानें:
   स्तंभ संख्या = 3
   कतार संख्या = 5
   अतः रोहन की स्थिति को क्रमबद्ध युग्म (3, 5) से निरूपित किया जाएगा।

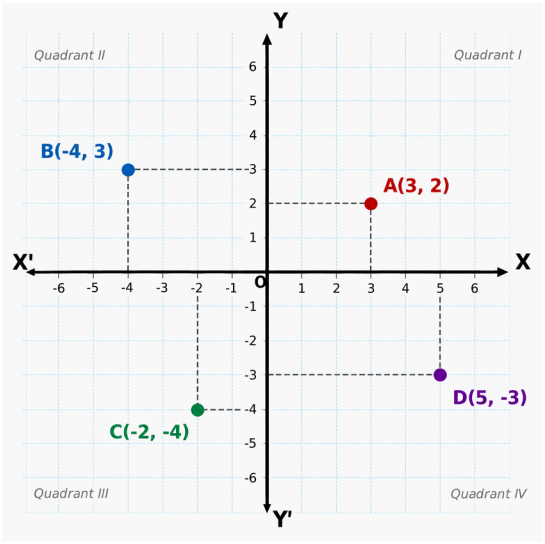
दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक निर्देशांक तल बनाकर बिन्दुओं A(3, 2), B(– 4, 3), C(–2, –4) तथा D(5, – 3) को अंकित कीजिए तथा प्रत्येक का चतुर्थांश लिखिए।

मिशन ज्ञान
पढ़ना चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल :



A(3, 2) → प्रथम चतुर्थांश

B(–4, 3) → द्वितीय चतुर्थांश

C(–2, –4) → तृतीय चतुर्थांश

D(5, –3) → चतुर्थ चतुर्थांश

2. निम्नलिखित बिन्दुओं में से बताइए कि कौन–से बिन्दु अक्षों पर स्थित हैं तथा कौन–से किसी चतुर्थांश में स्थित है– (0, 6), (–5, 0), (2, –3), (–7, 8), (–4, –1)

हल : (0, 6) → y–अक्ष

(–5, 0) → x–अक्ष

(2, –3) → चतुर्थ चतुर्थांश

(–7, 8) → द्वितीय चतुर्थांश

(–4, –1) → तृतीय चतुर्थांश

3. एक अध्ययन मेज पर रखे हुए लैंप की स्थिति को किसी अन्य व्यक्ति को समझाने का तरीका विस्तार से लिखिए।

हल :1. अध्ययन मेज के ऊपरी हिस्से को एक समतल मान लेते हैं।

2. मेज के किसी भी एक कोने को मूल बिंदु (0, 0) मान लें और उससे जुड़ी दो लंबवत कोर को x–अक्ष (लंबाई) और y–अक्ष (चौड़ाई) मान लें।

3. अब लैंप की दूरी बाईं कोर (y–अक्ष) से मापें। माना यह दूरी 25 सेमी है।

4. इसके बाद लैंप की दूरी सामने वाली निचली कोर (x-अक्ष) से मापें। माना यह दूरी 40 सेमी है।

निष्कर्ष: लैंप की स्थिति को हम (25, 40) या (40, 25) के रूप में (चुनी गई अक्षों के आधार पर) स्पष्ट रूप से बता सकते हैं।

कार्तीय पद्धति

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक (7, – 5) हैं, तो उसकी भुज होगी?

(अ) – 5 (ब) 5

(स) 7 (द) 0 **(स)**

2. यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक (6, 4) हैं, तो उसकी कोटि होगी–

(अ) –6 (ब) 6

(स) 4 (द) –4 **(स)**

3. यदि किसी बिन्दु की भुज 0 तथा कोटि 8 है, तो वह बिन्दु होगा–

(अ) (8, 0) (ब) (0, 8)

(स) (8, 8) (द) (0, 0) **(ब)**

4. यदि किसी बिन्दु की भुज ऋणात्मक तथा कोटि धनात्मक है, तो वह किस चतुर्थांश में स्थित होगा?

(अ) प्रथम (ब) द्वितीय

(स) तृतीय (द) चतुर्थ **(ब)**

5. निम्नलिखित में से कौन–सा बिन्दु चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है?

(अ) (4, –7) (ब) (–4, 7)

(स) (–5, –2) (द) (3, 4) **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. किसी बिंदु की y-अक्ष से दूरी को उस बिंदु का ..... (या x-निर्देशांक) कहते हैं।

हल : भुज

2. किसी बिंदु की x–अक्ष से दूरी को उस बिंदु की ..... (या y-निर्देशांक) कहते हैं।

हल : कोटि

3. प्रथम चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न ..... होते हैं।

हल : (+, +)

4. बिंदु (–3, 5) ..... चतुर्थांश में स्थित है।

हल : द्वितीय

5. चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न ..... होते हैं।

हल : (+, –)

पढ़ें जहाँ चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. निम्नलिखित बिन्दुओं की भुज तथा कोटि लिखिए–

(i) A(5, 7) **(ii) B(–4, 2)**

(iii) C(0, –6)

हल : A : भुज = 5, कोटि = 7

B : भुज = –4, कोटि = 2

C : भुज = 0, कोटि = –6

2. यदि किसी बिन्दु की भुज –8 तथा कोटि 3 है, तो उसके निर्देशांक लिखिए तथा उसका चतुर्थांश बताइए।

हल : निर्देशांक = (–8, 3)

यह द्वितीय चतुर्थांश में स्थित होगा।

3. बिंदु M(–6, 8) की:

(a) x-अक्ष से लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए।

(b) y-अक्ष से लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए।

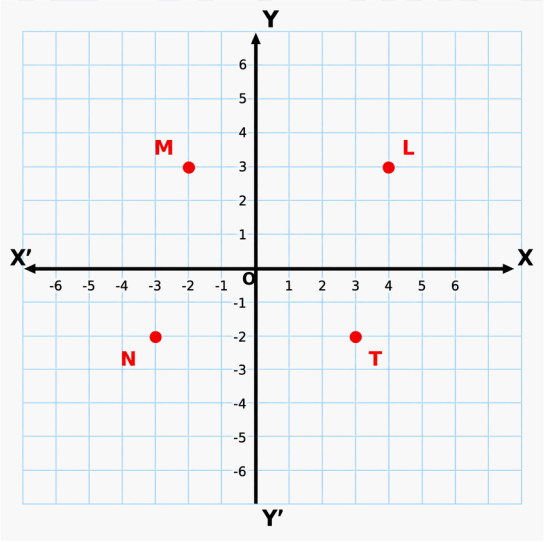
हल : (a) किसी बिंदु की x-अक्ष से दूरी उसकी कोटि (y-निर्देशांक) के निरपेक्ष मान के बराबर होती है।

बिंदु M (–6, 8) की x-अक्ष से दूरी = 8 इकाई

(b) किसी बिंदु की y-अक्ष से दूरी उसके भुज (x–निर्देशांक) के निरपेक्ष मान के बराबर होती है।

बिंदु M (–6, 8) की y-अक्ष से दूर = 6 इकाई (दूरी कभी ऋणात्मक नहीं होती)

4. दिए गए ग्राफ में चार बिंदु L, M, N तथा T अंकित हैं। ग्राफ को ध्यानपूर्वक देखकर प्रत्येक बिंदु के निर्देशांक लिखिए।



आकृतिः निर्देशांक ज्ञात करने हेतु दिया गया ग्राफ

हल : L(4, 3); M(–2, 3); N(–3, –2); T(3, –2)।

निबंधात्मक प्रश्न–

1. निम्नलिखित बिंदुओं की x-अक्ष एवं y-अक्ष से दूरियाँ ज्ञात कीजिए तथा प्रत्येक का चतुर्थांश/अक्ष भी लिखिए:

(14, –9), (–27, –33), (0, 18), (40, 0), (–16, 25)

हल : (14, –9) :

x-अक्ष से दूरी = 9 इकाई,

y-अक्ष से दूरी = 14 इकाई;

चिह्न (+, –) ⇒ IV चतुर्थांश।

(–27, –33) :

x-अक्ष से दूरी = 33 इकाई,

y-अक्ष से दूरी = 27 इकाई;

चिह्न (–, –) ⇒ III चतुर्थांश।

(0, 18) :

x-अक्ष से दूरी = 18 इकाई,

y-अक्ष से दूरी = 0;

बिंदु y-अक्ष पर स्थित है।

(40, 0) :

x-अक्ष से दूरी = 0,

y-अक्ष से दूरी = 40 इकाई;

बिंदु x-अक्ष पर स्थित है।

(–16, 25) :

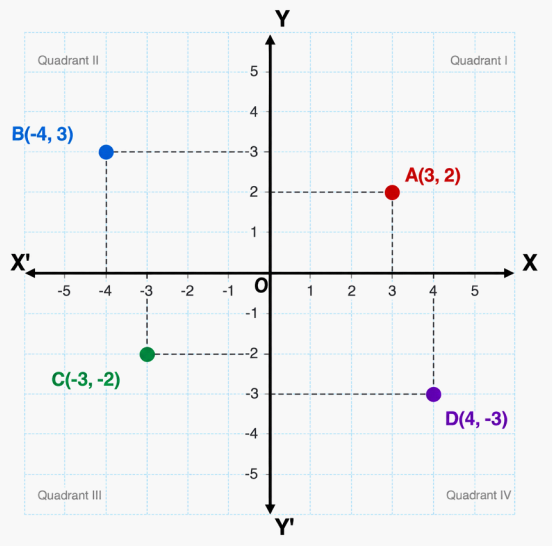
x-अक्ष से दूरी = 25 इकाई,

y-अक्ष से दूरी = 16 इकाई;

चिह्न (–, +) ⇒ II चतुर्थांश।

2. निम्नलिखित बिन्दुओं A(3, 2), B(–4, 3), C(–3, –2) तथा D(4, –3) को निर्देशांक तल पर अंकित कीजिए तथा प्रत्येक का चतुर्थांश लिखिए।

हल :



DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

A → प्रथम चतुर्थांश

B → द्वितीय चतुर्थांश

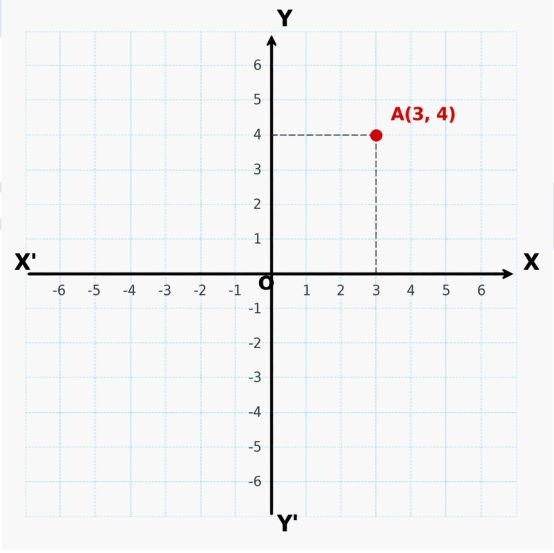
C → तृतीय चतुर्थांश

D → चतुर्थ चतुर्थांश

3. बिंदु A(3, 4) को आलेख कागज पर आलेखित कीजिए। इसकी विधि चरणबद्ध रूप में लिखिए।

हल : आलेखन की विधि:

- सर्वप्रथम आलेख कागज पर दो परस्पर लंब रेखाएँ X'X (x-अक्ष) तथा Y'Y (y-अक्ष) खींचिए, जो मूलबिंदु O पर एक–दूसरे को काटें।
- उचित पैमाना लीजिए (जैसे 1 बड़ा खाना = 1 इकाई) तथा दोनों अक्षों पर धनात्मक व ऋणात्मक दिशाओं में संख्याएँ अंकित कीजिए।
- चूँकि बिंदु A का भुज (x-निर्देशांक) = 3 है, अतः मूलबिंदु से x-अक्ष की धनात्मक दिशा में 3 इकाई चलिए।
- अब इस स्थान से y-अक्ष के समांतर ऊपर की ओर 4 इकाई (चूँकि कोटि = 4) चलकर बिंदु अंकित कीजिए – यही बिंदु A है।



आकृति: बिंदु A(3, 4) का आलेखन

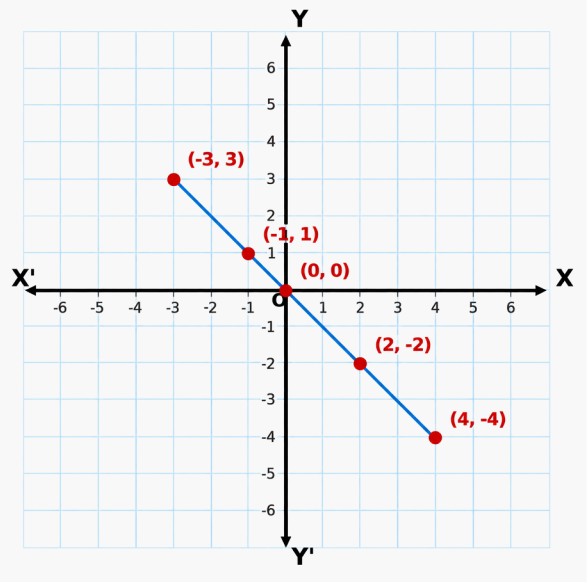
बिंदु A(3, 4) प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, क्योंकि इसके दोनों निर्देशांक धनात्मक हैं।

4. नीचे दी गई सारणी में x तथा y के मान दिए गए हैं। इन बिंदुओं को आलेख कागज पर आलेखित कीजिए।

x:	–3	–1	0	2	4
y:	3	1	0	–2	–4

हल : सारणी से प्राप्त युग्म हैं:

(–3, 3), (–1, 1), (0, 0), (2, –2), (4, –4)



आकृति: सारणी के बिंदुओं का आलेखन

[illegible]

[illegible] रूप [illegible]

[illegible] 3 [illegible]

[illegible] y [illegible]

2. [illegible] 5x + 3y [illegible]

[illegible] 5

[illegible] 0

[illegible] 10

[illegible] 15 [illegible]

[illegible] -1

[illegible] 1

[illegible] में [illegible] चरों [illegible]

[illegible] ?

(अ[illegible]

[illegible] x [illegible]

[illegible]

[illegible] 0

[illegible] x + 3y = 9 [illegible]

हल [illegible]

[illegible] करण x + 2y = [illegible]

[illegible]

हल [illegible]

4. [illegible] खक समीकर[illegible] प्र[illegible] कि[illegible] धिक[illegible] बात

हमे[illegible] .....

[illegible] : 1[illegible]

[illegible] 15 [illegible] 200 [illegible]

[illegible] = x [illegible]

[illegible] 25 [illegible]

[illegible] 2 5) [illegible] 2) [illegible]

[illegible] न समीक[illegible] हल [illegible]

[illegible] 2(2 [illegible]

(3 [illegible]

[illegible] है।

[illegible] (2, 5) [illegible] (4, [illegible] समीकरण [illegible] हल हैं

[illegible] त्तरात्मक प्रश्न–

1. एक पुस्तक का मूल्य [illegible] का मूल्य ₹30 [illegible] कुल [illegible] स्थिति [illegible] रा[illegible] समीकरण [illegible] कोई पाँच [illegible] ज्ञात कीजिए।

हल : मान [illegible]जिए

[illegible] = x

[illegible] 0

[illegible] 10

[illegible] (2, [illegible] 4), (4, 2)

[illegible] VIDEOS [illegible] TES | [illegible] BOOKS | QUIZ TESTS SERIES [illegible]

[illegible] MISSION GYAN APP

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को दो चरों वाले समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) x = 8 (ii) y = –3 (iii) 3x = 7 (iv) 4y = 9

हल: (i) x = 8

1.x + 0.y – 8 = 0 अथवा 1.x + 0.y = 8

(ii) y = –3

0.x + 1.y + 3 = 0 अथवा 0.x + 1.y = –3

(iii) 3x = 7

3.x + 0.y – 7 = 0

(iv) 4y = 9

0.x + 4.y – 9 = 0

3. निम्नलिखित कथनों को दो चरों वाले रैखिक समीकरण के रूप में लिखिए:

(i) एक एकदिवसीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने मिलकर 145 रन बनाए।

(ii) एक आयत की लंबाई, उसकी चौड़ाई से 4 इकाई अधिक है।

हल: (i) माना एक बल्लेबाज ने x रन तथा दूसरे ने y रन बनाए।

दोनों बल्लेबाजों के रनों का योग 145 है,

अतः समीकरण है:

x + y = 145

x + y – 145 = 0।

(ii) माना लंबाई x तथा चौड़ाई y है।

लंबाई, चौड़ाई से 4 इकाई अधिक है, अर्थात्

x = y + 4,

x – y – 4 = 0

रैखिक समीकरण का हल

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख सामान्यतः किसका रूप होता है?

(अ) वृत्त (ब) परवलय

(स) सीधी रेखा (द) आयत **(स)**

2. यदि कोई बिन्दु किसी रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित है, तो वह–

(अ) समीकरण का हल नहीं है।

(ब) समीकरण का एक हल है।

(स) केवल x-अक्ष पर होगा।

(द) केवल y-अक्ष पर होगा। **(ब)**

3. एक रैखिक समीकरण के कितने हल हो सकते हैं?

(अ) एक (ब) दो

(स) तीन (द) अपरिमित **(द)**

4. आलेख बनाने के लिए न्यूनतम कितने बिन्दुओं की आवश्यकता होती है?

(अ) एक (ब) दो

(स) तीन (द) चार **(ब)**

5. समीकरण x + y = 10 का एक हल है–

(अ) (2, 7) (ब) (5, 5)

(स) (3, 4) (द) (1, 8) **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. यदि x = 2, y = 3 समीकरण 2x + ky = 10 का एक हल है, तो k का मान ..... होगा।

हल : 2

2. बिंदु (0, 0) हमेशा समीकरण y = mx का एक ..... होता है।

हल : हल

3. समीकरण x + y = 7 का एक हल (3, ...) है।

हल : 4

4. यदि (2, 0) समीकरण 2x + 3y = a का एक हल है, तो a का मान ..... होगा।

हल : 4

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. समीकरण x + 3y = 9 के चार भिन्न–भिन्न हल ज्ञात कीजिए।

हल: (i) x = 0 पर

0 + 3y = 9

$y = \frac{9}{3}$, y = 3

(ii) x = 9 पर

9 + 3y = 9,

3y = 9 – 9 ⇒ 3y = 0

y = 0

(iii) x = 3 पर

3 + 3y = 9

3y = 9 – 3 ⇒ 3y = 6

y = 2

(iv) x = 6 पर

6 + 3y = 9

3y = 9 – 6 ⇒ 3y = 3

y = 1

अतः चार हल हैं: (0, 3), (9, 0), (3, 2), (6, 1)

2. समीकरण $4y + 3 = 0$ के दो हल ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण को $0.x + 4y + 3 = 0$ के रूप में लिखने पर,

(i) $x = 0$ पर

$0 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow 4y = -3$

$Y = -\frac{3}{4}$

(ii) $x = 1$ पर

$0 \times 1 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow 4y = -3$

$Y = -\frac{3}{4}$

x के किसी भी न पर $y = -\frac{3}{4}$ प्राप्त होगा।

अतः दो हल हैं: $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ तथा $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$।

3. क्या बिन्दु (2, 4) समीकरण $x + y = 6$ का हल है?

हल : $2 + 4 = 6$

LHS = RHS

अतः (2, 4) समीकरण का हल है।

4. बताइए कि $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ समीकरण $x - 2y = 0$ का हल है या नहीं।

हल : $x - 2y = 0$

$\sqrt{2} - 2(4\sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 0$

$-7\sqrt{2} \neq 0$

अतः $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ समीकरण $x - 2y = 0$ का हल नहीं है।

निबंधात्मक प्रश्न–

1. निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात कीजिए:

(i) $5x + 2y = 10$ (ii) $3x + 4y = 0$ (iii) $2y + 5 = 0$

हल: (i) $5x + 2y = 10$

(a) $x = 0$ लेने पर

$5(0) + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10$

$y = \frac{10}{2} \Rightarrow y = 5$

अतः (0, 5) एक हल है।

(b) $y = 0$ लेने पर

$5x + 2(0) = 10 \Rightarrow 5x = 10$

$x = \frac{10}{5}, x = 2$

अतः (2, 0) भी एक हल है।

(ii) $3x + 4y = 0$

(a) $x = 0$ लेने पर,

$3(0) + 4y = 0 \Rightarrow 4y = 0$

$y = \frac{0}{4} \Rightarrow y = 0$

अतः (0, 0) एक हल है।

(b) $x = 4$ लेने पर

$3(4) + 4y = 0 \Rightarrow 12 + 4y = 0$

$4y = -12 \Rightarrow y = -3$

अतः (4, –3) भी एक हल है।

(iii) समीकरण $2y + 5 = 0$ को $0.x + 2y + 5 = 0$ के रूप में लिखने पर,

$0.x + 2y + 5 = 0$

(a) $x = 0$ लेने पर

$0 + 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y + 5 = 0$

$2y = -5, y = -\frac{5}{2}$

अतः $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ एक हल है।

(b) $x = 1$ लेने पर

$0 \times 1 + 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y + 5 = 0$

$2y = -5, y = -\frac{5}{2}$

अतः $\left(1, -\frac{5}{2}\right)$ भी एक हल है।

2. बताइए कि निम्नलिखित हलों में से कौन–कौन समीकरण $2x + 3y = 6$ के हल हैं और कौन–कौन हल नहीं हैं:

(i) (0, 2) **(ii) (3, 0)**

(iii) (2, 1) **(iv) $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$**

(v) (1, 2)

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल :

(i) (0, 2)

$2(0) + 3(2) = 6$

यह समीकरण को संतुष्ट करता है,

अतः (0, 2) एक हल है।

(ii) (3, 0)

$2(3) + 3(0) = 6$

यह समीकरण को संतुष्ट करता है,

अतः (3, 0) एक हल है।

(iii) (2, 1)

$2(2) + 3(1) = 7 \neq 6$

अतः (2, 1) हल नहीं है।

(iv) $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \neq 6$

अतः $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ हल नहीं है।

(v) (1, 2)

$2(1) + 3(2) = 8 \neq 6$

अतः (1, 2) हल नहीं है।

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि x = 3, y = 2 समीकरण 5x + 3y = k का एक हल हो।

हल : चूँकि x = 3, y = 2 समीकरण 5x + 3y = k का एक हल है, अतः इसे समीकरण में रखने पर:

$5(3) + 3(2) = k$

$15 + 6 = k$

$k = 21$

5 यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

यूक्लिड की परिभाषाएँ, अभिगृहीत और अभिधारणाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यूक्लिड के अनुसार, एक 'बिंदु' की कितनी विमाएँ होती हैं?

(अ) 0 (ब) 1
(स) 2 (द) 3 **(अ)**

2. एक 'रेखा' की कितनी विमाएँ होती हैं?

(अ) 0 (ब) 1
(स) 2 (द) 3 **(ब)**

3. यदि दो राशियों x और y में x = y हो, तो 2x और 2y में क्या संबंध होगा?

(अ) $2x > 2y$ (ब) $2x < 2y$
(स) $2x = 2y$ (द) कोई संबंध नहीं **(स)**

4. यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा मुख्य रूप से किससे संबंधित है?

(अ) वृत्त की रचना से
(ब) समांतर रेखाओं एवं अंतः कोणों से
(स) समकोणों की समानता से
(द) बिंदु की परिभाषा से **(ब)**

5. यदि तीन बिंदु P, Q और R एक ही रेखा पर इस प्रकार हैं कि PQ + QR = PR, तो कौन–सा बिंदु अन्य दो के बीच स्थित है?

(अ) बिंदु P (ब) बिंदु R
(स) बिन्दु Q (द) निर्धारित नहीं किया जा सकता **(स)**

रिक्तस्थान –

1. वह आकृति जिसकी कोई सीमा या भाग नहीं होता, उसे ..... कहते हैं।

हल : बिन्दु

2. वे वस्तुएं जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक–दूसरे के ..... होती हैं।

हल : बराबर

3. एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक ..... रेखा खींची जा सकती है।

हल : सीधी

4. एक सांत रेखा को ..... रूप से बढ़ाया जा सकता है।

हल : अनिश्चित

5. किसी भी केंद्र और किसी भी त्रिज्या से एक ..... खींचा जा सकता है।

हल : वृत्त

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. यूक्लिड के निम्नलिखित दो अभिगृहीतों का कथन लिखिए:

(i) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल बराबर होते हैं।

(ii) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।

हल: (i) **अभिगृहीत (3) :** यदि दो समान राशियों में से समान राशियाँ घटाई जाएँ, तो प्राप्त शेषफल भी आपस में बराबर होते हैं (जैसे: यदि $a = b$, तो $a - c = b - c$)।

(ii) **अभिगृहीत (4) :** जो वस्तुएँ एक–दूसरे को पूरी तरह ढक लेती हैं (संपाती होती हैं), वे आपस में आकार और माप में बराबर होती हैं।

2. सिद्ध कीजिए कि यदि दो रेखाएँ l और m परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनका प्रतिच्छेदन बिंदु केवल एक ही हो सकता है।

हल : (i) मान लीजिए कि रेखाएँ l और m दो अलग–अलग बिंदुओं A और B पर मिलती हैं।

(ii) इसका अर्थ यह होगा कि बिंदु A और B दोनों से होकर दो अलग–अलग रेखाएँ (l तथा m) गुजरती हैं।

(iii) परंतु यूक्लिड के अभिगृहीत 5.1 के अनुसार, दो भिन्न बिंदुओं से होकर केवल और केवल एक ही अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

(iv) अतः हमारी यह मानना गलत है कि दो रेखाएँ दो बिंदुओं पर काट सकती हैं।

(v) इसलिए, दो रेखाओं में अधिक से अधिक एक ही बिंदु उभयनिष्ठ हो सकता है।

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

3. यदि तीन रेखाखंड X, Y और Z इस प्रकार हैं कि X = Z और Y = Z, तो सिद्ध कीजिए कि X = Y होगा। इसमें यूक्लिड के किस नियम का उपयोग हुआ है?

हल : दिया है: X = Z तथा Y = Z

चूँकि X और Y दोनों ही एक ही रेखाखंड के बराबर हैं, इसलिए यूक्लिड के अभिगृहीत 1 के अनुसार, "वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, वे आपस में भी बराबर होती हैं।"

अतः X = Y (इति सिद्धम)

4. यदि रेखाखंड KL पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि KM = ML, तो सिद्ध कीजिए कि $KM = \frac{1}{2}KL$ है।

हल : हम जानते हैं कि,

KM + ML = KL (संपाती अभिगृहीत से)

दिया है कि KM = ML

ML के स्थान पर KM रखने पर,

KM + KM = KL

2KM = KL

$KM = \frac{1}{2}KL$ (इति सिद्धम)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. यूक्लिड की सभी 5 अभिधारणाओं को क्रमानुसार स्पष्ट कीजिए।

हल : यूक्लिड की 5 अभिधारणाएँ निम्न हैं:

अभिधारणा 1: एक बिंदु से किसी अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

अभिधारणा 2: एक सांत रेखा (रेखाखंड) को दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

अभिधारणा 3: किसी भी बिंदु को केंद्र मानकर और किसी भी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

अभिधारणा 4: सभी समकोण (90° का कोण) एक दूसरे के बराबर होते हैं।

अभिधारणा 5: यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंतः कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग दो समकोणों (180°) से कम हो, तो वे दोनों रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर कोणों का योग 180° से कम होता है

2. चार बिंदु A, B, C और D एक सीधी रेखा पर क्रम से स्थित हैं। यदि AC = BD हो, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD होगा। (उपयुक्त यूक्लिड अभिगृहीतों का उल्लेख कीजिए)

हल : दिया है: एक ही रेखा पर स्थित बिंदु A, B, C, D जिसमें AC = BD है।

सिद्ध करना है: AB = CD

उपपत्तिः

बिंदु A, B, C क्रम में हैं,

अतः, AC = AB + BC ..... (1)

बिंदु B, C, D क्रम में हैं,

अतः BD = BC + CD ..... (2)

दिया गया है कि AC = BD।

समीकरण 1 और 2 से मान रखने पर:

AB + BC = BC + CD

दोनों पक्षों में से 'BC' घटाने पर।

यूक्लिड के अभिगृहीत (3) के अनुसार, "यदि बराबरों में से बराबर घटाया जाए, तो शेषफल बराबर रहते हैं।"

(AB + BC) – BC = (BC + CD) – BC

AB = CD (इति सिद्धम)

3. सिद्ध कीजिए कि एक दिए गए रेखाखंड PQ पर एक समबाहु त्रिभुज ΔPQR की रचना की जा सकती है। (रचना के चरण एवं यूक्लिड के नियमों का विवरण दीजिए)

हल : दिया है: एक रेखाखंड PQ।

सिद्ध करना है: PQ पर स्थित एक समबाहु त्रिभुज ΔPQR जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर हों (PQ = QR = RP)।

रचना एवं उपपत्तिः

बिंदु P को केंद्र मानकर और PQ के बराबर त्रिज्या लेकर यूक्लिड की अभिधारणा (3) के अनुसार एक वृत्त C_1 खींचते हैं।

बिंदु Q को केंद्र मानकर और QP के बराबर त्रिज्या लेकर एक दूसरा वृत्त C_2 खींचते हैं।

मान लीजिए ये दोनों वृत्त एक बिंदु R पर प्रतिच्छेद करते हैं। रेखाखंड PR तथा QR को मिलाते हैं।

PR = PQ (क्योंकि ये वृत्त C_1 की त्रिज्याएँ हैं) .... (1)

QR = PQ (क्योंकि ये वृत्त C_2 की त्रिज्याएँ हैं) .... (2)

यूक्लिड के अभिगृहीत (1) के अनुसारः

"वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, वे आपस में भी बराबर होती हैं।"

समीकरण (1) और (2) से:

PQ = QR = PR

चूंकि तीनों भुजाएँ बराबर हैं,

अतः ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है। (इति सिद्धम)

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

6 रेखाएँ और कोण

आधारभूत पद एवं परिभाषाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. एक रैखिक युग्म के दोनों कोणों का योग होता है–

(अ) 90° (ब) 180°

(स) 360° (द) 270° **(ब)**

2. 65° का कोण किस प्रकार का कोण है?

(अ) समकोण (ब) अधिक कोण

(स) न्यून कोण (द) ऋजु कोण **(स)**

3. 145° का कोण किस प्रकार का कोण है?

(अ) न्यून कोण (ब) समकोण

(स) अधिक कोण (द) प्रतिवर्ती कोण **(स)**

4. दो पूरक कोणों का योग होता है–

(अ) 90° (ब) 180°

(स) 270° (द) 360° **(अ)**

5. दो सम्पूरक कोणों का योग होता है–

(अ) 90° (ब) 120°

(स) 180° (द) 360° **(स)**

रिक्तस्थान –

1. एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हों, उसे ..... कहते हैं।

हल : रेखाखंड

2. एक रेखा का वह भाग जिसका केवल एक अंत बिंदु हो, उसे ..... कहते हैं।

हल : किरण

3. 90° से कम माप वाले कोण को ..... कहते हैं।

हल : न्यूनकोण

4. जिस कोण की माप 90° हो, उसे ..... कहते हैं।

हल : समकोण

5. 180° और 360° के बीच की माप वाले कोण को ..... कहते हैं।

हल : प्रतिवर्ती कोण

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. संरेख और असंरेख बिंदुओं में अंतर स्पष्ट कीजिए।

हल : जो बिंदु एक ही सीधी रेखा पर स्थित हों उन्हें संरेख बिंदु कहते हैं।

जो बिंदु एक ही सीधी रेखा पर स्थित न हों उन्हें असंरेख बिंदु कहते हैं।

2. 28° के पूरक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल : पूरक कोणों का योग = 90°

आवश्यक कोण = 90° – 28° = 62°

3. 138° के सम्पूरक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सम्पूरक कोणों का योग = 180°

आवश्यक कोण = 180° – 138° = 42°

4. आसन्न कोणों की दो विशेषताएँ लिखिए।

हल : 1. दोनों का शीर्ष समान होता है।

2. दोनों की एक भुजा समान होती है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. कोणों के विभिन्न प्रकारों का वर्णन उदाहरण सहित कीजिए।

हल : कोण पाँच प्रकार के होते हैं–

i. न्यून कोण: जिस कोण का माप 0° से अधिक तथा 90° से कम होता है, उसे न्यून कोण कहते हैं। ऐसे कोण समकोण से छोटे होते हैं।

उदाहरण : 30°, 40°, 45°, 60°, 75° आदि सभी न्यून कोण हैं।

ii. समकोण: जिस कोण का माप ठीक 90° होता है, उसे समकोण कहते हैं। यह कोण तब बनता है जब दो रेखाएँ या किरणें एक–दूसरे को लंबवत (⊥) काटती हैं।

उदाहरण : 90° एक समकोण है।

iii. अधिक कोण: जिस कोण का माप 90^0 से अधिक तथा 180° से कम होता है, उसे अधिक कोण कहते हैं। ऐसे कोण समकोण से बड़े लेकिन ऋजु कोण से छोटे होते हैं।

उदाहरण : 100°, 120°, 135°, 150° आदि अधिक कोण हैं।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

iv. ऋजु कोण: जिस कोण का माप ठीक 180° होता है, उसे ऋजु कोण कहते हैं। यह कोण तब बनता है जब दोनों किरणें एक ही सीधी रेखा में विपरीत दिशाओं में स्थित होती हैं।

उदाहरण : 180° एक ऋजु कोण है।

v. प्रतिवर्ती कोण: जिस कोण का माप 180° से अधिक तथा 360° से कम होता है, उसे प्रतिवर्ती कोण कहते हैं। ऐसे कोण ऋजु कोण से बड़े लेकिन पूर्ण कोण से छोटे होते हैं।

उदाहरण : 200°, 240°, 270°, 300°, 350° आदि प्रतिवर्ती कोण हैं।

2. एक कोण दूसरे कोण से 20° अधिक है तथा दोनों पूरक कोण हैं। दोनों कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए छोटा कोण = x

बड़ा कोण = (x + 20°)

पूरक कोण होने पर

$x + (x + 20°) = 90°$

$2x + 20° = 90°$

$2x = 70° \Rightarrow x = 35°$

छोटा कोण = 35°

बड़ा कोण = 35° + 20° = 55°

3. एक कोण दूसरे कोण से 30° कम है तथा दोनों सम्पूरक कोण हैं। दोनों कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना बड़ा कोण = x°

छोटा कोण = (x – 30°)

$x + (x – 30°) = 180°$

$2x = 210°$

$x = 105°$

बड़ा कोण = 105°

छोटा कोण = 105° – 30° = 75°

प्रतिच्छेदी एवं अप्रतिच्छेदी (समांतर) रेखाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. जो दो रेखाएँ एक बिंदु पर मिलती हैं, उन्हें क्या कहते हैं?

(अ) समांतर रेखाएँ (ब) प्रतिच्छेदी रेखाएँ

(स) तिर्यक रेखाएँ (द) किरणें **(ब)**

2. दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी होती है–

(अ) अलग–अलग

(ब) बढ़ती रहती है

(स) घटती रहती है

(द) सदैव समान **(द)**

3. प्रतिच्छेदी रेखाएँ कितने बिंदुओं पर मिलती हैं?

(अ) एक (ब) दो

(स) तीन (द) कभी नहीं **(अ)**

4. समतल में दो भिन्न समांतर रेखाएँ–

(अ) एक बिंदु पर मिलती हैं

(ब) दो बिंदुओं पर मिलती हैं

(स) कभी नहीं मिलती हैं

(द) केवल बढ़ाने पर मिलती हैं **(स)**

5. यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनके बीच कितने शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म बनते हैं?

(अ) 1 (ब) 2

(स) 3 (द) 4 **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. जब दो रेखाएँ एक–दूसरे को किसी बिंदु पर काटती हैं, तो आमने–सामने बने कोणों को ..... कोण कहते हैं।

हल : शीर्षाभिमुख

2. शीर्षाभिमुख कोण आपस में हमेशा ..... होते हैं।

हल : बराबर

3. दो रेखाएँ जो कभी एक–दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करतीं, ... रेखाएँ कहलाती हैं।

हल : समांतर

4. यदि दो रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं और एक कोण 50° है, तो उसका शीर्षाभिमुख कोण ..... होगा।

हल : 50°

5. दो समांतर रेखाओं के बीच की लंबवत दूरी हमेशा ..... रहती है।

हल : समान

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. प्रतिच्छेदी रेखाओं की परिभाषा लिखिए।

हल : जो दो रेखाएँ किसी एक बिंदु पर एक–दूसरे को काटती हैं, उन्हें प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहते हैं।

2. समांतर रेखाओं की परिभाषा लिखिए।

हल : जो दो रेखाएँ एक ही समतल में स्थित हों तथा उन्हें कितना भी बढ़ाने पर वे कभी न मिलें, उन्हें समांतर रेखाएँ कहते हैं।

3. दो रेखाएँ बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि शीर्षाभिमुख कोणों के एक युग्म ∠AOC व ∠BOD का योग 130° है, तो चारों कोण ज्ञात कीजिए।

हल : ∠AOC = ∠BOD = x (शीर्षाभिमुख)

⇒ x + x = 130° ⇒ 2x = 130°

⇒ x = 65°

शेष युग्म = 180° – 65° = 115° प्रत्येक।

4. दो रेखाएँ AB और CD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि ∠AOD : ∠DOB = 7 : 5 है, तो सभी चार कोण ज्ञात कीजिए।

हल : 7x + 5x = 180°

⇒ 12x = 180°

$\Rightarrow x = \frac{180°}{12} = 15°$

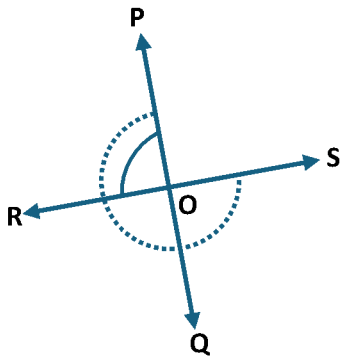
∠AOD = 7x = 7 × 15 = 105°

∠DOB = 5x = 5 × 15 = 75°

∠BOC =105°, ∠AOC=75°

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. आकृति में, रेखाएँ PQ और RS परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि ∠POR : ∠ROQ = 4 : 5 है, तो सभी चार कोण ज्ञात कीजिए।



आकृतिः रेखाएँ PQ और RS का बिंदु O पर प्रतिच्छेदन

हल : ∠POR + ∠ROQ = 180° (रैखिक युग्म के कोण)

∠POR : ∠ROQ = 4 : 5 (दिया है)

4x + 5x = 180°

9x = 180°

x = 20

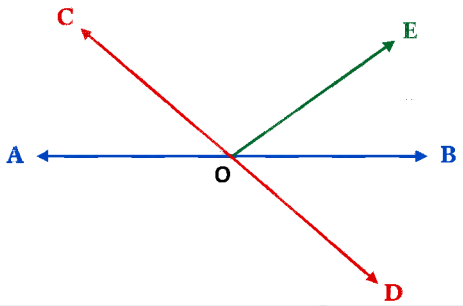
अतः ∠POR = 4×20° = 80°;

∠ROQ = 5 × 20° = 100°।

अब ∠POS = ∠ROQ = 100° (शीर्षाभिमुख कोण)

और ∠SOQ = ∠POR = 80° (शीर्षाभिमुख कोण)।

2. आकृति में, रेखाएँ AB और CD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि ∠AOC + ∠BOE = 80° है और ∠BOD = 45° है, तो ∠BOE तथा प्रतिवर्ती ∠COE ज्ञात कीजिए।



आकृतिः रेखाएँ AB, CD तथा अतिरिक्त किरण OE

हल : ∠AOC = ∠BOD = 45° (शीर्षाभिमुख कोण)।

∠AOC + ∠BOE = 80°

45° + ∠BOE = 80°

∠BOE = 35°।

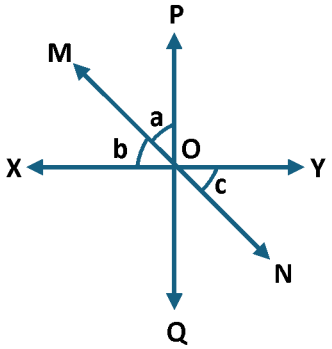
∠BOC = 180° – ∠AOC

= 180° – 45° = 135° (रैखिक युग्म)।

∠COE = ∠BOC – ∠BOE = 135° – 35° = 100°।

प्रतिवर्ती ∠COE = 360° – 100° = 260°

3. आकृति में, रेखाएँ XY और MN बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि ∠POY = 90° तथा a : b = 4 : 5 है, तो c ज्ञात कीजिए (जहाँ a = ∠MOP, b = ∠XOM तथा c = ∠NOY हैं)।



आकृतिः रेखाएँ XY, MN तथा लंब किरण OP

हल : ∠POY=90° तथा X,O,Y संरेख हैं,

अतः ∠XOM + ∠MOP = ∠XOP = 180° – 90° = 90°,

अर्थात् a + b = 90°।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

a : b = 4 : 5 होने पर,

$4x + 5x = 90°$

$9x = 90°$

$x = 10°$

$\angle a = 40°, b = 50°$।

अब चूँकि M,O,N तथा X,O,Y दोनों रेखाएँ हैं,

$\angle NOY, \angle XOM$ का शीर्षाभिमुख कोण है,

अतः $c = b = 50°$।

कोणों के युग्म

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से बने शीर्षाभिमुख कोण सदैव होते हैं–

(अ) पूरक (ब) सम्पूरक

(स) बराबर (द) असमान **(स)**

2. यदि एक शीर्षाभिमुख कोण 96° है, तो उसका सम्मुख कोण होगा–

(अ) 84° (ब) 96°

(स) 180° (द) 264° **(ब)**

3. यदि दो आसन्न कोण बराबर भी हों और रैखिक युग्म भी बनाते हों, तो प्रत्येक कोण होगा–

(अ) 45° (ब) 60°

(स) 90° (द) 120° **(स)**

4. यदि एक कोण 125° है, तो उससे रैखिक युग्म बनाने वाला कोण होगा–

(अ) 45° (ब) 55°

(स) 65° (द) 125° **(ब)**

5. शीर्षाभिमुख कोणों का योग आवश्यक रूप से कितना होता है?

(अ) 90° (ब) 180°

(स) निश्चित नहीं (द) 360° **(स)**

रिक्तस्थान –

1. यदि दो कोणों का योग 90° हो, तो वे एक–दूसरे के ..... कोण कहलाते हैं।

हल : पूरक

2. यदि दो कोणों का योग 180° हो, तो वे ..... कोण कहलाते हैं।

हल : सम्पूरक

3. 60° के कोण का पूरक कोण ..... होगा।

हल : 30°

4. 110° के कोण का संपूरक कोण ..... होगा।

हल : 70°

5. एक रेखा पर बनने वाले सभी आसन्न कोणों का योग ..... होता है।

हल : 180°

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बने एक कोण का माप 48° है। शेष तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

हल : शीर्षाभिमुख कोण = 48°

शेष दोनों = 180° – 48° = 132°

चारों कोण = 48°, 132°, 48°, 132°

2. दो आसन्न कोणों का अनुपात 3 : 7 है तथा वे रैखिक युग्म बनाते हैं। दोनों कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लें कोण = 3x तथा 7x

$3x + 7x = 180°$

$10x = 180°$

$x = 18°$

अतः $3x = 3 \times 18° = 54°$ तथा $7x = 7 \times 18° = 126°$

3. एक रैखिक युग्म के दोनों कोण बराबर हैं। सभी कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लें प्रत्येक कोण = x°

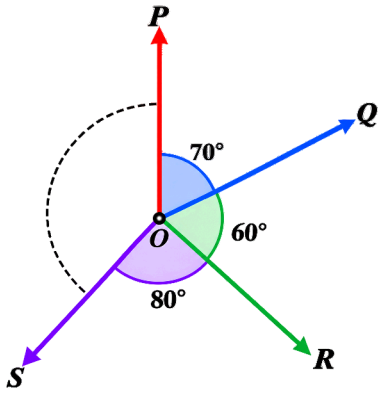
$x + x = 180°$

$2x = 180°$

$x = 90°$

अतः चारों कोण = 90°,90°,90°,90°

4. आकृति में, OP, OQ, OR तथा OS चार किरणें बिंदु O से इस प्रकार खींची गई हैं कि $\angle POQ=70°$, $\angle QOR=60°$ तथा $\angle ROS=80°$ हैं। $\angle SOP$ ज्ञात कीजिए (चारों कोणों का योग एक पूर्ण कोण अर्थात् 360° होता है)



आकृति: बिंदु O से चार किरण OP, OQ, OR, OS

हल : O के चारों ओर बनने वाले सभी कोणों का योग 360° होता है।

$\angle POQ + \angle QOR + \angle ROS + \angle SOP = 360°$

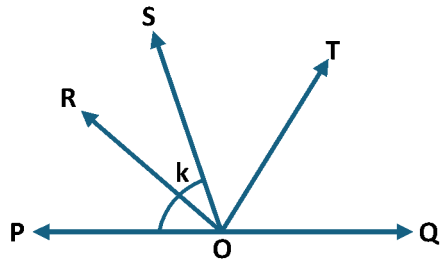
$70° + 60° + 80° + \angle SOP = 360°$

$\angle SOP + 210° = 360°$

$\angle SOP = 150°$।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. आकृति में, किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है। किरणें OR और OT क्रमशः $\angle POS$ और $\angle SOQ$ की समद्विभाजक हैं। यदि $\angle POS = k$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ROT = 90°$ है।



किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है, अतः

हल : $\angle POS + \angle SOQ = 180°$।

$\angle POS = k$ (दिया है),

अतः $\angle SOQ = 180° - k$।

किरण OR, $\angle POS$ को समद्विभाजित करती है

$\Rightarrow \angle ROS = \frac{k}{2}$।

किरण OT, $\angle SOQ$ को समद्विभाजित करती है

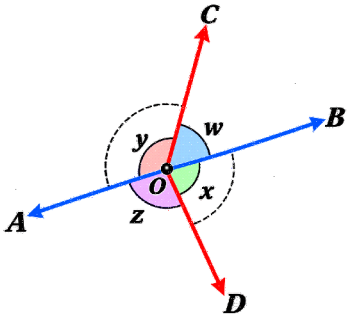
$\Rightarrow \angle SOT = \frac{180° - k}{2}$

$= 90° - \frac{k}{2}$

अब $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{k}{2} + 90° - \frac{k}{2} = 90°$ (इति सिद्धम)

2. आकृति में, बिंदु O से चार किरणें OA, OC, OB तथा OD इस प्रकार खींची गई हैं कि $\angle AOC = y$, $\angle COB = w$, $\angle BOD = x$ तथा $\angle DOA = z$ हैं। यदि $w + y = x + z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि AOB एक रेखा है।



आकृतिः बिंदु O से चार किरणें OA, OC, OB, OD

हल : O के चारों ओर बने सभी कोणों का योग 360° होता है:

$w + x + z + y = 360°$

$w + y = x + z$ (दिया है),

अतः प्रत्येक भाग = 180°, अर्थात् $w + y = 180°$।

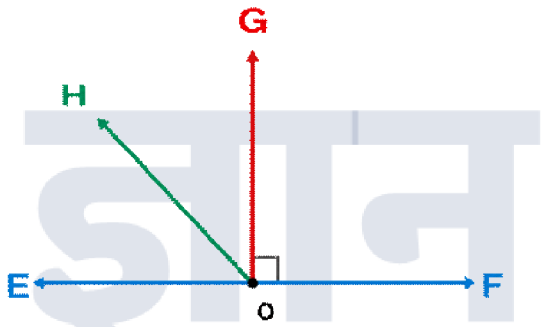
चूँकि $w + y = \angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$,

अतः $\angle AOB$ एक ऋजु कोण है।

इसलिए किरणें OA और OB विपरीत किरणें हैं,

अर्थात् AOB एक रेखा है। (इति सिद्धम)

3. आकृति में, EOF एक रेखा है। किरण OG, EF पर लंब है। किरणों OE और OG के मध्य एक अन्य किरण OH स्थित है। सिद्ध कीजिए कि $\angle GOH = \frac{1}{2}(\angle FOH - \angle EOH)$ है।



आकृतिः रेखा EOF, लंब किरण OG तथा किरण OH

हल : चूँकि $OG \perp EF$ है,

अतः $\angle EOG = 90°$।

$\angle FOH = \angle FOG + \angle GOH = 90° + \angle GOH$ ..... (1)

$\angle EOH = \angle EOG - \angle GOH = 90° - \angle GOH$ ..... (2)

(1) में से (2) घटाने पर:

$\angle FOH - \angle EOH = (90° + \angle GOH) - (90° - \angle GOH)$

$= \angle FOH - \angle EOH = 2\angle GOH$

अतः $\angle GOH = \frac{1}{2}(\angle FOH - \angle EOH)$ (इति सिद्धम)

एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है, तो संगत कोण होते हैं–

(अ) सम्पूरक (ब) बराबर

(स) पूरक (द) असमान **(ब)**

2. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है, तो एकांतर अंतः कोण होते हैं–

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

(अ) बराबर (ब) 180°

(स) 90° (द) असमान **(अ)**

3. एक ही ओर के अंतः कोणों का योग होता है–

(अ) 90° (ब) 180°

(स) 270° (द) 360° **(ब)**

4. यदि एक संगत कोण 72° है, तो दूसरा संगत कोण होगा–

(अ) 108° (ब) 72°

(स) 180° (द) 36° **(ब)**

5. यदि एक ही ओर के अंतः कोणों में एक कोण 118° है, तो दूसरा होगा–

(अ) 62° (ब) 72°

(स) 118° (द) 52° **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. वह रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर काटती है, उसे ..... रेखा कहते हैं।

हल : तिर्यक

2. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे, तो एकांतर अंतःकोण आपस में ..... होते हैं।

हल : बराबर

3. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे, तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोणों का योग ..... होता है।

हल : 180° (सम्पूरक)

4. यदि संगत कोणों का एक युग्म बराबर हो, तो दोनों रेखाएँ ..... होती हैं।

हल : समांतर

5. यदि दो रेखाएँ l || m हैं और तिर्यक रेखा के एक तरफ का अंतःकोण 70° है, तो उसी तरफ का दूसरा अंतःकोण ..... होगा।

हल : 110°

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है। यदि एक ही ओर के अंतः कोणों में एक कोण 116° है, तो दूसरा कोण ज्ञात कीजिए।

हल : अंतः कोणों का योग = 180°

अतः दूसरा कोण = 180 – 116 = 64°

2. एक तिर्यक रेखा से समांतर रेखाओं के मध्य बने दो सह–अंतः कोणों का अनुपात 2 : 3 है। दोनों कोण ज्ञात कीजिए।

हल : 2x + 3x = 180°

5x = 180°

x = 36°

कोण 72° तथा 108° हैं।

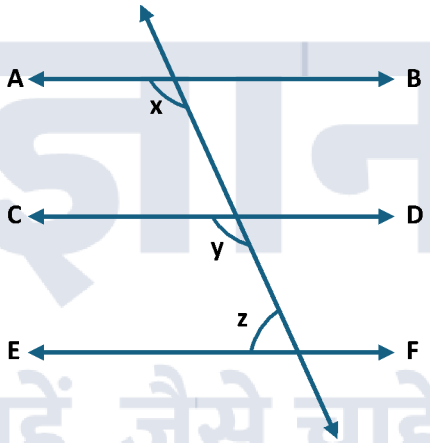
3. दो समांतर रेखाओं को काटने वाली तिर्यक रेखा से बना एक कोण 130° है। इसके संगत, एकांतर तथा सह–अंतः कोण ज्ञात कीजिए।

हल : संगत = 130°;

एकांतर = 130°;

सह–अंतः = 180° – 130° = 50°

4. आकृति में, यदि AB || CD || EF हैं और y : z = 2 : 7 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए (जहाँ y, z सह–अंतः कोण हैं तथा x, y का संगत कोण है)।



आकृतिः तीन समांतर रेखाएँ AB, CD, EF तथा एक तिर्यक रेखा

हल : y तथा z सह–अंतः कोण हैं,

अतः y + z = 180°

y : z = 2 : 7 होने पर:

2x + 7x = 180°

9x = 180°

x = 20°

अतः y = 40°, z = 140°

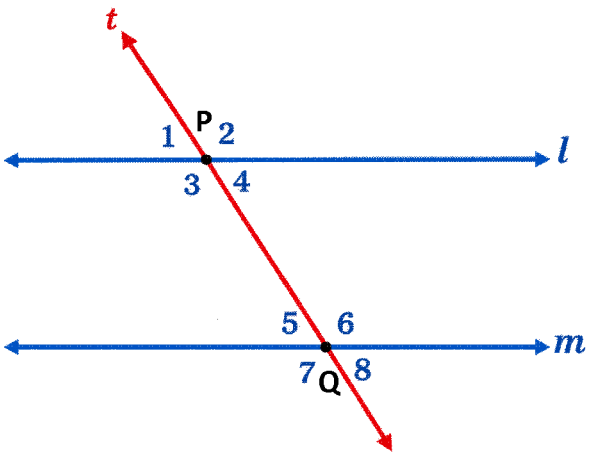
चूँकि x, y का संगत कोण है (AB||CD),

अतः x = y = 40°

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. आकृति में, रेखाएँ l और m एक तिर्यक रेखा t से क्रमशः बिंदु P और Q पर इस प्रकार कटती हैं कि l || m है। यदि ∠1 = 55° है, तो शेष सभी सात कोण ज्ञात कीजिए।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!



आकृतिः समांतर रेखाएँ l, m तथा तिर्यक रेखा t से बने आठ कोण

हल : $\angle 1 = 55°$ (दिया है)

अतः $\angle 1 = \angle 4 = 55°$ (शीर्षाभिमुख)।

$\angle 2 = 180° - 55° = 125°$

अतः $\angle 2 = \angle 3 = 125°$ (शीर्षाभिमुख)।

बिंदु Q पर, संगत कोण बराबर होते हैं (l || m)

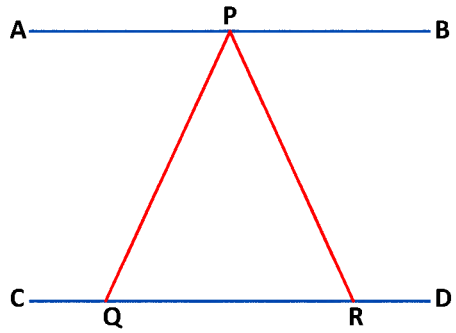
$\angle 5 = \angle 1 = 55°$ (संगत कोण)

$\angle 6 = \angle 2 = 125°$ (संगत कोण)

$\angle 7 = \angle 3 = 125°$ (संगत कोण)

$\angle 8 = \angle 4 = 55°$(संगत कोण)

2. आकृति में, यदि AB || CD, $\angle APQ = 42°$ और $\angle PRD = 115°$ हैं, तो x और y ज्ञात कीजिए (जहाँ $x = \angle PQR$ तथा $y = \angle QPR$ हैं)।



आकृतिः AB || CD तथा त्रिभुज PQR

हल : AB||CD तथा PQ और PR तिर्यक रेखा है,

अतः $\angle APQ$ और $\angle PQR$ (एकांतर कोण)

अतः $x = \angle PQR = \angle APQ = 42°$

$\angle PRD$, त्रिभुज PQR के शीर्ष R पर बाह्य कोण है (Q,R,D संरेख हैं),

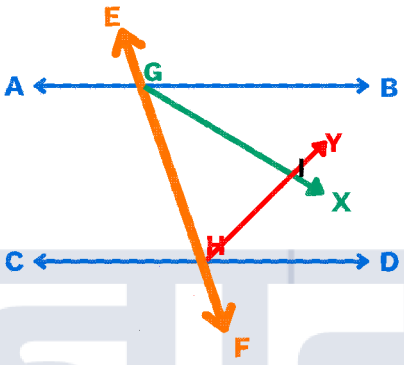
अतः बाह्य कोण = दोनों दूरस्थ अंतः कोणों का योगः

$\angle PRD = \angle PQR + \angle QPR$

$\Rightarrow 115° = 42° + y$

$\Rightarrow y = 73°$

3. आकृति में, AB || CD हैं तथा एक तिर्यक रेखा EF इन्हें क्रमशः बिंदु G और H पर प्रतिच्छेद करती है। किरण GX, $\angle BGH$ की समद्विभाजक है तथा किरण HY, $\angle DHG$ की समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $GX \perp HY$ है, अर्थात् ये दोनों समद्विभाजक परस्पर समकोण पर मिलती हैं।



आकृतिः AB || CD] तिर्यक रेखा EF तथा सह–अंतः कोणों के समद्विभाजक GX, HY

हल : चूँकि AB || CD है तथा EF तिर्यक रेखा है,

अतः $\angle BGH$ और $\angle DHG$ (सह–अंतः कोण)

अतः $\angle BGH + \angle DHG = 180°$ ..... (1)

(सह–अंतः कोण अभिगृहीत)

किरण GX, $\angle BGH$ की समद्विभाजक है,

अतः $\angle XGH = \frac{1}{2}\angle BGH$ ..... (2)

किरण HY, $\angle DHG$ की समद्विभाजक है,

अतः $\angle YHG = \frac{1}{2}\angle DHG$ ..... (3)

(2) और (3) को जोड़ने पर,

$$\angle XGH + \angle YHG = \frac{1}{2}(\angle BGH + \angle DHG)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180° = 90° \quad [(1) \text{ से}]$$

अब ΔIGH में (जहाँ I, GX और HY का प्रतिच्छेद बिंदु है)

$\angle GIH = 180° - (\angle XGH + \angle YHG)$

$= 180° - 90° = 90°$

अतः $GX \perp HY$ (इति सिद्धम)

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

7 त्रिभुज

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि दो त्रिभुजों का आकार एवं माप दोनों समान हों, तो वे कहलाते हैं–

(अ) समरूप त्रिभुज (ब) सर्वांगसम त्रिभुज

(स) समद्विबाहु त्रिभुज (द) समबाहु त्रिभुज **(ब)**

2. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है, तो $\angle B$ के संगत कोण होगा–

(अ) $\angle P$ (ब) $\angle Q$

(स) $\angle R$ (द) निर्धारित नहीं किया जा सकता **(ब)**

3. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है, तो AB के संगत भुजा होगी–

(अ) PQ (ब) QR

(स) PR (द) कोई नहीं **(अ)**

4. CPCT का पूरा नाम है–

(अ) सर्वांगसम त्रिभुजों के उभयनिष्ठ भाग

(ब) सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग

(स) सर्वांगसम त्रिभुजों के उभयनिष्ठ गुणधर्म

(द) इनमें से कोई नहीं **(ब)**

5. यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं, तो उनका परिमाप–

(अ) समान होता है

(ब) अलग–अलग होता है

(स) ज्ञात नहीं किया जा सकता

(द) दोगुना होता है **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हमेशा _____ होते हैं।

हल : बराबर

2. यदि दो त्रिभुज ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम हैं, तो इसे सांकेतिक रूप से ΔABC _____ ΔPQR लिखा जाता है।

हल : $\cong$ (सर्वांगसमता का चिह्न)

3. सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हमेशा _____ होते हैं।

हल : बराबर

4. सर्वांगसम त्रिभुजों के क्षेत्रफल _____ होते हैं।

हल : बराबर

5. यदि दो रेखाखंडों की पूर्ण लंबाई समान हो, तो वे आपस में _____ होते हैं।

हल : सर्वांगसम

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ तथा AB = 7 cm, BC = 5 cm, AC = 6 cm है, तो PQ, QR तथा PR ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

$ABC \cong \Delta PQR$, AB = 7 cm, BC = 5 cm, AC = 6 cm

यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, तो उनके संगत भाग आपस में बराबर होते हैं (CPCT नियम द्वारा)।

इसलिए,

PQ = AB = 7cm

QR = BC = 5cm

PR = AC = 6cm

2. यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ तथा $\angle A = 48°$, $\angle B = 72°$ है, तो $\angle D$, $\angle E$ तथा $\angle C$, $\angle F$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$, $\angle A = 48°$, $\angle B = 72°$

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होते हैं (CPCT द्वारा),

$\angle D = \angle A = 48°$

$\angle E = \angle B = 72°$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

ΔABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$48° + 72° + \angle C = 180°$

$120° + \angle C = 180°$

$\angle C = 180° - 120°$

$\angle C = 60°$

चूंकि संगत कोण बराबर होते हैं, $\angle F = \angle C = 60°$

3. यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ तथा AB = 9 cm, BC = 11 cm, AC = 13 cm है, तो ΔDEF का परिमाप ज्ञात कीजिए।

मिशन ज्ञान
पढ़ें सब कहीं, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल : दिया गया है:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$, AB = 9 cm, BC = 11 cm, AC = 13 cm

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग (CPCT) आपस में बराबर होते हैं।

DE = AB = 9 cm

EF = BC = 11 cm

DF = AC = 13 cm

ΔDEF का परिमाप,

परिमाप = DE + EF + DF

= 9 + 11 + 13 = 33 cm

4. यदि $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ तथा परिमाप (ΔABC) = 42 cm, AB = 12 cm, BC = 14 cm है, तो AC तथा YZ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

$\Delta ABC \cong \Delta XYZ$, परिमाप ($\Delta ABC$) = 42 cm, AB = 12 cm, BC = 14 cm

परिमाप (ΔABC) = AB + BC + AC

42 = 12 + 14 + AC

42 = 26 + AC

AC = 42 – 26

AC = 16 cm

चूंकि $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$,

YZ = BC (CPCT द्वारा)

YZ = 14 cm

5. यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ तथा $\angle A = 55°$, $\angle C = 45°$ है, तो $\angle B$ तथा $\angle E$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$, $\angle A = 55°$, $\angle C = 45°$,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$55° + \angle B + 45° = 180°$

$100° + \angle B = 180°$

$\angle B = 180° – 100°$

$\angle B = 80°$

चूंकि संगत कोण बराबर होते हैं (CPCT नियम से):

$\angle E = \angle B = 80°$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. एक वृत्त तथा एक त्रिभुज के सर्वांगसम होने की शर्तें किस प्रकार भिन्न–भिन्न हैं? स्पष्ट कीजिए कि त्रिभुजों के लिए अलग–अलग सर्वांगसमता कसौटियों की आवश्यकता क्यों पड़ती है।

हल : (i) दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों – क्योंकि त्रिज्या बराबर होने पर केंद्र से परिधि तक की दूरी हर दिशा में समान रहती है, इसलिए एक वृत्त दूसरे को पूर्णतः ढक लेता है।

(ii) दो त्रिभुज सर्वांगसम तब होते हैं जब एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ और तीनों कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं व कोणों के बराबर हों।

वृत्त की सर्वांगसमता केवल एक राशि (त्रिज्या) पर निर्भर करती है, जबकि त्रिभुज में छह राशियाँ (तीन भुजाएँ, तीन कोण) होती हैं। इसीलिए यह जानना आवश्यक हो जाता है कि इन छह राशियों में से कम–से–कम कितनी और कौन–सी राशियाँ बराबर होने पर त्रिभुज निश्चित रूप से सर्वांगसम होंगे।

2. यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ तथा $\angle A = 45°$, $\angle B = 65°$ है, तो सभी कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\angle A = 45°$

$\angle B = 65°$

ΔABC में:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$45° + 65° + \angle C = 180°$

$110° + \angle C = 180°$

$\angle C = 180° – 110°$

$\angle C = 70°$

चूंकि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$,

$\angle D = \angle A = 45°$

$\angle E = \angle B = 65°$

$\angle F = \angle C = 70°$

3. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ तथा AB = 8 cm, BC = 10 cm, AC = 12 cm है, तो दोनों त्रिभुजों का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

AB = 8 cm, BC = 10 cm, AC = 12 cm

ΔABC का परिमाप,

परिमाप = AB + BC + AC

= 8 cm + 10 cm + 12 cm = 30 cm

ΔPQR का परिमाप,

CPCT नियम से:

PQ = AB = 8 cm

QR = BC = 10 cm

PR = AC = 12 cm

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

परिमाप = PQ + QR + PR

= 8 cm + 10 cm + 12 cm = 30 cm

4. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है तथा AB = 9 cm, BC = 8 cm, AC = 11 cm, $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ है, तो ΔPQR की सभी भुजाओं एवं कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

ΔABC की भुजाएँ: AB = 9 cm, BC = 8 cm, AC = 11 cm

ΔABC के कोण: $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$

संगत भुजाओं की तुलना करने पर (CPCT द्वारा) :

PQ = AB = 9 cm

QR = BC = 8 cm

PR = AC = 11 cm

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$50° + 60° + \angle C = 180°$

$110° + \angle C = 180°$

$\angle C = 180° - 110°$

$\angle C = 70°$

संगत कोणों की तुलना करने पर (CPCT द्वारा):

$\angle P = \angle A = 50°$

$\angle Q = \angle B = 60°$

$\angle R = \angle C = 70°$

त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ (SSS एवं SAS)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि दो त्रिभुजों की तीनों संगत भुजाएँ बराबर हों, तो वे किस कसौटी से सर्वांगसम होंगे?

(अ) SAS (ब) ASA

(स) SSS (द) RHS **(स)**

2. यदि दो भुजाएँ तथा उनके बीच का कोण बराबर हो, तो कौन–सी कसौटी लागू होगी?

(अ) SSS (ब) SAS

(स) AAS (द) RHS **(ब)**

3. यदि AB = PQ, BC = QR तथा AC = PR, तो ΔABC और ΔPQR किस कसौटी से सर्वांगसम होंगे?

(अ) SAS (ब) SSS

(स) RHS (द) ASA **(ब)**

4. यदि दो त्रिभुज SSS से सर्वांगसम हैं, तो उनके संगत कोण होंगे–

(अ) बराबर (ब) असमान

(स) सम्पूरक (द) पूरक **(अ)**

5. सर्वांगसमता सिद्ध करने के बाद संगत भागों की समानता किस सिद्धांत से लिखी जाती है?

(अ) SAS (ब) SSS

(स) CPCT (द) RHS **(स)**

रिक्तस्थान –

1. _____ सर्वांगसमता नियम के अनुसार, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और बीच के कोण के बराबर हों।

हल : SAS (भुजा–कोण–भुजा)

2. _____ कसौटी के अनुसार, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों।

हल : ASA (कोण–भुजा–कोण)

3. SAS नियम लागू होने के लिए कोण का दोनों बराबर भुजाओं के _____ होना अनिवार्य है।

हल : अंतर्गत / बीच में

4. यदि दो त्रिभुजों के दो कोण और एक कोई भी संगत भुजा बराबर हो, तो इसे _____ सर्वांगसमता नियम कहते हैं।

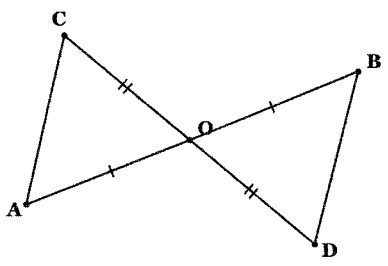
हल : AAS (कोण–कोण–भुजा)

5. किसी त्रिभुज ΔABC और ΔDEF में, यदि AB = DE, $\angle B = \angle E$ तथा BC = EF है, तो वे नियम _____ से सर्वांगसम होंगे।

हल : SAS

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. दी गई आकृति में, रेखाखंड AB और CD एक–दूसरे को बिंदु O पर समद्विभाजित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ है।



हल : AB और CD बिंदु O पर समद्विभाजित होते हैं।

अर्थात, AO = BO और CO + DO

सिद्ध करना है: $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

उपपत्ति: ΔAOC और ΔBOD में:

AO = BO (दिया है)

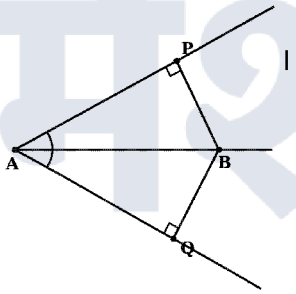
$\angle AOC = \angle BOD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

CO = DO (दिया है)

अतः, SAS (भुजा–कोण–भुजा) सर्वांगसमता से:

$\Delta AOC \cong \Delta BOD$ (इति सिद्धम)

2. रेखा l $\angle A$ की समद्विभाजक है और B रेखा l पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ बिंदु B से $\angle A$ की भुजाओं पर डाले गए लम्ब हैं। सिद्ध कीजिए BP = BQ।



हल : दिया है: रेखा l $\angle A$ को दो बराबर भागों में बाँटती है।

BP लम्ब है AP पर और BQ लम्ब है AQ पर।

अर्थात, $\angle QAB = \angle PAB$ और $\angle AQB = \angle APB = 90°$

सिद्ध करना है: BP = BQ

उपपत्ति: ΔAPB और ΔAQB में,

$\angle APB = \angle AQB = 90°$ (दिया है)

$\angle PAB = \angle QAB$ (रेखा l $\angle A$ की समद्विभाजक है)

AB = AB (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, AAS (कोण–कोण–भुजा) सर्वांगसमता से:

$\Delta APB \cong \Delta AQB$

दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए CPCT द्वारा:

BP = BQ (इति सिद्धम)

3. एक त्रिभुज ΔABC में, AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है और AD लम्ब है BC पर A दर्शाइए कि AB = AC है।

हल : दिया है: $\angle BAD = \angle CAD$ और AD लम्ब है BC पर (अर्थात $\angle ADB = \angle ADC = 90°$)

सिद्ध करना है: AB = AC

उपपत्ति: ΔABD और ΔACD में,

$\angle BAD = \angle CAD$ (दिया है)

AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

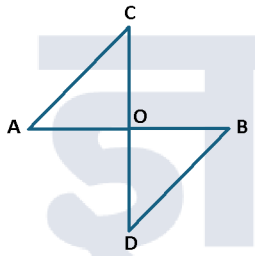
$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (दिया है)

अतः, ASA (कोण–भुजा–कोण) सर्वांगसमता से,

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$

इसलिए CPCT द्वारा: AB = AC (इति सिद्धम)

4. एक रेखाखंड AB का मध्य–बिंदु O है तथा एक अन्य रेखाखंड CD भी O से होकर गुजरता है, जिसमें OC = OD है। सिद्ध कीजिए कि AC = BD है।



हल : ΔAOC और ΔBOD में,

OA = OB (O, रेखाखंड AB का मध्य–बिंदु है)

OC = OD (दिया है)

$\angle AOC = \angle BOD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः, $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ (SAS नियम द्वारा)

इसलिए, AC = BD (CPCT)

5. दो त्रिभुज ΔABC और ΔDEF में AB = DE, $\angle B = \angle E$ तथा BC = EF हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है।

हल : ΔABC और ΔDEF में,

AB = DE (दिया है)

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

BC = EF (दिया है)

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा)

दीर्घउत्तरीय प्रश्न –

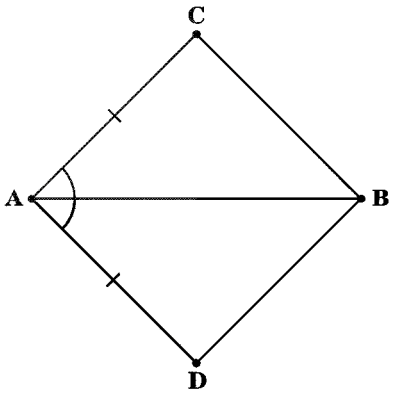
1. चतुर्भुज ADBC में, AC = AD है और AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

(i) सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ है।

(ii) BC और BD के बीच क्या संबंध है?

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!



हल : (i) त्रिभुज ABC और त्रिभुज ABD में:

AC= AD (दिया है)

∠CAB = ∠DAB(AB कोण A को समद्विभाजित करता है)

AB = AB (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, SAS (भुजा–कोण–भुजा) सर्वांगसमता द्वारा:

Δ ABC ≅ ΔABD (इति सिद्धम)

(ii) चूँकि ΔABC ≅ ΔABD है, अतः CPCT द्वारा:

BC = BD अर्थात, रेखाखंड BC और BD की लम्बाइयाँ आपस में समान हैं।

2. रेखाखंड AB पर, AD और BC दो बराबर और सम्मुख लम्ब हैं। दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है (अर्थात O, AB का मध्य–बिंदु है, जहाँ CD और AB का प्रतिच्छेद बिंदु O है)।

हल : दिया है: CD और AB एक दूसरे को बिंदु O पर काटते हैं। BC ⊥ AB और AD ⊥ AB, साथ ही AD = BC दिया गया है।

सिद्ध करना है: AO = BO (अर्थात CD, AB को समद्विभाजित करता है)

उपपत्ति: ΔBOC और ΔAOD में,

∠CBO = ∠DAO = 90° (दोनों लम्ब हैं)

∠BOC = ∠AOD (शीर्षाभिमुख कोण)

BC = AD (दिया है)

अतः, AAS (कोण–कोण–भुजा) सर्वांगसमता नियम से,

ΔBOC ≅ ΔAOD

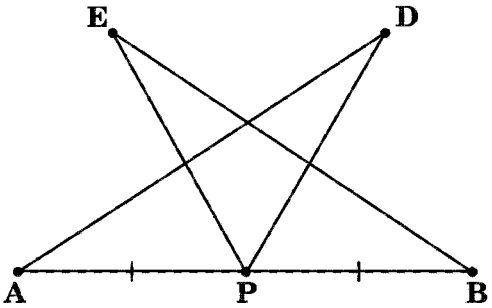
चूँकि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए CPCT नियम के अनुसार: BO = AO

अतः, बिंदु O रेखाखंड AB का मध्य–बिंदु है।

अर्थात CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।

(इति सिद्धम)

3. AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य–बिंदु है। रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु D और E इस प्रकार हैं कि ∠BAD = ∠ABE और ∠EPA = ∠DPB हैं। सिद्ध कीजिए कि (i) ΔDAP ≅ ΔEBP (ii) AD = BE है।



हल : दिया है: ∠BAD = ∠ABE .....(1)

∠EPA = ∠DPB .....(2)

समीकरण (2) के दोनों ओर ∠DPE जोड़ने पर :

∠EPA + ∠DPE = ∠DPB + ∠DPE

⇒ ∠DPA = ∠EPB .....(3)

ΔDAP और ΔEBP में,

∠DAP = ∠EBP ((1) से)

AP = BP (P, AB का मध्य–बिंदु है)

∠DPA = ∠EPB ((3) से)

अतः, ΔDAP ≅ ΔEBP (ASA नियम द्वारा)

(ii) अतः, AD = BE (CPCT)

4. दो त्रिभुज ΔABC और ΔPQR में ∠B = ∠Q, ∠C = ∠R तथा AB = PQ हैं (ध्यान दीजिए, भुजा AB, ∠B और ∠C के मध्य में नहीं है)। सिद्ध कीजिए कि ΔABC ≅ ΔPQR है तथा स्पष्ट कीजिए कि यह किस नियम पर आधारित है।

हल : ΔABC में ∠A + ∠B + ∠C = 180°

तथा ΔPQR में ∠P + ∠Q + ∠R = 180°।

दिया है, ∠B = ∠Q और ∠C = ∠R,

अब ΔABC और ΔPQR में,

∠C = ∠R (दिया है)

AB = PQ (दिया है)

∠B = ∠Q (दिया है)

यहाँ भुजा AB, ∠A और ∠B के मध्य (अंतर्गत) है।

अतः, ΔABC ≅ ΔPQR (ASA नियम द्वारा)

त्रिभुजों के कुछ गुण

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण होते हैं–

(अ) असमान (ब) बराबर

(स) पूरक (द) सम्पूरक **(ब)**

2. समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण का मान होता है:

(अ) 45° (ब) 90°

(स) 60° (द) 120° **(स)**

3. समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष से आधार पर खींची गई लम्ब–

(अ) केवल लम्ब होती है

(ब) केवल माध्यिका होती है

(स) केवल कोण समद्विभाजक होती है

(द) लम्ब, माध्यिका तथा कोण समद्विभाजक तीनों होती है **(द)**

4. यदि किसी त्रिभुज ΔABC में $\angle B = \angle C$ हो, तो कौन–सी भुजाएँ बराबर होंगी?

(अ) AB = BC (ब) AC = BC

(स) AB = AC (द) कोई नहीं **(स)**

5. समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष कोण 40° है, तो प्रत्येक आधार कोण होगा–

(अ) 40° (ब) 70°

(स) 80° (द) 90° **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण _____ होते हैं।

हल : बराबर

2. यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों, तो उनकी सम्मुख भुजाएँ आपस में _____ होती हैं।

हल : बराबर

3. एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण _____ होता है।

हल : 60°

4. समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष कोण का समद्विभाजक आधार को _____ पर प्रतिच्छेद / समद्विभाजित करता है।

हल : समकोण (90°)

5. एक त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ और तीनों कोण आपस में बराबर हों, उसे _____ त्रिभुज कहते हैं।

हल : समबाहु

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक समद्विबाहु त्रिभुज ΔABC में AB = AC तथा $\angle B = 65$ है। $\angle C$ तथा $\angle A$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि AB = AC, अतः $\angle C = \angle B = 65°$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\angle A + 65° + 65° = 180°$

$\angle A = 180° - 130° = 50°$

2. एक समकोण त्रिभुज ΔABC में $\angle A = 90°$ तथा AB = AC है। $\angle B$ और $\angle C$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि AB = AC, अतः $\angle B = \angle C$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$90° + 2\angle B = 180° \Rightarrow \angle B = 45°$

अतः $\angle B = \angle C = 45°$

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज ΔABC में AB = AC है। शीर्ष A से भुजा BC पर लंब AD डाला गया है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण A को समद्विभाजित करता है।

हल : :ΔABD और ΔACD में,

AB = AC (दिया है)

AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

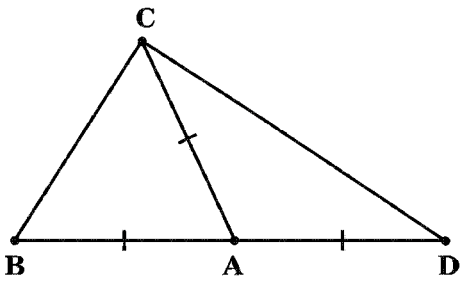
$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (दिया है)

अतः, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (RHS नियम द्वारा)

इसलिए, $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

अतः AD, कोण A को समद्विभाजित करता है।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज ΔABC है, जिसमें AB = AC है। भुजा BA को बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AD = AB हो। सिद्ध कीजिए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



जहाँ चाहें, जहाँ चाहे, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल : चूँकि AB = AC,

अतः ΔABC में

∠ACB = ∠ABC ; माना दोनों = x .....(1)

चूँकि AD =AB = AC,

अतः ΔACD में

AC = AD, इसलिए ∠ACD = ∠ADC माना दोनों = y .....(2)

चूँकि B, A, D एक ही सरल रेखा पर स्थित हैं (D, BA को बढ़ाकर प्राप्त हुआ है),

अतः ΔBCD में:

∠DBC + ∠BDC + ∠BCD = 180°

∠DBC = ∠ABC = x तथा ∠BDC = ∠ADC = y तथा ∠BCD = ∠BCA + ∠ACD = x + y

अतः x + y + (x + y) = 180°

⇒ 2(x + y) = 180°

⇒ x + y = 90°

परंतु ∠BCD = x + y

अतः ∠BCD = 90°, अर्थात् यह एक समकोण है।

5. समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण का मान 60° क्यों होता है? कारण सहित सिद्ध कीजिए।

हल : माना समबाहु त्रिभुज ΔABC है, जिसमें AB = BC = CA है।

चूँकि AB = AC,

अतः ∠C = ∠B .....(1) (सम्मुख कोण)

चूँकि BA = BC,

अतः ∠C = ∠A .....(2) (सम्मुख कोण)

(1) व (2) से

∠A = ∠B = ∠C

∠A + ∠B + ∠C = 180°

⇒ 3 ∠A = 180°

⇒ ∠A = 60°

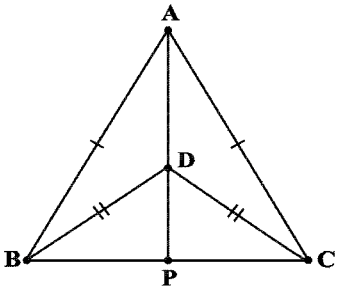
अतः प्रत्येक कोण 60° का होता है।

दीर्घउत्तरीय प्रश्न –

1. ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि शीर्ष A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AD को बढ़ाने पर वह BC को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए कि:

(i) ΔABD ≅ ΔACD

(ii) AP, ∠A और ∠D दोनों को समद्विभाजित करता है।



हल : (i) ΔABD और ΔACD में:

AB = AC (ΔABC समद्विबाहु है)

BD = CD (ΔDBC समद्विबाहु है)

AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, SSS (भुजा–भुजा–भुजा) सर्वांगसमता से:

ΔABD ≅ ΔACD

CPCT द्वारा,

∠BAD = ∠CAD ..... (1)

(ii) समीकरण (1) से स्पष्ट है कि AP (या AD), ∠I को दो बराबर भागों (∠BAP और ∠CAP) में बाँटता है।

ΔBDP और ΔCDP में

BD = CD (दिया है)

BP = CP (P मध्य बिन्दु है, BC का)

DP = DP (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, SSS से,

ΔBDP ≅ ΔCDP

CPCT द्वारा, ∠BDP = ∠CDP

अर्थात, AP कोण D को भी दो बराबर भागों में समद्विभाजित करता है।

अतः AP, कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है। (इति सिद्धम)

2. एक त्रिभुज ΔABC में भुजाओं AC और AB पर खींचे गए शीर्षलंब BE और CF बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि (i) ΔABE ≅ ΔACF (ii) AB = AC, अर्थात् ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल : (i) ΔABE और ΔACF में,

∠AEB = ∠AFC = 90° (दिया है, BE ⊥ AC, CF ⊥ AB)

∠A = ∠A (उभयनिष्ठ)

BE = CF (दिया है)

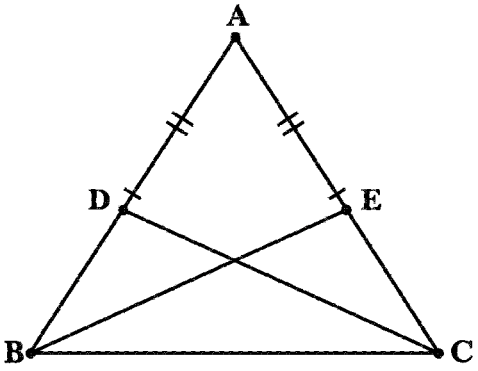
अतः, ΔABE ≅ ΔACF (AAS नियम द्वारा)

(ii) अतः, AB = AC (CPCT)

अतः ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

पढ़ो जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

3. त्रिभुज ΔABC में AB = AC है। भुजाओं AB और AC पर क्रमशः बिंदु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि AD = AE है। सिद्ध कीजिए कि BE = CD है।



हल : ΔABE और ΔACD में,

AB = AC (दिया है)

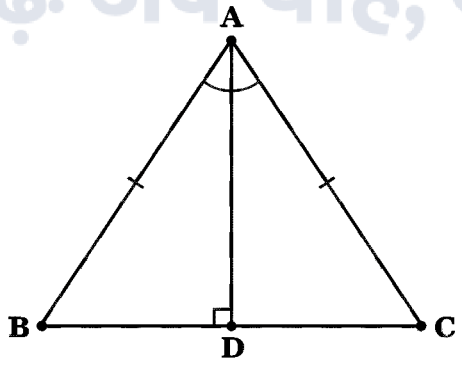
∠A = ∠A (उभयनिष्ठ)

AE = AD (दिया है)

अतः, ΔABE ≅ ΔACD (SAS नियम द्वारा)

इसलिए, BE = CD (CPCT)

4. समद्विबाहु त्रिभुज ΔABC (AB = AC) में शीर्ष कोण A का समद्विभाजक AD, भुजा BC से बिंदु D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि AD, भुजा BC का लंब समद्विभाजक है।



हल : ΔBAD और ΔCAD में,

AB = AC (दिया है)

∠BAD = ∠CAD (दिया है, AD, ∠A को समद्विभाजित करता है)

AD = AD (उभयनिष्ठ)

अतः, ΔBAD ≅ ΔCAD (SAS नियम द्वारा)

इसलिए, BD = CD (CPCT) .....(1)

(अर्थात् D, BC का मध्य–बिंदु है)

तथा ∠ADB = ∠ADC (CPCT) .....(2)

साथ ही ∠ADB + ∠ADC = 180° (रैखिक युग्म)

समीकरण (2) से,

त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ (ASA एवं RHS)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि किन्हीं दो त्रिभुज के दो कोण तथा उनके बीच की भुजा बराबर हों, तो सर्वांगसमता के लिए कौन–सी कसौटी लागू होगी?

(अ) SSS (ब) SAS

(स) ASA (द) RHS **(स)**

2. RHS कसौटी केवल किस प्रकार के त्रिभुजों पर लागू होती है?

(अ) समद्विबाहु त्रिभुज (ब) समकोण त्रिभुज

(स) समबाहु त्रिभुज (द) विषमबाहु त्रिभुज **(ब)**

3. RHS कसौटी में किनका बराबर होना आवश्यक है?

(अ) तीनों भुजाएँ

(ब) दो कोण

(स) कर्ण तथा एक संगत भुजा

(द) दो भुजाएँ **(स)**

4. ASA कसौटी से सर्वांगसमता सिद्ध होने के बाद संगत भागों की समानता किस सिद्धांत से लिखी जाती है?

(अ) SAS (ब) CPCT

(स) SSS (द) RHS **(ब)**

5. RHS कसौटी में समकोण का माप होता है–

(अ) 45° (ब) 60°

(स) 90° (द) 180° **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज _____ नियम से सर्वांगसम होते हैं।

हल : SSS (भुजा–भुजा–भुजा)

2. _____ नियम केवल समकोण त्रिभुजों पर ही लागू होता है।

हल : RHS (समकोण–कर्ण–भुजा)

पढ़ः जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

3. RHS सर्वांगसमता नियम में 'H' का अर्थ _____ होता है।

हल : कर्ण

4. यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक का कर्ण और एक भुजा, दूसरे के कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज _____ कसौटी से सर्वांगसम होते हैं।

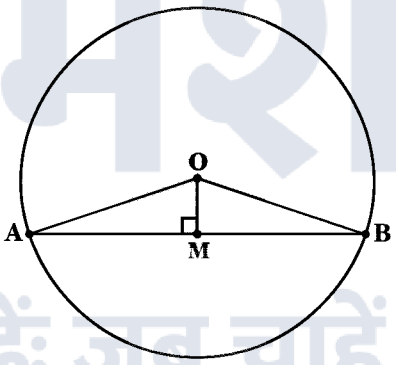
हल : RHS

5. तीन कोणों का बराबर होना (AAA) सर्वांगसमता की कसौटी _____ (होती है / नहीं होती है)।

हल : नहीं होती है।

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. दी गई स्थिति में, एक वृत्त का केंद्र O है और AB एक जीवा है। यदि बिंदु O से जीवा AB पर लम्ब OM डाला जाता है, तो RHS नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि AM = BM है।



हल : दिया है: O वृत्त का केंद्र है, OA और OB त्रिज्याएँ हैं

अर्थात OA = OB

OM लम्ब है AB पर ($\angle OMA = \angle OMB = 90°$)

सिद्ध करना है: AM = BM

उपपत्ति: समकोण ΔOMA और समकोण ΔOMB में,

$\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (दिया है)

OA = OB (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ – कर्ण)

OM = OM (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, RHS (समकोण–कर्ण–भुजा) सर्वांगसमता से:

$\Delta OMA \cong \Delta OMB$

इसलिए CPCT द्वारा:

AM = BM (इति सिद्धम)

2. किसी त्रिभुज ΔABC में, शीर्षलम्ब AD और BE आपस में बराबर हैं (AD = BE)। RHS कसौटी का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल : दिया है: $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ और AD = BE

सिद्ध करना है: AB = AC (अर्थात त्रिभुज ABC समद्विबाहु है)

उपपत्ति: समकोण ΔAEB और समकोण ΔBDA में,

$\angle AEB = \angle BDA = 90°$ (शीर्षलम्ब हैं)

AB = AB (उभयनिष्ठ कर्ण)

BE = AD (दिया है)

अतः, RHS सर्वांगसमता नियम से:

$\Delta AEB \cong \Delta BDA$

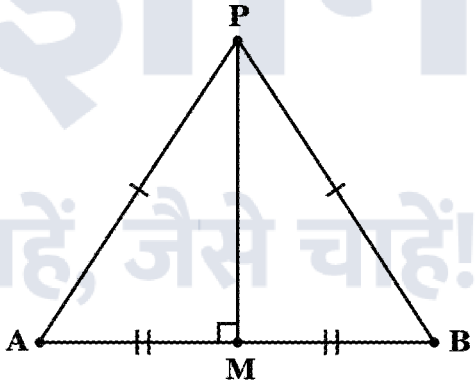
इसलिए CPCT द्वारा:

$\angle ABE = \angle BAD$ (अर्थात $\angle B = \angle A$)

हम जानते हैं कि बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। अतः, AC = AB

इसलिए, त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। (इति सिद्धम)

3. एक रेखाखंड AB है तथा बिंदु P इस प्रकार स्थित है कि PA = PB है। यदि M, AB का मध्य–बिंदु है, तो सिद्ध कीजिए कि $PM \perp AB$ है।



हल : ΔPMA और ΔPMB में,

PA = PB (दिया है)

MA = MB (M, AB का मध्य–बिंदु है)

PM = PM (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta PMA \cong \Delta PMB$ (SSS नियम द्वारा)

इसलिए, $\angle PMA = \angle PMB$ (CPCT)

साथ ही $\angle PMA + \angle PMB = 180°$ (रैखिक युग्म)

अतः $2\angle PMA = 180° \Rightarrow \angle PMA = 90°$

इसलिए $PM \perp AB$ है।

4. दो समकोण त्रिभुज ΔABC और ΔDBC एक ही कर्ण BC पर इस प्रकार बने हैं कि AB = DC है, जहाँ $\angle A = \angle D = 90°$ हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ है।

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल : ΔABC और ΔDCB में,

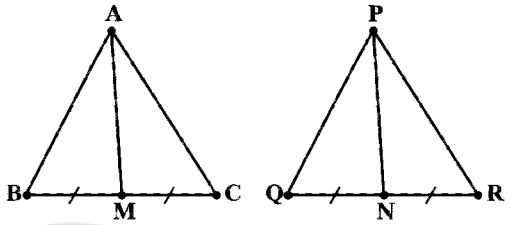
$\angle A = \angle D = 90°$ (दिया है)

$BC = CB$ (कर्ण, उभयनिष्ठ)

$AB = DC$ (दिया है)

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (RHS नियम द्वारा)

5. दो त्रिभुजों ABC और PQR में, AB = PQ, BC = QR और माध्यिका AM = माध्यिका PN है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC सर्वांगसम त्रिभुज PQR है।



हल : दिया है: $AB = PQ$, $BC = QR$ और $AM = PN$ (जहाँ M और N क्रमशः BC और QR के मध्य–बिंदु हैं)।

सिद्ध करना है: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

उपपत्ति: चूँकि $BC = QR$ है,

इसलिए $\left(\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}QR\right)$ अर्थात $BM = QN$ ..... (1)

अब ΔABM और ΔPQN में,

$AB = PQ$ (दिया है)

$AM = PN$ (दिया है)

$BM = QN$ (समीकरण (1) से)

अतः, SSS (भुजा–भुजा–भुजा) नियम से:

$\Delta ABM \cong \Delta PQN$

इसलिए CPCT से, $\angle B = \angle Q$ ..... (2)

अब ΔABC और ΔPQR में,

$AB = PQ$ (दिया है)

$\angle B = \angle Q$ (समीकरण (2) से)

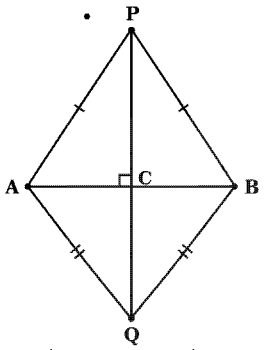
$BC = QR$ (दिया है)

अतः, SAS नियम से,

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (इति सिद्धम)

दीर्घउत्तरीय प्रश्न –

1. AB एक रेखाखंड है तथा बिंदु P और Q इस रेखाखंड के विपरीत ओर इस प्रकार स्थित हैं कि इनमें से प्रत्येक बिंदु A और B से समदूरस्थ है। सिद्ध कीजिए कि रेखा PQ, रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है।



हल : दिया है: $PA = PB$ और $QA = QB$

माना PQ, AB को बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती है।

ΔPAQ और ΔPBQ में,

$AP = BP$ (दिया है),

$AQ = BQ$ (दिया है),

$PQ = PQ$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

इसलिए $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT)

अब, ΔPAC और ΔPBC में,

$AP = BP$ (दिया है),

$\angle APC = \angle BPC$ (ऊपर सिद्ध),

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS नियम)

इसलिए $AC = BC$ (CPCT) .....(1)

तथा $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

$\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (रैखिक युग्म)

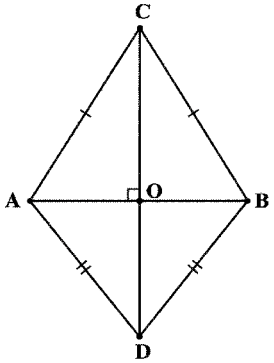
$\Rightarrow 2\angle ACP = 180°$

$\Rightarrow \angle ACP = 90°$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

PQ रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है।

2. दो समद्विबाहु त्रिभुज ΔABD और ΔABC एक ही आधार AB पर इस प्रकार बने हैं कि AC = BC तथा AD = BD हैं, तथा C, D भुजा AB के विपरीत ओर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि रेखा CD, AB का लंब समद्विभाजक है।



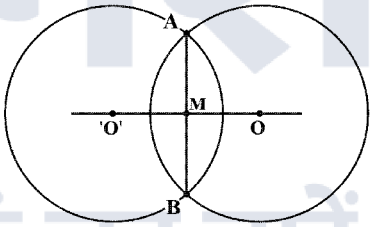
हल : ΔACD और ΔBCD में,

$AC = BC$ (दिया है),

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

AD = BD (दिया है),
CD = CD (उभयनिष्ठ)
अतः $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ = (SSS नियम)
इसलिए $\angle ACD = \angle BCD$ (CPCT) .....(1)
माना CD, AB को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती है।
ΔACO और ΔBCO में,
AC = BC (दिया है),
$\angle ACO = \angle BCO$ [(1) से],
CO = CO (उभयनिष्ठ)
अतः $\Delta ACO \cong \Delta BCO$ (SAS नियम)
इसलिए AO = BO (CPCT) तथा $\angle AOC = \angle BOC$ (CPCT)
$\angle AOC + \angle BOC = 180°$ (रैखिक युग्म)
$\Rightarrow$ $\angle AOC = 90°$
अतः CD, रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है।

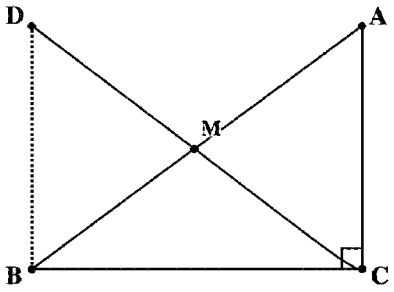
3. समान त्रिज्या के दो वृत्त परस्पर दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा, उभयनिष्ठ जीवा AB का लंब समद्विभाजक है।



हल : माना दोनों वृत्तों के केंद्र O और O' हैं तथा त्रिज्या r है (दोनों वृत्तों की त्रिज्या समान है)।
अतः OA = OB = O'A = O'B = r
$\Delta OAO'$ और $\Delta OBO'$ में,
OA = OB = r
O'A = O'B = r
OO' = OO' (उभयनिष्ठ)
अतः $\Delta OAO' \cong \Delta OBO'$ (SSS नियम)
इसलिए $\angle AOO' = \angle BOO'$ (CPCT)
माना OO', AB को बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती है।
ΔOAM और ΔOBM में,
OA = OB (ऊपर सिद्ध)
$\angle AOM = \angle BOM$ (ऊपर सिद्ध),
OM = OM (उभयनिष्ठ)
अतः $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (SAS नियम)
इसलिए AM = BM (CPCT) तथा
$\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (रैखिक युग्म से)
अतः केंद्रों को मिलाने वाली रेखा OO', उभयनिष्ठ जीवा AB का लंब समद्विभाजक है।

4. ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। M कर्ण AB का मध्य–बिंदु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि DM = CM है। बिंदु D को बिंदु B से मिला दिया जाता है। सिद्ध कीजिए कि: (i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ (ii) $\angle DBC$ एक समकोण है।

(iii) $CM = \frac{1}{2}AB$



हल : (i) ΔAMC और ΔBMD में
AM = BM (M, AB का मध्य–बिंदु है)
$\angle AMC = \angle BMD$ (शीर्षाभिमुख कोण)
CM = DM (दिया है)
अतः, SAS सर्वांगसमता से:
$\Delta AMC \cong \Delta BMD$ (इति सिद्धम)
(ii) चूँकि $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ है,
इसलिए CPCT द्वारा, AC = BD
$\angle ACM = \angle BDM$ (ये एकांतर अंतः कोण हैं)
चूँकि एकांतर कोण बराबर हैं, इसलिए DB समांतर है AC के।
$\angle ACB + \angle DBC = 180°$ (अंतः कोणों का योग)
$90° + \angle DBC = 180°$ ($\angle C = 90°$ दिया है)
$\angle DBC = 90°$ (इति सिद्धम)
(iii) समकोण त्रिभुज ΔDBC और समकोण त्रिभुज ΔACB में,
DB = AC (ऊपर सिद्ध)
$\angle DBC = \angle ACB = 90°$
BC = BC (उभयनिष्ठ भुजा)
SAS कसौटी से,
$\Delta DBC \cong \Delta ACB$ इसलिए CPCT द्वारा, DC = AB

दोनों तरफ $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर,

$\left(\frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB\right)$

चूँकि M बिंदु DC का मध्य–बिंदु है
(DM = CM दिया है)

इसलिए $\frac{1}{2}DC = CM$

अतः, $CM = \frac{1}{2}AB$ (इति सिद्धम)

8 चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज के गुण एवं प्रमेय

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. समांतर चतुर्भुज ABCD में, यदि ∠A = 75° है, तो ∠B का मान क्या होगा?

(अ) 75° (ब) 105°

(स) 90° (द) 180° **(ब)**

2. एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो ———— त्रिभुजों में विभाजित करता है।

(अ) समद्विबाहु (ब) समबाहु

(स) सर्वांगसम (द) समरूप **(स)**

3. समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ होती हैं–

(अ) असमान (ब) बराबर

(स) लम्बवत (द) समान्तर नहीं होती **(ब)**

4. समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण होते हैं–

(अ) बराबर (ब) पूरक

(स) सम्पूरक (द) असमान **(अ)**

5. समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के संदर्भ में कौन–सा कथन सदैव सत्य है?

(अ) वे परस्पर लम्ब होते हैं।

(ब) वे लंबाई में बराबर होते हैं।

(स) वे परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

(द) वे कोणों को समद्विभाजित करते हैं। **(स)**

रिक्तस्थान –

1. यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक ———————— होता है।

हल : समांतर चतुर्भुज

2. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक ———————— होता है।

हल : समांतर चतुर्भुज

3. यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करें, तो वह आकृति ———————— कहलाती है।

हल : समांतर चतुर्भुज

4. समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग ———————— होता है।।

हल : 180° (संपूरक)

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें AB || CD और AD एक तिर्यक रेखा है।

दो समांतर रेखाओं को काटने वाली तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों का योग 180° होता है।

अतः, ∠A + ∠D = 180°

∠A + ∠B = 180° (इति सिद्धम्)

2. चतुर्भुज PQRS में, ∠P : ∠Q : ∠R : ∠S = 1 : 2 : 1 : 2 है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : मान लीजिए कोण ∠P = x, ∠Q = 2x, ∠R = x, ∠S = 2x हैं।

चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है:

x + 2x + x + 2x = 360°

6x = 360°

x = 60°

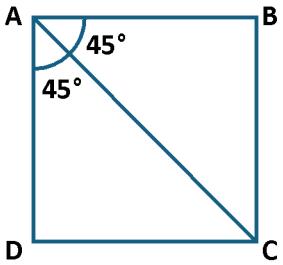
कोणों के माप:

∠P = 60°, ∠Q = 120°, ∠R = 60°, ∠S = 120°

यहाँ सम्मुख कोण बराबर हैं (∠P = ∠R और ∠Q = ∠S)

PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। (इति सिद्धम)

3. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग का प्रत्येक विकर्ण उसके कोणों को समद्विभाजित करता है।



हल : वर्ग ABCD में,

AB = AD और ∠DAB = 90°।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

ΔABC और ΔADC में,

$AB = AD$ (वर्ग की भुजाएँ)

$BC = DC$ (वर्ग की भुजाएँ)

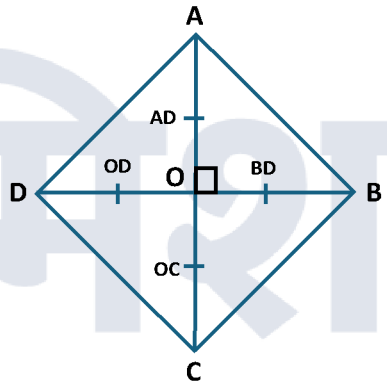
$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

SSS सर्वांगसमता से, $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

CPCT द्वारा, $\angle BAC = \angle DAC = 45°$

अतः विकर्ण AC, $\angle A$ (तथा इसी प्रकार $\angle C$) को समद्विभाजित करता है। (इति सिद्धम)

4. दर्शाइए कि यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक वर्ग होता है।



हल : दिया है:

$AC = BD$, $AO = OC$, $BO = OD$ और $\angle AOB = 90°$

विकर्ण समद्विभाजित करते हैं। यह एक समांतर चतुर्भुज है।

$\Delta AOB \cong \Delta AOD$

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ),

$OB = OD$,

$\angle AOB = \angle AOD = 90°$

CPCT से, $AB = AD$

विकर्ण बराबर हैं $(AC = BD)$

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$

$\angle A = \angle B = 90°$।

अतः यह एक वर्ग है। (इति सिद्धम)

5. यदि एक समांतर चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

हल : मान लीजिए समांतर चतुर्भुज ABCD के सभी कोण x हैं

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = x$

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है:

$x + x + x + x = 360°$

$4x = 360°$

$x = 90°$

जिस समांतर चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 90° होता है, वह आयत कहलाता है। (इति सिद्धम)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. यदि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, तो सिद्ध कीजिए कि इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

हल : दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: $AB = CD$ तथा $BC = AD$

उपपत्ति: समांतर चतुर्भुज में

$AB \parallel CD$ तथा $BC \parallel AD$

विकर्ण AC मिलाने पर

त्रिभुज ABC तथा CDA में,

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर अंतः कोण)

$\angle BCA = \angle DAC$ (एकांतर अंतः कोण)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA कसौटी)

अब CPCT के अनुसार,

$AB = CD$ तथा $BC = AD$

अतः सिद्ध हुआ कि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

2. सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

हल : दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: $\angle A = \angle C$ तथा $\angle B = \angle D$

उपपत्ति: समांतर चतुर्भुज में

$AB \parallel CD$ तथा $BC \parallel AD$

विकर्ण AC मिलाने पर

ΔABC तथा ΔCDA में,

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर अंतः कोण)

$\angle BCA = \angle DAC$ (एकांतर अंतः कोण)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA कसौटी)

CPCT के अनुसार,

$\angle A = \angle C$

तथा $\angle B = \angle D$

अतः सिद्ध हुआ कि समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

3. सिद्ध कीजिए किसी समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

हल : दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें AB || CD तथा AD || BC है। AC इसका एक विकर्ण है।

सिद्ध करना है: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

उपपत्ति: AB || CD और AC एक तिर्यक रेखा है।

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर अंतःकोण युग्म) – .....(1)

AD || BC और AC एक तिर्यक रेखा है।

$\angle BCA = \angle DAC$ (एकांतर अंतःकोण युग्म) – .....(2)

ΔABC और ΔCDA में:

$\angle BAC = \angle DCA$ (समीकरण (1) से)

AC = CA (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle BCA = \angle DAC$ (समीकरण (2) से)

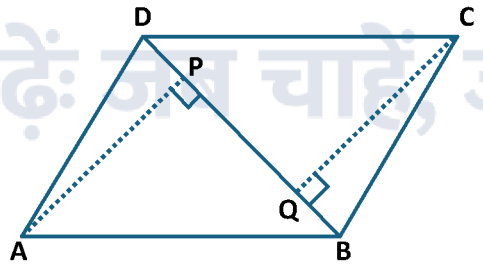
ASA (कोण–भुजा–कोण) सर्वांगसमता नियम से:

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (इति सिद्धम)

4. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब AP और CQ खींचे गए हैं। दर्शाइए कि:

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(ii) AP = CQ



हल : ΔAPB और ΔCQD में:

$\angle APB = \angle CQD = 90°$

(दिया है, $AP \perp BD$ और $CQ \perp BD$)

$\angle ABP = \angle CDQ$ (एकांतर अंतःकोण, क्योंकि AB || CD और BD तिर्यक रेखा है)

AB = CD (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

AAS (कोण–कोण–भुजा) सर्वांगसमता नियम द्वारा:

$\Delta APB \cong \Delta CQD$

CPCT (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) द्वारा:

AP = CQ (इति सिद्धम)

मध्य–बिंदु प्रमेय

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के–

(अ) लंबवत होता है

(ब) बराबर होता है

(स) समांतर और उसका आधा होता है

(द) दुगना होता है **(स)**

2. यदि ΔABC में, D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य–बिंदु हैं, तथा BC = 12 cm है, तो DE की लंबाई होगी–

(अ) 24 cm (ब) 6 cm

(स) 12 cm (द) 3 cm **(ब)**

3. त्रिभुज की एक भुजा के मध्य–बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को–

(अ) समद्विभाजित करती है

(ब) 1 : 2 में विभाजित करती है

(स) त्रिभाजित करती है

(द) स्पर्श करती है **(अ)**

4. किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को क्रम से मिलाने पर बनने वाली आकृति सदैव एक–

(अ) वर्ग होती है (ब) आयत होती है

(स) समचतुर्भुज होती है

(द) समांतर चतुर्भुज होती है **(द)**

5. यदि एक आयत की भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को क्रम से मिलाया जाए, तो प्राप्त चतुर्भुज होगा–

(अ) समचतुर्भुज (ब) वर्ग

(स) आयत (द) समलंब **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को ——— कहते है।

हल : मध्य बिन्दु रेखाखंड

2. त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा की लंबाई का ——— होता है।

हल : आधा

3. यदि D और E, ΔABC की AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु है, तो DE, ——— के समान्तर होगा।

हल : BC

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

4. यदि ABC एक त्रिभुज है और D, E क्रमशः AB और AC के मध्य–बिंदु हैं, तथा BC = 10 cm है, तो DE = ——— cm होगा।

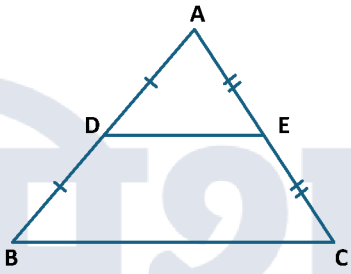
हल : 5

5. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाया जाए, तो प्राप्त रेखाखंड तीसरी भुजा का ——— होता है।

हल : आधा

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. ΔABC में, D और E क्रमशः AB और AC के मध्य–बिंदु हैं। यदि DE = 4.5 cm है, तो BC का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया गया है: ΔABC में, D भुजा AB का मध्य–बिंदु है। E भुजा AC का मध्य–बिंदु है।

DE = 4.5 cm

मध्य–बिंदु प्रमेय से: किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है और उसका आधा होता है।

अर्थात्, $DE = \frac{1}{2}BC$

$4.5 = \frac{1}{2}BC$

$BC = 4.5 \times 2$

$BC = 9$ cm

2. सिद्ध कीजिए कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड आधार के समांतर होता है।

हल : दिया गया है:

ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है।

P और Q क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य–बिंदु हैं।

सिद्ध करना है: PQ || BC

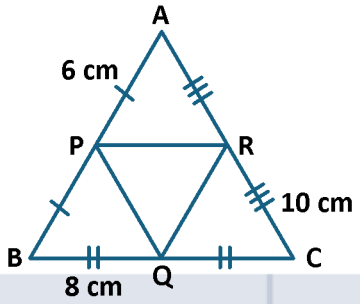
उपपत्ति: P भुजा AB का मध्य–बिंदु है, इसलिए AP = PB

Q भुजा AC का मध्य–बिंदु है, इसलिए AQ = QC

मध्य–बिंदु प्रमेय के अनुसार, किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

अतः, PQ || BC इति सिद्धम्

3. ΔABC में, P, Q और R क्रमशः भुजाओं AB, BC और CA के मध्य–बिंदु हैं। यदि AB = 6 cm, BC = 8 cm और CA = 10 cm है, तो ΔPQR की भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।



हल : दिया गया है:

AB = 6 cm, BC = 8 cm, CA = 10 cm

P, Q, R क्रमशः AB, BC, CA के मध्य–बिंदु हैं।

मध्य–बिंदु प्रमेय से,

PQ रेखाखंड AC का आधा होगा,

$PQ = \frac{1}{2} \times CA = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ cm

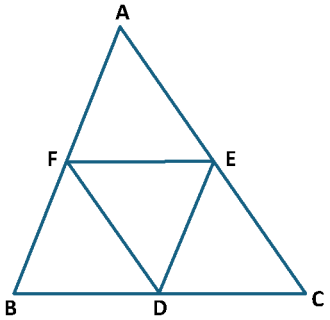
QR रेखाखंड AB का आधा होगा,

$QR = \frac{1}{2} \times AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm

RP रेखाखंड BC का आधा होगा,

$RP = \frac{1}{2} \times BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ cm

4. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने से बना त्रिभुज, मूल त्रिभुज को चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।



मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल : दिया गया है: ΔABC में D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के मध्य–बिंदु हैं।

सिद्ध करना है: $\Delta AFE \cong \Delta FBD \cong \Delta EDC \cong \Delta DEF$

उपपत्ति:

मध्य–बदु प्रमेय से, $DF \parallel AC$ और $DE = \frac{1}{2}AC = AE$

इसी प्रकार, $DE \parallel AB$ और $DE = \frac{1}{2}AB = AF$

अतः आकृति AFDE एक समांतर चतुर्भुज है।

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण FE इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है:

$\Delta AFE \cong \Delta DEF$

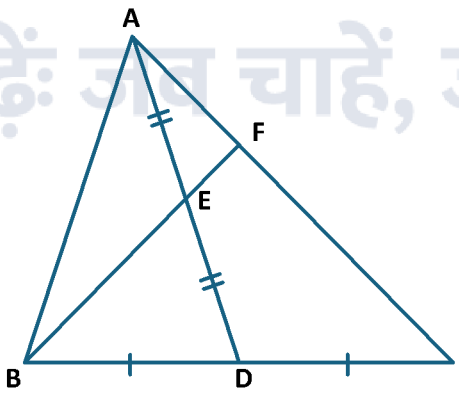
इसी प्रकार, $\Delta FBD \cong \Delta DEF$

$\Delta EDC \cong \Delta DEF$

समीकरणों से स्पष्ट है कि चारों त्रिभुज आपस में सर्वांगसम हैं। इति सिद्धम्।

5. ΔABC में AD एक माध्यिका है। E, AD का मध्य–बिंदु है तथा BE को बढ़ाने पर यह AC को F पर मिलती है।

सिद्ध कीजिए कि $AF = \frac{1}{3}AC$.



हल : दिया गया है: ΔABC में AD माध्यिका है (D, BC का मध्य–बिंदु है, अर्थात् BD = DC)।

E रेखाखंड AD का मध्य–बिंदु है (AE = ED)।

BE को आगे बढ़ाया गया है जो AC को F पर काटती है।

सिद्ध करना है: $AF = \frac{1}{3}AC$

रचना: बिंदु D से, $DG \parallel BF$ रेखा खींची जो AC को बिंदु G पर मिलती है।

उपपत्ति: ΔADG में, E भुजा AD का मध्य–बिंदु है।

$EF \parallel DG$ (क्योंकि $BF \parallel DG$)

मध्य–बिंदु प्रमेय के विलोम से,

F भुजा AG का मध्य–बिंदु होगा।

अर्थात्, $AF = FG$ ..... (1)

ΔFBC में, D भुजा BC का मध्य–बिंदु है (क्योंकि AD माध्यिका है)।

$DG \parallel BF$

मध्य–बिंदु प्रमेय के विलोम से,

G भुजा FC का मध्य–बिंदु होगा।

अर्थात्, $FG = GC$ ..... (2)

समीकरण (1) और (2) की तुलना करने पर:

$AF = FG = GC$ ..... (3)

भुजा AC का विभाजन,

$AC = AF + FG + GC$

समीकरण (3) से FG और GC के स्थान पर AF रखने पर:

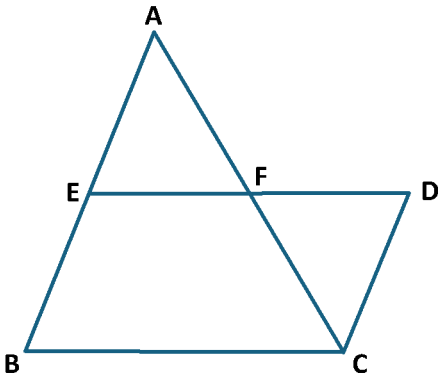
$AC = AF + AF + AF$

$AC = 3 \times AF$

$AF = \frac{1}{3}AC$ इति सिद्धम्।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है और उसका आधा होता है।



हल : **दिया गया है:** ΔABC में, E और F क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य–बिंदु हैं।

(AE = EB और AF = FC)

सिद्ध करना है: $EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2}BC$

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

रचना: बिंदु C से AB के समांतर एक रेखा खींची जो बढ़ाई गई EF रेखा को बिंदु D पर काटती है।

(अर्थात् CD || AB)

ΔAEF और ΔCDF में,

∠AEF = ∠CDF

(एकांतर अंतःकोण, क्योंकि AB || CD)

AF = FC (दिया गया है, F मध्य–बिंदु है)

∠AFE = ∠CFD (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः, ASA सर्वांगसमता नियम से:

ΔAEF ≅ ΔCDF

CPCT द्वारा,

EF = FD ..... (1)

AE = CD ..... (2)

चतुर्भुज BCDE में,

दिया गया है कि AE = EB

समीकरण (2) से, AE = CD, इसलिए EB = CD

रचना से, (क्योंकि AB || CD)

चूंकि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है, अतः BCDE एक समांतर चतुर्भुज है।

समांतर चतुर्भुज के गुणधर्म से,

ED || BC EF || BC (सिद्ध हुआ)

ED = BC

चित्र से, ED = EF + FD

समीकरण (1) से FD = EF रखने पर,

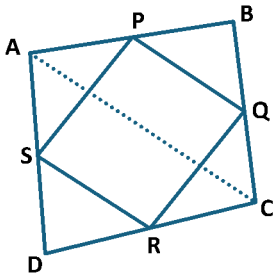
ED = EF + EF = 2 × EF

चूंकि ED = BC है,

2 × EF = BC

$EF = \frac{1}{2}BC$ (सिद्ध हुआ) इति सिद्धम्।

2. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को क्रम से मिलाने पर बना चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।



हल : दिया गया है:

ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य–बिंदु हैं।

सिद्ध करना है: PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

रचना: विकर्ण AC को मिलाया।

उपपत्ति: ΔABC में,

P भुजा AB का मध्य–बिंदु है।

Q भुजा BC का मध्य–बिंदु है।

मध्य–बिंदु प्रमेय से,

PQ || AC ..... (1)

$PQ = \frac{1}{2}AC$ ..... (2)

ΔADC में,

S भुजा AD का मध्य–बिंदु है।

R भुजा CD का मध्य–बिंदु है।

मध्य–बिंदु प्रमेय से,

SR || AC ..... (3)

$SR = \frac{1}{2}AC$ ..... (4)

समीकरण (1) और (3) की तुलना करने पर:

चूंकि PQ || AC और SR || AC

इसलिए PQ || SR

समीकरण (2) और (4) की तुलना करने पर:

$PQ = \frac{1}{2}AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$,

इसलिए PQ = SR

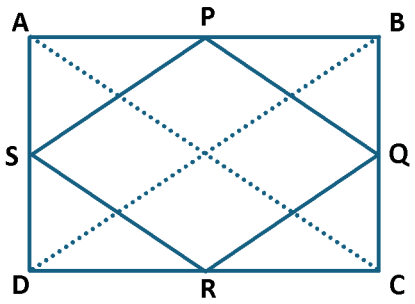
चतुर्भुज PQRS में, सम्मुख भुजाओं का एक युग्म (PQ और SR) बराबर भी है और समांतर भी है।

हम जानते हैं कि यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

अतः, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। इति सिद्धम्।

3. सिद्ध कीजिए कि एक आयत की भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को क्रम से मिलाने पर बना चतुर्भुज एक समचतुर्भुज होता है।

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!



हल : दिया गया है: ABCD एक आयत है।

(जिसमें $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ तथा AB = CD, AD = BC)

P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्य–बिंदु हैं।

सिद्ध करना है: PQRS एक समचतुर्भुज है (अर्थात PQ = QR = RS = SP)।

रचना: विकर्ण AC और BD को मिलाया।

उपपत्ति: त्रिभुज ΔABC में (मध्य–बिंदु प्रमेय से):

$PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$ ..... (1)

ΔADC में (मध्य–बिंदु प्रमेय से):

$SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ ..... (2)

ΔABD में (मध्य–बिंदु प्रमेय से):

$PS \parallel BD$ और $PS = \frac{1}{2}BD$ ..... (3)

ΔBCD में (मध्य–बिंदु प्रमेय से):

$QR \parallel BD$ और $QR = \frac{1}{2}BD$ ..... (4)

आयत के विकर्ण लंबाई में बराबर होते हैं।

अतः, AC = BD ..... (5)

तुलना करने पर,

समीकरण (1), (2), (3), (4) और (5) से,

$$PQ = \frac{1}{2}AC$$

$$SR = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = PS \ (\because AC = BD)$$

$$QR = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = PQ \ (\because AC = BD)$$

अर्थात्, PQ = QR = RS = SP

चूँकि चतुर्भुज PQRS की चारों भुजाएँ आपस में बराबर हैं, इसलिए PQRS एक समचतुर्भुज है। इति सिद्धम्।

4. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को क्रम से मिलाने पर बनने वाला चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल : दिया गया है: ABCD एक समचतुर्भुज है

(AB = BC = CD = DA)

P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्य–बिंदु हैं।

सिद्ध करना है: PQRS एक आयत है (अर्थात् PQRS एक समांतर चतुर्भुज है और इसका एक $\angle 90°$ है)।

रचना: विकर्ण AC और BD को मिलाया, जो एक–दूसरे को O पर काटते हैं।

उपपत्ति: समांतर चतुर्भुज सिद्ध करना

किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने से PQRS एक समांतर चतुर्भुज बनता है जिसमें,

$PQ \parallel AC$ और $PS \parallel BD$

कोण 90° सिद्ध करना: मान लीजिए विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबवत होते हैं,

अतः $\angle AOB = 90°$

मान लीजिए रेखाखण्ड PQ, विकर्ण BD को M पर और रेखाखण्ड PS, विकर्ण AC को N पर काटता है।

चतुर्भुज OMPN में:

$ON \parallel MP$ (क्योंकि $AC \parallel PQ$)

$OM \parallel NP$ (क्योंकि $BD \parallel PS$)

इसलिए, OMPN एक समांतर चतुर्भुज है।

कोणों की तुलना,

समांतर चतुर्भुज OMPN के सम्मुख कोण बराबर होते हैं:

$\angle MPN = \angle MON$

चूंकि $\angle MON$ (या $\angle AOB$) = 90° है,

इसलिए कोण MPN (या कोण SPQ) = 90°

चूंकि PQRS एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसका एक अंतःकोण 90° है, अतः PQRS एक आयत है।

इति सिद्धम्

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

9 वृत्त

जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. O केंद्र वाले वृत्त में जीवा AB = 6 cm और जीवा CD = 6 cm है। यदि ∠AOB = 50° है, तो ∠COD का मान क्या होगा?

(अ) 25° (ब) 50°

(स) 100° (द) 75° **(ब)**

2. वृत्त के अंदर स्थित किसी जीवा द्वारा उसके केंद्र पर बनाया गया कोण हमेशा किस सीमा में होता है?

(अ) 0° और 180° के बीच

(ब) हमेशा 90°

(स) हमेशा 180°

(द) 180° से अधिक **(अ)**

3. दो सर्वांगसम वृत्तों के केंद्रों पर जीवाएँ AB और CD क्रमशः 60° का कोण बनाती हैं। यदि AB = 5 cm है, तो CD का मान होगा:

(अ) 2.5 cm (ब) 5 cm

(स) 10 cm (द) 7.5 cm **(ब)**

4. यदि किसी वृत्त की जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर हो, तो उस जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का मान होता है:

(अ) 30° (ब) 45°

(स) 60° (द) 90° **(स)**

5. यदि दो जीवाएँ AB और CD केंद्र पर क्रमशः 40° और 80° का कोण बनाती हैं, तो सत्य कथन है:

(अ) AB > CD (ब) AB = CD

(स) CD > AB (द) AB = 2CD **(स)**

रिक्तस्थान –

1. एक वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र पर ..... कोण अंतरित करती हैं।

हल : बराबर

2. यदि एक वृत्त की दो जीवाओं द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ आपस में ..... होती हैं।

हल : बराबर

3. किसी वृत्त की बड़ी जीवा छोटे चाप वाले केंद्र पर ..... कोण अंतरित करती है।

हल : बड़ा

4. वृत्त के किसी बिंदु पर जीवा द्वारा बनाया गया कोण, जीवा द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण का ..... होता है।

हल : आधा

5. केंद्र से होकर जाने वाली जीवा (व्यास) द्वारा वृत्त के किसी बिंदु पर अंतरित कोण हमेशा ..... होता है।

हल : समकोण 90°

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

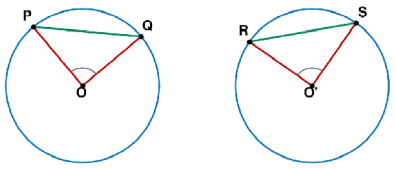
1. एक वृत्त में 8 cm लंबाई की दो समान जीवाएँ AB और CD हैं। यदि ∠AOB = 65° है, तो ∠COD ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं (प्रमेय 9.1)।

चूँकि AB = CD = 8 cm,

इसलिए ∠COD = ∠AOB = 65°

2. दो सर्वांगसम वृत्तों के केंद्र O तथा O' हैं। इनकी जीवाएँ क्रमशः PQ और RS हैं। यदि PQ = RS हो, तो दर्शाए कि ∠POQ = ∠RO'S।



हल : ΔPOQ और ΔRO'S में:

OP=O'R (सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

OQ=O'S (सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

PQ=RS (दिया है)

ΔPOQ ≅ ΔRO'S (SSS नियम से)

∠POQ = ∠RO'S (CPCT से)। इति सिद्धम।

3. O केंद्र वाले वृत्त में ∠AOB = 120° और ΔAOB एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जहाँ OA = OB है। ∠OAB का मान ज्ञात कीजिए।

हल : ΔAOB में, OA = OB (त्रिज्याएँ)

⇒ ∠OAB = ∠OBA = x

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग: x + x + 120° = 180°

$\Rightarrow 2x = 60^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

अतः $\angle OAB = 30^\circ$

4. यदि किसी वृत्त की जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है, तो जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण कितना होगा?

हल : माना वृत्त का केंद्र O है और जीवा AB है।

दिया है: AB = OA = OB = r

अतः ΔAOB एक समबाहु त्रिभुज है।

$\angle AOB = 60^\circ$

5. दो जीवाएँ AB और CD केंद्र पर क्रमशः 50° और 70° के कोण अंतरित करती हैं। इनमें से कौन सी जीवा अधिक लंबी होगी?

हल : वृत्त में केंद्र पर बड़ा कोण अंतरित करने वाली जीवा अधिक लंबी होती है।

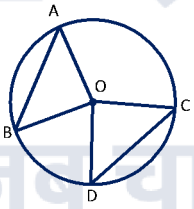
चूँकि, $70^\circ > 50^\circ$

अतः जीवा CD की लंबाई जीवा AB से अधिक होगी।

CD > AB ।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की बराबर जीवाएँ केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r है तथा दो बराबर जीवाएँ AB = CD हैं।

सिद्ध करना है: $\angle AOB = \angle COD$

उपपत्ति: ΔAOB और ΔCOD में:

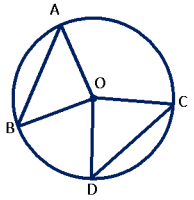
OA = OC (त्रिज्याएँ) OB = OD (त्रिज्याएँ)

AB = CD (दिया है)

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS सर्वांगसमता नियम से)

$\Rightarrow \angle AOB = \angle COD$ (CPCT से) इति सिद्धम।

2. यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वे जीवाएँ आपस में बराबर होती हैं।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r है तथा $\angle AOB = \angle COD$ है।

सिद्ध करना है: AB = CD

उपपत्ति: ΔAOB और ΔCOD में,

OA = OC (त्रिज्याएँ) OB = OD (त्रिज्याएँ)

$\angle AOB = \angle COD$ (दिया है)

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SAS सर्वांगसमता नियम से)

$\Rightarrow$ AB = CD (CPCT से)। इति सिद्धम।

3. सिद्ध कीजिए कि यदि दो सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केंद्रों पर बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

हल : दिया है: दो सर्वांगसम वृत्त जिनके केन्द्र क्रमशः O एवं O' हैं। जीवा AB केंद्र O पर $\angle AOB$ और जीवा CD केंद्र O' पर $\angle CO'D$ बनाती है, जहाँ $\angle AOB = \angle CO'D$

सिद्ध करना है: AB = CD

उपपत्ति: ΔAOB और $\Delta CO'D$ में,

OA = O'C (सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

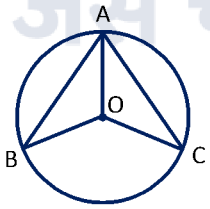
$\angle AOB = \angle CO'D$ (दिया है)

OB = O'D (सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

$\therefore \Delta AOB\Delta \cong \Delta CO'D$ (SAS सर्वांगसमता कसौटी से)

$\Rightarrow$ AB = CD (CPCT से) इति सिद्धम।

4. O केंद्र वाले एक वृत्त में AB और AC दो बराबर जीवाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि कोण $\angle BAC$ का समद्विभाजक वृत्त के केंद्र O से होकर जाता है।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r है, तथा दो बराबर जीवाएँ AB = AC

सिद्ध करना है: $\angle BAC$ का समद्विभाजक केंद्र O से गुजरता है।

उपपत्ति: ΔAOB और ΔAOC में,

AB = AC (दिया है)

OA = OA (उभयनिष्ठ भुजा)

OB = OC (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$ (SSS सर्वांगसमता नियम से)

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OAC$ (CPCT से)

इसका अर्थ है कि AO कोण $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

अतः $\angle BAC$ का समद्विभाजक केंद्र O से होकर जाता है।

इति सिद्धम।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

केंद्र से जीवा पर लम्ब

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. 10 cm त्रिज्या वाले वृत्त में केंद्र से 6 cm की दूरी पर स्थित जीवा की लंबाई होगी:

(अ) 8 cm (ब) 12 cm

(स) 16 cm (द) 20 cm **(स)**

2. यदि किसी वृत्त की जीवा की लंबाई 24 cm है और उसकी केंद्र से दूरी 5 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या कितनी होगी?

(अ) 12 cm (ब) 13 cm

(स) 17 cm (द) 25 cm **(ब)**

3. किसी वृत्त के केंद्र से 16 cm लंबी जीवा पर डाले गए लम्ब की लंबाई 6 cm है। वृत्त का व्यास होगा:

(अ) 10 cm (ब) 20 cm

(स) 15 cm (द) 12 cm **(ब)**

4. तीन असंरेखी बिन्दुओं से होकर गुजरने वाले वृत्तों की संख्या होती है:

(अ) केवल एक (ब) दो

(स) अनंत (द) एक भी नहीं **(अ)**

5. वृत्त के केंद्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब जीवा को किस अनुपात में विभाजित करता है?

(अ) 1 : 2 (ब) 2 : 1

(स) 1 : 1 (द) 1 : 3 **(स)**

रिक्तस्थान –

1. वृत्त के केंद्र से किसी जीवा पर डाला गया लंब जीवा को ..... करता है।

हल : समद्विभाजित

2. वृत्त के केंद्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर ..... होती है।

हल : लंब

3. तीन दिए गए असरेखी बिंदुओं से होकर जाने वाला ..... वृत्त खींचा जा सकता है।

हल : एक और केवल एक

4. यदि वृत्त की त्रिज्या 5 cm है और केंद्र से जीवा की दूरी 3 cm है, तो जीवा की लंबाई ..... cm होगी।

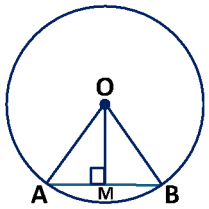
हल : 8

5. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा ..... होती है, जिस पर केंद्र से दूरी शून्य होती है।

हल : व्यास

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, एवं त्रिज्या r तथा जीवा AB है।

तथा $OM \perp AB$ है।

सिद्ध करना है: AM=MB

उपपत्ति: समकोण ΔOMA और ΔOMB में,

$\angle OMA = \angle OMB$ (90° दिया है)

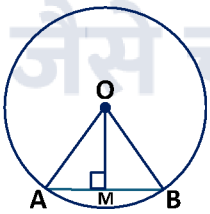
OA = OB (त्रिज्याएँ – कर्ण)

OM = OM (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \Delta OMA \cong \Delta OMB$ (RHS सर्वांगसमता नियम से)

$\Rightarrow$ AM = MB (CPCT से) इति सिद्धम

2. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के केंद्र से किसी जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लम्ब होती है।



हल : दिया है: एक वृत्त जिनके केन्द्र O एवं त्रिज्या r है, इस वृत्त की जीवा AB का मध्य–बिन्दु M है (AM = MB)

सिद्ध करना है: $OM \perp AB$

उपपत्ति: ΔOAM और ΔOBM में,

OA = OB (त्रिज्याएँ)

AM = BM (दिया है)

OM = OM (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta OAM \cong \Delta OBM$ (SSS सर्वांगसमता नियम से)

$\Rightarrow \angle OMA = \angle OMB$ (CPCT)

चूँकि $\angle OMA + \angle OMB = 180°$ (रैखिक युग्म),

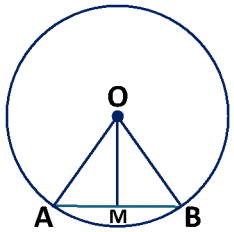
$\Rightarrow 2\angle OMA = 180°$

$\angle OMA = 90°$

$OM \perp AB$ इति सिद्धम

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

3. 5 cm त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा की लंबाई 8 cm है। इस जीवा की केंद्र से दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : माना केंद्र O है और जीवा AB = 8 cm है।

OM ⊥ AB खींचा।

केंद्र से डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है, AM = BM = 4 cm

समकोण ΔOMA में पाइथागोरस प्रमेय से,

$OA^2 = OM^2 + AM^2$

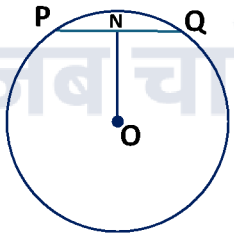
$5^2 = OM^2 + 4^2$

$25 = OM^2 + 16$

$OM^2 = 9 \Rightarrow OM = 3$ cm

अतः जीवा की केंद्र से दूरी 3 cm है।

4. केंद्र O वाले वृत्त की त्रिज्या 13 cm है। यदि केंद्र से किसी जीवा PQ की दूरी 12 cm हो, तो जीवा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।



हल : ON ⊥ PQ खींचा,

जहाँ ON = 12 cm और OP = 13 cm (त्रिज्या)

समकोण ΔONP में,

$PN = \sqrt{OP^2 - ON^2} = \sqrt{13^2 - 12^2}$

$= \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ cm

जीवा PQ = 2 × PN = 2 × 5 = 10 cm

5. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो समांतर जीवाओं के लम्ब समद्विभाजक एक ही रेखा में होते हैं (अर्थात् केंद्र से होकर गुजरते हैं)।

हल : माना वृत्त की दो समांतर जीवाएँ AB और CD हैं।

जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक केंद्र O से होकर जाता है (प्रमेय 9.4)।

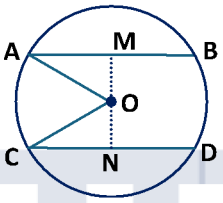
चूँकि AB || CD है, इसलिए जो रेखा AB पर लम्ब है, वह CD पर भी लम्ब होगी।

प्रमेय 9.4 के अनुसार CD को समद्विभाजित करने वाली और उस पर लम्ब रेखा भी केंद्र O से ही गुजरेगी।

अतः दोनों जीवाओं के लम्ब समद्विभाजक एक ही सीधी रेखा पर स्थित होते हैं। इति सिद्धम।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. 10 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त में दो समांतर जीवाएँ AB और CD केंद्र के विपरीत ओर स्थित हैं। यदि AB = 16 cm और CD = 12 cm हों, तो दोनों जीवाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : माना केंद्र O से AB पर लम्ब OM और CD पर लम्ब ON है।

AM = BM = 8 cm तथा CN = DN = 6 cm (केंद्र से लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)।

त्रिज्या OA = OC = 10 cm।

समकोण ΔOMA में,

$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2}$

$= \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ cm

समकोण ΔONC में,

$ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}$

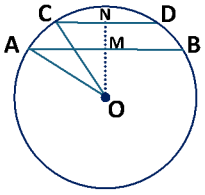
$= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ cm

चूँकि जीवाएँ केंद्र के विपरीत ओर हैं,

अतः बीच की कुल दूरी, MN = OM + ON

= 6 + 8 =14 cm

2. 10 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त में दो समांतर जीवाएँ AB और CD केंद्र के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AB = 16 cm और CD = 12 cm हों, तो दोनों जीवाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल : माना केंद्र O से जीवाओं पर लम्ब OM (जीवा AB पर) और ON (जीवा CD पर) हैं।

AM = 8 cm, CN = 6 cm तथा OA = OC = 10 cm।

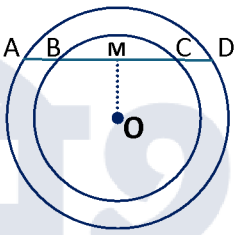
समकोण ΔOMA से: $OM = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ cm

समकोण ΔONC से: $ON = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

चूँकि दोनों जीवाएँ केंद्र के एक ही ओर स्थित हैं, अतः उनके बीच की दूरी:

MN = ON – OM = 8 – 6 =2 cm

3. यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों (एक ही केंद्र O वाले वृत्तों) को A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।



हल : दिया है: दो संकेन्द्री वृत्त जिनका केंद्र O है। एक रेखा इन्हें A,B,C,D पर काटती है।

सिद्ध करना है: AB = CD

उपपत्ति: बड़े वृत्त के लिए, AD जीवा है और OM ⊥ AD

⇒ AM = MD ..... (1)

(केंद्र से लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)

छोटे वृत्त के लिए, BC जीवा है और OM ⊥ BC

⇒ BM = MC ..... (2)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

AM – BM = MD – MC

⇒ AB = CD इति सिद्धम।

4. वृत्त के केंद्र O से दो जीवाओं AB और CD पर क्रमशः OM और ON लम्ब डाले गए हैं। यदि OM = ON हो, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r हैं, इस वृत्त में OM ⊥ AB, ON ⊥ CD है।

तथा OM = ON

सिद्ध करना है: AB = CD

उपपत्ति: OA और OC को मिलाया।

ΔOMA और ΔONC में,

∠OMA = ∠ONC (90°)

OA = OC (कर्ण / त्रिज्याएँ)

OM = ON (दिया है)

∴ ΔOMA ≅ ΔONC (RHS सर्वांगसमता नियम से)

⇒ AM=CN (CPCT से) ..... (1)

चूँकि केंद्र से लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है,

अतः AB = 2AM और CD = 2CN

समीकरण (1) में दोनों तरफ 2 से गुणा करने पर:

2AM = 2CN

⇒ AB = CD इति सिद्धम

समान जीवाएँ और उनकी केंद्र से दूरियाँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. O केंद्र वाले वृत्त में दो समान जीवाएँ AB = CD = 10 cm हैं। यदि केंद्र से AB की दूरी 4 cm है, तो CD की केंद्र से दूरी क्या होगी?

(अ) 2 cm (ब) 4 cm

(स) 5 cm (द) 8 cm **(ब)**

2. किसी वृत्त में केंद्र से समान दूरी पर स्थित दो जीवाओं की लंबाइयों का अनुपात कितना होता है?

(अ) 1 : 2 (ब) 2 : 1

(स) 1 : 1 (द) 1 : 4 **(स)**

3. 5 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त में दो बराबर जीवाएँ केंद्र से 3 cm की दूरी पर हैं। प्रत्येक जीवा की लंबाई होगी:

(अ) 4 cm (ब) 6 cm

(स) 8 cm (द) 10 cm **(स)**

4. यदि वृत्त की दो जीवाएँ PQ और RS केंद्र से क्रमशः 6 cm और 8 cm की दूरी पर स्थित हैं, तो सत्य कथन है:

(अ) PQ > RS (ब) PQ < RS

(स) PQ = RS (द) RS = 2PQ **(अ)**

5. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा की केंद्र से दूरी होती है:

(अ) त्रिज्या के बराबर (ब) व्यास के बराबर

(स) शून्य (0) (द) अनिश्चित **(स)**

रिक्तस्थान –

1. किसी वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र से ..... दूरी पर होती हैं।

हल : समान / बराबर

2. एक वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ लंबाई में ..... होती हैं।

हल : बराबर

3. यदि दो जीवाएँ केंद्र से भिन्न दूरियों पर हों, तो केंद्र के पास वाली जीवा दूर वाली जीवा से ..... होती है।

हल : बड़ी

4. सर्वांगसम वृत्तों में समान जीवाएँ उनके केंद्रों से ..... दूरियों पर स्थित होती हैं।

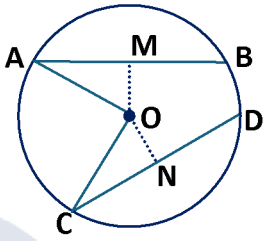
हल : बराबर

5. केंद्र से जीवा की दूरी हमेशा केंद्र से जीवा पर खींची गई ..... दूरी होती है।

हल : लंबवत

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की बराबर जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ (समान दूरी पर) होती हैं।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r में दो बराबर जीवाएँ AB = CD हैं। OM ⊥ AB और ON ⊥ CD है।

सिद्ध करना है: OM = ON

उपपत्ति: $AM = \frac{1}{2}AB$ और $CN = \frac{1}{2}CD$

(केंद्र से लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)

चूँकि AB = CD ⇒ AM = CN ..... (1)

ΔOMA और ΔONC में,

∠OMA = ∠ONC (90°)

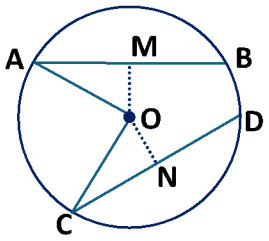
OA = OC (कर्ण / त्रिज्याएँ)

AM = CN (समीकरण (1) से)

∴ ΔOMA ≅ ΔONC (RHS नियम से)

⇒ OM = ON (CPCT से) इति सिद्धम

2. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ लंबाई में बराबर होती हैं।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r में,

OM ⊥ AB, ON ⊥ CD तथा OM = ON

सिद्ध करना है: AB = CD

उपपत्ति: ΔOMA और ΔONC में,

∠OMA = ∠ONC (90°)

OA = OC (कर्ण / त्रिज्या)

OM = ON (दिया है)

∴ ΔOMA ≅ ΔONC (RHS नियम से)

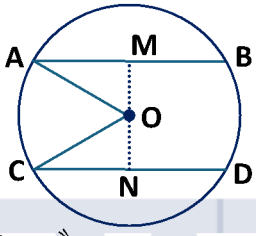
⇒ AM = CN (CPCT से)

दोनों तरफ 2 से गुणा करने पर,

2AM = 2CN

AB = CD (क्योंकि केंद्र से लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)। इति सिद्धम।

3. 10 cm त्रिज्या वाले वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और CD हैं। यदि जीवा AB = 16 cm हो, तो केंद्र से दोनों जीवाओं की दूरियाँ ज्ञात कीजिए।



हल : माना OM ⊥ AB है। AM = BM = 8 cm और त्रिज्या OA = 10 cm

समकोण ΔOMA में,

$OM^2 = OA^2 - AM^2$

$OM = \sqrt{10^2 - 8^2}$

$\sqrt{100-64} = \sqrt{36}$

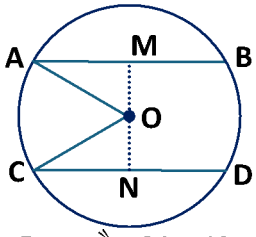
OM = 6 cm

चूँकि बराबर जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं,

अतः ON = OM = 6 cm

दोनों जीवाओं की केंद्र से दूरी 6 cm है।

4. दो बराबर जीवाएँ AB और CD केंद्र O के विपरीत ओर स्थित हैं। यदि केंद्र से इनकी दूरी 5 cm है और त्रिज्या 13 cm है, तो दोनों जीवाओं की लंबाइयाँ और उनके बीच की कुल दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : OM = ON = 5 cm और OA = 13 cm

$AM = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169-25} = 12$ cm

⇒ AB = 24 cm

चूँकि जीवाएँ बराबर हैं, CD = 24 cm

जीवाओं के बीच की कुल दूरी

= OM + ON = 5 + 5 = 10 cm

मिशन ज्ञान
पढ़ना चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

5. सिद्ध कीजिए कि दो सर्वांगसम वृत्तों में, यदि जीवाएँ केंद्रों से बराबर दूरी पर हों, तो वे जीवाएँ सर्वांगसम (बराबर) होती हैं।

हल : माना दो सर्वांगसम वृत्त जिनके केन्द्र क्रमशः O एवं O' हैं। जिनकी जीवाएँ AB और CD है।

दो सर्वांगसम वृत्त जिनके के $C_1(O, r)$ और $C_2(O', r)$ हैं जिनकी जीवाएँ क्रमशः AB और CD हैं।

दिया है: $OM \perp AB$, $O'N \perp CD$ तथा $OM = O'N$

ΔOMA और $\Delta O'NC$ में,

$\angle OMA = \angle O'NC$ (90°)

$OA = O'C$ (सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

$OM = O'N$ (दिया है)

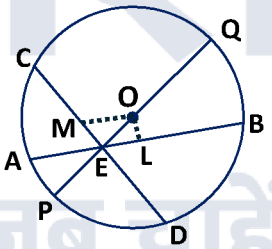
$\therefore \Delta OMA \cong \Delta O'NC$ (RHS नियम से)

$\Rightarrow AM = CN \Rightarrow 2AM = 2CN$

$\Rightarrow AB = CD$ इति सिद्धम

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न –

1. एक वृत्त की दो प्रतिच्छेदी जीवाएँ यदि प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले व्यास से समान कोण बनाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि वे जीवाएँ बराबर हैं।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r है, इस वृत्त की जीवाएँ AB और CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। व्यास PQ, E से गुजरता है तथा $\angle AEP = \angle DEP$, $\angle LEO = \angle MEO$

सिद्ध करना है: $AB = CD$

रचना: $OL \perp AB$ और $OM \perp CD$

उपपत्ति: ΔOLE और ΔOME में,

$\angle OLE = \angle OME$, (90° रचना से)

$OE = OE$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle LEO = \angle MEO$ (दिया है)

$\therefore \Delta OLE \cong \Delta OME$ (AAS सर्वांगसमता नियम से)

$\Rightarrow OL = OM$ (CPCT से)

इसका अर्थ है कि जीवाएँ AB और CD केंद्र O से समान दूरी पर हैं।

हम जानते हैं कि केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ बराबर होती हैं (प्रमेय 9.6)।

$\therefore AB = CD$ इति सिद्धम

2. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की दो जीवाओं में से बड़ी जीवा केंद्र के अधिक निकट होती है।

हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r, की दो जीवाएँ AB और CD हैं, जहाँ $AB > CD$, $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है।

सिद्ध करना है: $OM < ON$ (अर्थात् AB केंद्र के अधिक निकट है)।

उपपत्ति:

$AM = \frac{1}{2}AB$ और $CN = \frac{1}{2}CD$

चूँकि $AB > CD$

$\Rightarrow AM > CN \Rightarrow AM^2 > CN^2$ ..... (1)

ΔOMA और ΔONC में,

$OA^2 = OM^2 + AM^2$

$\Rightarrow AM^2 = r^2 - OM^2$

$OC^2 = ON^2 + CN^2$

$\Rightarrow CN^2 = r^2 - ON^2$

(1) में मान रखने पर,

$r^2 - OM^2 > r^2 - ON^2$

दोनों तरफ से r^2 घटाने पर,

$-OM^2 > -ON^2$

दोनों तरफ (-1) से गुणा करने पर (चिह्न बदल जाएगा):

$OM^2 < ON^2$

$\Rightarrow OM < ON$

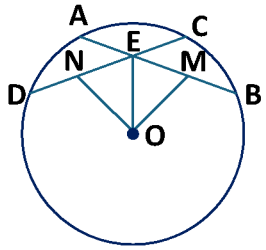
अतः बड़ी जीवा AB केंद्र के अधिक निकट है।

इति सिद्धम

3. O केंद्र वाले एक वृत्त में दो समान जीवाएँ AB और CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि:

(i) AE = CE

(ii) EB = ED



हल : दिया है: वृत्त में $AB = CD$, प्रतिच्छेद बिन्दु E है।

रचना: $OM \perp AB$, $ON \perp CD$ खींचिए तथा OE को मिलाइए।

उपपत्ति: बराबर जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं

$\Rightarrow OM = ON$

ΔOME और ΔONE में:

$\angle OME = \angle ONE = 90°$

$OE = OE$ (उभयनिष्ठ)

$OM = ON$

$\therefore \Delta OME \cong \Delta ONE$ (RHS नियम से)

$\Rightarrow ME = NE$ ..... (1)

चूँकि $AB = CD$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow AM = CN$ ..... (2)

(i) (2) में से (1) को घटाने पर,

$AM - ME = CN - NE$

$\Rightarrow AE = CE$

(ii) चूँकि $AB = CD$ और $AE = CE$

अतः $AB - AE = CD - CE$

$\Rightarrow EB = ED$ इति सिद्धम

4. 10 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त में AB और CD दो समांतर जीवाएँ हैं, जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः 16 cm और 12 cm हैं। यदि जीवाओं के बीच की दूरी 14 cm हो, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों जीवाएँ केंद्र के विपरीत ओर स्थित हैं।

हल : माना $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$।

$AM = 8$ cm, $CN = 6$ cm और त्रिज्या $OA = OC = 10$ cm

ΔOMA से, $OM = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ cm

ΔONC से, $ON = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

यदि जीवाएँ केंद्र के विपरीत ओर हों,

तो बीच की दूरी $= OM + ON = 6 + 8 = 14$ cm

चूँकि दी गई दूरी 14 cm है, जो $OM + ON$ के बराबर है।

अतः दोनों जीवाएँ निश्चित रूप से केंद्र के विपरीत ओर ही स्थित हैं। इति सिद्धम

एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. O केंद्र वाले एक वृत्त में चाप AB द्वारा केंद्र पर बना कोण $\angle AOB = 80°$ है। उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित बिन्दु C पर बना कोण $\angle ACB$ होगा।

(अ) 160° (ब) 40°

(स) 80° (द) 20° **(ब)**

2. अर्धवृत्त में बना कोण किस माप का होता है।

(अ) न्यूनकोण ($<90°$)

(ब) अधिककोण ($>90°$)

(स) समकोण ($90°$)

(द) ऋजुकोण ($180°$) **(स)**

3. एक ही वृत्तखंड के कोण आपस में होते हैं।

(अ) असमान (ब) पूरक

(स) संपूरक (द) बराबर (समान) **(द)**

4. यदि किसी वृत्त में $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही वृत्तखंड के दो कोण हैं तथा $\angle ACB = 65°$ है, तो $\angle ADB$ का मान होगा।

(अ) 65° (ब) 130°

(स) 32.5° (द) 115° **(अ)**

5. दीर्घ वृत्तखंड में बना कोण हमेशा होता है।

(अ) समकोण (ब) अधिककोण

(स) न्यूनकोण (द) ऋजुकोण **(स)**

रिक्तस्थान –

1. किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु पर बने कोण का ..... होता है।

हल : दुगना

2. एक ही वृत्तखंड के कोण आपस में ..... होते हैं।

हल : बराबर

3. किसी वृत्त के व्यास द्वारा वृत्त की परिधि पर अंतरित कोण ..... होता है।

हल : समकोण $90°$

4. लघु चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण हमेशा एक ..... ($180°$ से कम) होता है।

हल : अधिककोण

5. दीर्घ चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण हमेशा एक ..... कोण होता है।

हल : प्रतिवर्ती ($180°$ से बड़ा)

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए कि एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।

हल : दिया है: एक वृत्त जिसका के जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या r, में चाप AB द्वारा एक ही वृत्तखंड में बने कोण $\angle ACB$ और $\angle ADB$ हैं।

सिद्ध करना है: $\angle ACB = \angle ADB$

उपपत्ति: केंद्र O पर चाप AB द्वारा बना कोण $\angle AOB$ है। किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी भी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है (प्रमेय 9.7)

$\angle AOB = 2\angle ACB$

$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ ..... (1)

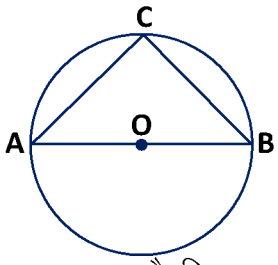
इसी प्रकार: $\angle AOB = 2\angle ADB$

$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB$ ..... (2)

समीकरण (1) और (2) से, $\angle ACB = \angle ADB$ इति सिद्धम।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

2. सिद्ध कीजिए कि अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।



हल : दिया है: AB वृत्त का व्यास है, जिसका केंद्र O है। C वृत्त पर एक बिन्दु है।

सिद्ध करना है: $\angle ACB = 90°$

उपपत्ति: AB एक सरल रेखा (व्यास) है, अतः केंद्र पर अंतरित कोण $\angle AOB = 180°$ है।

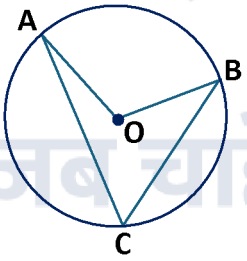
चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण परिधि के कोण का दुगुना होता है:

$\angle AOB = 2\angle ACB$

$180° = 2\angle ACB$

$\angle ACB° = 90°$ इति सिद्धम

3. O केंद्र वाले एक वृत्त में $\angle AOB = 110°$ है। वृत्त के शेष भाग पर स्थित बिंदु C के लिए $\angle ACB$ का मान ज्ञात कीजिए।

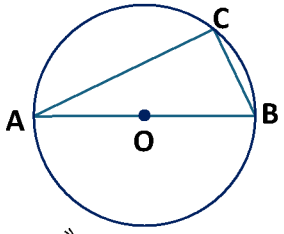


हल : चाप AB द्वारा केंद्र पर बना कोण $(\angle AOB) = 110°$

परिधि पर बना कोण $(\angle ACB) = \frac{1}{2}\angle AOB$

$\angle ACB = 55°$

4. दिए गए वृत्त में AB व्यास है और $\angle ABC = 35°$ है। $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : चूँकि AB व्यास है,

अतः $\angle ACB = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

ΔABC में तीनों कोणों का योग $180°$ होता है,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

$\angle BAC + 35° + 90° = 180°$

$\angle BAC + 125° = 180°$

$\Rightarrow \angle BAC = 180° - 125° = 55°$

5. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की समान जीवाएँ परिधि पर समान कोण अंतरित करती हैं।

हल : माना वृत्त में बराबर जीवाएँ AB = CD हैं।

केंद्र O पर जीवाओं द्वारा बने कोण $\angle AOB = \angle COD$ (समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं)।

परिधि पर स्थित बिन्दुओं P और Q के लिए:

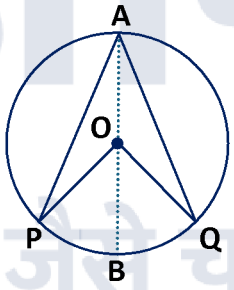
$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ और $\angle CQD = \frac{1}{2}\angle COD$

चूँकि $\angle AOB = \angle COD$, अतः $\angle APB = \angle CQD$ होगा।

इति सिद्धम

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. सिद्ध कीजिए कि किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी भी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।



हल : दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा r, का एक चाप PQ है, जो केंद्र O पर $\angle POQ$ और परिधि के बिंदु A पर $\angle PAQ$ अंतरित करता है।

सिद्ध करना है: $\angle POQ = 2\angle PAQ$

रचना: AO को मिलाइए और इसे बिंदु B तक बढ़ाइए।

उपपत्ति: ΔAOP में,

OA = OP (त्रिज्याएँ)

$\Rightarrow \angle OAP = \angle OPA$

बहिष्कोण प्रमेय से,

$\angle BOP = \angle OAP + \angle OPA = 2\angle OAP$ ..... (1)

इसी प्रकार ΔAOQ में, OA = OQ

$\Rightarrow \angle OAQ = \angle OQA$

बहिष्कोण प्रमेय से: $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle OQA$

$= 2\angle OAQ$ ..... (2)

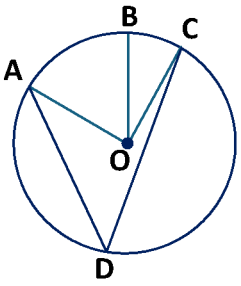
समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर,

$\angle BOP + \angle BOQ = 2\angle OAP + 2\angle OAQ$

$\Rightarrow \angle POQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ) = 2\angle PAQ$ इति सिद्धम

पढ़ें: जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

2. आकृति में, केंद्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिंदु A, B और C इस प्रकार हैं कि ∠BOC = 30° तथा ∠AOB = 60° है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिंदु है, तो ∠ADC ज्ञात कीजिए।



हल : कुल चाप ABC द्वारा केंद्र पर बना कोण,

$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$

$\angle AOC = 60° + 30° = 90°$

हम जानते हैं कि चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण, शेष परिधि पर बने कोण का दुगुना होता है,

$\angle AOC = 2\angle ADC$

$90° = 2\angle ADC$

$\angle ADC = \frac{90°}{2} = 45°$

अतः $\angle ADC = 45°$ है।

3. किसी वृत्त की एक जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिंदु पर अंतरित कोण तथा दीर्घ चाप के किसी बिंदु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना जीवा AB = r और त्रिज्या OA = OB = r है।

ΔAOB एक समबाहु त्रिभुज है, अतः केंद्र पर बना कोण $\angle AOB = 60°$।

(i) दीर्घ चाप पर बने कोण ($\angle ACB$) के लिए,

$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{60°}{2} = 30°$

(ii) लघु चाप पर बने कोण ($\angle ADB$) के लिए,

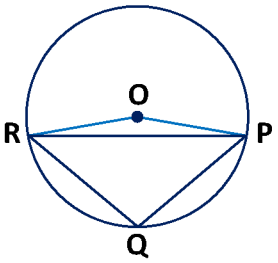
लघु चाप पर बना कोण निकालने के लिए प्रतिवर्ती कोण $\angle AOB$ लेंगे,

प्रतिवर्ती $(\angle AOB) = 360° - 60° = 300°$

$\angle ADB = \frac{1}{2}$ (प्रतिवर्ती $\angle AOB$) $= 150°$

अतः दीर्घ चाप पर कोण 30° तथा लघु चाप पर कोण 150° होगा।

4. आकृति में ∠PQR = 100° है, जहाँ P,Q तथा R केंद्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिंदु हैं। ∠OPR का मान ज्ञात कीजिए।



हल : जीवा / चाप PR द्वारा परिधि के बिंदु Q पर बना कोण $\angle PQR = 100°$ है।

केंद्र पर बना प्रतिवर्ती कोण $\angle POR = 2 \times \angle PQR$

$= 2 \times 100° = 200$

अतः मुख्य कोण $(\angle POR) = 360° - 200° = 160°$

अब ΔOPR में:

OP=OR (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\Rightarrow \angle OPR = \angle ORP = x$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान)

त्रिभुज के तीनों कोणों का योगः $x + x + \angle POR = 180°$

$2x + 160° = 180°$

$2x = 20° \Rightarrow x = 10°$

अतः $\angle OPR = 10°$ है।

चक्रीय चतुर्भुज

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख (आमने–सामने के) कोणों के योगफल का मान होता है।

(अ) 90° (ब) 180°

(स) 270° (द) 360° **(ब)**

2. यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें ∠A = 70° है, तो सम्मुख कोण ∠C का मान क्या होगा?

(अ) 70° (ब) 110°

(स) 90° (द) 20° **(ब)**

3. चक्रीय समांतर चतुर्भुज हमेशा होता है एक–

(अ) समचतुर्भुज (ब) समलंब चतुर्भुज

(स) आयत (द) पतंग **(स)**

4. यदि चक्रीय चतुर्भुज का एक बहिष्कोण 85° है, तो उसका अंतः सम्मुख कोण क्या होगा।

(अ) 95° (ब) 85°

(स) 105° (द) 180° **(ब)**

5. चक्रीय समचतुर्भुज हमेशा होता है एक–

(अ) वर्ग (ब) आयत

(स) समलंब (द) पतंग **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. जिस चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक ही वृत्त पर स्थित हों, उसे ..... चतुर्भुज कहते हैं।

हल : चक्रीय

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

2. यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो ∠A + ∠C = ...

हल : 180°

3. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° हो, तो वह ..... चतुर्भुज होता है।

हल : चक्रीय

4. यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है और ∠A = 120° है, तो ∠C = ... होगा।

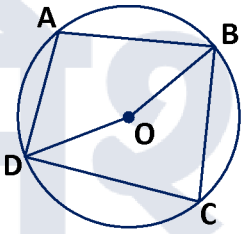
हल : 60°

5. चक्रीय चतुर्भुज के चारों शीर्ष ..... पर स्थित होते है।

हल : एक ही वृत्त

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।



हल : दिया है: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसका केंद्र O है।

सिद्ध करना है: ∠A + ∠C=180° तथा ∠B + ∠D=180°

रचना: OB और OD को मिलाया।

उपपत्ति:

चाप BAD द्वारा केंद्र पर बना कोण

= प्रतिवर्ति ∠BOD = 2×∠C

चाप BCD द्वारा केंद्र पर बना कोण

=∠BOD = 2×∠A

दोनों को जोड़ने पर:

∠BOD+ प्रतिवर्ति∠BOD = 2(∠A+∠C)

360° = 2(∠A+∠C)

⇒∠A+∠C = 180°

इसी प्रकार, चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होने से ∠B + ∠D = 180°। इति सिद्धम।

2. सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समानांतर चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल : दिया है: ABCD एक चक्रीय समानांतर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: ABCD एक आयत है (अर्थात् ∠A=90°)।

उपपत्ति:

समानांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं:

∠A=∠C ..... (1)

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं:

∠A+∠C=180° ..... (2)

(1) का मान (2) में रखने पर:

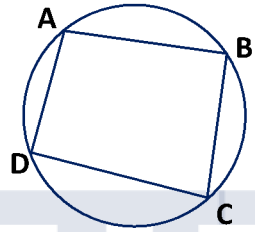
∠A+∠A = 180°

2∠A = 180°

∠A = 90°

जिस समानांतर चतुर्भुज का एक कोण 90° हो, वह आयत होता है। इति सिद्धम।

3. चक्रीय चतुर्भुज ABCD में यदि ∠A – ∠C = 60° हो, तो ∠A और ∠C ज्ञात कीजिए।



हल : चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण:

∠A + ∠C = 180° ..... (1)

दिया है: ∠A – ∠C = 60° ..... (2)

(2) और (2) को जोड़ने पर,

2∠A = 240°

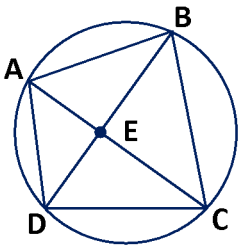
⇒ ∠A = 120°

(1) में मान रखने पर,

120°+∠C = 180°

⇒ ∠C = 60°

4. चक्रीय चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD बिंदु E पर काटते हैं। यदि ∠DBC = 55° और ∠BAC = 45° हो, तो ∠BCD ज्ञात कीजिए।



हल : ∠BDC = ∠BAC = 45° (एक ही वृत्तखंड के कोण)

ΔBCD में,

∠BCD + ∠DBC + ∠BDC = 180°

∠BCD + 55° + 45° = 180°

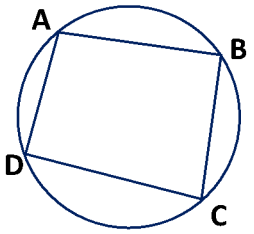
∠BCD + 100° = 180°

⇒ ∠BCD = 80°

मिशन ज्ञान
पढ़ें अब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

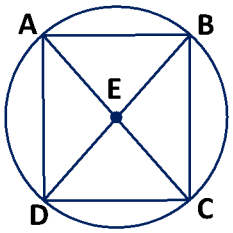
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का एक युग्म संपूरक हो, तो सिद्ध कीजिए कि वह चतुर्भुज चक्रीय होता है।



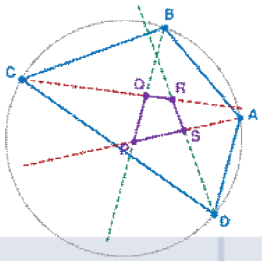
हल : दिया है: चतुर्भुज ABCD जिसमें $\angle A + \angle C = 180°$ है।
सिद्ध करना है: A, B, C, D एक ही वृत्त पर स्थित हैं (चक्रीय हैं)।
उपपत्ति: यदि संभव हो, तो माना D तीन बिंदुओं A, B, C से होकर जाने वाले वृत्त पर स्थित नहीं है।
माना यह वृत्त AD (या बढ़ाई गई AD) को बिंदु D' पर काटता है। D'C को मिलाया।
अब ABCD' एक चक्रीय चतुर्भुज है।
$\therefore \angle A + \angle AD'C = 180°$ ..... (1)
लेकिन दिया है: $\angle A + \angle ADC = 180°$ ..... (2)
(1) और (1) से,
$\angle AD'C = \angle ADC$
$\Delta CD'D$ में, बहिष्कोण $\angle AD'C$ अंतः कोण $\angle ADC$ के बराबर नहीं हो सकता जब तक कि D' और D एक ही बिंदु न हों।
अतः D अवश्य ही वृत्त पर स्थित होना चाहिए।
इसलिए ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। इति सिद्धम

2. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के विकर्ण उसके शीर्षों से होकर जाने वाले वृत्त के व्यास हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।



हल : दिया है: चक्रीय चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD वृत्त के व्यास हैं जिनका प्रतिच्छेद बिंदु केंद्र O है।
सिद्ध करना है: ABCD एक आयत है।
उपपत्ति: चूँकि AC वृत्त का व्यास है,
$\angle ABC = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)
$\angle ADC = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)
चूँकि BD वृत्त का व्यास है,
$\angle BAD = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)
$\angle BCD = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)
चतुर्भुज ABCD के चारों कोण समकोण ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$) हैं।
जिस चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हों, वह आयत होता है।
$\therefore$ ABCD एक आयत है। इति सिद्धम

3. सिद्ध कीजिए कि किसी चक्रीय चतुर्भुज के कोण समद्विभाजकों द्वारा बनाया गया चतुर्भुज भी चक्रीय होता है।



हल : दिया है: चक्रीय चतुर्भुज ABCD के कोणों A,B,C,D के समद्विभाजक मिलकर चतुर्भुज PQRS बनाते हैं।
सिद्ध करना है: PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है (अर्थात् $\angle P + \angle R = 180°$)।
उपपत्ति: ΔAPB में,

$$\angle APB = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B\right)$$

शीर्षाभिमुख कोण से,

$$\angle SPQ = \angle APB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) \quad \text{..... (1)}$$

ΔCRD में,

$$\angle CRD = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D\right)$$

शीर्षाभिमुख कोण से,

$$\angle SRQ = \angle CRD = 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) \quad \text{..... (2)}$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\angle SPQ + \angle SRQ = 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

चूँकि किसी भी चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है,

$$\angle SPQ + \angle SRQ = 360° - \frac{1}{2}(360°)$$

$= 360° - 180° = 180°$
चतुर्भुज PQRS के सम्मुख कोणों का योग 180° है,
अतः PQRS भी एक चक्रीय चतुर्भुज है। इति सिद्धम

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

4. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समचतुर्भुज एक वर्ग होता है।

हल : दिया है: ABCD एक चक्रीय समचतुर्भुज है।

(अर्थात् AB = BC = CD = DA)

सिद्ध करना है: ABCD एक वर्ग है।

उपपत्ति: समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज भी होता है। हम जानते हैं कि चक्रीय समानांतर चतुर्भुज एक आयत होता है (प्रमेय से $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$)।

अब ABCD एक ऐसा आयत है जिसकी सभी चारों भुजाएँ बराबर हैं (AB = BC = CD = DA)।

जिस आयत की सभी भुजाएँ बराबर हों, वह एक वर्ग कहलाता है।

$\angle$ABCD एक वर्ग है। इति सिद्धम

10 हीरोन का सूत्र

हीरोन का सूत्र

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ a,b और c हैं, तो अर्धपरिमाप (s) का सूत्र होगा:

(अ) $a + b + c$ (ब) $\frac{a+b+c}{2}$

(स) $\frac{a+b+c}{3}$ (द) $2(a + b + c)$ **(ब)**

2. एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा a है। हीरोन के सूत्र में (s–a) का मान क्या होगा?

(अ) $\frac{a}{2}$ (ब) a

(स) $\frac{3a}{2}$ (द) 2a **(अ)**

3. त्रिभुज की भुजाएँ 6 cm, 8 cm और 10 cm हैं। इसका अर्धपरिमाप (s) क्या होगा?

(अ) 24 cm (ब) 12 cm

(स) 14 cm (द) 18 cm **(ब)**

4. हीरोन का सूत्र मुख्यतः उपयोगी होता है जब त्रिभुज की:

(अ) केवल ऊँचाई दी गई हो

(ब) तीनों भुजाएँ दी गई हों

(स) केवल दो कोण दिए गए हों

(द) केवल परिमाप दिया गया हो **(ब)**

5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 1:2:3 संभव नहीं है क्योंकि:

(अ) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी से बड़ा होना चाहिए

(ब) अनुपात बहुत छोटा है

(स) परिमाप नहीं दिया है

(द) हीरोन का सूत्र लागू नहीं होता **(अ)**

6. यदि एक त्रिभुज की प्रत्येक भुजा को दुगुना कर दिया जाए, तो उसका परिमाप कितने गुना हो जाएगा?

(अ) 2 गुना (ब) 3 गुना

(स) 4 गुना (द) समान रहेगा **(अ)**

रिक्तस्थान –

1. 5 cm भुजा वाले त्रिभुज का परिमाप ..... होता है।

हल : 15 cm

2. समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सामान्य सूत्र $\frac{1}{2}$ x आधार × ..... होता है।

हल : ऊँचाई

3. किसी त्रिभुजाकार बोर्ड को पेंट करने का व्यय उसके ..... पर निर्भर करता है।

हल : क्षेत्रफल

4. 10 cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का अर्ध–परिमाप ..... cm होता है।

हल : 15

5. यदि a भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा को दुगना कर दिया जाए, तो उसका क्षेत्रफल .....गुना हो जाएगा।

हल : 4

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक त्रिभुज का परिमाप 32 cm है। यदि इसकी दो भुजाएँ 8 cm और 11 cm हैं, तो तीसरी भुजा और अर्धपरिमाप (s) ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

त्रिभुज का परिमाप = 32 cm

पहली भुजा (a) = 8 cm

दूसरी भुजा (b) = 11 cm

तीसरी भुजा (c) ज्ञात करना:

त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं का योग (a + b + c)

$32 = 8 + 11 + c$

$32 = 19 + c$

$c = 32 - 19$

$c = 13$ cm

अर्धपरिमाप (s) = $\frac{\text{परिमाप}}{2}$

$s = \frac{32}{2} = 16$ cm

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

2. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 15 cm, 20 cm और 25 cm हैं।

हल : दिया गया है:

पहली भुजा (a) = 15 cm

दूसरी भुजा (b) = 20 cm

तीसरी भुजा (c) = 25 cm

अर्धपरिमाप (s) $= \frac{a+b+c}{2}$

$s = \frac{15+20+25}{2}$

$s = \frac{60}{2} = 30$ cm

हीरोन के सूत्र द्वारा क्षेत्रफल ज्ञात करना:

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{[s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)]}$

मान रखने पर:

$= \sqrt{[30\times(30-15)\times(30-20)\times(30-25)]}$

$= \sqrt{30\times15\times10\times5}$

$= \sqrt{22500}$

$= 150$ cm²

3. एक समबाहु त्रिभुजाकार पार्क का परिमाप 180 cm है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

समबाहु त्रिभुजाकार पार्क का परिमाप = 180 cm

प्रत्येक भुजा (a) की लंबाई: चूँकि समबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर होती हैं:

भुजा (a) $= \frac{\text{परिमाप}}{3}$

$a = \frac{180}{3}$

a = 60 cm (अर्थात a = 60 cm, b = 60 cm, c = 60 cm)

अर्धपरिमाप (s) $= \frac{\text{परिमाप}}{2}$

$s = \frac{180}{2} = 90$ cm

हीरोन के सूत्र द्वारा क्षेत्रफल:

क्षेत्रफल $= \sqrt{[s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)]}$

मान रखने पर:

$= \sqrt{[90\times(90-60)\times(90-60)\times(90-60)]}$

$= \sqrt{90\times30\times30\times30}$

$= \sqrt{(30\times3)\times30\times30\times30}$

$= \sqrt{30\times30\times30\times30\times3}$

$= 30\times30\times\sqrt{3}$

$= 900\sqrt{3}$ cm²

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 cm है और इसकी बराबर भुजाएँ 12 cm लंबाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप = 30 cm

दो बराबर भुजाएँ (a और b) = 12 cm प्रत्येक

तीसरी भुजा (c) = परिमाप – (बराबर भुजाओं का योग)

c = 30 – (12 + 12)

c = 30 – 24

c = 6 cm

अर्धपरिमाप (s) $= \frac{\text{परिमाप}}{2}$

$s = \frac{30}{2} = 15$ cm

हीरोन के सूत्र द्वारा क्षेत्रफल:

क्षेत्रफल $= \sqrt{[s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)]}$

मान रखने पर:

$= \sqrt{[15\times(15-12)\times(15-12)\times(15-6)]}$

$= \sqrt{15\times3\times3\times9}$

$= \sqrt{(5\times3)\times3\times3\times(3\times3)}$

$= (3\times3)\times\sqrt{5\times3} = 9\sqrt{15}$ cm²

5. एक त्रिभुजाकार बोर्ड का क्षेत्रफल $36\sqrt{3}$ cm² है। यदि यह एक समबाहु त्रिभुज है, तो इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

मिशन ज्ञान
पैकेज चाहे, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल : दिया गया है: समबाहु त्रिभुजाकार बोर्ड का क्षेत्रफल = $36\sqrt{3}$ cm²

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\left(\sqrt{3}/4\right)$ × (भुजा)²

भुजा (a) का मान ज्ञात करना:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times a^2 = 36\sqrt{3}$$

$$a^2 = 36\sqrt{3}\times\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$a^2 = 36 \times 4$

$a^2 = 144$

$a = \sqrt{144}$

$a = 12$ cm

समबाहु त्रिभुजाकार बोर्ड की प्रत्येक भुजा की लंबाई 12 cm है।

6. एक पार्क की एक फिसल पट्टी की पार्श्वीय दीवार की भुजाएँ 11 m, 6 m और 15 m हैं। पेंट किए गए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

फिसल पट्टी की दीवार की भुजाएँ: a = 11 m, b = 6 m, c = 15 m

अर्धपरिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2}$

$$s = \frac{11+6+15}{2}$$

$$s = \frac{36}{2}$$

$s = 16$ m

हीरोन के सूत्र द्वारा पेंट किए गए भाग का क्षेत्रफल:

क्षेत्रफल = $\sqrt{[s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)]}$

मान रखने पर:

$= \sqrt{16\times(16-11)\times(16-6)\times(16-15)}$

$= \sqrt{16\times5\times10\times1}$

$= \sqrt{16\times5\times(5\times2)\times1}$

$= \sqrt{16\times25\times2}$

$= 4\times5\times\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ m²

पेंट किए गए भाग का क्षेत्रफल $20\sqrt{2}$ m² है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. एक त्रिभुजाकार भूखंड की भुजाओं का अनुपात 3 : 5 : 7 है और उसका परिमाप 300 m है। इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना भुजाएँ 3x, 5x और 7x हैं।

परिमाप = 3x + 5x + 7x = 300

15x = 300

x = 20

भुजाएँ: a = 3(20) = 60 m,

b = 5(20) = 100 m, c = 7(20) = 140 m

अर्धपरिमाप (s) = $\frac{\text{परिमाप}}{2}$

$s = \frac{300}{2} \Rightarrow s = 150$ m

भुजाओं का अंतर (s – a, s – b, s – c):

s – a = 150 – 60 = 90 m

s – b = 150 – 100 = 50 m

s – c = 150 – 140 = 10 m

क्षेत्रफल = $\sqrt{[s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)]}$

मान रखने पर:

$= \sqrt{150\times90\times50\times10}$

$= \sqrt{(15\times10)\times(9\times10)\times(5\times10)\times10}$

$= \sqrt{15\times9\times5\times10000}$

$= \sqrt{225\times3\times10000}$

$= 15\times100\times\sqrt{3}$

$= 1500\sqrt{3}$ m²

भूखंड का क्षेत्रफल $1500\sqrt{3}$ m² है।

2. एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाएँ 120 m, 80 m और 50 m हैं।

i. पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ii. एक ओर 3 m चौड़े एक फाटक के लिए स्थान छोड़ते हुए इसके चारों ओर ₹20 प्रति मीटर की दर से काँटेदार बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल : दिया गया है:

पार्क ABC की भुजाएँ: a = 120 m, b = 80 m, c = 50 m

फाटक की चौड़ाई = 3 m

बाड़ लगाने की दर = ₹20 प्रति मीटर

(i) पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करना:

$$\text{अर्धपरिमाप } (s) = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{120+80+50}{2}$$

$$s = \frac{250}{2}$$

$$s = 125 \text{ m}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{[s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)]}$$

मान रखने पर:

क्षेत्रफल

$$= \sqrt{125\times(125-120)\times(125-80)\times(125-50)}$$

$$= \sqrt{125\times5\times45\times75}$$

$$= \sqrt{(25\times5)\times5\times(9\times5)\times(25\times3)}$$

$$= \sqrt{25\times25\times25\times9\times15}$$

$$= 25\times3\times5\times\sqrt{15}$$

$$= 375\sqrt{15} \text{ m}^2$$

(ii) काँटेदार बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात करना:

बाड़ लगाने के लिए आवश्यक लंबाई:

तार की लंबाई = परिमाप – फाटक की चौड़ाई तार की लंबाई = 250 – 3 = 247 m

कुल खर्च = तार की लंबाई × दर

= 247 × 20

= ₹4,940

3. किसी फ्लाईओवर की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाएँ 122 m, 22 m और 120 m हैं।

i. दीवार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ii. इस विज्ञापन से प्रति वर्ष ₹5000 प्रति m² की प्राप्ति होती है। एक कंपनी ने इसे 3 महीने के लिए किराए पर लिया, तो उसने कुल कितना किराया दिया?

हल : दिया गया है:

दीवार की भुजाएँ: ' = 122 m, b = 22 m, c = 120 m

वार्षिक किराया दर = ₹5000 प्रति m² प्रति वर्ष

समय = 3 महीने

(i) दीवार का क्षेत्रफल :

$$\text{अर्धपरिमाप } (s) = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{122+22+120}{2}$$

$$s = \frac{264}{2}$$

$$s = 132 \text{ m}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{[s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)]}$$

मान रखने पर:

$$= \sqrt{132\times(132-122)\times(132-22)\times(132-120)}$$

$$= \sqrt{132\times10\times110\times12}$$

$$= \sqrt{(12\times11)\times10\times(11\times10)\times12}$$

$$= \sqrt{(12\times12)\times(11\times11)(10\times10)}$$

$$= 12\times11\times10$$

$$= 1320 \text{ m}^2$$

(ii) 3 महीने का कुल किराया ज्ञात करना:

$$3 \text{ महीने} = \frac{3}{12} \text{ वर्ष} = \frac{1}{4} \text{ वर्ष}$$

कुल किराया = क्षेत्रफल × वार्षिक दर × समय (वर्ष में)

$$= 1320\times5000\times\frac{3}{12}$$

$$= 1320\times5000\times\frac{1}{4} = 330\times5000$$

= ₹16,50,000

दीवार का क्षेत्रफल 1320 m² है।

3 महीने का कुल किराया ₹16,50,000 है।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 cm² है और इसकी असमान भुजा 10 cm है।

i. त्रिभुज का अर्धपरिमाप और बराबर भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

ii. हीरोन के सूत्र द्वारा सत्यापन कीजिए।

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल : दिया गया है:

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = 60 cm

असमान भुजा (आधार, b) = 10 cm

(i) बराबर भुजाएँ और अर्धपरिमाप ज्ञात करना:

ऊँचाई (h) ज्ञात करना:

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

$60 = \frac{1}{2} \times 10 \times h$

$60 = 5 \times h$

$h = \frac{60}{5}$

$h = 12$ cm

बराबर भुजाओं (a) की लंबाई: समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष से आधार पर डाला गया लंब आधार को दो बराबर भागों में बाँटता है।

अतः आधार का आधा भाग $= \frac{10}{2} = 5$ cm

समकोण त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय द्वारा:

(बराबर भुजा)² = (ऊँचाई)² + (आधार का आधा)²

$a^2 = 12^2 + 5^2$

$a^2 = 144 + 25$

$a^2 = 169$

$a = \sqrt{169}$

$a = 13$ cm

अतः त्रिभुज की तीनों भुजाएँ: a = 13 cm, b = 13 cm, c = 10 cm

अर्धपरिमाप $(s) = \frac{a+b+c}{2}$

$s = \frac{13+13+10}{2}$

$s = \frac{36}{2}$

$s = 18$ cm

(ii) हीरोन के सूत्र द्वारा सत्यापन:

हीरोन का सूत्र: क्षेत्रफल $= \sqrt{[s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)]}$

मान रखने पर:

$= \sqrt{18 \times (18-13) \times (18-13) \times (18-10)}$

$= \sqrt{18 \times 5 \times 5 \times 8}$

$= \sqrt{(9 \times 2) \times 25 \times 8}$

$= \sqrt{9 \times 25 \times 16}$

$= 3 \times 5 \times 4$

$= 60$ cm²

(हीरोन के सूत्र से प्राप्त क्षेत्रफल मूल क्षेत्रफल 60 cm² के बराबर है, अतः यह सत्यापित होता है।)

11 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

एक लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. एक शंकु की त्रिज्या 7 cm तथा तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा?

(अ) 110 cm^2 (ब) 220 cm^2

(स) 330 cm^2 (द) 440 cm^2 **(ब)**

2. यदि किसी शंकु की त्रिज्या r और ऊँचाई h है, तो उसकी तिर्यक ऊँचाई (l) का सूत्र क्या होगा?

(अ) $r + h$ (ब) $\sqrt{(r^2+h^2)}$

(स) $r^2 + h^2$ (द) $\sqrt{(r^2-h^2)}$ **(ब)**

3. एक शंकु के आधार का व्यास 14 cm है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा:

(अ) 220 cm^2 (ब) 154 cm^2

(स) 308 cm^2 (द) 440 cm^2 **(अ)**

4. शंकु के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सही सुत्र क्या है?

(अ) πrl (ब) $2\pi rl$

(स) $\pi r(l + r)$ (द) $2\pi r(l + r)$ **(स)**

5. यदि किसी शंकु की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई दोनों को दुगना कर दिया जाए, तो उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना गुना हो जाएगा?

(अ) 2 गुना (ब) 3 गुना

(स) 4 गुना (द) 8 गुना **(स)**

रिक्तस्थान –

1. शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र ..... होता है।

हल : πrl

2. शंकु के वृत्तीय आधार के केन्द्र को उसके शीर्ष से मिलाने वाले रेखाखण्ड की लम्बाई शंकु की ..... कहलाती है।

हल : ऊंचाई

3. यदि किसी शंकु की त्रिज्या 7 cm और तिर्यक ऊँचाई 10 cm है, तो उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ..... cm^2 होगा।

हल : 220

4. शंकु के शीर्ष से आधार की परिधि के किसी बिन्दु तक की दूरी को शंकु की ..... कहते हैं।

हल : तिर्यक ऊंचाई

5. यदि एक शंकु के आधार का व्यास 14 cm है, तो उसकी त्रिज्या ..... cm होगी।

हल : 7

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 cm है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या $(r) = \frac{10.5}{2} = 5.25$ cm

तिर्यक ऊँचाई $(l) = 10$ cm

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = \left(\frac{22}{7}\right) \times 5.25 \times 10$

$= 165\ cm^2$

2. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 m है और आधार का व्यास 24 m है।

हल : त्रिज्या $(r) = \frac{24}{2} = 12$ m

तिर्यक ऊँचाई $(l) = 21$ m

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(l + r) = \left(\frac{22}{7}\right) \times 12 \times (21+12)$

$= \left(\frac{22}{7}\right) \times 12 \times 33 = 1244.57\ m^2$

3. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 cm^2 है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 cm है। आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 308\ cm^2$

$\pi rl = 308$

$\left(\frac{22}{7}\right) \times r \times 14 = 308$

$44 \times r = 308$

$r = \frac{308}{44} = 7$ cm

4. एक शंकु आकार के तंबू की ऊँचाई 10 m है और उसके आधार की त्रिज्या 24 m है। तंबू की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : ऊँचाई (h) = 10 m, त्रिज्या (r) = 24 m

तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{(r^2+h^2)}$

= $\sqrt{(24^2+10^2)}$

= $\sqrt{576+100}$

= $\sqrt{676}$ = 26 m

5. शंकु के आकार के एक कैनवास का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 550 m² है। यदि इसकी आधार त्रिज्या 7 m हो, तो इसकी तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 550 m²

$\pi rl = 550$

$\left(\frac{22}{7}\right) \times 7 \times l = 550$

$22 \times l = 550$

$l = \frac{550}{22}$ = 25 m

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. 8 m ऊँचाई और आधार त्रिज्या 6 m वाले एक शंकु के आकार का तंबू बनाने में 3 m चौड़े तिरपाल की कितनी लंबाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 cm तिरपाल अतिरिक्त लगेगा। ($\pi = 3.14$ लें)

हल : दिया गया है:

तंबू की ऊँचाई (h) = 8 m

आधार की त्रिज्या (r) = 6 m

तिरपाल की चौड़ाई = 3 m

सिलाई और कटाई में अतिरिक्त तिरपाल = 20 cm = 0.2 m

तंबू की तिर्यक ऊँचाई (l): $l = \sqrt{(r^2+h^2)}$

= $\sqrt{(6^2+8^2)}$

= $\sqrt{36+64}$

= $\sqrt{100}$

= 10 m

तंबू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल: = πrl

= 3.14 × 6 × 10

= 188.4 m²

आवश्यक तिरपाल की प्राथमिक लंबाई:

चूँकि आयताकार तिरपाल का क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

लंबाई × चौड़ाई = 188.4

लंबाई × 3 = 188.4

प्राथमिक लंबाई = $\frac{188.4}{3}$ = 62.8 m

कुल लंबाई = प्राथमिक लंबाई + सिलाई/कटाई में अतिरिक्त लंबाई

= 62.8 m + 0.2 m = 63 m

तंबू बनाने के लिए कुल 63 m लंबे तिरपाल की आवश्यकता होगी।

2. शंकु के आकार की एक तिर्यक गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार व्यास क्रमशः 25 m और 14 m हैं। इसकी वक्र पृष्ठ पर ₹210 प्रति 100 m² की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

गुंबज की तिर्यक ऊँचाई (l) = 25 m

आधार का व्यास = 14 m

त्रिज्या (r) = $\frac{14}{2}$ = 7 m

सफेदी कराने की दर = ₹210 प्रति 100 m²

गुंबज का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = πrl

= $\frac{22}{7} \times 7 \times 25$

= 22 × 25

= 550 m²

100 m² पर सफेदी कराने का व्यय = ₹210

1 m² पर सफेदी कराने का व्यय = $\frac{₹210}{100}$ = ₹2.1

अतः, 550 m² पर सफेदी कराने का कुल व्यय = 550 × 2.1

= ₹1,155

गुंबज की वक्र पृष्ठ पर सफेदी कराने का कुल व्यय ₹1,155 होगा।

3. एक जोकर की टोपी एक शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 24 cm है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

आधार की त्रिज्या (r) = 7 cm

ऊँचाई (h) = 24 cm

टोपियों की संख्या = 10

टोपी की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2+h^2}$

= $\sqrt{7^2+24^2}$

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

$= \sqrt{49+576}$

$= \sqrt{625} = 25$ cm

1 टोपी बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$

$= 22 \times 25 = 550\ cm^2$

10 टोपियाँ बनाने के लिए कुल आवश्यक गत्ता: कुल क्षेत्रफल $= 10 \times 550 = 5500\ cm^2$

10 टोपियाँ बनाने के लिए $5500\ cm^2$ गत्ते की आवश्यकता होगी।

4. एक शंकु के आकार का तंबू 9 m ऊँचा है और इसके आधार का व्यास 24 m है। तंबू में प्रयुक्त कैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि 1 m^2 कैनवास का मूल्य ₹70 है, तो कैनवास की कुल लागत भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

तंबू की ऊँचाई (h) = 9 m

आधार का व्यास = 24 m

आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{24}{2} = 12$ m

1 m^2 कैनवास का मूल्य = ₹70

तंबू की तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{r^2+h^2}$

$= \sqrt{12^2+9^2}$

$= \sqrt{144+81}$

$= \sqrt{225} \Rightarrow l = 15$ m

प्रयुक्त कैनवास का क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 12 \times 15$

$= \frac{22 \times 180}{7}$

$= \frac{3960}{7}\ m^2\ (\sim 565.71\ m^2)$

कैनवास की कुल लागत

= कैनवास का क्षेत्रफल × प्रति m^2 मूल्य

$= \frac{3960}{7} \times 70 = 3960 \times 10$

= ₹39,600

तंबू में प्रयुक्त कैनवास का क्षेत्रफल $\frac{3960}{7}\ m^2$ (या $565.71\ m^2$) है और इसकी कुल लागत ₹39,600 होगी।

गोले और अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. 7 cm त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा?

(अ) 154 cm^2 (ब) 308 cm^2

(स) 616 cm^2 (द) 1232 cm^2 **(स)**

2. 14 cm व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा?

(अ) 616 cm^2 (ब) 308 cm^2

(स) 154 cm^2 (द) 1232 cm^2 **(अ)**

3. 10 cm त्रिज्या वाले अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा? ($\pi = 3.14$ लें)

(अ) 314 cm^2 (ब) 628 cm^2

(स) 942 cm^2 (द) 1256 cm^2 **(स)**

4. यदि किसी गोले की त्रिज्या दुगनी कर दी जाए, तो उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना गुना हो जाएगा?

(अ) 2 गुना (ब) 3 गुना

(स) 4 गुना (द) 8 गुना **(स)**

5. अर्धगोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सही सूत्र क्या है?

(अ) $2\pi r^2$ (ब) $3\pi r^2$

(स) $4\pi r^2$ (द) πr^2 **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. r त्रिज्या वाले गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र ..... होता है।

हल : $4\pi r^2$

2. r त्रिज्या वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ..... होता है।

हल : $2\pi r^2$

3. गोले के प्रत्येक बिन्दु की केन्द्र से दूरी को गोले की ..... कहते है।

हल : त्रिज्या

4. गोले के केन्द्र से होकर जाने वाली सबसे बड़ी जीवा को गोले का ..... कहते है।

हल : व्यास

5. गोले का व्यास उसकी त्रिज्या का ..... होता है।

हल : दुगुना

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. 10.5 cm त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या $(r) = 10.5\ cm = \frac{21}{2}$ cm

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} = 1386\ cm^2$

मिशन ज्ञान
पढ़ना चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

2. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm² है।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 154 cm^2

$4\pi r^2 = 154$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{88} = \frac{49}{4}$$

$$r = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ cm}$$

3. 7 cm त्रिज्या वाले एक ठोस अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या (r) = 7 cm

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 462 \text{ cm}^2$$

4. एक अर्धगोलाकार कटोरे की आंतरिक त्रिज्या 5 cm है। इसका आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लें)

हल : आंतरिक त्रिज्या (r) = 5 cm

आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$= 2 \times 3.14 \times 5 \times 5 = 157 \text{ cm}^2$

5. किसी गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 616 cm² है। इसका व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठीय क्षेत्रफल = 616 cm^2

$4\pi r^2 = 616$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 616 \Rightarrow r^2 = \frac{616 \times 7}{88} = 49$$

r = 7 cm

व्यास = 2 × r = 2 × 7 = 14 cm

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. एक पीतल के बने अर्धगोलाकार कटोरे का आंतरिक व्यास 10.5 cm है। ₹16 प्रति 100 cm² की दर से इसके आंतरिक पृष्ठ पर कलाई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

कटोरे का आंतरिक व्यास = 10.5 cm

$$\text{आंतरिक त्रिज्या (r)} = \frac{10.5}{2} = 5.25 \text{ cm}$$

कलाई कराने की दर = ₹16 प्रति 100 cm^2

कटोरे का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल:

अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

$= 2 \times 22 \times 0.75 \times 5.25$

$= 173.25 \text{ cm}^2$

कलाई कराने का कुल व्यय : 100 cm^2 पर कलाई कराने का खर्च = ₹16

$$1 \text{ cm}^2 \text{ पर कलाई कराने का खर्च} = \frac{₹16}{100} = ₹ 0.16$$

अतः, 173.25 cm^2 पर कलाई कराने का कुल व्यय

= 173.25 × 0.16 = ₹27.72

कटोरे के आंतरिक पृष्ठ पर कलाई कराने का कुल व्यय ₹27.72 होगा।

2. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक–चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि पृथ्वी का व्यास = d

अतः, पृथ्वी की त्रिज्या (R) = $\frac{d}{2}$

प्रश्न के अनुसार:

चंद्रमा का व्यास = $\frac{d}{4}$

$$\text{अतः, चंद्रमा की त्रिज्या (r)} = \frac{\frac{d}{4}}{2} = \frac{d}{8}$$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

चंद्रमा का पृष्ठीय क्षेत्रफल (S_1) = $4\pi r^2$

$$S_1 = 4 \times \pi \times \left(\frac{d}{8}\right)^2$$

$$S_1 = 4 \times \pi \times \frac{d^2}{64}$$

पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल (S_2) = $4\pi R^2$

$$S_2 = 4 \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$S_2 = 4 \times \pi \times \frac{d^2}{4}$$

$$\text{अनुपात} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$= \frac{4 \times \pi \times \frac{d^2}{64}}{4 \times \pi \times \frac{d^2}{4}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{4}}$$

मिशन ज्ञान
मंजिल चाहें, जहाँ चाहे, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

$= \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

चंद्रमा और पृथ्वी के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात 1 : 16 है।।

3. एक भवन का ऊपरी भाग अर्धगोलाकार है। इसके आधार की परिधि 17.6 m है। यदि इसे ₹5 प्रति 100 cm² की दर से पेंट कराया जाए, तो कुल व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

अर्धगोलाकार भाग के आधार की परिधि = 17.6 m

पेंट कराने की दर = ₹5 प्रति 100 cm²

आधार की त्रिज्या (r) : वृत्त के आकार के आधार की परिधि = 2πr

$17.6 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$17.6 = \frac{44}{7} \times r$

$r = \frac{17.6 \times 7}{44}$

r = 2.8 m

भवन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल :

अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$

$= 2 \times 22 \times 0.4 \times 2.8 = 49.28\ m^2$

$\Rightarrow 1\ m^2 = 10{,}000\ cm^2$

क्षेत्रफल (cm² में) = 49.28 × 10,000 = 4,92,800 cm²

100 cm² पर पेंट का खर्च = ₹5

1 cm² पर पेंट का खर्च = $\frac{5}{100}$

कुल व्यय = $492800 \times \frac{5}{100}$

= 4,928 × 5 ⇒ ₹24,640

भवन के ऊपरी भाग को पेंट कराने का कुल व्यय ₹24,640 होगा।

4. लोहे के 27 ठोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S' है। S और S' का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि बड़े गोले की त्रिज्या = R

चूँकि 27 गोलों को पिघलाकर 1 बड़ा गोला बनाया गया है।

बड़े गोले का आयतन = 27 × छोटे गोले का आयतन

$\frac{4}{3}\pi R^3 = 27 \times \frac{4}{3}\pi r^3$

दोनों तरफ $\frac{4}{3} \times \pi$ को काटने पर,

$R^3 = 27 \times r^3$

$R = \sqrt[3]{27 \times r^3}$

R = 3r

छोटे गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (S) = $4\pi r^2$

बड़े गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (S') = $4\pi R^2$

$S' = 4\pi(3r)^2 = 36\pi r^2$

अनुपात : $\frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{36\pi r^2}$

$\frac{S}{S'} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

छोटे गोले (S) और बड़े गोले (S') के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात 1 : 9 है।

एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 7 cm वाले शंकु का आयतन क्या होगा?

(अ) 132 cm³ (ब) 264 cm³

(स) 528 cm³ (द) 792 cm³ **(ब)**

2. एक शंकु के आधार की त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 12 cm है। इसका आयतन कितना होगा?

(अ) 154 cm³ (ब) 308 cm³

(स) 462 cm³ (द) 616 cm³ **(अ)**

3. यदि एक बेलन और एक शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई समान है, तो शंकु का आयतन बेलन के आयतन का कितना भाग होता है?

(अ) आधा (ब) एक–तिहाई

(स) दुगना (द) बराबर **(ब)**

4. शंकु के आयतन का सही सुत्र क्या है।

(अ) $\pi r^2 h$ (ब) $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

(स) $\frac{2}{3} \times \pi r^2 h$ (द) $\frac{4}{3} \times \pi r^2 h$ **(ब)**

5. यदि किसी शंकु की त्रिज्या को दुगना कर दिया जाए और ऊँचाई को वही रखा जाए, तो उसका आयतन कितना गुना हो जाएगा?

(अ) 2 गुना (ब) 3 गुना

(स) 4 गुना (द) 8 गुना **(स)**

रिक्तस्थान –

1. किसी ठोस वस्तु द्वारा घेरा गया स्थान उस वस्तु का ..... कहलाता है।

हल : आयतन

2. समान त्रिज्या और समान ऊँचाई वाले बेलन का आयतन शंकु के आयतन का ..... गुना होता है।

हल : 3 (तीन)

3. यदि शंकु की त्रिज्या 5 cm और ऊंचाई 4 cm होती है, तो उसका आयतन π के रूप में ..... cm^3 होगा।

हल : $\frac{100}{3}\pi$

4. यदि समान आधार और समान ऊंचाई वाले बेलन का आयतन 300 cm^3 है, तो शंकु का आयतन ..... cm^3 होगा।

उत्तर: 100

5. 1m^3 धारिता ..... किलोलीटर (kl) के बराबर होती है।

उत्तर: 1

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. उस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 7 cm है।

हल : त्रिज्या (r) = 6 cm, ऊँचाई (h) = 7 cm

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 6\times 6\times 7 = 264\ cm^3$

2. एक शंकु की ऊँचाई 15 cm है। यदि इसका आयतन 1570 cm^3 है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लें)

हल : शंकु की ऊँचाई = 15 cm

शंकु का आयतन = 1570 cm^3

$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 1570$

$= \frac{1}{3}\times 3.14\times r^2\times 15 = 1570$

$= 15.7\times r^2 = 1570$

$\Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ cm

3. यदि 9 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 48π cm^3 है, तो इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : शंकु का आयतन = 48πcm^3

शंकु की ऊँचाई = 9cm

$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 48\pi$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h \times 9 = 48\pi \Rightarrow 3\times r^2 = 48$

$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$ cm

व्यास = $2\times r = 2\times 4 = 8$ cm

4. ऊपरी व्यास 3.5 m वाला शंकु के आकार का एक गड्ढा 12 m गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटर (kl) में कितनी है?

हल : त्रिज्या (r) = $\frac{3.5}{2}$ = 1.75 m, गहराई (h) = 12 m

आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(1.75)^2\times 12 = 38.5\ m^3$

चूकि 1 m^3 = 1 kl, अतः धारिता = 38.5 kl

5. एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल 154 cm^2 है और इसका आयतन 770 cm^3 है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : आधार का क्षेत्रफल (πr^2) = 154 cm^2

शंकु का आयतन = 770 cm^3

$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 770$

$= \frac{1}{3}\times 154\times h = 770$

$h = \frac{770\times 3}{154} = 15$ cm

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. 5 cm, 12 cm और 13 cm भुजाओं वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को 12 cm वाली भुजा के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। यदि इसे 5 cm वाली भुजा के परितः घुमाया जाए, तो प्राप्त ठोस का आयतन भी ज्ञात कीजिए और दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल : दिया गया है: समकोण त्रिभुज की भुजाएँ = 5 cm, 12 cm और 13 cm (कर्ण = 13 cm)

स्थिति (1): 12 cm वाली भुजा के परितः घुमाने पर,

जब त्रिभुज को 12 cm वाली भुजा के परितः घुमाया जाता है, तो एक शंकु बनता है जिसमें,

आधार की त्रिज्या $(r_1) = 5$ cm

शंकु की ऊँचाई $(h_1) = 12$ cm

शंकु का आयतन $(V_1) = \frac{1}{3}\pi(r_1)^2 \times h_1$

$= \frac{1}{3}\pi \times 5 \times 5 \times 12$

$= \pi \times 25 \times 4$

$= 100\pi$ cm³

स्थिति (2): 5 cm वाली भुजा के परितः घुमाने पर,

जब त्रिभुज को 5 cm वाली भुजा के परितः घुमाया जाता है, तो बनने वाले शंकु में,

आधार की त्रिज्या $(r_2) = 12$ cm

शंकु की ऊँचाई $(h_2) = 5$ cm

शंकु का आयतन $(V_2) = \frac{1}{3} \times \pi \times (r_2)^2 \times h_2$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times 12 \times 12 \times 5$

$= \pi \times 4 \times 12 \times 5$

$= 240\pi$ cm³

दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात,

अनुपात $(V_1 : V_2) = \frac{100\pi}{240\pi} = \frac{100}{240} = \frac{10}{24}$

$= \frac{5}{12}$ (अर्थात् 5 : 12)

12 cm भुजा के परितः घुमाने पर ठोस का आयतन 100π cm³ (या 314.28 cm³) है।

5 cm भुजा के परितः घुमाने पर ठोस का आयतन 240π cm³ (या 754.28 cm³) है।

दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात 5 : 12 है।

2. एक शंकु के आकार के बर्तन की आधार त्रिज्या 7 cm और तिर्यक ऊँचाई 25 cm है। इस बर्तन की धारिता लीटर में ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

आधार की त्रिज्या (r) = 7 cm

तिर्यक ऊँचाई (l) = 25 cm

शंकु की ऊँचाई (h) : $l^2 = r^2 + h^2$

$25^2 = 7^2 + h^2$

$625 = 49 + h^2$

$h^2 = 625 - 49$

$h^2 = 576$

$h = \sqrt{576}$

h = 24 cm

बर्तन का आयतन : आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$

$= 22 \times 7 \times 8 = 1232$ cm³

धारिता को लीटर में बदलना:

1000 cm³ = 1 लीटर

धारिता (लीटर में) $= \frac{1232}{1000} = 1.232$ लीटर

बर्तन की धारिता 1.232 लीटर है।

3. एक शंकु का आयतन 9856 cm³ है। यदि इसके आधार का व्यास 28 cm है, तो ज्ञात कीजिए: (i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई (iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल : दिया गया है:

शंकु का आयतन = 9856 cm³

आधार का व्यास = 28 cm

आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{28}{2} = 14$ cm

(i) शंकु की ऊँचाई (h) : आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$9856 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h$

$9856 = \frac{1}{3} \times 22 \times 2 \times 14 \times h$

$9856 = \frac{616}{3} \times h$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें

$h = \frac{(9856 \times 3)}{616}$

$h = 48$ cm

(ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{14^2 + 48^2}$

$= \sqrt{196 + 2304}$

$= \sqrt{2500} = 50$ cm

(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 50$

$= 22 \times 2 \times 50$

$= 2200$ cm²

4. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 3 cm और 4 cm हैं (कर्ण को छोड़कर), को उसकी भुजाओं के परितः घुमाकर एक द्विशंकु बनाया जाता है। इस प्रकार बने द्विशंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

समकोण त्रिभुज की लंबवत भुजाएँ = 3 cm और 4 cm

कर्ण की लंबाई पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

कर्ण $= \sqrt{3^2 + 4^2}$

कर्ण $= \sqrt{9 + 16}$

कर्ण $= \sqrt{25}$

कर्ण = 5 cm

उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या (r) : समकोण शीर्ष से कर्ण पर डाले गए लंब की लंबाई ही बनने वाले दोनों शंकुओं की उभयनिष्ठ त्रिज्या (r) होगी।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times$ कर्ण $\times r$

$12 = 5 \times r$

$r = \frac{12}{5}$

$r = 2.4$ cm

द्विशंकु का कुल आयतन : द्विशंकु में दो शंकु बनते हैं जिनकी ऊँचाइयाँ क्रमशः h_1 और h_2 हैं,

जहाँ $(h_1 + h_2) = 5$ cm

कुल आयतन = पहले शंकु का आयतन + दूसरे शंकु का आयतन कुल आयतन

$= \left[\frac{1}{3} \times \pi r^2 h_1\right] + \left[\frac{1}{3} \times \pi r^2 h_2\right]$

कुल आयतन $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 (h_1 + h_2)$

मान रखने पर ($\pi = 3.14$ लेने पर):

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2.4)^2 \times 5$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 5.76 \times 5$

$= \frac{1}{3} \times 90.432 = 30.14$ cm³

इस प्रकार बने द्विशंकु का आयतन लगभग 30.14 cm³ है।

गोले और अर्धगोले का आयतन

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. 21 cm त्रिज्या वाले गोले का आयतन कितना होगा?

(अ) 38808 cm³ (ब) 19404 cm³

(स) 9702 cm³ (द) 4851 cm³ **(अ)**

2. यदि किसी गोले की त्रिज्या दुगनी कर दी जाए, तो उसका आयतन मूल गोले के आयतन का कितना गुना हो जाएगा?

(अ) 2 गुना (ब) 4 गुना

(स) 6 गुना (द) 8 गुना **(द)**

3. गोले के आयतन का सही सुत्र क्या है?

(अ) $\frac{2}{3}\pi r^3$ (ब) $\frac{4}{3}\pi r^3$

(स) $4\pi r^2$ (द) $\frac{1}{3}\pi r^3$ **(ब)**

4. 0.63 m त्रिज्या वाले एक गोले का आयतन (लगभग) कितना होगा?

(अ) 1.05 m³ (ब) 2.10 m³

(स) 0.52 m³ (द) 3.15 m³ **(अ)**

5. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है। उनकी त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा?

(अ) 16 : 9 (ब) 4 : 3

(स) 8 : 3 (द) 2 : 1 **(ब)**

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

रिक्तस्थान –

1. गोले की त्रिज्या को तीन गुना करने पर उसका आयतन ..... गुना हो जाता है।

हल : 27

2. r त्रिज्या वाले अर्धगोले के आयतन का सूत्र ..... होता है।

हल : $\frac{2}{3}\pi r^3$

3. गोले का आयतन उसी त्रिज्या वाले ..... के आयतन का दो गुना होता है।

हल : अर्धगोले

4. 20 cm त्रिज्या वाले गोले का आयतन ..... cm^3 होगा।

हल : 33523.81

5. 1000cm^3 का मान ..... लीटर के बराबर होता है।

हल : 1

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 cm है।

हल : त्रिज्या (r) = 7 cm

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times7\times7\times7$

$= \frac{4312}{3}$

= 1437.33 cm^3

2. 10.5 cm व्यास वाले एक अर्धगोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या (r) = $\frac{10.5}{2}$ = 5.25 cm = $\frac{21}{4}$ cm

अर्धगोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{21}{4}\times\frac{21}{4}$

= 303.1875 cm^3 (या $\frac{2425.5}{8}$ cm^3)

3. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 154 cm^2

$4\pi r^2 = 154$

$4\times\frac{22}{7}\times r^2 = 154$

$r^2 = \frac{49}{4}$

r = 3.5 cm

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(3.5)^3$ = 179.67 cm^3

4. एक अर्धगोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 cm है। इसके अंदर भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या (r) = 3.5 cm = $\frac{7}{2}$ cm

पानी का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}$

$= \frac{539}{6}$ = 89.83 cm^3

5. यदि दो गोलों की त्रिज्याओं का अनुपात 1 : 2 है, तो उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{2}$

आयतनों का अनुपात $\frac{v_1}{v_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}$

$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ = 1 : 8

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. व्यास 10.5 cm वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?

हल : दिया गया है:

कटोरे का व्यास = 10.5 cm

आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{10.5}{2}$ = 5.25 cm

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

अर्धगोलाकार कटोरे का आयतन =

अर्धगोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times(5.25)^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times144.703125$

$= \frac{44}{21}\times144.703125 = 303.1875\ cm^3$

धारिता को लीटर में बदलना: हम जानते हैं कि 1000 cm^3 = 1 लीटर

दूध की मात्रा (लीटर में) = $\frac{303.1875}{1000}$

दूध की मात्रा = 0.303 लीटर (लगभग)

इस अर्धगोलाकार कटोरे में लगभग 0.303 लीटर दूध आ सकता है।

2. दवाई का एक कैप्सूल 3.5 mm व्यास का एक गोला (या गोली) है। इस कैप्सूल को भरने के लिए कितनी दवाई (mm^3 में) की आवश्यकता होगी?

हल : दिया गया है: कैप्सूल का व्यास = 3.5 mm

त्रिज्या (r) = $\frac{3.5}{2}$ = 1.75 mm = $\frac{7}{4}$ mm

आवश्यक दवाई का आयतन : कैप्सूल में भरी जाने वाली

दवाई का आयतन = गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

मान रखने पर:

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{343}{64}$

$= \frac{11\times49}{3\times8}$

$= \frac{539}{24} = 22.46\ mm^3$

इस कैप्सूल को भरने के लिए लगभग 22.46 mm^3 दवाई की आवश्यकता होगी।

3. एक अर्धगोलाकार टंकी 1 cm मोटी एक लोहे की चादर से बनी है। यदि इसकी आंतरिक त्रिज्या 1 m है, तो इस टंकी को बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है:

टंकी की आंतरिक त्रिज्या (r) = 1 m

लोहे की चादर की मोटाई = 1 cm = 0.01 m

बाहरी त्रिज्या (R) = आंतरिक त्रिज्या + मोटाई

= 1 + 0.01 = 1.01 m

लोहे का आयतन ज्ञात करने का सूत्र:

प्रयुक्त लोहे का आयतन = बाहरी अर्धगोले का आयतन – आंतरिक अर्धगोले का आयतन

$= \frac{2}{3}\times\pi\times R^3 - \frac{2}{3}\times\pi\times r^3$

$= \frac{2}{3}\times\pi\times(R^3 - r^3)$

मान रखने पर:

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times[(1.01)^3 - (1)^3]$

$= \frac{44}{21}\times(1.030301 - 1)$

$= \frac{44}{21}\times0.030301$

$= \frac{1.333244}{21}$

= 0.06348 m^3 (या लगभग 0.0635 m^3)

इस टंकी को बनाने में लगे लोहे का आयतन लगभग 0.06348 m^3 है।

4. किसी ढालवाँ लोहे के गोले का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि इसका व्यास 14 cm है और 1 cm^3 लोहे का द्रव्यमान 8 g है।

हल : दिया गया है:

गोले का व्यास = 14 cm

गोले की त्रिज्या (r) = $\frac{14}{2}$ = 7 cm

1cm^3 लोहे का द्रव्यमान = 8 g

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times7\times7\times7$`

$= \frac{4}{3}\times22\times49$

$= \frac{4312}{3}\ cm^3$

= 1437.33 cm^3

कुल द्रव्यमान = गोले का आयतन × 1 cm^3 का द्रव्यमान

$= \frac{4312}{3}\times8 = \frac{34496}{3}$

कुल द्रव्यमान = 11498.67 g

1 kg = 1000 g द्रव्यमान (kg में)

$= \frac{11498.67}{1000}$ = 11.498 kg (लगभग 11.5 kg)

ढालवाँ लोहे के गोले का द्रव्यमान लगभग 11.5 kg (या 11.498 kg) है।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

12 सांख्यिकी

आंकड़ों का आलेखीय निरूपण

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. दंड आलेख में दो क्रमांगत दंडों के बीच छोड़ी जाने वाली दूरियाँ होती है –
(अ) असमान (ब) समान
(स) यादृच्छिक (द) शून्य **(ब)**

2. दंड आलेख में दंडों की ऊँचाई निर्भर करती है–
(अ) दंड की चौड़ाई पर
(ब) चर के मान (बारंबारता) पर
(स) अक्षों की लंबाई पर
(द) दंड के रंग पर **(ब)**

3. आयतचित्र मुख्यतः किसके आलेखीय निरूपण के लिए प्रयुक्त होता है –
(अ) असंतत आंकड़ों के लिए
(ब) संतत वर्ग अंतरालों वाले बारंबारता बंटन के लिए
(स) केवल गुणात्मक आंकड़ों के लिए
(द) केवल दो मदों की तुलना के लिए **(ब)**

4. यदि आयतचित्र में वर्ग अंतरालों की चौड़ाई असमान हो, तो आयतों की लंबाई किसके समानुपाती समायोजित की जाती है –
(अ) सीधे बारंबारता के
(ब) न्यूनतम वर्ग चौड़ाई पर समानुपाती मान के
(स) वर्ग चौड़ाई के वर्ग के
(द) कुछ नहीं कहा जा सकता **(ब)**

5. बारंबारता बहुभुज बनाने के लिए आयतचित्र के संगत आयतों के किन बिंदुओं को रेखाखंडों से जोड़ा जाता है –
(अ) आयतों के आधार के कोनों को
(ब) आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को
(स) आयतों के विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदुओं को
(द) x–अक्ष पर स्थित बिंदुओं को **(ब)**

रिक्तस्थान –

1. वे आंकड़े जो अन्वेषक द्वारा स्वयं एकत्रित किए जाते हैं, ... आंकड़े कहलाते हैं।
हल : प्राथमिक

2. वे आंकड़े जो किसी पूर्व निर्मित स्रोत से प्राप्त किए जाते हैं, ... आंकड़े कहलाते हैं।
हल : द्वितीयक

3. किसी आंकड़े में कोई मान जितनी बार आता है, उसे उस मान की ..... कहते हैं।
हल : बारंबारता

4. सभी बारंबारताओं का योग ..... की कुल संख्या के बराबर होता है।
हल : आंकड़ों

5. दंड आलेख मुख्य रूप से ..... आंकड़ों को दर्शाने के लिए उपयुक्त होता है।
हल : अवर्गीकृत

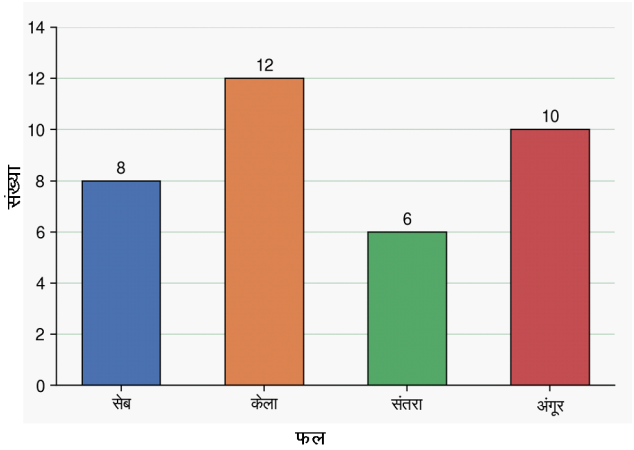
लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. किसी कक्षा के 36 विद्यार्थियों से उनके पसंदीदा फल के बारे में पूछा गया। प्राप्त आंकड़े नीचे दिए गए हैं।

फल	सेब	केला	संतरा	अंगूर
संख्या	8	12	6	10

(i) इन आंकड़ों का एक दंड आलेख बनाइए।
(ii) सबसे कम पसंद किया गया फल कौन–सा है और कितने विद्यार्थियों ने उसे चुना है?

हल: (i) x–अक्ष पर फलों को और y–अक्ष पर विद्यार्थियों की संख्या को समान चौड़ाई के दंडों से दर्शाने पर –



(ii) संतरा सबसे कम पसंद किया गया फल है – केवल 6 विद्यार्थियों ने इसे चुना।

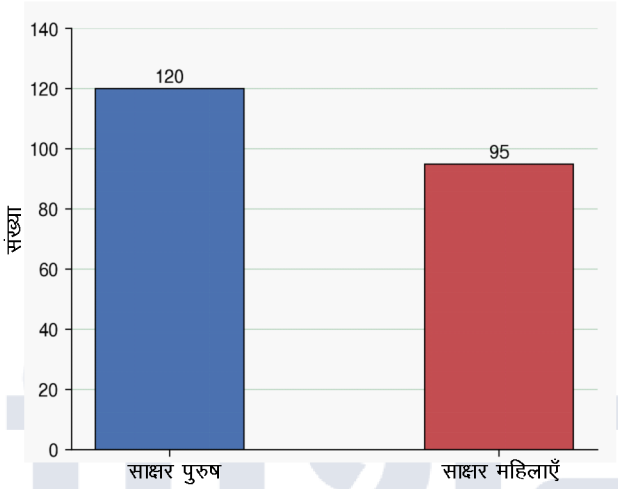
2. एक गाँव में हुए सर्वेक्षण में साक्षर पुरुषों और साक्षर महिलाओं की संख्या इस प्रकार पाई गई।

साक्षर पुरुषः 120 साक्षर महिलाएँः 95

(i) इसे दंड आलेख द्वारा दर्शाइए।

(ii) साक्षर पुरुषों और साक्षर महिलाओं की संख्या में कितना अंतर है?

हल: (i) Y-अक्ष पर पैमाना 1 मात्रक = 20 इकाई



(ii) साक्षर पुरुषों और साक्षर महिलाओं की संख्या में अंतर = 120 – 95 = 25,

अर्थात् साक्षर पुरुष साक्षर महिलाओं से 25 अधिक हैं।

3. 40 अंकों की एक जाँच परीक्षा में 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांक इस प्रकार बंटे हुए हैं।

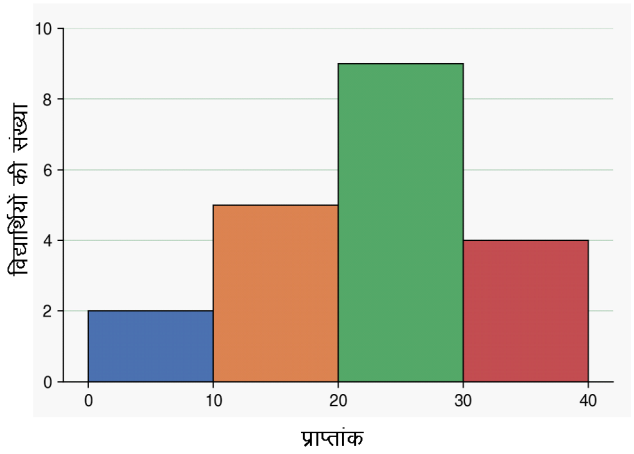
प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	2
10-20	5
20-30	9
30-40	4

(i) इनका आयतचित्र खींचिए।

(ii) कितने विद्यार्थियों के प्राप्तांक 20 या उससे अधिक हैं?

हल: (i) x–अक्ष पर पैमाना 1 मात्रक = 10

y–अक्ष पर पैमाना 1 मात्रक = 2



(ii) 20 या उससे अधिक प्राप्तांक वाले विद्यार्थी = 9 + 4 = 13

4. निम्नलिखित बारंबारता बंटन दिया गया है।

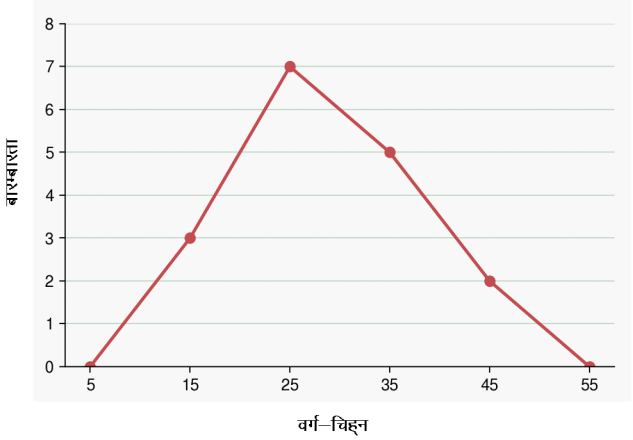
वर्ग अंतराल	बारम्बारता
10-20	3
20-30	7
30-40	5
40-50	2

(i) आयतचित्र बनाए बिना ही, सीधे बारंबारता बहुभुज खींचिए।

(ii) बहुलक वर्ग (सबसे अधिक बारंबारता वाला वर्ग) कौन सा है?

हल: (i) वर्ग–चिह्न क्रमशः 15, 25, 35, 45 होंगे।

दोनों सिरों पर शून्य बारंबारता वाले वर्ग 0-10 (चिह्न 5) और 50-60 (चिह्न 55) मिला देने पर –



पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

(ii) वर्ग 20-30 बहुलक वर्ग है, जिसकी बारंबारता (7) सबसे अधिक है।

5. वर्ग अंतराल 55-65 का वर्ग–चिह्न ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग–चिह्न $= \frac{55+65}{2} = \frac{120}{2} = 60$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न–

1. एक विद्यालय में 60 विद्यार्थियों से उनके विद्यालय आने के परिवहन साधन के विषय में पूछा गया। प्राप्त आंकड़े नीचे दिए गए हैं।

परिवहन साधन	विद्यार्थियों की संख्या
पैदल	18
साईकिल	15
बस	12
स्कूल वैन	10
कार	5

(i) इन आंकड़ों का एक दंड आलेख बनाइए।

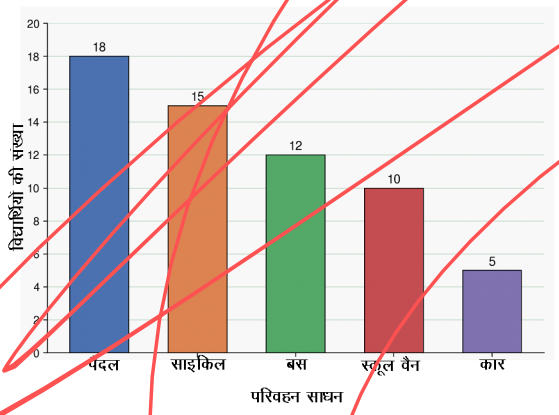
(ii) सबसे अधिक विद्यार्थी किस साधन का उपयोग करते हैं?

(iii) कितने विद्यार्थी बस और स्कूल वैन से विद्यालय आते हैं?

हल: (i) **रचना:**

x–अक्ष पर परिवहन साधनों को समान चौड़ाई व समान दूरी के दंडों द्वारा दर्शाइए;

y–अक्ष पर उपयुक्त पैमाना (1 मात्रक = 2 विद्यार्थी) लेकर विद्यार्थियों की संख्या को निरूपित करने पर –



(ii) सबसे अधिक (18) विद्यार्थी पैदल विद्यालय आते हैं।

(iii) बस और स्कूल वैन से आने वाले विद्यार्थी
= 12 + 10 = 22

2. एक राज्य के 6 जिलों (A से F) की साक्षरता दर (%) नीचे दी गई है।

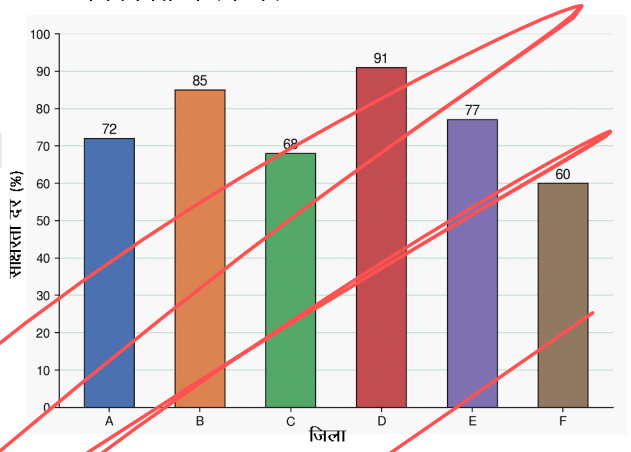
जिला	A	B	C	D	E	F
साक्षरता (%)	72	85	68	91	77	60

(i) इन आंकड़ों का दंड आलेख बनाइए।

(ii) सर्वाधिक व न्यूनतम साक्षरता दर वाला जिला बताइए।

(iii) कितने जिलों की साक्षरता दर 75% से अधिक है?

हल:(i) **रचना:** x–अक्ष पर जिलों को तथा y–अक्ष पर उपयुक्त पैमाना (1 मात्रक = 10%) लेकर साक्षरता दर को निरूपित करने पर –



(ii) दंड आलेख से स्पष्ट है कि जिला D की साक्षरता दर सर्वाधिक (91%) तथा जिला F की न्यूनतम (60%) है।

(iii) 75% से अधिक साक्षरता वाले जिले — B (85%), D (91%) और E (77%) – कुल 3 जिले।

3. एक फैक्ट्री के 50 कर्मचारियों की आयु का बारंबारता बंटन नीचे दिया गया है।

आयु (वर्ष)	कर्मचारियों की संख्या
20-25	6
25-30	10
30-35	14
35-40	9
40-45	7
45-50	4

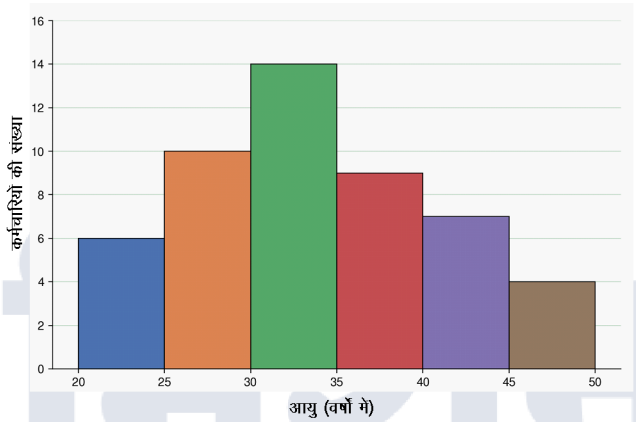
(i) इसका आयतचित्र बनाइए।

(ii) सबसे अधिक कर्मचारी किस आयु वर्ग में हैं?

(iii) कितने कर्मचारियों की आयु 35 वर्ष या उससे अधिक है?

हल: (i) चूँकि सभी वर्ग अंतरालों की चौड़ाई (5) समान है, अतः बारंबारता को सीधे आयत की ऊँचाई मानकर आयतचित्र बनाया जा सकता है।

x–अक्ष पर आयु तथा y–अक्ष पर कर्मचारियों की संख्या निरूपित करने पर :



(ii) सबसे अधिक कर्मचारी (14) आयु वर्ग 30-35 में हैं।

(iii) 35 वर्ष से अधिक आयु के कर्मचारी = 9 + 7 + 4 = 20

4. दो शहरों X और Y में विगत वर्ष प्रत्येक माह हुई वर्षा (mm में) का बारंबारता बंटन (कितने महीनों में कितनी वर्षा हुई) नीचे दिया गया है।

वर्षा (mm)	शहर X	शहर Y
0-50	**4**	**2**
50-100	**8**	**6**
100-150	**12**	**10**
150-200	**6**	**14**
200-250	**3**	**8**

(i) दोनों शहरों के आंकड़ों को एक ही आलेख पर बारंबारता बहुभुजों द्वारा निरूपित कर तुलना कीजिए।

(ii) किस शहर में वर्षा का स्तर समग्र रूप से अधिक रहा प्रतीत होता है?

(iii) किस वर्षा वर्ग (mm) में शहर X, शहर Y से आगे है?

हल: (i) दोनों शहरों के प्रत्येक वर्ग अंतराल का वर्ग–चिह्न:

$$0\text{-}50 = \frac{0+50}{2} = 25$$

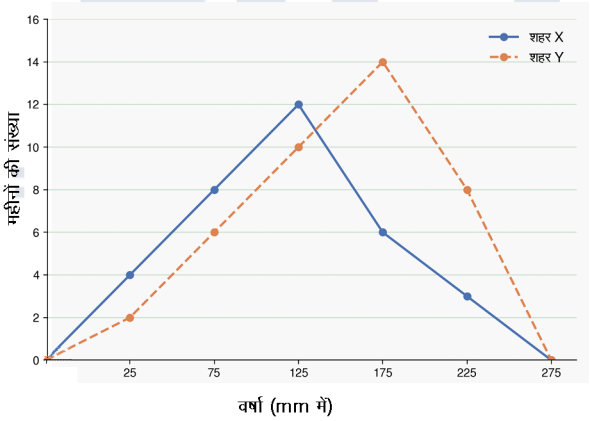
$$50\text{-}100 = \frac{50+100}{2} = 75$$

$$100\text{-}150 = \frac{100+150}{2} = 125$$

$$150\text{-}200 = \frac{150+200}{2} = 175$$

$$200\text{-}250 = \frac{200+250}{2} = 225$$

दोनों सिरों पर शून्य बारंबारता वाले काल्पनिक वर्ग जोड़कर, शहर X के बिंदुओं को एक रंग की रेखा से तथा शहर Y के बिंदुओं को दूसरी शैली की रेखा से मिलाने पर:



(ii) बहुभुजों के अध्ययन से पता चलता है कि शहर X में वर्षा अपेक्षाकृत कम मात्रा (100-150 mm) में अधिक महीनों तक होती है, जबकि शहर Y में अधिक मात्रा (150-200 mm) की वर्षा अधिक महीनों में होती है– अर्थात् शहर Y में समग्र वर्षा शहर X से अधिक होती है।

(iii) वर्ग 100-150 mm में शहर X हर Y से आगे है।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!