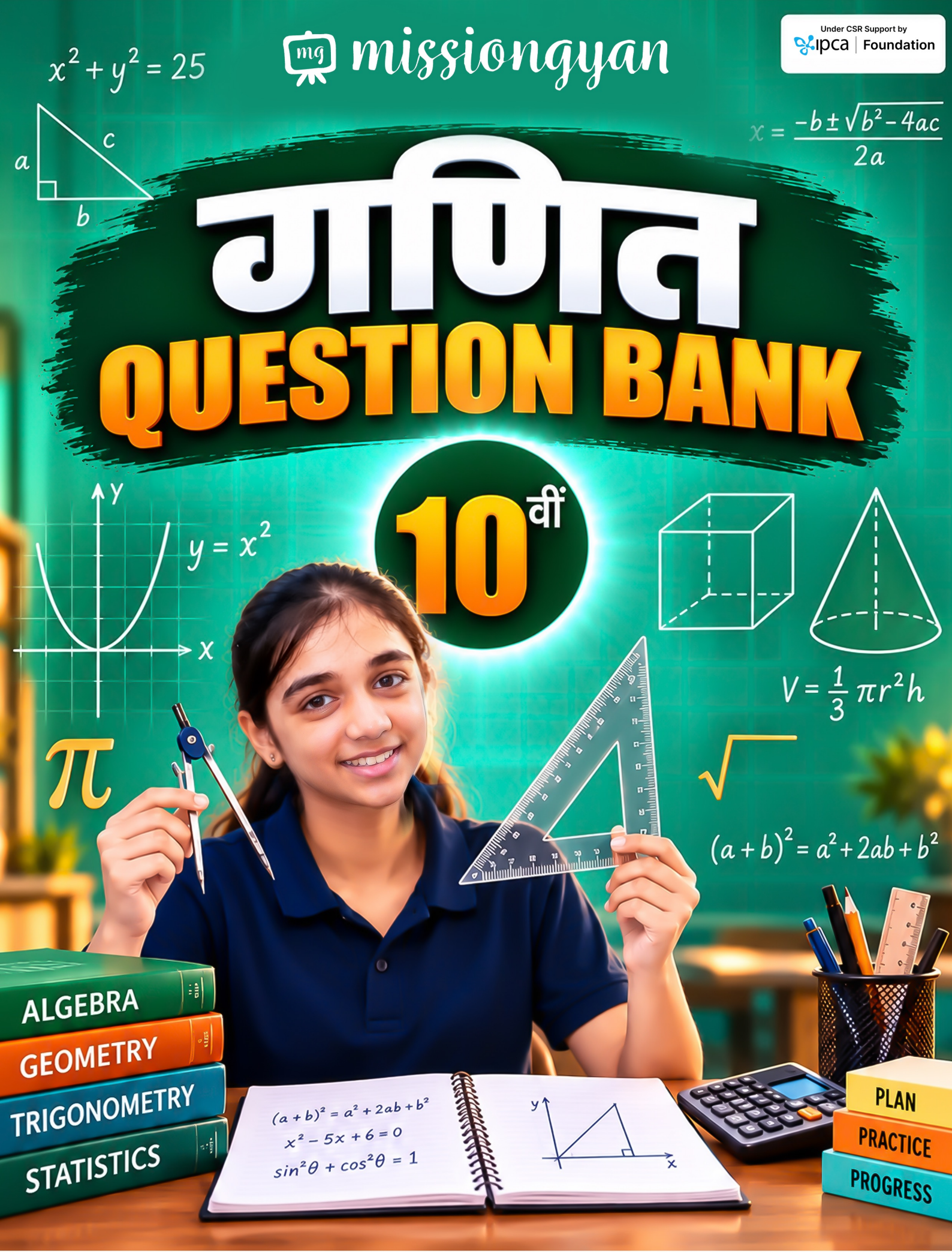
missiongyan

Under CSR Support by ipca | Foundation

गणित

QUESTION BANK

10वीं



RECORDED VIDEOS | LIVE CLASSES | PDF NOTES | e-BOOKS | QUIZ | TEST SERIES

GET IT ON Google Play DOWNLOAD MISSION GYAN MOBILE APP

विषय-सूची

क्र.सं.	अध्याय	पृष्ठ संख्या
1.	वास्तविक संख्याएँ	1
2.	बहुपद	7
3.	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	11
4.	द्विघात समीकरण	16
5.	समांतर श्रेढ़ियाँ	20
6.	त्रिभुज	26
7.	निर्देशांक ज्यामिति	31
8.	त्रिकोणमिति का परिचय	36
9.	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	42
10.	वृत्त	48
11.	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	52
12.	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	57
13.	सांख्यिकी	62
14.	प्रायिकता	71

1 वास्तविक संख्याएँ

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार प्रत्येक भाज्य संख्या को किसके गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है?

(अ) सम संख्याएँ (ब) विषम संख्याएँ

(स) अभाज्य संख्याएँ (द) अपरिमेय संख्याएँ

2. संख्या 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। n के किस मान के लिए 4^n का अंतिम अंक शून्य (0) पर समाप्त होगा?

(अ) $n = 5$ (ब) $n = 10$

(स) ऐसा कोई मान संभव नहीं है

(द) n के सभी सम मानों पर

3. निम्नलिखित में से कौन–सी संख्या परिमेय (Rational) संख्या है?

(अ) π (ब) $\sqrt{5}$

(स) 2 (द) 0.101101110....

उत्तर : 1. (स), **2.** (स), **3.** (स)

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. बिना पूरी गणना किए समझाइए कि संख्या $5 \times 7 \times 11 \times 13 + 5$ एक भाज्य संख्या क्यों है?

हल : माना दी गई संख्या, $A = 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 5$

इस व्यंजक में दो पद हैं और दोनों पदों में संख्या 5 उभयनिष्ठ है।

$A = 5 \times [(7 \times 11 \times 13) + 1]$

$A = 5 \times [1001 + 1]$

$A = 5 \times 1002$

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic) के अनुसार,

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। साधारण शब्दों में, यदि किसी संख्या के 1 और स्वयं के अतिरिक्त अन्य गुणनखंड होते हैं, तो वह संख्या भाज्य होती है।

चूंकि दी गई संख्या का एक गुणनखंड 5 है और दूसरा गुणनखंड 1002 है, इसलिए इसके 2 से अधिक गुणनखंड मौजूद हैं।

चूंकि संख्या के दो से अधिक गुणनखंड हैं, अतः यह स्पष्ट रूप से एक भाज्य संख्या है।

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 8^n का अंतिम अंक शून्य (0) पर समाप्त हो सकता है? कारण लिखिए।

हल : गणितीय नियम,

यदि कोई संख्या अंक शून्य (0) पर समाप्त होती है, तो उसके अभाज्य गुणनखंडन में अभाज्य संख्या 2 और 5 दोनों का होना अनिवार्य है (ताकि वह 10 से विभाज्य हो सके)।

यहाँ दी गई संख्या 8^n का अभाज्य गुणनखंडन करने पर,

$8^n = (2 \times 2 \times 2)^n = (2^3)^n = 2^{(3n)}$

हम देख सकते हैं कि 8^n के अभाज्य गुणनखंडन में केवल अभाज्य संख्या 2 आ रही है, और अभाज्य संख्या 5 इसमें पूरी तरह अनुपस्थित है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता (Uniqueness) के अनुसार, इसके गुणनखंडन में 2 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य संख्या नहीं आ सकती।

चूंकि गुणनखंडन में 5 नहीं है, इसलिए ऐसी कोई प्राकृत संख्या n नहीं है, जिसके लिए संख्या 8^n का अंतिम अंक शून्य (0) पर समाप्त हो सके।

2. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ और $7 \times 11 \times 13 + 13$ भाज्य संख्याएँ हैं क्यों?

हल : अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार, यदि किसी संख्या को 1 और स्वयं के अतिरिक्त अन्य अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो वह संख्या भाज्य होती है।

पहली संख्या : $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$

यहाँ संख्या 5 को उभयनिष्ठ लेने पर,

$= 5 \times [(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + 1]$

$= 5 \times [1008 + 1] = 5 \times 1009$

चूंकि इस संख्या के 1 और स्वयं के अलावा अन्य गुणनखंड (5 और 1009) मौजूद हैं, इसलिए यह एक भाज्य संख्या है।

दूसरी संख्या : $7 \times 11 \times 13 + 13$

यहाँ संख्या 13 को उभयनिष्ठ लेने पर,

$= 13 \times [(7 \times 11) + 1]$

$= 13 \times [77 + 1] = 13 \times 78$

चूंकि इस संख्या को भी अन्य गुणनखंडों (13 और 78) के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है, इसलिए यह भी एक भाज्य संख्या है।

HCF और LCM

1. किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए HCF (a, b) × LCM (a, b) का मान किसके बराबर होता है?

(अ) a + b (ब) a – b

(स) a × b (द) a ÷ b

2. दो निरंतर आने वाले (क्रमागत) सम संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) हमेशा क्या होता है?

(अ) 1 (ब) 2

(स) 4 (द) 0

3. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा संख्याओं 6 और 20 का महत्तम समापवर्तक (HCF) क्या होगा?

(अ) 2 (ब) 6

(स) 20 (द) 60

4. यदि HCF(306, 657) = 9 है, तो उनका लघुत्तम समापवर्त्य LCM(306, 657) क्या होगा?

(अ) 22383 (ब) 22338

(स) 306 (द) 657

5. एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर हमेशा ..... संख्या होती है?

(अ) परिमेय संख्या (ब) अपरिमेय संख्या

(स) प्राकृत संख्या (द) पूर्णांक

6. संख्याओं 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंडन विधि से महत्तम समापवर्तक (HCF) क्या होगा?

(अ) 2 (ब) 3

(स) 6 (द) 12

7. किन्हीं दो सह–अभाज्य (Co-prime) संख्याओं का HCF हमेशा क्या होता है?

(अ) 0 (ब) 1

(स) उनका गुणनफल (द) परिभाषित नहीं

8. सोनिया को एक वृत्ताकार पथ का चक्कर लगाने में 18 मिनट लगते हैं और रवि को 12 मिनट लगते हैं। यदि वे एक साथ शुरू करें, तो वे पुनः प्रारंम्भिक स्थान पर कितने समय बाद मिलेंगे?

(अ) 6 मिनट (ब) 24 मिनट

(स) 36 मिनट (द) 48 मिनट

9. संख्या 140 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखने पर कौन–सा रूप सही होगा?

(अ) $2 \times 5 \times 7$ (ब) $2 \times 2 \times 5 \times 7$

(स) $2 \times 5 \times 14$ (द) $4 \times 5 \times 7$

उत्तर : 1. (स), **2.** (ब), **3.** (अ), **4.** (ब), **5.** (ब)
6. (स), **7.** (ब), **8.** (स), **9.** (ब)

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि दो संख्याओं का HCF = 23 और उनका LCM = 1449 है। यदि इनमें से एक संख्या 161 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है–

प्रथम संख्या (a) = 161

महत्तम समापवर्तक (HCF) = 23

लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) = 1449

माना, दूसरी संख्या = b

सूत्रानुसार,

HCF × LCM = प्रथम संख्या × दूसरी संख्या

मान प्रतिस्थापित करने पर,

$23 \times 1449 = 161 \times b$

$$b = \frac{(23 \times 1449)}{161}$$

अतः $b = \frac{1449}{7} \Rightarrow b = 207$

दूसरी संख्या = 207

2. अभाज्य गुणनखंडन विधि का उपयोग करके संख्याओं 510 और 92 का HCF ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन करने पर,

$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2 \times 2 \times 23$

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

महत्तम समापवर्तक (HCF) की परिभाषा से,

HCF (510, 92) = 2

Trick संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ (Common) अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घात का गुणनफल ही HCF होता है।

3. यदि LCM (x, 18) = 36 और HCF(x, 18) = 2 है, तो अज्ञात संख्या का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

पहली संख्या (a) = x; दूसरी संख्या (b) = 18

LCM = 36; HCF = 2

हम जानते हैं कि (सूत्र),

HCF(a, b) × LCM (a, b) = a × b

$2 \times 36 = x \times 18$

$72 = 18x$

$x = \frac{72}{18} \Rightarrow x = 4$

4. यदि p और q दो अलग–अलग अभाज्य संख्याएँ है, तो उनके महत्तम समापवर्तक (HCF) और लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) का मान क्या होगा?

हल : दिया है कि p और q दो भिन्न अभाज्य संख्याएँ हैं।

परिभाषा के अनुसार,

1. महत्तम समापवर्तक (HCF): दो अलग–अलग अभाज्य संख्याओं में 1 के अतिरिक्त कोई भी उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड नहीं होता है।

   HCF(p, q) = 1

2. लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) : किन्हीं भी अभाज्य संख्याओं का LCM हमेशा उन संख्याओं के आपसी गुणनफल के बराबर होता है।

   LCM(p, q) = p × q = pq

   अतः HCF (p, q) = 1 तथा LCM (p, q) = pq

5. दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) 14 है और उनका लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) 250 है। क्या ऐसी संख्याओं का अस्तित्व संभव है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : गणितीय नियम,

किन्हीं भी दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF), हमेशा उनके लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) को पूर्णतः (बिना किसी शेषफल के) विभाजित करना चाहिए।

यहाँ जाँच करने पर,

$\frac{LCM}{HCF} = \frac{250}{14} = 17.85.....$

चूंकि 250, संख्या 14 से पूरी तरह विभाज्य नहीं है (शेषफल शून्य नहीं बच रहा है)।

इसलिए ऐसी किन्हीं भी दो संख्याओं का अस्तित्व संभव नहीं है जिनका HCF 14 और LCM 250 हो।

6. संख्या 156 को उसके अभाज्य गुणनखंडों के घातांकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : संख्या 156 का अभाज्य गुणनखंडन करने पर,

2	156
2	78
3	39
13	13
	1

गुणनखंड रूप में,

$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. तीन घंटियाँ क्रमशः 9, 12 और 15 मिनट के अंतराल पर बजती हैं। यदि वे एक साथ बजना शुरू करती हैं, तो वे दोबारा कितने समय बाद एक साथ बजेंगी?

हल : घंटियों के पुनः एक साथ बजने का न्यूनतम समय अंतराल तीनों समय अवधियों (9, 12 और 15 मिनट) के लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) के बराबर होगा।

अभाज्य गुणनखंडन करने पर,

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$15 = 3 \times 5 = 3^1 \times 5^1$

LCM की परिभाषा से (सभी अभाज्य गुणनखंडों की उच्चतम घातों का गुणनफल)

2 की उच्चतम घात = 2^2

3 की उच्चतम घात = 3^2

5 की उच्चतम घात = 5^1

$LCM(9, 12, 15) = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

$LCM = 4 \times 9 \times 5$

LCM = 180 मिनट

मिनट को घंटे में बदलने पर,

समय = $\frac{180}{60}$ = 3 घंटे

वे घंटियाँ दोबारा 3 घंटे बाद एक साथ बजेंगी।

2. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित युग्मों का महत्तम समापवर्तक (HCF) और लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात कीजिए तथा जाँच कीजिए कि क्या HCF × LCM = दोनों संख्याओं का गुणनफल होता है–

(i) 26 और 91

(ii) 510 और 92

हल : (i) 26 और 91

अभाज्य गुणनखंडन–

$26 = 2 \times 13 = 2^1 \times 13^1$

$91 = 7 \times 13 = 7^1 \times 13^1$

HCF (उभयनिष्ठ गुणनखंड की न्यूनतम घात):

HCF (26, 91) = 13^1 = 13

LCM (सभी गुणनखंडों की उच्चतम घात):

LCM (26, 91) = $2^1 \times 7^1 \times 13^1$ = 182

जाँच (सत्यापन):

HCF × LCM = 13 × 182 = 2366

दोनों संख्याओं का गुणनफल = 26 × 91 = 2366

चूंकि 2366 = 2366, अतः यह संबंध सत्यापित होता है।

(ii) 510 और 92

अभाज्य गुणनखंडन–

$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$

$92 = 2 \times 2 \times 23 = 2^2 \times 23^1$

HCF (उभयनिष्ठ गुणनखंड की न्यूनतम घात):

HCF(510, 92) = 2^1 = 2

LCM (सभी गुणनखंडों की उच्चतम घात):

LCM(510, 92) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 23^1$ = 23460

जाँच (सत्यापन):

HCF × LCM = 2 × 23460 = 46920

दोनों संख्याओं का गुणनफल = 510 × 92 = 46920

चूंकि 46920 = 46920, अतः यह संबंध सत्यापित होता है।

3. किसी स्कूल में कक्षा 10 के तीन सेक्शन A, B और C हैं, जिनमें क्रमशः 32, 36 और 40 छात्र हैं। कम से कम उन किताबों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो स्कूल की लाइब्रेरी में होनी चाहिए ताकि उन्हें किसी भी सेक्शन के छात्रों में समान रूप से वितरित किया जा सके।

हल : किताबों की न्यूनतम संख्या ज्ञात करने के लिए हमें 32, 36 और 40 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात करना होगा।

संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन करने पर,

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^1$

LCM (प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की उच्चतम घातों का गुणनफल),

$LCM (32, 36, 40) = 2^5 \times 3^2 \times 5^1$

LCM = 32 × 9 × 5

LCM = 1440

स्कूल की लाइब्रेरी में कम से कम 1440 किताबें होनी चाहिए।

4. यदि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b को $a = xy^2$ और $b = x^3y^3$ के रूप में व्यक्त किया जाता है, जहाँ x और y अभाज्य संख्याएँ हैं, तो HCF (a, b) और LCM (a, b) ज्ञात कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि क्या दोनों का गुणनफल संख्याओं के गुणनफल के बराबर है।

हल : दिया है,

$a = x^1 \cdot y^2$

$b = x^3 \cdot y^3$

HCF (उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों की न्यूनतम घात),

$HCF (a, b) = x^1 \cdot y^2 = xy^2$

LCM (अभाज्य गुणनखंडों की उच्चतम घात),

$LCM (a, b) = x^3 \cdot y^3 = x^3y^3$

सत्यापन (Verification),

वाम पक्ष (LHS) = HCF × LCM

$= (xy^2) \times (x^3y^3)$

$= x^{\{1+3\}} \cdot y^{\{2+3\}} = x^4y^5$

दक्षिण पक्ष (RHS) = संख्याओं का गुणनफल (a × b)

$= (xy^2) \times (x^3y^3) = x^4y^5$

चूंकि LHS = RHS = x^4y^5

अतः यह संबंध पूर्णतः सत्यापित होता है।

मिशन ज्ञान
जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

5. तीन पात्रों में क्रमशः 403 लीटर, 434 लीटर और 465 लीटर डीजल है। ऐसे मापक की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए जो इन तीनों पात्रों के डीजल को पूर्ण संख्या में माप सके। कुल कितनी बार मापने की आवश्यकता होगी?

हल : 1. अधिकतम धारिता ज्ञात करना,

अधिकतम धारिता वाला बर्तन निकालने के लिए हमें मात्राओं (403, 434, 465) का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करना होगा।

अभाज्य गुणनखंडन करने पर,

$403 = 13 \times 31$

$434 = 2 \times 7 \times 31$

$465 = 3 \times 5 \times 31$

तीनों संख्याओं में केवल संख्या 31 ही उभयनिष्ठ है।

HCF = (403, 434, 465) = 31 लीटर

अतः, मापक बर्तन की अधिकतम धारिता = 31 लीटर।

2. कुल मापन संख्या ज्ञात करना,

प्रत्येक पात्र को मापने की संख्या,

पहले पात्र के लिए $= \frac{403}{31} = 13$ बार

दूसरे पात्र के लिए $= \frac{434}{31} = 14$ बार

तीसरे पात्र के लिए $= \frac{465}{31} = 15$ बार

कुल मापन संख्या = 13 + 14 + 15 = 42 बार

मापक की धारिता 31 लीटर है तथा कुल डीजल मापने के लिए 42 बार नापना होगा।

अपरिमेय संख्याएँ

1. यदि p एक अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करती है, तो p निम्नलिखित में से किसे अवश्य विभाजित करेगी (जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है)?

(अ) $\sqrt{a}$ (ब) a

(स) 2a (द) a^3

2. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या एक अपरिमेय संख्या है?

(अ) $\sqrt{9}$ (ब) $\sqrt{16}$

(स) $\sqrt{7}$ (द) 3.5

उत्तर : 1. (ब), **2.** (स)

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए की $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : माना $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम दो सह–अभाज्य (Co-prime) पूर्णांक a और b $(b \neq 0)$ ज्ञात कर सकते हैं कि–

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

(यहाँ a और b सह–अभाज्य हैं, अर्थात इनका 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$5 = \frac{a^2}{b^2}$$

$\Rightarrow a^2 = 5b^2$ ..... (समीकरण i)

समीकरण 1 से स्पष्ट है कि 5, a^2 को विभाजित करता है।

अतः प्रमेय के अनुसार, 5, a को भी विभाजित करेगा।

चूंकि 5, a का एक गुणनखंड है, इसलिए हम $a = 5c$ लिख सकते हैं (जहाँ c एक पूर्णांक है)।

a का यह मान समीकरण 1 में प्रतिस्थापित करने पर,

$(5c)^2 = 5b^2$

$\Rightarrow 25c^2 = 5b^2$

$5c^2 = b^2$

$\Rightarrow b^2 = 5c^2$ ..... (समीकरण ii)

समीकरण 2 से स्पष्ट है कि 5, b^2 को विभाजित करता है।

अतः प्रमेय के अनुसार, 5, b को भी विभाजित करेगा।

समीकरण i और ii से हमें यह ज्ञात होता है कि a और b दोनों का कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है। परंतु यह तथ्य हमारी प्रारंभिक धारणा का विरोधाभास है, कि a और b सह–अभाज्य हैं।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है, कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, यह सिद्ध होता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{11}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : माना $\sqrt{11}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम दो सह–अभाज्य पूर्णांक a और b $(b \neq 0)$ ले सकते हैं कि–

$$\sqrt{11} = \frac{a}{b}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

मिशन ज्ञान
एक जन चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

$$11 = \frac{a^2}{b^2}$$

$\Rightarrow a^2 = 11b^2$ ..... (समीकरण i)

यहाँ 11, a^2 को विभाजित करता है, इसलिए प्रमेय के अनुसार 11, a को भी विभाजित करेगा।

चूंकि 11, a का एक गुणनखंड है, माना $a = 11c$ (जहाँ c एक पूर्णांक है)।

a का यह मान समीकरण 1 में रखने पर,

$(11c)^2 = 11b^2$

$\Rightarrow 121c^2 = 11b^2$

दोनों पक्षों को 11 से भाग देने पर,

$11c^2 = b^2$

$\Rightarrow b^2 = 11c^2$ ..... (समीकरण ii)

यहाँ 11, b^2 को विभाजित करता है, इसलिए 11, b को भी विभाजित करेगा।

समीकरण i और ii से स्पष्ट है कि a और b दोनों का एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 11 है, जो हमारी इस धारणा का विरोधाभास है, कि a और b सह–अभाज्य हैं। यह विरोधाभास हमारी गलत धारणा के कारण हुआ है।

अतः, यह सिद्ध होता है कि $\sqrt{11}$ एक अपरिमेय संख्या है।

3. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : माना $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम सह–अभाज्य पूर्णांक a और b $(b \neq 0)$ ले सकते हैं कि–

$$3+2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर,

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$

$$2\sqrt{5} = \frac{a-3b}{b}$$

$$\sqrt{5} = \frac{(a-3b)}{2b}$$ ..... (समीकरण i)

चूंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $(a-3b)$ और $2b$ भी पूर्णांक होंगे।

अतः, समीकरण i का दायाँ पक्ष $\frac{(a-3b)}{2b}$ एक परिमेय संख्या है।

इसके अनुसार, समीकरण का बायाँ पक्ष $(\sqrt{5})$ भी एक परिमेय संख्या होनी चाहिए।

परंतु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी गलत कल्पना के कारण उत्पन्न हुआ है, कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, यह निष्कर्ष निकलता है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

4. मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है। विरोधाभास विधि का चरणबद्ध उपयोग करते हुए विस्तृत रूप से सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या होगी।

हल : माना $\sqrt{p}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम इसे दो सह–अभाज्य पूर्णांकों a और b $(b \neq 0)$ के अनुपात के रूप में लिख सकते हैं–

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}$$

(सह–अभाज्य का अर्थ है कि a और b में 1 के अलावा कोई और उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$p = \frac{a^2}{b^2}$$

$\Rightarrow a^2 = p \cdot b^2$ ..... (समीकरण i)

समीकरण 1 यह दर्शाता है कि संख्या p, a^2 को विभाजित करती है। चूंकि p एक अभाज्य संख्या है, इसलिए प्रमेय के अनुसार p, a को भी विभाजित करेगी।

चूंकि p, a को विभाजित करता है, हम $a = pc$ लिख सकते हैं (जहाँ c कोई पूर्णांक है)।

a का यह मान समीकरण i में रखने पर,

$(pc)^2 = p \cdot b^2$

$\Rightarrow p^2c^2 = p \cdot b^2$

$p \cdot c^2 = b^2$

$\Rightarrow b^2 = p \cdot c^2$ ..... (समीकरण ii)

समीकरण ii यह दर्शाता है कि संख्या p, b^2 को विभाजित करता है। अतः प्रमेय के अनुसार p, b को भी विभाजित करेगा।

समीकरण i और ii से स्पष्ट है कि a और b दोनों पूर्णांकों का एक उभयनिष्ठ गुणनखंड p है। परंतु यह तथ्य हमारी उस प्रारंभिक शर्त का पूर्ण विरोधाभास है, जिसमें हमने a और b को सह–अभाज्य माना था।

यह विरोधाभास हमारी गलत कल्पना के कारण हुआ है।

अतः, यह सिद्ध होता है कि $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें!

2 बहुपद

बहुपद

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. चर x के बहुपद p(x) में x की उच्चतम घात को क्या कहते हैं?

(अ) शून्यक (ब) बहुपद की घात

(स) गुणांक (द) अचर पद

2. निम्नलिखित में से कौन–सा व्यंजक एक बहुपद हैं?

(अ) $\sqrt{x}+2$ (ब) $\frac{1}{(x-1)}$

(स) $2x^2-3x+4$ (द) $\frac{1}{(x^2+2x+3)}$

3. रैखिक बहुपद की घात कितनी होती है?

(अ) 0 (ब) 1

(स) 2 (द) 3

4. एक द्विघात बहुपद का सामान्य रूप क्या है?

(अ) $ax+b$

(ब) ax^3+bx^2+cx+d

(स) ax^2+bx+c (जहाँ $a \neq 0$)

(द) ax^2+b

5. बहुपद $p(x)=x^2-3x-4$ का $x=2$ पर मान क्या होगा?

(अ) 0 (ब) -6

(स) -4 (द) 4

6. यदि किसी बहुपद p(x) के लिए p(k) = 0 है, तो वास्तविक संख्या k को बहुपद का क्या कहा जाता है?

(अ) घात (ब) गुणांक

(स) शून्यक (द) अचर

7. द्विघात बहुपद ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ का ग्राफ (आलेख) किस आकार का होता है?

(अ) सरल रेखा (ब) वृत्त

(स) दीर्घवृत्त (द) परवलय

8. यदि द्विघात बहुपद का परवलय ग्राफ ऊपर की ओर खुला (U) है, तो इसका अर्थ है कि–

(अ) $a>0$ (ब) $a<0$

(स) $a=0$ (द) इनमें से कोई नहीं

उत्तर : 1. (ब), **2.** (स), **3.** (ब), **4.** (स), **5.** (ब), **6.** (स), **7.** (द), **8.** (अ)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. बहुपद $p(x)=5x^4-3x^2+2x-9$ की घात क्या है?

हल : किसी भी बहुपद में चर की अधिकतम घात को ही उस बहुपद की घात कहा जाता है। यहाँ सबसे बड़ी घात 4 है। अतः बहुपद की घात 4 है।

2. बहुपद $p(x)=x^3(x^2-5x+2)$ को सरल करने पर इसकी घात क्या होगी?

हल : $p(x)=x^3(x^2-5x+2)$

$p(x)=x^5-5x^4+2x^3$

चूंकि चर की अधिकतम घात 5 है, इसलिए बहुपद की घात 5 होगी।

बहुपद के शून्यक

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. द्विघात बहुपद $x^2-7x+12$ के शून्यक कौन–से हैं?

(अ) (3, 4) (ब) (– 3, – 4)

(स) (3, – 4) (द) (–3, 4)

2. बहुपद $f(x)=4x^2-9$ के शून्यक होंगे–

(अ) $\frac{3}{2},\frac{3}{2}$ (ब) $\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$

(स) $\frac{9}{4},-\frac{9}{4}$ (द) 3, – 3

3. द्विघात बहुपद $x^2+9x+20$ के दोनों शून्यकों के चिह्न कैसे होंगे?

(अ) दोनों धनात्मक

(ब) दोनों ऋणात्मक

(स) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक

(द) दोनों शून्य

4. यदि बहुपद $p(x) = x^2 - kx - 6$ का एक शून्यक 3 है, तो k का मान क्या होगा?

(अ) 1 (ब) -1

(स) 2 (द) 3

5. एक त्रिघात बहुपद के अधिकतम कितने शून्यक हो सकते हैं?

(अ) 1 (ब) 2

(स) 3 (द) 4

6. रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक होगा–

(अ) $\frac{b}{a}$ (ब) $-\frac{b}{a}$

(स) $\frac{a}{b}$ (द) $-\frac{a}{b}$

7. किसी बहुपद p(x) का ग्राफ x-अक्ष को जितने बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है, उसके शून्यकों की संख्या उतनी ही होती है। यह कथन है–

(अ) सत्य

(ब) असत्य

(स) केवल रैखिक बहुपदों के लिए सत्य

(द) इनमें से कोई नहीं

8. यदि किसी द्विघात बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को कहीं भी नहीं काटता, तो उसके वास्तविक शून्यकों की संख्या कितनी होगी?

(अ) 1 (ब) 2

(स) 0 (द) अनंत

9. घात n के किसी बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को अधिक से अधिक कितने बिन्दुओं पर काट सकता है?

(अ) 1 (ब) 2

(स) $n - 1$ (द) n

10. द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक है–

(अ) (2, 4) (ब) (–2, 4)

(स) (2, – 4) (द) (–2, – 4)

11. बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक होंगे–

(अ) 3, – 3 (ब) $\sqrt{3}, \sqrt{3}$

(स) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (द) 0, 3

उत्तर : 1. (अ), **2.** (ब), **3.** (ब), **4.** (अ), **5.** (स), **6.** (ब), **7.** (अ), **8.** (स), **9.** (द), **10.** (ब), **11.** (स)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक अशून्य अचर बहुपद जैसे $p(x) = -7$ की घात कितनी होती है?

हल : 0;

अचर पद को $-7x^0$ के रूप में लिखा जा सकता है (क्योंकि $x^0 = 1$ होता है।)

इसलिए, किसी भी गैर–शून्य अचर बहुपद की घात हमेशा शून्य (0) होती है।

2. यदि किसी बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को बिन्दु (2, 0) और (–3, 0) पर काटता है, तो उसके शून्यक क्या होंगे?

हल : ज्यामितीय अर्थ के अनुसार ग्राफ जिन बिन्दुओं पर x-अक्ष को काटता है, उनके x-निर्देशांक ही बहुपद के शून्यक होते हैं। अतः बहुपद के शून्यक इनके x-निर्देशांक 2 और –3 होंगे।

दीर्घ–उत्तरात्मक प्रश्न –

1. द्विघात बहुपद $p(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x) = x^2 - 2x - 8$

शून्यक के लिए $p(x) = 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$

$x(x - 4) + 2(x - 4) = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

अब दोनों गुणनखंडों को शून्य के बराबर रखने पर,

$x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = 4$

$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x = -2$

अतः बहुपद के शून्यक 4 और – 2 हैं।

2. बहुपद $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले इसे मानक रूप में व्यवस्थित करें–

$6x^2 - 7x - 3 = 0$

गुणनखण्ड करने पर,

$6x^2 - 9x + 2x - 3 = 0$

$3x(2x - 3) + 1(2x - 3) = 0$

$\Rightarrow (2x - 3)(3x + 1) = 0$

$\Rightarrow 2x - 3 = 0, 3x + 1 = 0$

इसलिए, $x = \frac{3}{2}$ या $x = -\frac{1}{3}$

अतः शून्यक $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ है।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

शून्यकों और गुणांकों में संबंध

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि α और β बहुपद $2x^2 - 5x + 7$ के शून्यक हैं, तो शून्यकों का योग $(\alpha + \beta)$ क्या होगा?

(अ) $\frac{5}{2}$ (ब) $-\frac{5}{2}$

(स) $\frac{7}{2}$ (द) $-\frac{7}{2}$

2. बहुपद $3x^2 + 11x - 4$ के शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta)$ किसके बराबर हैं?

(अ) $\frac{11}{3}$ (ब) $-\frac{11}{3}$

(स) $-\frac{4}{3}$ (द) $\frac{4}{3}$

3. यदि किसी द्विघात बहुपद के शून्यकों का योग 0 है और उनका गुणनफल -5 है, तो वह बहुपद क्या होगा?

(अ) $x^2 + 5$ (ब) $x^2 - 5$

(स) $x^2 - 5x$ (द) $x^2 + 5x$

4. यदि बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक एक–दूसरे के व्युत्क्रम हो, तो निम्नलिखित में से कौन–सा संबंध सही है?

(अ) $a = b$ (ब) $b = c$

(स) $a = c$ (द) $a = -c$

5. यदि α और β बहुपद $x^2 - 6x + k$ के शून्यक हैं और $\alpha + \beta = \alpha\beta$ है, तो k का मान क्या होगा?

(अ) -6 (ब) 6

(स) 1 (द) 0

6. यदि α और β बहुपद $x^2 - x - 2$ के शून्यक है, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ का मान क्या होगा?

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $-\frac{1}{2}$

(स) 1 (द) -2

7. बहुपद $x^2 - 3x - 4$ के लिए $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ का मान क्या होगा, यदि α, β इसके शून्यक हैं–

(अ) -4 (ब) -6

(स) 3 (द) 0

8. द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ के शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta)$ किसके बराबर होता है?

(अ) $\frac{(x \text{ का गुणांक})}{(x^2 \text{ का गुणांक})}$ (ब) $-\frac{(x \text{ का गुणांक})}{(x^2 \text{ का गुणांक})}$

(स) $\frac{\text{अचर पद}}{(x^2 \text{ का गुणांक})}$ (द) $-\frac{\text{अचर पद}}{(x^2 \text{ का गुणांक})}$

9. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हो, तो उनके योगफल $(\alpha + \beta)$ का मान क्या होगा?

(अ) $\frac{c}{a}$ (ब) $-\frac{b}{a}$

(स) $\frac{b}{a}$ (द) $-\frac{c}{a}$

10. एक द्विघात बहुपद क्या होगा, जिसके शून्यकों का योग -3 और गुणनफल 2 है?

(अ) $x^2 - 3x + 2$ (ब) $x^2 + 3x + 2$

(स) $x^2 + 3x - 2$ (द) $x^2 - 3x - 2$

उत्तर : 1. (अ), **2.** (स), **3.** (ब), **4.** (स), **5.** (ब), **6.** (ब), **7.** (द), **8.** (स), **9.** (ब), **10.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

शून्यकों के योग और गुणनफल से बहुपद बनाना –

1. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\frac{1}{4}$ और -1 हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद के शून्यक α और β हैं।

दिया गया है–

शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}$

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha.\beta) = -1$

हम जानते है, $p(x) = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha.\beta)]$

(जहाँ k एक वास्तविक संख्या है)

मान रखने पर,

$$p(x) = k\left[x^2 - \frac{1}{4}x + (-1)\right]$$

$$p(x) = k\left[x^2 - \frac{x}{4} - 1\right]$$

$$p(x) = \frac{k}{4}\left[4x^2 - x - 4\right]$$

$$p(x) = a[4x^2 - x - 4] \text{ जहाँ } \left\{a = \frac{k}{4}\right\}$$

अतः अभीष्ठ द्विघात बहुपद $p(x) = 4x^2 - x - 4$ है।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें जैसे चाहें!

2. यदि α और β बहुपद $3x^2 + 5x - 2$ के शून्यक हैं, तो $\alpha + \beta$ और $\alpha\beta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : बहुपद $3x^2 + 5x - 2$ के लिए,

$a = 3, b = 5, c = -2$

योग $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3}$

गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$

3. यदि बहुपद $ax^2 - 6x - 6$ के शून्यकों का गुणनफल 4 है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल : शून्यकों का गुणनफल $= 4$,

$ax^2 - 6x - 6$ के लिए,

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a} \Rightarrow 4 = \frac{-6}{a}$

$4a = -6 \Rightarrow a = \frac{-6}{4}$

$a = -\frac{3}{2}$

4. यदि बहुपद $p(x) = x^2 - 5x + k$ के शून्यकों का गुणनफल 6 है, तो अचर पद k का मान क्या होगा?

हल : बहुपद $p(x) = x^2 - 5x + k$ के लिए

$a = 1, b = -5, c = k$

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a}$

$6 = \frac{k}{1} \Rightarrow k = 6$

दीर्घ–उत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि α और β बहुपद $x^2 - 5x + 6$ के शून्यक हैं, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ का मान क्या होगा?

हल : $p(x) = x^2 - 5x + 6$ के लिए,

$a = 1, b = -5, c = 6$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

$\alpha + \beta = 5$ और

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta = 6$

अब $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{6}$

2. यदि द्विघात बहुपद $kx^2 + 2x + 3k$ के शून्यकों का योग उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बहुपद $kx^2 + 2x + 3k$ के लिए

$a = k, b = 2, c = 3k$

शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a}$

$\alpha + \beta = -\frac{2}{k}$

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha.\beta) = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta = \frac{3k}{k}$

$\alpha\beta = 3$

प्रश्नानुसार,

शून्यकों का योग = शून्यकों का गुणनफल

$-\frac{2}{k} = 3$

$k = -\frac{2}{3}$

3. यदि बहुपद $p(x) = x^2 - (k + 6)x + 2(2k - 1)$ के शून्यकों का योग उनके गुणनफल का आधा है, तो k का मान क्या होगा?

हल : $p(x) = x^2 - (k + 6)x + 2(2k - 1)$ के लिए

$a = 1, b = -(k + 6), c = 2(2k - 1)$

शून्यकों का योग $= \frac{-b}{a}$

$= \frac{-[-(k + 6)]}{1}$

$= k + 6$

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a}$

$= 2(2k - 1)$

प्रश्नानुसार,

$k + 6 = \frac{1}{2}[2(2k - 1)]$

$k + 6 = 2k - 1 \quad \Rightarrow k = 7$

3 दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. दो चर वाले रैखिक समीकरण का सामान्य रूप है–

(अ) $ax + by + c = 0$ (ब) $ax^2 + by + c = 0$

(स) $ax + by^2 = 0$ (द) $ax^2 + by^2 = 0$

2. दो चर वाले एक रैखिक समीकरण का ग्राफ होता है–

(अ) वृत्त (ब) सरल रेखा

(स) परवलय (द) दीर्घ वृत्त

3. यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो समीकरण युग्म का–

(अ) एक हल होगा

(ब) दो हल होंगे

(स) कोई हल नहीं होगा

(द) अपरिमित हल होंगे

4. समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने की शर्त है–

(अ) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (ब) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(स) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (द) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

5. समीकरण $2x + 3y - 5 = 0$ में यदि $x = 1$ हो, तो y का मान क्या होगा?

(अ) 1 (ब) 2

(स) – 1 (द) 0

6. यदि रेखाएँ $3x + 2y - 5 = 0$ और $6x + 4y - 10 = 0$ दी गई हैं, तो ये रेखाएँ हैं –

(अ) प्रतिच्छेदी (ब) समांतर

(स) संपाती (द) परस्पर लंबवत

7. यदि रेखाएँ $2x - 3y + 4 = 0$ और $6x - 9y + k = 0$ संपाती हैं, तो k का मान क्या होगा?

(अ) 8 (ब) 10

(स) 12 (द) 14

उत्तर : 1. (अ), **2.** (ब), **3.** (स), **4.** (द), **5.** (अ), **6.** (स), **7.** (स)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि दो रेखाएँ संपाती हैं, तो समीकरण युग्म के कितने हल होंगे?

हल : अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे।

2. समीकरणों $x - 2y = 0$ और $3x + 4y - 20 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ कैसी होंगी?

हल : $x - 2y = 0$ के लिए $a_1 = 1, b_1 = -2, c_1 = 0$

$3x + 4y - 20 = 0$ के लिए $a_1 = 3, b_2 = 4, c_2 = -20$

अनुपातों की तुलना – $\frac{1}{3} \neq \frac{-2}{4}\left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right)$

अतः रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हुई होगी।

3. अनुपातों की तुलना कर बताइए कि समीकरण युग्म $2x + 3y - 9 = 0$ और $4x + 6y - 18 = 0$ के कितने हल हैं?

हल : $2x + 3y - 9 = 0$ के लिए $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = -9$

$4x + 6y - 18 = 0$ के लिए $a_2 = 4, b_2 = 6, c_2 = -18$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-9}{-18} = \frac{1}{2}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

4. क्या समीकरण युग्म $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ का कोई हल हैं?

हल : $x + 2y - 4 = 0$ के लिए $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -4$

$2x + 4y - 12 = 0$ के लिए $a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = -12$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अतः रेखाएँ समांतर है, कोई हल नहीं होगा।

5. अनुपातों की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि समीकरण युग्म $5x - 4y + 8 = 0$ और $7x + 6y - 9 = 0$ संगत है या असंगत।

हल : $5x - 4y + 8 = 0$ के लिए, $a_1 = 5, b_1 = -4, c_1 = 8$

$7x + 6y - 9 = 0$ के लिए, $a_2 = 7, b_2 = 6, c_2 = -9$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अतः संगत युग्म है।

6. रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ दी गई है। दो चरों में एक ऐसी और रैखिक समीकरण लिखिए ताकि प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण समान्तर रेखाएँ हों।

हल : समांतर रेखाओं के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ होना चाहिए।

उदाहरण: $4x + 6y - 10 = 0$

7. यदि रेखाएँ $7x + 3ky - 4 = 0$ और $14x + 12y + 9 = 0$ परस्पर समांतर हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $7x + 3ky - 4 = 0$ के लिए $a_1 = 7, b_1 = 3k, c_1 = -4$

$14x + 12y + 9 = 0$ के लिए $a_2 = 14, b_2 = 12, c_2 = 9$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{7}{14} = \frac{3k}{12}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{k}{4}$$

$2k = 4$

$k = 2$

8. दो रेल पटरियाँ, समीकरणों $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ द्वारा निरूपित की गई है। क्या रेल पटरियाँ एक दूसरे को काटेंगी?

हल : इसमें बनाए गए रैखिक समीकरण थे :

$x + 2y - 4 = 0$ ..... (i)

$2x + 4y - 12 = 0$ ..... (ii)

समीकरण (i) से x को y के पदों में व्यक्त करके, हम पाते है:

$x = 4 - 2y$

अब, x के इस मान को समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करके हम पाते हैं:

$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$

अर्थात् $8 - 12 = 0$

अर्थात् $-4 = 0$

जो कि एक असत्य कथन है।

अतः, दिए गए समीकरणों का कोई सार्व हल नहीं है। इसलिए, दोनों पटरियाँ एक दूसरे को नहीं काटेंगी।

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का हल

1. समीकरण युग्म $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ के हलों की प्रकृति क्या होगी?

(अ) अद्वितीय हल (ब) कोई हल नहीं

(स) अनेक हल (द) दो हल

2. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $3x - y - 5 = 0$ तथा $6x - 2y - k = 0$ के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

(अ) $k = 10$ (ब) $k = -10$

(स) $k = 5$ (द) $k = -5$

3. यदि $x + y = 14$ और $x - y = 4$ हो, तो विलोपन विधि से x का मान क्या होगा?

(अ) 5 (ब) 9

(स) 10 (द) 4

4. समीकरण युग्म $2x + y = 7$ और $3x - y = 3$ का सही हल क्या होगा?

(अ) $x = 2, y = 3$ (ब) $x = 3, y = 1$

(स) $x = 1, y = 5$ (द) $x = 2, y = 1$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

5. दो संख्याओं का योग 26 है और उनका अंतर 10 है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(अ) 15 और 11 (ब) 16 और 10

(स) 20 और 6 (द) 18 और 8

6. यदि किसी दो अंकों की संख्या के इकाई का अंक x और दहाई का अंक y हो, तो वह संख्या किस रूप में लिखी जाएगी–

(अ) x + y (ब) 10x + y

(स) 10y + x (द) xy

7. समीकरणों x + y = 5 और x – y = 1 को जोड़ने पर प्राप्त होता है–

(अ) 2y = 6 (ब) 2x = 6

(स) x = 6 (द) x + y = 6

उत्तर : 1. (ब), **2.** (अ), **3.** (ब), **4.** (अ), **5.** (द), **6.** (स), **7.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. प्रतिस्थापन विधि से हल करें–

x + y = 14 और x – y = 4

हल : x + y = 14 ..... (i)

x – y = 4 ..... (ii)

समीकरण (ii) से, x = y + 4 .....(iii)

x का मान समीकरण (i) में रखने पर,

(y + 4) + y = 14

$\Rightarrow$ 2y = 10

$\Rightarrow$ y =5

y का मान समीकरण (iii) में रखने पर,

x = 5 + 4 = 9

अतः x = 9 और y = 5 है।

2. प्रतिस्थापन विधि से हल करें–

7x – 15y = 2 और x + 2y = 3

हल : 7x – 15y = 2 ..... (i)

x + 2y = 3 ..... (ii)

समीकरण (ii) से, x = 3 – 2y .....(iii)

x का मान समीकरण (i) में रखने पर,

7(3 – 2y) – 15y = 2

$\Rightarrow$ 21 – 14y – 15y = 2

$\Rightarrow$ 21 – 29y = 2

$\Rightarrow$ 29y = 19

$\Rightarrow y = \frac{19}{29}$

y का मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$

अतः $x = \frac{49}{29}$ और $y = \frac{19}{29}$ है।

3. 2x + 3y = 11 और 2x – 4y = – 24 को हल कीजिए और इससे 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए y = mx + 3 हो।

हल : 2x + 3y = 11 ..... (i)

2x – 4y = – 24 ..... (ii)

2x = 11 – 3y, समीकरण (ii) में रखने पर,

11 – 3y – 4y = – 24

$\Rightarrow$ – 7y = – 35

$\Rightarrow$ y =5

y का मान रखने पर,

2x = 11 – 15 = – 4

$\Rightarrow$ x = – 2

अब, y = mx + 3 में x और y के मान रखने पर,

5 = m(–2) + 3

$\Rightarrow$ 2 = –2m

$\Rightarrow$ m = – 1

4. विलोपन विधि से हल करें–

x + y = 5 और 2x – 3y = 4

हल : x + y = 5 ..... (i)

2x – 3y = 4 ..... (ii)

समीकरण (i) को 2 से गुणा करने पर,

2x + 2y = 10 .....(iii)

समीकरण (iii) से समीकरण (ii) घटाने पर,

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

$2x + 2y = 10$

$2x - 3y = -4$

$5y = 6$

$y = \frac{6}{5}$

y का मान समीकरण (i) में रखने पर

$x + \frac{6}{5} = 5$

$x = \frac{19}{5}$

5. विलोपन विधि से हल करें–

$3x + 4y = 10$ और $2x - 2y = 2$

हल : $3x + 4y = 10$ ..... (i)

$2x - 2y = 2$ ..... (ii)

समीकरण (ii) को 2 से गुणा करने पर,

$4x - 4y = 4$ ..... (iii)

समीकरण (i) और समीकरण (iii) को जोड़ने पर,

$3x + 4y = 10$

$4x - 4y = 4$

$7x = 14$

$x = 2$

x का मान (iii) समीकरण में रखने पर

$2(2) - 2y = 2$

$-2y = -2$

$y = 1$

अतः $x = 2$ और $y = 1$ है।

दीर्घ–उत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक पिता की आयु अपने दो बच्चों की आयु के योग की तीन गुनी है। 20 वर्ष बाद, उसकी आयु अपने बच्चों की आयु के योग के बराबर होगी। पिता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना पिता की वर्तमान आयु = x वर्ष

तथा दोनों बच्चों की वर्तमान आयु का योग = y वर्ष।

प्रश्नानुसार,

$x = 3y$ ..... (i)

20 वर्ष बादः दोनों बच्चों की आयु का नया योग

$= y + 20 + 20 = y + 40$ (क्योंकि दोनों बच्चों की आयु में 20-20 वर्ष की वृद्धि होगी)।

$x + 20 = y + 40$

$\Rightarrow x - y = 20$ ..... (ii)

समीकरण (ii) में $x = 3y$ रखने पर,

$3y - y = 20$

$\Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow y = 10$

अतः पिता की आयु $x = 3(10) = 30$ वर्ष

पिता की वर्तमान आयु 30 वर्ष है।

2. आफताब अपनी पुत्री से कहता है, 'सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा।' (क्या यह मनोरंजक है)? आफताब और उसकी पुत्री की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना आफताब और उसकी पुत्री की आयु (वर्षों में) क्रमशः s और t हैं। तब, उस स्थिति को निरूपित करने के लिए, रैखिक समीकरण युग्म हैः

$s - 7 = 7(t - 7)$, अर्थात् $s - 7t + 42 = 0$ .....(i)

तथा $s + 3 = 3(t + 3)$, अर्थात् $s - 3t = 6$ .....(ii)

समीकरण (ii) का प्रयोग करने पर, हम पाते है : $s = 3t + 6$

समीकरण (i) में s का मान रखने पर, हम पाते हैं:

$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$

अर्थात् $4t = 48$, जिससे $t = 12$ प्राप्त होता है।

t के इस मान को समीकरण (ii) में रखने पर, हमें प्राप्त होता हैः

$s = 3(12) + 6 = 42$

अतः, आफताब और उसकी पुत्री क्रमशः 42 वर्ष और 12 वर्ष के हैं।

3. दो अंकों की एक संख्या और उसके अंकों को उलटकर प्राप्त संख्या का योग 66 है। यदि उस संख्या के दोनों अंकों का अंतर 2 है, तो संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी कुल कितनी संख्याएँ संभव है?

हल : मान लीजिए संख्या के दहाई के स्थान का अंक x तथा इकाई के स्थान का अंक y है।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

तब मूल संख्या :

$10x + y$

अंकों को उलटने पर प्राप्त संख्या :

$10y + x$

प्रश्नानुसार,

$(10x + y) + (10y + x) = 66$

$11x + 11y = 66$

$x + y = 6$ .....(i)

$x - y = 2$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$2x = 8$

$x = 4$

अब,

$y = 6 - 4 = 2$

अतः संख्या :

$10(4) + 2 = 42$

संभव संख्याएँ 42 और 24 हैं।

अतः ऐसी संख्याओं की कुल संख्या 2 है।

4. यदि किसी भिन्न के अंश में 2 जोड़ दिया जाए और हर में से 1 घटा दिया जाए, तो भिन्न 1 हो जाती है। यदि भिन्न के अंश में से 1 घटा दिया जाए और हर में 2 जोड़ दिया जाए, तो भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है। मूल भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए भिन्न का अंश x तथा हर y है।

अतः मूल भिन्न है:

$\frac{x}{y}$

पहली शर्त के अनुसार,

$\frac{x+2}{y-1} = 1$

$x + 2 = y - 1$

$x - y = -1$ .....(i)

दूसरी शर्त के अनुसार,

$\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{3}$

क्रॉस गुणा करने पर,

$3(x - 1) = y + 2$

$3x - 3 = y + 2$

$3x - y = 5$ .....(ii)

अब समीकरण (ii) में से समीकरण (i) घटाते हैं:

$(3x - y) - (x - y) = 5 - (-3)$

$2x = 8$

$x = 4$

समीकरण (i) में $x = 4$ रखने पर,

$4 - y = -3$

$y = 7$

अतः मूल भिन्न हैं : $\frac{4}{7}$

4 द्विघात समीकरण

द्विघात समीकरण

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. द्विघात समीकरण पहचानिए–

(अ) $x^2 - 2\sqrt{x} + 3 = 0$

(ब) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$

(स) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(द) $x^3 - x^2 = (x-1)^2$

2. समीकरण $(x+1)^2 = 2(x-3)$ को सरल करने पर प्राप्त द्विघात समीकरण क्या होगा?

(अ) $x^2 + 7 = 0$ (ब) $x^2 - 2x + 7 = 0$

(स) $x^2 + 5 = 0$ (द) $x^2 - 5 = 0$

3. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में यदि $a = 0$ हो जाए, तो यह कैसा समीकरण बन जाएगा?

(अ) द्विघात (ब) रैखिक

(स) अचर (द) त्रिघात

4. यदि $x = \alpha$, समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल है, तो निम्नलिखित में से कौन–सा सत्य है?

(अ) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

(ब) $a\alpha^2 + b\alpha + c > 0$

(स) $a\alpha^2 + b\alpha + c < 0$

(द) $a\alpha + b + c = 0$

5. समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ का एक मूल $x = 1$ है या नहीं?

(अ) हाँ (ब) नहीं

(स) $x = 2$ मूल है (द) जानकारी अपूर्ण है

6. $x^2 + 7x + 10 = 0$ के मूल क्या हैं?

(अ) 5, 2 (ब) –5, 2

(स) 5, – 2 (द) –5, –2

7. एक आयताकार भूखण्ड की लम्बाई $(2x + 1)$ इकाई और चौड़ाई x इकाई है और क्षेत्रफल 528 वर्ग इकाई है, तो द्विघात समीकरण होगा–

(अ) $2x^2 + x - 528 = 0$

(ब) $2x^2 - x - 528 = 0$

(स) $x^2 + 2x - 528 = 0$

(द) $2x + 1 = 528$ इकाई

8. यदि एक समकोण त्रिभुज का आधार x इकाई और ऊँचाई $(x-7)$ इकाई है और कर्ण 13 इकाई है, तो पाइथागोरस प्रमेय से द्विघात समीकरण होगा –

(अ) $x^2 + (x-7)^2 = 13^2$

(ब) $x + (x - 7) = 13$

(स) $x(x - 7) = 13$

(द) $x^2 - (x-7)^2 = 13^2$

9. निम्नलिखित में से कौन–सा द्विघात समीकरण है?

(अ) $4x + 6 = 0$ (ब) $x^2 - bx + c = 0$

(स) $x(x+3) = x^2$ (द) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

उत्तर : 1. (ब), **2.** (अ), **3.** (ब), **4.** (अ), **5.** (अ), **6.** (द), **7.** (अ), **8.** (अ), **9.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल $300m^2$ है। उसकी लंबाई, चौड़ाई से 5 मीटर अधिक है। मैदान की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात करने के लिए द्विघात समीकरण बनाइए।

हल : माना मैदान की चौड़ाई x मीटर है।

तब मैदान की लंबाई $= (x + 5)$ मीटर होगी।

प्रश्नानुसार,

लंबाई × चौड़ाई $= 300$

$x(x + 5) = 300$

$x^2 + 5x - 300 = 0$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

2. एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा दूसरी भुजा से 7 सेंटीमीटर छोटी है। यदि कर्ण 17 सेंटीमीटर है, तो दोनों लंबवत भुजाएँ ज्ञात करने के लिए द्विघात समीकरण बनाइए।

हल : माना बड़ी लंबवत भुजा x सेंटीमीटर है।

तब छोटी लंबवत भुजा $x-7$ सेंटीमीटर होगी।

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार,

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लंब})^2$

$17^2 = x^2 + (x-7)^2$

$289 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$2x^2 - 14x - 240 = 0$

दोनों पक्षों को 2 से भाग देने पर,

$x^2 - 7x - 120 = 0$

दीर्घ–उत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक रेलगाड़ी 300 किलोमीटर की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि उसकी चाल 10 km/h कम होती, तो उसे वही दूरी तय करने में 1 घंटा अधिक लगता। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करने के लिए द्विघात समीकरण बनाइए।

हल : माना रेलगाड़ी की वास्तविक चाल x km/h है।

वास्तविक समय :

$\frac{300}{x}$ घंटे

कम की गई चाल :

$(x-10)$ km/h

कम चाल से लगने वाला समय :

$\frac{300}{x-10}$ घंटे

प्रश्नानुसार,

$$\frac{300}{x-10} - \frac{300}{x} = 1$$

$$\frac{300x - 300(x-10)}{x(x-10)} = 1$$

$$\frac{3000}{x(x-10)} = 1$$

$x(x-10) = 3000$

$x^2 - 10x - 3000 = 0$

मूलों की प्रकृति

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि $D = 0$ हो, तो मूलों की प्रकृति कैसी होगी?

(अ) दो भिन्न वास्तविक मूल

(ब) कोई वास्तविक मूल नहीं

(स) दो बराबर वास्तविक मूल

(द) इनमें से कोई नहीं

2. समीकरण $2x^2 - 4x + 3$ का विविक्तकर है–

(अ) 8 (ब) –8

(स) 40 (द) 0

3. समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ के मूलों की प्रकृति है–

(अ) वास्तविक और भिन्न

(ब) वास्तविक और समान

(स) वास्तविक नहीं

(द) इनमें से कोई नहीं

4. द्विघात समीकरण $\frac{3}{4}x^2 - 8x - 3 = 0$ के विविक्तकर (D) का मान निम्नलिखित में से कौन–सा होगा?

(अ) 55 (ब) 73

(स) 81 (द) 47

5. a के किस मान के लिए समीकरण $x^2 + 4x + a = 0$ के मूल वास्तविक और समान होंगे, वह है–

(अ) 1 (ब) 2

(स) 3 (द) 4

उत्तर : 1. (स), **2.** (ब), **3.** (ब), **4.** (ब), **5.** (द)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. गुणनखण्ड विधि द्वारा समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ को हल कीजिए।

हल : $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$

$x(x-5) + 2(x-5) = 0$

$(x-5)(x+2) = 0$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

अतः $x = -2$ और 5

2. गुणनखण्ड विधि द्वारा समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ को हल कीजिए।

हल : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x^2 + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$

$x\left(\sqrt{2}x + 5\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{2}x + 5\right) = 0$

$\left(\sqrt{2}x + 5\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$

$\sqrt{2}x + 5 = 0$	$x + \sqrt{2} = 0$
$x = \frac{-5}{\sqrt{2}}$	$x = -\sqrt{2}$
$x = \frac{-5\sqrt{2}}{2}$	

अतः $x = \frac{-5\sqrt{2}}{2}$ और $-\sqrt{2}$ है।

3. यदि समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ के दो समान मूल हों, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : समान मूल के लिए, $b^2 - 4ac = 0$

यहाँ $a = 2, b = k, c = 3$ है।

$k^2 - 4(2)(3) = 0$

$k^2 - 24 = 0$

$k^2 = 24$

$k = \pm\sqrt{24}$

$k = \pm 2\sqrt{6}$

4. यदि समीकरण $3x^2 + px + 4 = 0$ का एक मूल $\frac{2}{3}$ है, तो p का मान क्या होगा?

हल : चूँकि $\frac{2}{3}$ समीकरण का एक मूल है,

अतः $x = \frac{2}{3}$ रखने पर $3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + p\left(\frac{2}{3}\right) + 4 = 0$

$3\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2p}{3} + 4 = 0$

$\frac{4}{3} + \frac{2p}{3} + 4 = 0$

पूरी समीकरण को 3 से गुणा करने पर,

$4 + 2p + 12 = 0$

$2p + 16 = 0$

$2p = -16 \Rightarrow p = -8$

दीर्घ–उत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक प्रार्थना कक्ष का क्षेत्रफल 300 m^2 है। उसकी लम्बाई चौड़ाई के दोगुने से 1 मीटर अधिक है। लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना चौड़ाई = x मीटर

तब लम्बाई = (2x + 1) मीटर

प्रार्थना कक्ष का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$300 = (2x + 1)x$

$2x^2 + x - 300 = 0$

गुणनखण्ड करने पर,

$2x^2 + 25x - 24x - 300 = 0$

$x(2x + 25) - 12(2x + 25) = 0$

$(2x + 25)(x - 12) = 0$

$x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

$2x + 25 = 0$

$\Rightarrow x = -12.5$ (लम्बाई ऋणात्मक नहीं होती)

अतः चौड़ाई (x) = 12 मीटर

लम्बाई (2x + 1) = 2(12) + 1 = 25 मीटर

2. एक कुटीर उद्योग एक दिन मे कुछ बर्तन बनाता है। प्रत्येक बर्तन की निर्माण लागत उस दिन बनाए गए बर्तनों की संख्या के दोगुने से ₹ 5 अधिक है। यदि कुल लागत ₹ 168 है, तो बर्तनों की संख्या और प्रत्येक बर्तन की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : माना बर्तनों की संख्या = x

प्रत्येक बर्तन की लागत = ₹(2x + 5)

कुल लागत = बर्तनों की संख्या × एक बर्तन की लागत

$168 = x(2x + 5)$

$2x^2 + 5x - 168 = 0$

गुणनखण्ड करने पर,

$2x^2 + 21x - 16x - 168 = 0$

$x(2x + 21) - 8(2x + 21) = 0$

$(2x + 21)(x - 8) = 0$

$2x + 21 = 0$	$x - 8 = 0$
$x = \frac{-21}{2}$	$x = 8$

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

बर्तनों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती।

अतः बर्तनों की संख्या = 8

प्रत्येक बर्तन की लागत = 2(8) + 5 = 16 + 5 = ₹21

3. रोहन की माँ उससे 20 वर्ष बड़ी है। अब से 5 बर्ष बाद उनकी आयु का गुणनफल 525 होगा। रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना रोहन की वर्तमान आयु x वर्ष है, तो रोहन की माँ की वर्तमान आयु (x + 20) वर्ष होगी।

5 वर्ष बाद,

रोहन की आयु = (x + 5) वर्ष

माँ की आयु = (x + 20 + 5) = (x + 25) वर्ष

प्रश्नानुसार, 5 वर्ष बाद उनकी आयु का गुणनफल 525 है।

$(x + 5)(x + 25) = 525$

$x^2 + 25x + 5x + 125 = 525$

$x^2 + 30x - 400 = 0$

गुणनखण्ड करने पर,

$x^2 + 40x - 10x - 400 = 0$

$x(x + 40) - 10(x + 40) = 0$

$(x + 40)(x - 10) = 0$

$x + 40 = 0$	$x - 10 = 0$
$x = -40$	$x = 10$

अतः x = 10 (आयु धनात्मक होती है।)

रोहन की वर्तमान आयु 10 वर्ष होगी।

4. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 272 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना पहला धनात्मक पूर्णांक x है।

अतः अगला क्रमागत धनात्मक पूर्णांक x + 1 होगा।

प्रश्नानुसार,

$x(x + 1) = 272$

$x^2 + x - 272 = 0$

$x^2 + 17x - 16x - 272 = 0$

$x(x + 17) - 16(x + 17) = 0$

$(x + 17)(x - 16) = 0$

अतः $x + 17 = 0$ या $x - 16 = 0$

$x = -17$ या $x = 16$

चूँकि पूर्णांक धनात्मक हैं, इसलिए x = –17 स्वीकार्य नहीं है।

अतः पहला धनात्मक पूर्णांक 16 तथा अगला धनात्मक पूर्णांक 17 है।

5. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योग 313 हो।

हल : माना पहला धनात्मक पूर्णांक x है।

अतः अगला क्रमागत धनात्मक पूर्णांक x + 1 होगा।

प्रश्नानुसार,

$x^2 + (x + 1)^2 = 313$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$

$2x^2 + 2x - 312 = 0$

$x^2 + x - 156 = 0$

$x^2 + 13x - 12x - 156 = 0$

$x(x + 13) - 12(x + 13) = 0$

$(x + 13)(x - 12) = 0$

अतः $x = -13$ या $x = 12$

चूँकि हमें धनात्मक पूर्णांक ज्ञात करना है, इसलिए x = 12 होगा।

अतः दोनों क्रमागत धनात्मक पूर्णांक 12 और 13 हैं।

6. दो धनात्मक संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना बड़ी धनात्मक संख्या x तथा छोटी धनात्मक संख्या y है।

प्रश्नानुसार,

$x^2 - y^2 = 180$ ..... (i)

तथा $y^2 = 8x$ .....(ii)

समीकरण (ii) से y^2 का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$x^2 - 8x = 180$

$x^2 - 8x - 180 = 0$

$x^2 - 18x + 10x - 180 = 0$

$x(x - 18) + 10(x - 18) = 0$

$(x - 18)(x + 10) = 0$

अतः $x = 18$ या $x = -10$

बड़ी धनात्मक संख्या के लिए x = 18

अब, $y^2 = 8x$

$y^2 = 8 \times 18 = 144$

$y = 12$

अतः दोनों संख्याएँ 12 और 18 है।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

5 समान्तर श्रेढ़ियाँ

समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद $a_n = 7n - 4$ है, तो उसका सार्व अन्तर क्या है?

(अ) 7 (ब) 7n

(स) – 4 (द) 4

2. समान्तर श्रेढ़ी 5, 9, 13, ... का 20वाँ पद है–

(अ) 77 (ब) 81

(स) 85 (द) 89

3. दो समान्तर श्रेढ़ी का सार्व अन्तर समान है। उनके प्रथम पद – 1 और –8 हैं। उनके 10वें पदों का अंतर है–

(अ) – 7 (ब) 0

(स) 7 (द) 9

4. यदि $a = 3$ तथा $d = -2$ हो, तो a_{15} बराबर है–

(अ) – 23 (ब) – 25

(स) 25 (द) 31

5. 60 पदों वाली समान्तर श्रेढ़ी 7 और अंतिम पद 125 है। उसका 32वाँ पद है–

(अ) 67 (ब) 73

(स) 71 (द) 69

6. किसी समान्तर श्रेढ़ी में $a_7 = 19$ और $a_{13} = 37$ है। सार्वअन्तर है–

(अ) 2 (ब) 3

(स) 4 (द) 6

7. किसी समान्तर श्रेढ़ी का चौथा पद 14 और नौवाँ पद 34 है। उसका प्रथम पद है–

(अ) –2 (ब) 0

(स) 2 (द) 4

8. यदि $x - 3, x + 1$ और $2x - 1$ समान्तर श्रेढ़ी के क्रमागत पद हैं, तो x का मान है–

(अ) 4 (ब) 5

(स) 6 (द) 7

9. यदि p, q, r समान्तर श्रेढ़ी में है, तो सही संबंध है–

(अ) $p + q = r$ (ब) $2q = p + r$

(स) $q^2 = pr$ (द) $2p = q + r$

10. समान्तर श्रेढ़ी 8, 10, 12, ..., 126 का अंत से 10वाँ पद है–

(अ) 108 (ब) 106

(स) 110 (द) 112

11. 40 पदों वाली समान्तर श्रेढ़ी में $a_{20} = 55$ तथा $d = 3$ है। a_{21} है–

(अ) 52 (ब) 55

(स) 58 (द) 61

12. यदि $a_n = 5n + 2$ हो, तो प्रथम पद है–

(अ) 2 (ब) 5

(स) 7 (द) 10

13. निम्न में से कौन–सी सूची समान्तर श्रेढ़ी नहीं है?

(अ) 2, 5, 8, 11 (ब) 3, 3, 3, 3

(स) –4, –1, 2, 5 (द) 1, 4, 9, 16

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

14. यदि $a_3 = 9$ तथा $a_8 = 24$ तो प्रथम पद है–0

(अ) 0 (ब) 3

(स) 6 (द) 9

15. किसी सभागार की पहली पंक्ति में 24 सीटें हैं और प्रत्येक अगली पंक्ति में 2 सीटें अधिक हैं। 15वीं पंक्ति में सीटें होगी–

(अ) 48 (ब) 50

(स) 52 (द) 54

उत्तर : 1. (अ), **2.** (ब), **3.** (स), **4.** (ब), **5.** (द), **6.** (ब), **7.** (स), **8.** (स), **9.** (ब), **10.** (अ), **11.** (स), **12.** (स), **13.** (द), **14.** (ब), **15.** (स)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. समान्तर श्रेढ़ी 12, 9, 6, ... का 25वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 12, d = 9 - 12 = -3$

$a_{25} = a + 24d = 12 + 24(-3)$

$a_{25} = 12 - 72 = -60$

अतः 25वाँ पद –60 हैं।

2. जाँच कीजिए कि 301 समान्तर श्रेढ़ी 5, 11, 17, ... का कोई पद है या नहीं।

हल : यहाँ $a = 5, d = 6$

माना $301 = a_n$

$301 = 5 + (n-1)6 = 6n - 1$

$6n = 302$

$n = \frac{151}{3}$

n धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

अतः 301 इस समान्तर श्रेढ़ी का पद नहीं है।

3. समान्तर श्रेढ़ी 7, 11, 15, ..., 139 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 7, d = 4, l = 139$

$139 = 7 + (n-1)4$

$132 = 4(n-1)$

$n - 1 = 33$

अतः कुल 34 पद हैं।

4. किसी समान्तर श्रेढ़ी का 8वाँ पद उसके चौथे पद का तीन गुना है और 15वाँ पद 39 हैं, तो समान्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हल :

$a_8 = 3a_4$	प्रश्नानुसार,
$a + 7d = 3(a + 3d)$	$a_{15} = 39$
$a + 7d = 3a + 9d$	$a + 14d = 39$
$a - 3a = 9d - 7d$	$-d + 14d = 39$
$-2a = 2d$	$13d = 39$
$a = -d$	$d = 3 \Rightarrow a = -3$

अतः समान्तर श्रेढ़ी –3, 0, 3, 6, ... है।

5. समान्तर श्रेढ़ी 4, 9, 14, ... और 7, 11, 15, ... के कौन–से क्रमांक के पद समान हैं?

हल : माना इनके nवें पद समान है।

पहली समान्तर श्रेढ़ी: $a_n = 4 + 5(n-1) = 5n - 1$

दूसरी समान्तर श्रेढ़ी: $A_n = 7 + 4(n-1) = 4n + 3$

प्रश्नानुसार,

$a_n = A_n$

$5n - 1 = 4n + 3 \quad \Rightarrow n = 4$

अतः दोनों समांतर श्रेढ़ी के चौथे पद समान हैं।

6. एक कर्मचारी का प्रारंभिक मासिक वेतन ₹18,000 है और हर वर्ष ₹1200 बढ़ता है। 8वें वर्ष का मासिक वेतन ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 18000, d = 1200, n = 8$

$a_n = a + (n-1)\,d$

$a_8 = 18000 + (8-1) \times 1200$

$a_8 = 18000 + 7 \times 1200 = 26,400$

अतः 8वें वर्ष का मासिक वेतन ₹26,400 है।

7. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद $a_n = 8 - 3n$ है, तो उसके प्रथम चार पद तथा 25वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : $a_1 = 5$

$a_2 = 8 - 3(2) = 2$

$a_3 = 8 - 3(3) = -1$

$a_4 = 8 - 3(4) = -4$

$a_{25} = 8 - 3(25)$

$a_{25} = 8 - 75 = -67$

अतः प्रथम चार पद 5, 2, –1, –4 और 25वाँ पद –67 हैं।

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न –

1. एक खिलाड़ी की पहली सप्ताह की थ्रो–दूरी 7.20 मीटर है। वह प्रत्येक सप्ताह 0.15 मीटर सुधार करती है। (i) 18वें सप्ताह की दूरी,

(ii) 10.35 मीटर की दूरी किस सप्ताह प्राप्त होगी।

हल : खिलाड़ी द्वारा फेंके गये थ्रो का दूरी क्रमः

7.20, 7.35, 7.50, ...

$a = 7.20, d = 0.15$

$a_n = a + (n-1)\, d$

(i) $a_{18} = 7.20 + (18-1) \times 0.15$

$= 7.20 + 17 \times 0.15 = 9.75$ मीटर

(ii) माना nवाँ पद 10.35 है, तो $10.35 = a_n$

$10.35 = 7.20 + (n-1)0.15$

$3.15 = 0.15\,(n-1)$

$n - 1 = 21$

$n = 22$

अतः 18वें सप्ताह दूरी 9.75 मीटर और 10.35 मीटर दूरी 22वें सप्ताह प्राप्त होगी।

2. 60 पदों वाली समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 7 और अंतिम पद 125 हैं। (i) d, (ii) 32वाँ पद, (iii) अंत से 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 7, \quad l = 125, \quad n = 60$

$l = a + (n-1)d,$

(i) $125 = 7 + 59d$

$59d = 118$

$d = 2$

(ii) $a_{32} = a + 31d$

$a_{32} = 7 + 31 \times 2 = 69$

(iii) अंत में 10वाँ पद = आरंभ से $(60 - 10 + 1) = 51$वाँ।

$a_{51} = 7 + 50 \times 2 = 107$

अतः $d = 2$, 32वाँ पद 69 और अंत से 10वाँ पद 107 है।

3. एक सभागार में पहली पंक्ति में 20 सीटें हैं और हर अगली पंक्ति में 3 सीटें अधिक हैं, किसी पंक्ति में 104 सीटें होंगी?

हल : $a = 20, d = 3$

माना nवीं पंक्ति में 104 सीटें होगी, तब

$a_n = 104$

$104 = 20 + 3(n-1) \qquad \{a_n = a + (n-1)d\}$

$84 = 3(n-1)$

$n = 29$

29वीं पंक्ति में 104 सीटें होंगी।

4. एक सीढ़ी के 18 डंडों की लम्बाइयाँ नीचे से ऊपर की ओर प्रत्येक बार 2 सेमी. घटती हैं। सबसे नीचे का डंडा 45 सेमी. हैं। (i) सबसे ऊपर के डंडे, (ii) ऊपर से 6वें डंडे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 45$ cm, $\quad d = -2, \quad n = 18$

$a_n = a + (n-1)d$

(i) सबसे ऊपर के डंडे की लंबाई $= a_{18}$

$a_{18} = a + 17d$

$a_{18} = 45 + 17(-2) = 11$ cm

(ii) ऊपर से 6वें डंडे की लंबाई = नीचे से $(18 - 6 + 1)$ डंडे की लंबाई = नीचे से 13वाँ डंडे की लंबाई

$a_{13} = a + 12d$

$a_{13} = 45 + 12(-2) = 21$ सेमी.

अतः सबसे ऊपर का डंडा 11 सेमी. ओर ऊपर से 6वाँ डंडा 21 सेमी. का हैं।

5. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का mवाँ पद n और nवाँ पद m है, तो सिद्ध कीजिए कि उसका (m + n)वाँ पद 0 है।

हल : माना प्रथम पद a और सार्वअंतर d हैं, तो

$a + (m-1)d = n$ ..... (i)

$a + (n-1)d = m$ .....(ii)

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर,

$a + (m-1)\, d - [a + (n-1)d] = n - m$

$md - d - nd + d = n - m$

$d\,(m-n) = n - m \quad \Rightarrow \quad d\,(m-n) = -(m-n)$

$d = -1$

समीकरण (i) में $d = -1$ रखने पर,

$a - m + 1 = n$

$a = m + n - 1$

$\because \; a_{m+n} = a + (m + n - 1)d$

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

$\therefore$ $(m + n - 1) - (m + n - 1) = 0$

अतः सिद्ध हुआ कि $(m + n)$वाँ पद 0 हैं।

6. टैक्सी का पहले किलोमीटर का किराया ₹20 है और प्रत्येक अतिरिक्त किलोमीटर पर ₹8 बढ़ते हैं, तो ज्ञात कीजिए: (i) 25 किलोमीटर का किराया, (ii) ₹340 किराया कितने किलोमीटर के लिए होगा?

हल : टैक्सी के किराये का क्रम : 20, 28, 36, ...

$a = 20, d = 8$

$a_n = a + (n - 1)d$

(i) 25 किलोमीटर का किराया = a_{25}

$a_{25} = a + 24d$

$a_{25} = 20 + 24 \times 8 = 212$

(ii) माना n किलोमीटर का किराया ₹340 होगा।

$a_n = 340$

$20 + 8 (n - 1) = 340$

$8(n - 1) = 320$

$n - 1 = 40 \Rightarrow n = 41$

अतः 25 किलोमीटर का किराया ₹212 और ₹340 किराया 41 किलोमीटर के लिए है।

प्रथम n पदों का योग

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, ... के प्रथम 20 पदों का योग है–

(अ) 780 (ब) 800

(स) 820 (द) 840

2. प्रथम 25 प्राकृत संख्याओं का योग है।

(अ) 300 (ब) 315

(स) 350 (द) 325

3. 7 के प्रथम 10 धनात्मक गुणजों का योग हैं–

(अ) 350 (ब) 365

(स) 385 (द) 420

4. यदि $S_n = 3n^2 + 2n$ हो, तो a_n है–

(अ) $6n - 1$ (ब) $6n + 1$

(स) $3n + 2$ (द) $3n - 1$

5. यदि $S_{20} = 500$ तथा $S_{19} = 456$ हो, तो a_{20} है–

(अ) 40 (ब) 42

(स) 44 (द) 46

6. यदि $S_n = n^2 + 4n$ हो, तो समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर है–

(अ) 1 (ब) 2

(स) 3 (द) 4

7. यदि $a_n = 3 + 2n$ हो, तो प्रथम 15 पदों का योग है–

(अ) 255 (ब) 270

(स) 285 (द) 300

8. समान्तर श्रेढ़ी 2, 5, 8, ... के कितने पदों का योग 155 है?

(अ) 8 (ब) 9

(स) 10 (द) 11

9. समान्तर श्रेढ़ी 1, 4, 7, ... के कितने पदों का योग 117 है?

(अ) 8 (ब) 11

(स) 10 (द) 9

10. पहले महीने ₹500 की बचत और हर महीने ₹100 अधिक बचत की जाए, तो 12 महीनों की कुल बचत है–

(अ) ₹12600 (ब) ₹12000

(स) ₹11600 (द) ₹13200

11. समान्तर श्रेढ़ी के सभी पदों का औसत बराबर होता है–

(अ) $a + d$ (ब) $\frac{(a+l)}{2}$

(स) $a + l$ (द) $l - a$

12. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम और अंतिम पद का योग 40 तथा पदों की संख्या 15 है, तो पदों का योग है–

(अ) 250 (ब) 280

(स) 300 (द) 320

13. 20 पदों वाली समान्तर श्रेढ़ी में $a_1 + a_{20} = 52$ है, तो S_{20} है–

(अ) 500 (ब) 510

(स) 515 (द) 520

14. यदि $S_n = 2n^2 + 3n$ हो, तो प्रथम पद है–

(अ) 2 (ब) 3

(स) 5 (द) 7

उत्तर : 1. (स), **2.** (द), **3.** (स), **4.** (अ), **5.** (स), **6.** (ब), **7.** (स), **8.** (स), **9.** (अ), **10.** (अ), **11.** (ब), **12.** (स), **13.** (द), **14.** (स)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. 6 के प्रथम 30 धनात्मक गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : 6 के प्रथम 30 धनात्मक गुणज = 6, 12, 18, ..., 180

$a = 8, \quad d = 6, \quad l = 180$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$$S_{30} = \frac{30}{2}[6 + 180]$$

$S_{30} = 2790$

अतः योग 2790 है।

2. 100 से 200 तक सभी पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 100, l = 200, n = 200 - 100 + 1 = 101$

$$S_n = \frac{101}{2}[100 + 200] \qquad \left\{S_n = \frac{n}{2}[a + l]\right\}$$

$= 101 \times 150 = 15150$

अतः योग 15150 है।

3. 50 और 300 के बीच 7 के गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : 50 और 300 के बीच 7 के गुणज : 56, 63, ..., 294

$a = 56, d = 7, l = 294$

$l = a + (n - 1) \times d$

$$n = \frac{(294 - 56)}{7} + 1 = 35$$

$$S_{35} = \frac{35}{2}(56 + 294) \qquad \left\{S_n = \frac{n}{2}[a + l]\right\}$$

$S_{35} = 35 \times 175 = 6125$

अतः योग 6125 है।

4. समान्तर श्रेढ़ी 4, 9, 14, ... के कितने पदों का योग 319 है?

हल : $a = 4, d = 5, S_n = 319$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$319 = \frac{n}{2}[8 + 5(n - 1)]$$

$$319 = \frac{n(5n + 3)}{2} \quad \Rightarrow \quad 638 = n(5n + 3)$$

$5n^2 + 3n - 638 = 0$

$(n - 11)(5n + 58)$

$n - 11 = 0, 5n + 58 = 0$

$$n = 11, \quad n = \frac{-58}{5}$$

n सदैव धनात्मक पूर्णांक होता है।

अतः $n = 11$

11 पदों का योग 319 है।

5. यदि $S_n = 4n^2 + n$ है, तो 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : $a_n = S_n - S_{n-1}$

$a_n = (4n^2 + n) - [4(n - 1)^2 + (n - 1)]$

$a_n = 8n - 3$

$n = 15$ रखने पर

$a_{15} = 8 \times 15 - 3 = 117$

अतः 15वाँ पद 117 है।

6. एक प्रशिक्षण शिविर में पहले दिन 40 थ्रो फेंके गए और प्रत्येक अगले दिन 12 थ्रो अधिक किए गए। 15 दिनों में फेंके गए कुल थ्रो ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 40, d = 12, n = 15$

$$S_{15} = \frac{15}{2}[80 + 14 \times 12] \qquad \left\{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]\right\}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(248)$$

$S_{15} = 1860$

अतः 15 दिनों में कुल 1860 थ्रो किए गए।

7. आठ परतों में जारों की संख्या 3, 6, 9, ... है। कुल जार ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 3, d = 3, n = 8, a_8 = 24$

$$S_8 = \frac{8}{2}(3 + 24) = 108 \qquad \left\{S_n \frac{n}{2}[a + l]\right\}$$

अतः कुल 108 थ्रो किए गए।

8. 10 पुरस्कारों की राशियाँ ₹5000, ₹4500, ₹4000, ... हैं। कुल पुरस्कार राशि ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 5000, d = -500, n = 10,$

$l = a + 9d$

$l = 5000 + 9 \times (-500) = 500$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(5000 + 500) \qquad \left\{S_n \frac{n}{2}[a + l]\right\}$$

$S_{10} = ₹27500$

अतः 10 पुरस्कारों की कुल राशि ₹27500 है।

9. पहले जन्मदिन पर गुल्लक में ₹100 डाले जाते हैं और हर वर्ष ₹50 अधिक। 18वें जन्मदिन तक कुल राशि ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 100, d = 50, n = 18, a_{18} = 950$

$$S_{18} = \frac{18}{2}(100 + 950) = 9 \times 1050$$

$= ₹9450$

अतः कुल राशि ₹9450 है।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न –

पढ़ाई चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

1. किसी समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद $a_n = 3 + 2n$ है। (i) प्रथम पद और सार्व अंतर, (ii) प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $n = 1$ रखने पर, $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 7$, अतः $d = a_2 - a_1$

$d = 7 - 5 = 2$

$a_{15} = 3 + 2 \times 15 = 33$

$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) \qquad \left\{S_n \frac{n}{2}[a + l]\right\}$

$= \frac{15}{2}(5 + 33) = 285$

अतः $a = 15, d = 2$ और प्रथम 15 पदों का योग 285 है।

2. लकड़ियों की एक ढेरी की सबसे नीचे की पंक्ति में 20 गट्टे है और ऊपर की प्रत्येक पंक्ति में एक गट्टा कम हैं। सबसे ऊपर 5 गट्टे हैं। पंक्तियों की संख्या तथा कुल गट्टों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 20, d = -1, l = 5$

$l = a + (n - 1)d$

$5 = 20 + (n - 1)(-1) \Rightarrow 15 = n - 1$

$n = 16$

$S_{16} = \frac{16}{2}(20 + 5) \qquad \left\{S_n = \frac{n}{2}[a + l]\right\}$

$S_{16} = 8 \times 25 = 200$

अतः कुल पंक्तियाँ 16 और कुल गट्टे 200 हैं।

3. किसी समान्तर श्रेढ़ी में $S_5 = 35$ और $S_{10} = 120$ है। a, d तथा S_{20} ज्ञात कीजिए।

हल : $S_5 = \frac{5}{2}[2a + 4d] = 35$

$a + 2d = 7 \qquad \ldots\ldots\ldots (i)$

$S_{10} = \frac{10}{2}[2a + 9d] = 120$

$2a + 9d = 24 \qquad \ldots\ldots\ldots (ii)$

समीकरण (i) को 2 से गुणा करके समीकरण (ii) से घटाने पर,

$2a + 9d = 24$

$\underline{-\ 2a \pm 4d = \pm 14}$

$5d = 10$

$d = 2$

समीकरण (i) से

$a + 2 \times 2 = 7$

$a = 3$

अब

$S_{20} = \frac{20}{2}[6 + 19 \times 2] \qquad \left\{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]\right\}$

$= 10 \times 44 = 440$

अतः $a = 3, d = 2$ और $S_{20} = 440$ है।

5. यदि $S_n = 3n^2 + 5n$ है, तो (i) समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम चार पद, (ii) S_{25} ज्ञात कीजिए।

हल : $a_n = S_n - S_{n-1}$

$a_n = (3n^2 + 5n) - [3(n - 1)2 + 5(n - 1)] = 6n + 2$

$a_1 = 6(1) + 2 = 8$

$a_2 = 6(2) + 2 = 14$

$a_3 = 6(3) + 2 = 20$

$a_4 = 6(4) + 2 = 26$

प्रश्नानुसार

$S_n = 3n^2 + 5n$

$n = 25$ रखने पर

$S_{25} = 3 \times 625 + 5 \times 25$

$= 1875 + 125 = 2000$

अतः प्रथम चार पद 8, 14, 20, 26 और $S_{25} = 2000$ है।

6. वृक्षारोपण में पहली पंक्ति में 5 पौधे और प्रत्येक अगली पंक्ति में 3 पौधे अधिक लगाए जाते हैं। कुल 670 पौधे लगाए गए। पंक्तियों की संख्या और अंतिम पंक्ति में पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : $a = 5, d = 3$ और $S_n = 670$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$670 = \frac{n}{2}[10 + 3(n - 1)]$

$670 = \frac{n(3n + 7)}{2}$

$1340 = 3n^2 + 7n$

$3n^2 + 7n - 1340 = 0$

$(n - 20)(3n + 67) = 0$

$n - 20 = 0, 3n + 67 = 0$

धनात्मक हल $n = 20$

अंतिम पंक्ति $a_{20} = 5 + 19 \times 3 = 62$

अतः 20 पंक्तियाँ हैं और अंतिम पंक्ति में 62 पौधे हैं।

6 त्रिभुज

समरूप आकृतियाँ और मूल अवधारणाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. दो आकृतियाँ समरूप कहलाती हैं, जब उनका ..... समान हो; उनके आमाप समान होना आवश्यक नहीं है।

(अ) क्षेत्रफल (ब) आकार

(स) परिमाप (द) स्थान

2. निम्न में से कौन–सा कथन सदैव सत्य है?

(अ) सभी आयत समरूप होते हैं

(ब) सभी समद्विबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं

(स) सभी वृत्त समरूप होते हैं

(द) सभी समांतर चतुर्भुज समरूप होते हैं

3. समान संख्या में भुजाओं वाले दो बहुभुज समरूप होंगे, यदि

(अ) केवल संगत कोण बराबर हों

(ब) केवल संगत भुजाएँ समानुपाती हों

(स) संगत कोण बराबर और संगत भुजाएँ समानुपाती हों

(द) उनके क्षेत्रफल बराबर हों

4. 8 सेमी ×6 सेमी और 12 सेमी × 9 सेमी के आयत

(अ) समरूप हैं

(ब) सर्वांगसम हैं

(स) न समरूप, न सर्वांगसम

(द) केवल समान क्षेत्रफल वाले हैं

उत्तर : 1. (ब), **2.** (स), **3.** (स), **4.** (अ)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. समरूप आकृतियों की परिभाषा लिखिए तथा दो उदाहरण दीजिए।

हल : जिन आकृतियों का आकार समान हो, परंतु आमाप समान होना आवश्यक न हो, वे समरूप आकृतियाँ कहलाती हैं। उदाहरणः–

(i) वृत्त (ii) वर्ग

2. एक वृत्त और एक वर्ग समरूप क्यों नहीं हैं?

हल : समरूपता के लिए आकृतियों का आकार समान होना चाहिए। वृत्त में कोई सीधी भुजा या शीर्ष नहीं होता, जबकि वर्ग में चार सीधी भुजाएँ और चार शीर्ष होते हैं। अतः वृत्त और वर्ग समरूप नहीं है।

3. प्रमाणित कीजिए कि कोई भी दो समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं।

हल : मान लें ΔABC और ΔPQR समबाहु त्रिभुज हैं। समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होता है।

ΔABC और ΔPQR में

$\angle A = \angle P$

$\angle B = \angle Q$

$\angle C = \angle R$

AAA समरूपता से

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि ΔABC में DE ||BC, तो आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

(अ) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (ब) $\frac{AD}{AB}=\frac{EC}{AC}$

(स) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{AE}$ (द) $\frac{DE}{BC}=\frac{DB}{EC}$

2. DE||BC, AD = 3cm, DB = 2 cm और AE = 4.5 cm है, तो EC =

(अ) 2cm (ब) 3cm

(स) 4cm (द) 6cm

3. DE||BC और $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{5}$ है। तब $\frac{DE}{BC}$ =

(अ) $\frac{2}{5}$ (ब) $\frac{3}{5}$

(स) $\frac{5}{3}$ (द) $\frac{3}{2}$

4. यदि $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, तो DE और BC के बारे में सही निष्कर्ष है।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

(अ) DE||BC
(ब) DE, BC के समानांतर नहीं हो सकती
(स) DE = BC (द) DE ⊥ BC

उत्तर : 1. (अ), **2.** (ब), **3.** (ब), **4.** (अ)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. ΔABC में DE||BC, AD = 4cm, DB = 6cm और AE = 5cm है। EC ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में DE||BC

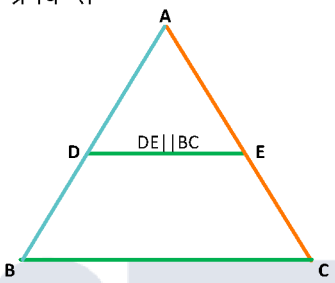
आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\frac{4}{6} = \frac{5}{EC}$

4EC = 30

EC = 7.5cm



2. D और E क्रमशः AB तथा AC पर हैं। यदि AD = 3cm, DB = 5cm, AE = 4.5cm और EC = 7.5 cm, तो सिद्ध कीजिए कि DE||BC।

हल : $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ तथा $\frac{AE}{EC} = \frac{4.5}{7.5} = \frac{3}{5}$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

अतः आधारभूत समानुपातिक प्रमेय के विलोम से

DE || BC

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. ΔABC में DE || BC, AD = (x - 1) cm, DB = (x + 1) cm, AE = 6cm और EC = 10cm है, तो x ज्ञात कीजिए। यदि BC = 24cm, तो DE भी ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में

DE||BC

आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से

$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

$\frac{x-1}{x+1} = \frac{6}{10}$

5x – 5 = 3x + 3

2x = 8

x = 4

इसलिए AD = 3cm, DB = 5cm और AB = 8cm

ΔADE ~ ΔABC से

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

अतः $24 \times \frac{3}{8} = DE$

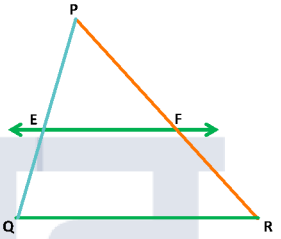
DE = 9 cm

2. आकृति में, PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm है तो क्या EF || QR है?

हल : ΔPQR में

$\frac{PE}{QE} = \frac{3.9}{3} = \frac{39}{30}$

$\frac{PE}{QE} = \frac{13}{10}$



इसी प्रकार, $\frac{PE}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = \frac{36}{24} \Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{3}{2}$

अतः $\frac{PE}{QE} \neq \frac{PF}{FR}$

इसलिए EF ∦ QR

(EF, QR के समांतर नहीं है)

त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि दो त्रिभुजों की तीनों संगत भुजाएँ समानुपाती हों, तो कसौटी है

(अ) AA (ब) SSS
(स) SAS (द) ASA सर्वांगसमता

2. यदि ΔABC ~ ΔDEF, तो सही अनुपात है।

(अ) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ (ब) $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{DE}$

(स) $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{EF}$ (द) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{EF}$

3. ΔABC में ∠A = 60°, ∠B = 70° और ΔDEF में ∠D = 60°, ∠E = 70° है, तो दोनों त्रिभुज

(अ) AA से समरूप (ब) SSS से समरूप
(स) सर्वांगसम अवश्य (द) समरूप नहीं

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

4. दो भुजाएँ समानुपाती हों और एक गैर–सम्मिलित कोण बराबर हो, तो

(अ) SAS हमेश लागू होगा

(ब) समरूपता निश्चित नहीं

(स) SSS लागू होगा

(द) AA लागू होगा

5. यदि ∠A का संगत ∠D, ∠B का संगत ∠F और ∠C का संगत ∠E समान है, तो सही समरूपता क्रम है।

(अ) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(ब) $\Delta ABC \sim \Delta DFE$

(स) $\Delta ABC \sim \Delta EFD$

(द) $\Delta ABC \sim \Delta FED$

उत्तर : 1. (ब), **2.** (अ), **3.** (अ), **4.** (ब), **5.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. ΔABC में DE || BC है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$।

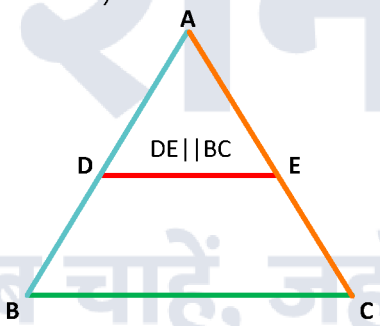
हल : ΔADC और ΔABC में

$\angle ADE = \angle ABC$ (संगत कोण)

$\angle AED = \angle ACB$ (संगत कोण)

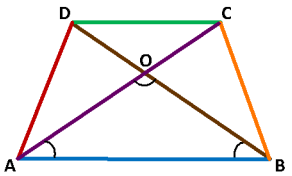
AA समरूपता से

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$



2. यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\angle A = 45°$ और $\angle B = 65°$ है। $\angle R$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$



$\angle A = \angle P = 45°$

$\angle B = \angle Q = 65°$

$\angle C = \angle R$

(समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$

$45° + 65° + \angle R = 180°$

$\angle R = 70°$

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. समलंब ABCD में AB||DC है तथा विकर्ण AC और BD बिंदु O पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta AOB \sim \Delta COD$ और $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$।

हल : ΔAOB और ΔDOC में

$\angle AOB = \angle DOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle OAB = \angle OCD$ (एकांतर कोण)

$\angle OBA = \angle ODC$ (एकांतर कोण)

AA समरूपता से,

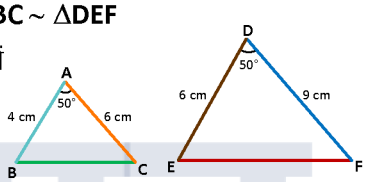
$\Delta AOB \sim \Delta DOC$

समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती है।

अतः $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

2. यदि ΔABC में, $\angle A = 50°$, AB = 4 cm और AC = 6 cm है तथा ΔDEF में, $\angle D = 50°$, DE = 6 cm और DF = 9 cm हो तो सिद्ध करो कि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

हल : ΔABC और ΔDEF में



$\angle A = \angle D = 50°$

$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$

$\frac{AC}{DF} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$

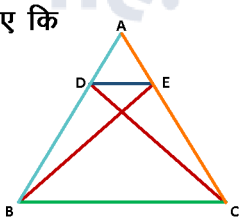
(i) $\angle A = \angle D$

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

SAS समरूपता से

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

3. यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ हैं तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।



हल : दिया गया है:

$\Delta ABE \cong \Delta ACD$ हैं।

सिद्ध करना है : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

उपपत्ति : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ (दिया गया है)

तथा AB = AC

AE = AD (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

तो $\frac{AB}{AC} = 1$ ..... (i)

तो $\frac{AD}{AE} = 1$ ..... (ii)

(i) तथा (ii) से

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ .....(iii)

पढ़ें: जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

ΔADE व ΔABC में $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (समीकरण (iii) से)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\therefore$ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (भुजा–कोण–भुजा समरूपता कसौटी से)

समरूप त्रिभुजों के अनुप्रयोग

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. 1.5 m ऊँचे व्यक्ति की छाया 2m है, तो उसी समय पेड़ की छाया 12m है। पेड़ की ऊँचाई होगी।

(अ) 6mस (ब) 8m

(स) 9m (द) 12m

2. 1:100 के मॉडल में किसी दीवार की ऊँचाई 12cm है। वास्तविक ऊँचाई है।

(अ) 1.2m (ब) 12m

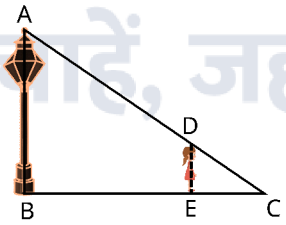
(स) 120m (द) 0.12m

उत्तर : 1. (स), **2.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. 90 cm की लंबाई वाली एक लड़की बल्ब लगे एक खंभे के आधार से परे 1.2 m/s की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 cm की ऊँचाई पर है, तो 4 सेंकड बाद उस लड़की की छाया की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB बल्ब लगे खंभे को तथा CD लडकी द्वारा खंभे के आधार से परे 4 सेंकड चलने के बाद उसकी स्थिति को प्रकट करते हैं।



आकृति से आप देख सकते हैं कि DE लड़की की छाया की लंबाई है। मान लीजिए DE, x m है।

अब BD = 1.2 m × 4 = 4.8 m

ध्यान दीजिए कि ΔABE और ΔCDE में,

$\angle E = \angle D$ (प्रत्येक 90° का है, क्योंकि बल्ब लगा खंभा और लड़की दोनों ही भूमि से ऊर्ध्वाधर खड़े हैं)

तथा $\angle B = \angle E$ (समान कोण)

अतः $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA समरूपता कसौटी)

इसलिए $\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{CD}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

अर्थात् $\frac{4.8+x}{x}=\frac{3.6}{0.9}$ $\left(90cm=\frac{90}{100}m=0.9m\right)$

अर्थात् $4.8 + x = 4x$

अर्थात् $3x = 4.8$

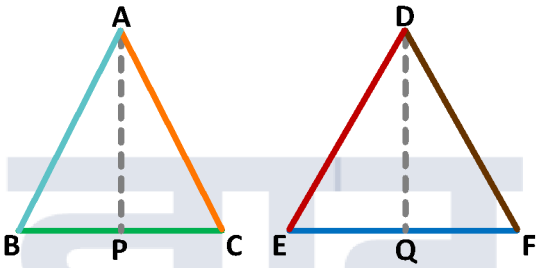
अर्थात् $x = 1.6$

अतः 4 सेंकड चलने के बाद लड़की की छाया की लंबाई 1.6 m है।

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि AP और DQ क्रमशः समरूप त्रिभुज ΔABC तथा ΔDEF की संगत माध्यिकाएँ हैं, तो प्रमाणित कीजिए कि $\frac{AP}{DQ}=\frac{AB}{DE}$ ।

हल :



दिया है $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

AP, BC की माध्यिका है।

$\frac{1}{2}BC = BP = PC$

DQ, EF की माध्यिका है।

$\frac{1}{2}EF = EQ = FQ$

$\therefore$ BC = EF (त्रिभुज समरूप है)

$\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}EF$

BP = EQ ..... (i)

ΔABP और ΔDEQ में

$\angle B = \angle E$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)

AB = DE (समरूप त्रिभुजों के संगत भुजाएँ)

EP = EQ (समी. (i) से)

SAS सर्वांगसमता से,

$\Delta ABP \cong \Delta DEQ$

$AB = DE \Rightarrow \frac{AB}{DE}=1$ (cpct)

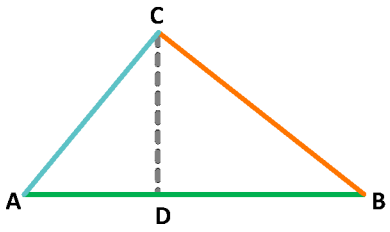
$AP = DQ \Rightarrow \frac{AP}{DQ}=1$

अतः $\frac{AP}{DQ}=\frac{AB}{DE}$

पढ़ना चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

2. यदि $\angle ACB = 90°$ तथा $CD \perp AB$ है, तो सिद्ध कीजिए–

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$$



हल :

ΔACD व ΔABC में

$\angle CAD = \angle BAC$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle ADC = \angle ACB$ (समकोण)

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$

अतः $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AC^2 = AB.AD$ ..... (i)

वज्रगुणन विधि से

तो इसी प्रकार

$\Delta BCD \sim \Delta BAC$

अतः $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

या $BC^2 = BA.BD$ ..... (ii)

(i) व (ii) से

$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA.BD}{AB.AD}$

या $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$

इतिसिद्धम।

7 निर्देशांक ज्यामिति

दूरी सूत्र

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. बिंदुओं (2, 3) और (4, 1) के बीच दूरी है–

(अ) 2 (ब) $2\sqrt{2}$

(स) 4 (द) $\sqrt{2}$

2. बिंदुओं (a, b) और (–a, –b) के बीच दूरी है–

(अ) $\sqrt{a^2 + b^2}$ (ब) $2\sqrt{a^2 + b^2}$

(स) a + b (द) 2a + 2b

3. मूलबिंदु से (6, 8) की दूरी है–

(अ) 8 (ब) 6

(स) 10 (द) 14

4. (0, 0) और (36, 15) के बीच दूरी है–

(अ) 36 (ब) 15

(स) 39 (द) 51

5. यदि (2, –3) और (10, y) के बीच दूरी 10 मात्रक है, तो y का मान हैं–

(अ) 3, –9 (ब) 3, 9

(स) –3, 9 (द) 0, 3

6. बिंदु (5, –2), (6, 4) और (7, –2) किस प्रकार का त्रिभुज बनाते हैं?

(अ) समबाहु (ब) समद्विबाहु

(स) विषमबाहु (द) त्रिभुज नहीं बनता

7. (m, n) और (m + 3, n + 4) के बीच दूरी है–

(अ) 3 (ब) 4

(स) 5 (द) 7

8. यदि (2, 3) और (x, 3) के बीच दूरी 7 इकाई है, तो x का मान है–

(अ) 9, –5 (ब) 7, –7

(स) 5, –9 (द) 2, 7

उत्तर : 1. (ब), **2.** (ब), **3.** (स), **4.** (स), **5.** (अ)
6. (ब), **7.** (स), **8.** (अ),

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. बिंदु (2, 3) और (4, 1) के बीच दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दूरी सूत्र से,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2. मूल बिंदु से बिंदु (–6, 8) की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मूल बिंदु से दूरी $= \sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$$

$$= 10 \text{ मात्रक}$$

3. x-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो (2, –5) और (–2, 9) से समदूरस्थ है।

हल : माना x-अक्ष पर स्थित बिंदु P(x, 0) है, बिंदु A(2, –5) और B(–2, 9) से समदूरस्थ है।

$$PA = PB$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (0-9)^2}$$

$$(x-2)^2 + (5)^2 = (x+2)^2 + (-9)^2$$

$$(x-2)^2 + 25 = (x+2)^2 + 81$$

$$x^2 - 4x + 4 + 25 = x^2 + 4x + 4 + 81$$

$$-4x + 29 = 4x + 85$$

$$x = -7$$

अतः x-अक्ष पर स्थित बिंदु (–7, 0) है।

4. बिंदु (x, y), बिंदुओं (7, 1) और (3, 5) से समदूरस्थ है, तो x और y में संबंध ज्ञात कीजिए।

हल : माना P(x, y) बिंदुओं A(7, 1) और B(3, 5) से समदूरस्थ है, तो

$$PA = PB$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$$

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

मिशन ज्ञान
एक जब चाह, जहाँ चाह, जैसे चाहें!

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$
$$= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$
$$-14x - 2y + 50 = -6x - 10y + 34$$
$$-8x + 8y + 16 = 0$$
$$x - y = 2$$

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. जाँच कीजिए कि बिंदु A (3, 1), B(6, 4) और C(8, 6) संरेखी है या नहीं।

हल : दूरी सूत्र से,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2}$$
$$= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2}$$
$$= \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

अब,

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

अतः तीनों बिंदु संरेखी है।

2. यदि बिंदुओ (k, 0) और (0, 6) के बीच दूरी 10 मात्रक है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना A(k, 0) और B(0, 6) के बीच की दूरी 10 मात्रक है तो AB = 10

दूरी सूत्र से

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(0-k)^2 + (6-0)^2} = 10$$
$$k^2 + 36 = 100$$
$$k^2 = 64$$
$$k = \pm 8$$
$$k = 8 \text{ या } k = -8$$

3. सिद्ध कीजिए कि बिंदु (3, 2), (–2, –3) और (2, 3) एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

हल : माना P(3, 2), Q(–2, –3) और R(2, 3) है, तो दूरी सूत्र से,

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2}$$
$$= \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

अब, $PQ^2 + PR^2 = 50 + 2 = 52 = QR^2$

पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है।

4. सिद्ध कीजिए कि बिंदु (1, 7), (4, 2), (–1, –1) और (–4, 4) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हल : माना A(1, 7), B(4, 2), C(–1, 1) और D(–4, 4) है तो दूरी सूत्र से

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-7)^2}$$
$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2}$$
$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-4+1)^2 + (4+1)^2}$$
$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(-4+1)^2 + (4+1)^2}$$
$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

अब विकर्ण:

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-7)^2}$$
$$= \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(-4-4)^2 + (4-2)^2}$$
$$= \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

यहाँ चारो भुजाएँ बराबर हैं और दोनो विकर्ण बराबर हैं।

अतः ABCD एक वर्ग है।

मिशन ज्ञान
पढ़ना चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

5. y-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो A(6, 5) और B(–4, 3) से समदूरस्थ है।

हल : माना y-अक्ष पर बिंदु P(0, y) है, तो

$$PA = PB$$

$$\sqrt{(6-0)^2+(5-y)^2} = \sqrt{(-4-0)^2+(3-y)^2}$$

$$(6)^2+(5-y)^2=(-4)^2+(3-y)^2$$

$$36+(5-y)^2=16+(3-y)^2$$

$$36+25-10y+y^2=16+9-6y+y^2$$

$$36=4y$$

$$y=9$$

y-अक्ष पर स्थित बिंदु (0, 9) है।

6. बिंदुओं A(–2, –3), B(2, 0) और C(–2, 3) से बने त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए तथा उसका प्रकार बताइए।

हल : दूरी सूत्र से

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$AB=\sqrt{(2+2)^2+(0+3)^2}$$

$$=\sqrt{16+9}=5$$

$$BC=\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}$$

$$=\sqrt{16+9}=5$$

$$CA=\sqrt{(-2+2)^2+(3+3)^2}=6$$

त्रिभुज का परिमाप :

$$AB+BC+CA=5+5+6=16$$

चूँकि AB = BC है, तो त्रिभुज ABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

विभाजन सूत्र

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. बिंदुओं (2, 3) और (8, 6) को 1 : 2 में बांटने वाला बिंदु है–

(अ) (4, 4) (ब) (5, 4)
(स) (6, 5) (द) (3, 4)

2. बिंदुओं (3, 5) और (7, 9) को मध्यबिंदु है–

(अ) (5, 7) (ब) (4, 6)
(स) (6, 8) (द) (10, 14)

3. बिंदु P(4, 5) बिंदुओं A(1, 2) और B(7, 8) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करता है?

(अ) 1 : 2 (ब) 2 : 1
(स) 1 : 1 (द) 3 : 1

4. बिंदु P(5, 4) बिंदुओं A(1, 2), B(7, k) को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है, तो k का मान है–

(अ) 3 (ब) 4
(स) 5 (द) 6

5. बिंदुओं (a, b) और (–a, –b) का मध्य–बिंदु है–

(अ) (a, b) (ब) (–a, –b)
(स) (2a, 2b) (द) (0, 0)

6. मध्य–बिंदु सूत्र किस अनुपात पर आधारित है?

(अ) 1 : 2 (ब) 2 : 1
(स) 1 : 1 (द) 3 : 2

उत्तर : 1. (अ), **2.** (अ), **3.** (स), **4.** (स), **5.** (द), **6.** (स)

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. बिंदुओं (4, –3) और (8, 5) को 3 : 1 में बाँटने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना बिंदु P, बिंदुओं A (4, –3) और B (8, 5) को 3 : 1 में विभाजित करता है तो विभाजन सूत्र से,

$$P=\left(\frac{3(8)+1(4)}{3+1},\frac{3(5)+1(-3)}{3+1}\right)$$

$$P=\left(\frac{24+4}{4},\frac{15-3}{4}\right)$$

$$P=(7,3)$$

2. बिंदुओं (0, 0) और (36, 15) को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना बिंदु P, बिंदुओं A (0, 0) और B (36, 15) को 1 : 2 में विभाजित करता है तो विभाजन सूत्र से

$$P=\left(\frac{1(36)+2(0)}{3},\frac{1(15)+2(0)}{3}\right)$$

$$P=(12,5)$$

3. A(3, –2) और B का मध्य बिंदु M (1, 4) है। बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि बिंदु B के निर्देशांक (x, y) है, A और B का मध्य बिंदु M हो, तो मध्यबिंदु सूत्र से-

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=(x,y)$$

$$\left(\frac{3+x}{2},\frac{-2+y}{2}\right)=(1,4)$$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

$\frac{3+x}{2}=1$ | $\frac{-2+y}{2}=4$

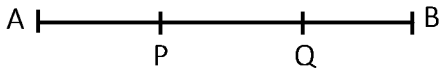
$3+x=2$ | $-2+y=8$

$x=-1$ | $y=10$

अतः B के निर्देशांक $(-1, 10)$ है।

4. बिंदुओं (0, 0) और (6, 9) को समत्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना A (0, 0) और B (6, 9) को p और q समत्रिभाजित करते है।



पहले बिंदु P के लिए :

बिंदु P, AB को 1 : 2 में विभाजित करता है।

तब विभाजन सूत्र से,

$$P=\left(\frac{1(6)+2(0)}{3},\frac{1(9)+2(0)}{3}\right)$$

$$P=(2,3)$$

दूसरे बिंदु Q के लिए :

बिंदु Q, AB को 2 : 1 में विभाजित करता है।

$$Q=\left(\frac{2(6)+1(0)}{3},\frac{2(9)+1(0)}{3}\right)$$

$$Q=(4,6)$$

अतः, बिंदु P (2, 3) और Q (4, 6), AB को समत्रिभाजित करते है।

5. बिंदु P(6, 3), A(2, 1) और B(8, 4) को किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल :

मान लीजिए P, AB को m : n में विभाजित करता है, तो विभाजन सूत्र से,

$$P(6,3)=\left(\frac{m(8)+n(2)}{m+n},\frac{m(4)+n(1)}{m+n}\right)$$

x-निर्देशांक से :

$$6=\frac{8m+2n}{m+n}$$

$$6m+6n=8m+2n$$

$$4n=2m$$

$$m:n=2:1$$

P, AB को 2 : 1 में विभाजित करता है।

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. A(2, –3) और B(8, 9) को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष को किस बिंदु पर काटता है? वह किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : x-अक्ष पर बिंदु का y-निर्देशांक 0 होगा।

माना P(x, 0), AB को m : n में विभाजित करता है, तो विभाजन सूत्र से,

$$(x,0)=\left[\frac{m(8)+n(3)}{m+n},\frac{m(9)+n(-3)}{m+n}\right]$$

y-निर्देशांक लेने पर,

$$0=\frac{9m-3n}{m+n}$$

$$9m-3n=0$$

$$3m=n$$

$$m:n=1:3$$

अब x-निर्देशांक,

$$x=\frac{1(8)+3(2)}{1+3}$$

$$=\frac{8+6}{4}$$

$$x=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

अतः बिंदु $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ अनुपात 1 : 3 में विभाजित करता है।

2. बिंदु A(–2, 3) और B को मिलाने वाले रेखाखंड को बिंदु P(4, 9), 3 : 2 में विभाजित करता है, तो B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना बिंदु B के निर्देशांक (x, y) है, तो

विभाजन सूत्र से

$$P(4,9)=\left(\frac{3x+2(-2)}{5},\frac{3y+2(3)}{5}\right)$$

x-निर्देशांक, | y-निर्देशांक,

$4=\frac{3x-4}{5}$ | $9=\frac{3y+6}{5}$

$20=3x-4$ | $45=3y+6$

$3x=24$ | $3y=39$

$x=8$ | $y=13$

अतः बिन्दु B के निर्देशांक (8, 13) है।

3. शहरों A(0, 0) और B(36, 15) के बीच रिले टॉवर बिंदु P इस प्रकार लगाना है कि AP : PB = 1 : 2 हो, तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल : शहरों A(0, 0) और B(36, 15) के बीच रिले टॉवर बिंदु P इस प्रकार लगाना है कि AP : PB = 1 : 2 हो, तो विभाजन सूत्र से

$$(x,y)=\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

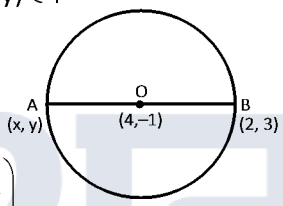
$$P=\left(\frac{1(36)+2(0)}{3},\frac{1(15)+2(0)}{3}\right)$$

$$P=(12,5)$$

4. बिंदु A के निर्देशाकं ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है, जिसका केन्द्र (4, –1) है तथा B के निर्देशांक (–2, 3) हैं।

हल : माना बिंदु A के निर्देशांक (x, y) है।

वृत्त का केन्द्र व्यास AB का मध्य–बिंदु होता है, तो मध्य–बिंदु सूत्र से,



$$(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$(4,-1)=\left(\frac{x+(-2)}{2},\frac{y+3}{2}\right)$$

x-निर्देशांक	y-निर्देशांक
$\frac{x-2}{2}=4$	$\frac{y+3}{2}=-1$
$x-2=8$	$y+3=-2$
$x=10$	$y=-5$

अतः बिन्दु A के निर्देशांक (10, –5) है।

5. उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष इसी क्रम में (0, 2) (3, 5), (6, 2) और (3, –1) है।

हल :

समचतुर्भज का क्षेत्रफल :

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\times d_1 \times d_2$$

पहला विकर्ण AC :

A(0, 2), C(6, 2)

दूरी सूत्र से

$$AC=\sqrt{(6-0)^2+(2-2)^2}$$

$$AC=\sqrt{36+0}$$

$$AC=6$$

दूसरा विकर्ण BD :

B(3, 5), D(3, –1)

$$BD=\sqrt{(3-3)^2+(-1-5)^2}$$

$$BD=\sqrt{0+36}$$

$$BD=6$$

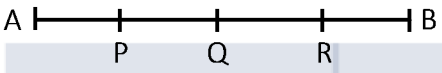
अब, क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\times 6\times 6$

क्षेत्रफल = 18 वर्ग इकाई

6. बिंदुओं A(–1, 4) और B(7, –2) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल :

चार बराबर भागों में विभाजित करने के लिए 3 बिंदु होगें पहला बिंदु P, AB को 1 : 3 में विभाजित करेगा।



विभाजन सूत्र से

$$P=\left(\frac{1(7)+3(-1)}{4},\frac{1(-2)+3(4)}{4}\right)$$

$$P=\left(\frac{7-3}{4},\frac{-2+12}{4}\right)$$

$$P=\left(1,\frac{10}{4}\right)$$

$$P=\left(1,\frac{5}{2}\right)$$

दूसरा बिंदु Q, मध्य–बिंदु होगा, मध्य–बिंदु सूत्र से

$$Q=\left(\frac{-1+7}{2},\frac{4+(-2)}{2}\right)$$

$$Q=\left(\frac{6}{2},\frac{2}{2}\right)$$

$$Q=(3,1)$$

तीसरा बिंदु R, AB को 3 : 1 में विभाजित करेगा।

$$R=\left(\frac{3(7)+1(-1)}{4},\frac{3(-2)+1(4)}{4}\right)$$

$$R=\left(\frac{21-1}{4},\frac{-6+4}{4}\right)$$

$$R=\left(5,-\frac{1}{2}\right)$$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

8 त्रिकोणमिति का परिचय

त्रिकोणमितीय अनुपात

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. समकोण त्रिभुज ABC में ∠B = 90°, AB = 12cm, BC = 5cm, तो AC का मान होगा –

(अ) 10cm (ब) 11cm
(स) 13cm (द) 17cm

2. यदि $\tan A = \frac{3}{4}$, तो $\sin A$ होगा –

(अ) $\frac{3}{5}$ (ब) $\frac{4}{5}$
(स) $\frac{5}{3}$ (द) $\frac{5}{4}$

3. यदि $\sin A = \frac{8}{17}$, तो $\cos A$ होगा –

(अ) $\frac{8}{15}$ (ब) $\frac{15}{17}$
(स) $\frac{17}{15}$ (द) $\frac{8}{17}$

4. यदि $\cot A = \frac{7}{24}$, तो $\tan A$ होगा –

(अ) $\frac{7}{24}$ (ब) $\frac{24}{7}$
(स) $\frac{25}{7}$ (द) $\frac{7}{25}$

उत्तर : 1. (स), **2.** (अ), **3.** (ब), **4.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न–

1. यदि $\tan A = \frac{3}{4}$, तो sinA और cosA ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{3}{4}$

माना लम्ब = 3k, आधार = 4k

पाइथागोरस प्रमेय से

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

कर्ण $= \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 5k$

$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$

$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

$\cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$

2. यदि $\sec\theta = \frac{17}{8}$, तो $\sin\theta$ और $\tan\theta$ ज्ञात कीजिए।

हल : पाइथागोरस प्रमेय से

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{17}{8}$

कर्ण = 17k, आधार = 8k

लम्ब $= \sqrt{(17k)^2 - (8k)^2}$

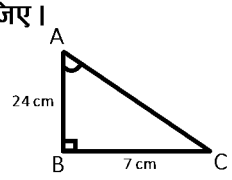
$= \sqrt{289k^2 - 64k^2} = 15k$

$\sin\theta = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$ $\left\{\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right\}$

$\tan\theta = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}$ $\left\{\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}\right\}$

3. ΔABC में ∠B = 90°, AB = 24cm और BC = 7cm है। sinA, cosA, sinC, cosC ज्ञात कीजिए।

हल : पाइथागोरस प्रमेय से



कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$AC = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = 25$

∠A के लिए :

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$ $\left\{\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right\}$

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$ $\left\{\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right\}$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

∠C के लिए :

$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25} \quad \left\{\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right\}$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25} \quad \left\{\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right\}$$

4. यदि $\cot\theta = \frac{7}{24}$, तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{7}{24}$

आधार = 7k, लम्ब = 24k

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

कर्ण $= \sqrt{(7k)^2 + (24k)^2} = 25k$

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{24}{25}$, $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{25}$

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{24}{7}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{25}{24}$

$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{25}{7}$,

5. समकोण त्रिभुज में कर्ण 10 cm और एक भुजा 6 cm है, तो दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए दूसरी भुजा x है।

पाइथागोरस प्रमेय से,

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$10^2 = 6^2 + x^2$

$100 = 36^2 + x^2$

$x^2 = 64$

$x = 8$

अतः दूसरी भुजा = 8 cm

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न–

1. यदि $\tan A = \frac{5}{12}$, तो कोण A के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{5}{12}$$

मान लेते है :

लम्ब = 5k, आधार = 12k

पाइथागोरस प्रमेय से,

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

कर्ण $= \sqrt{(5k)^2 + (12k)^2}$

$= \sqrt{25k^2 + 144k^2}$

$= \sqrt{169k^2} = 13k$

अब

$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$ $\left\{\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right\}$

$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$ $\left\{\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right\}$

$\operatorname{cosec} A = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$ $\left\{\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}\right\}$

$\sec A = \frac{13k}{12k} = \frac{13}{12}$ $\left\{\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}\right\}$

$\cot A = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$ $\left\{\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right\}$

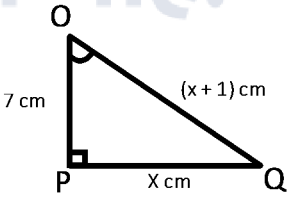
2. ΔOPQ में $\angle P = 90°$, OP = 7cm और OQ – PQ = 1cm है। sinQ और cosQ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए :

PQ = x cm

तो, OQ = x + 1

पाइथागोरस प्रमेय से :



$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$(X + 1)^2 = 7^2 + x^2$

$x^2 + 2x + 1 = 49 + x^2$

$2x = 48$

$x = 24$

अतः

PQ = 24 cm

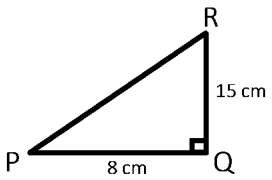
OQ = 25 cm

$\sin Q = \frac{OP}{OQ} = \frac{7}{25}$

$\cos Q = \frac{PQ}{OQ} = \frac{24}{25}$

मिशन ज्ञान
कि जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

3. ΔPQR में $\angle Q = 90°$, PQ = 8cm, QR = 15cm है। tanP – cotR ज्ञात कीजिए।



हल : पाइथागोरस प्रमेय से,

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$PR = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$

$\angle P$ के लिए :

$$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{15}{8} \left\{ \tan P = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \right\}$$

$\angle R$ के लिए :

$$\cot R = \frac{QR}{PQ} = \frac{15}{8} \left\{ \cot R = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} \right\}$$

अब,

$$\tan P - \cot R = \frac{15}{8} - \frac{15}{8}$$

$$\tan P - \cot R = 0$$

कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. $\sin 30°$ का मान है –

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{2}$

(स) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (द) 1

2. $\sin 30° + \cos 60°$ का मान है –

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{2}$

(स) 1 (द) –1

3. $\sec^2 30° - \tan^2 30°$ का मान है –

(अ) 0 (ब) 1

(स) 2 (द) 3

उत्तर : 1. (ब), **2.** (स), **3.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. $4\cos^2 45° - \tan^2 45°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2 45° = \frac{1}{2}$

$\tan 45° = 1$

अब,

$$4\cos^2 45° - \tan^2 45° = 4 \times \frac{1}{2} - 1^2$$

$$= 2 - 1$$

$$4\cos^2 45° - \tan^2 45° = 1$$

2. यदि $2\sin X = \sqrt{3}$, जहाँ X एक न्यून कोण है, तो X ज्ञात कीजिए।

हल : $2\sin X = \sqrt{3}$

$$\sin X = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हम जानते है,

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अतः,

$\sin X = \sin 60°$

$X = 60°$

3. यदि $\sin(A + B) = 1$ और $\cos(A - B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो A और B ज्ञात कीजिए।

हल : $\sin(A + B) = 1$, $\sin 90° = 1$

$\sin(A + B) = \sin 90°$

$A + B = 90°$ ..... (i)

और,

$\cos(A - B) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(A - B) = \cos 30°$

$A - B = 30°$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$A + B = 90°$

$A - B = 30°$

$2A = 120°$

$A = 60°$

समीकरण (i) से

$B = 30°$

4. $\frac{\sin 30°}{\cos 60°} + \frac{\tan 45°}{\cot 45°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल : हम जानते हैं कि

$$\sin30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan45^\circ = 1,\ \cot45^\circ = 1$$

$$\frac{\sin30^\circ}{\cos60^\circ} + \frac{\tan45^\circ}{\cot45^\circ}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

5. $3\tan^2 45^\circ + 2\cos^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं

$$\tan45^\circ = 1, \cos60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$3\tan^2 45^\circ + 2\cos^2 60^\circ$$

$$= 3(1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3 + 2 \times \frac{1}{4}$$

$$= 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

दीर्घत्तरात्मक प्रश्न –

6. $2\sin30^\circ \cos60^\circ + 3\tan45^\circ - \sec60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं

$$\sin30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos60^\circ = \frac{1}{2},\ \tan45^\circ = 1,\ \sec60^\circ = 2$$

अब, $2\sin30^\circ \cos60^\circ + 3\tan45^\circ - \sec60^\circ$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 3(1) - 2$$

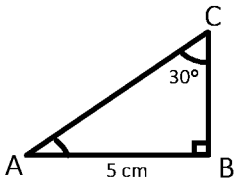
$$= \frac{1}{2} + 3 - 2$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

7. ΔABC में $\angle B = 90^\circ$, AB = 5cm और $\angle C = 30^\circ$ है। BC और AC ज्ञात कीजिए।

हल :

$\angle B = 90^\circ,\ \angle C = 30^\circ$



$$\tan60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan30^\circ = \frac{5}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{BC}$$

$$BC = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$$\sin C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin30^\circ = \frac{5}{AC}$$

$$AC = 10\ \text{cm}$$

8. $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं

$$\sin30^\circ = \frac{1}{2},\ \sin45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अब, $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

9. $5\cos^2 30^\circ - 3\sin^2 60^\circ + 2\tan^2 45^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं

$$\cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\tan45^\circ = 1$$

अब,

$5\cos^2 30^\circ - 3\sin^2 60^\circ + 2\tan^2 45^\circ$

मिशन ज्ञान
मिशन: जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

$$= 5 \times \frac{3}{4} - 3 \times \frac{3}{4} + 2 \times 1$$

$$= \frac{15}{4} - \frac{9}{4} + 2$$

$$= \frac{6}{4} + 2$$

$$= \frac{3}{2} + 2$$

$$= \frac{7}{2}$$

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. $1 + \tan^2 A$ बराबर है –

(अ) $\sin^2 A$ (ब) $\cos^2 A$

(स) $\sec^2 A$ (द) $\operatorname{cosec}^2 A$

2. $(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)$ का मान है –

(अ) 1 (ब) 0

(स) 2 (द) $\cos A$

3. $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ बराबर है –

(अ) $\sin^2 A$ (ब) $\cos^2 A$

(स) $\tan^2 A$ (द) $\cot^2 A$

4. $\sec^2 A(1 - \cos^2 A)$ का मान है –

(अ) $\cos^2 A$ (ब) $\cos^2 A$

(स) $\cot^2 A$ (द) $\tan^2 A$

उत्तर : 1. (स), **2.** (अ), **3.** (स), **4.** (द)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए :

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

हल :

समकोण त्रिभुज में :

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}, \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{कर्ण}^2} + \frac{\text{आधार}^2}{\text{कर्ण}^2}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2}{\text{कर्ण}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

पाइथगोरस प्रमेय से :

लम्ब^2 + आधार^2 = कर्ण^2

$$\sin^2 + \cos^2 = \frac{\text{कर्ण}^2}{\text{कर्ण}^2}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

2. सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

हल :

$$\text{LHS} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

अंश और हर को $1 + \cos A$ से गुणा करते है:

$$= \frac{(1 - \cos A)(1 + \cos A)}{\sin A (1 + \cos A)}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{\sin A (1 + \cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin A (1 + \cos A)} \quad \{1 - \cos^2 A = \sin^2 A\}$$

$$= \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

$$= \text{RHS}$$

LHS = RHS {इति सिद्धम}

3. सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A} = \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

हल :

$$\text{LHS} = \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} + \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$$

LCM लेने पर :

$$= \frac{(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2}{(\sin A - \cos A)(\sin A + \cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A + \sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A \cos A}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A + 2\cos^2 A}{\sin^2 A - \cos^2 A}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 A - \cos^2 A} \quad \{\sin^2 A + \cos^2 A = 1\}$$

LHS = RHS {इति सिद्धम}

4. सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\tan A + \cot A}{\sec A \operatorname{cosec} A} = 1$$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल :

$$LHS = \frac{\tan A + \cot A}{\sec A \operatorname{cosec} A}$$

अंश :

$$\tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A}$$

हर :

$$\sec A \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A}$$

इसलिए,

$$\frac{\tan A + \cot A}{\sec A \operatorname{cosec} A} = \frac{\frac{1}{\sin A \cos A}}{\frac{1}{\sin A \cos A}}$$

$$\frac{\tan A + \cot A}{\sec A \operatorname{cosec} A} = 1$$

LHS = RHS {इति सिद्धम}

5. सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \tan^2 A$$

हल :

$$LHS = \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \frac{1}{\tan^2 A}} \quad \left\{\cot A = \frac{1}{\tan A}\right\}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 A}{\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A}}$$

$$= \tan^2 A$$

LHS = RHS {इतिसिद्धम}

9 त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. जब वस्तु प्रेक्षक की आँख के क्षैतिज स्तर से ऊपर हो, तब दृष्टि–रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच बना कोण कहलाता है–

(अ) अवनमन कोण (ब) समकोण

(स) उन्नयन कोण (द) पूरक कोण

2. 6 मीटर ऊँचा खम्भा $2\sqrt{3}$ मीटर लम्बी छाया बनाता है। सूर्य का उन्नयन कोण है–

(अ) 30° (ब) 45°

(स) 60° (द) 90°

3. 10 मीटर ऊँची मीनार के शीर्ष से भूमि के एक बिन्दु का अवनमन कोण 30° है। बिन्दु की मीनार के आधार से दूरी है–

(अ) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ मीटर (ब) 10 मीटर

(स) $10\sqrt{3}$ मीटर (द) 20 मीटर

4. मीनार के आधार से 15 मीटर दूर एक बिन्दु से उसके शीर्ष का उन्नयन कोण 60° हैं। मीनार की ऊँचाई है–

(अ) $15\sqrt{3}$ मीटर (ब) 15 मीटर

(स) $5\sqrt{3}$ मीटर (द) 30 मीटर

5. एक पतंग भूमि से 60 मीटर ऊँचाई पर है और उसकी डोरी भूमि के साथ 60° का कोण बनाती है। तनी हुई डोरी की लम्बाई है–

(अ) $20\sqrt{3}$ मीटर (ब) $40\sqrt{3}$ मीटर

(स) $60\sqrt{3}$ मीटर (द) 120 मीटर

6. 1.5 मीटर लम्बा प्रेक्षक चिमनी से 28.5 मीटर दूर हैं। उसकी आँखों से चिमनी के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई है–

(अ) 28.5 मीटर (ब) 29 मीटर

(स) 30 मीटर (द) 31.5 मीटर

7. 20 मीटर ऊँचे भवन के शीर्ष पर मीनार लगी है। भूमि पर स्थित एक बिन्दु से भवन और मीनार के शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई है–

(अ) $20\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर

(ब) $20\sqrt{3}$ मीटर

(स) $10\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर

(द) $20\left(\sqrt{3}+1\right)$ मीटर

8. कथन (A) : समानांतर क्षैतिज रेखाओं के कारण अवनमन कोण संगत उन्नयन कोण के बराबर होता है।

कारण (R) : एकांतर अंतःकोण बराबर होते हैं।

(अ) A और R सत्य हैं तथा R, A की सही व्याख्या है

(ब) A और R सत्य हैं पर R सही व्याख्या नहीं है

(स) A सत्य, R असत्य

(द) A असत्य, R सत्य

9. स्थिर ऊँचाई वाली वस्तु का उन्नयन कोण बढ़ता है, तो प्रेक्षक सामान्यतः –

(अ) वस्तु से दूर जाता है

(ब) वस्तु के निकट आता है

(स) स्थिर रहता है

(द) ऊँचाई बदलता है

10. सूर्य का उन्नयन कोण कम होने पर किसी खम्भे की छाया–

(अ) कम होती है (ब) बढ़ती है

(स) अपरिवर्तित रहती है (द) शून्य हो जाती है

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें।

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

11. किसी मीनार की ऊँचाई x मीटर और प्रेक्षक मीनार के आधार से $\frac{x}{\sqrt{3}}$ मीटर दूरी पर है, तो उन्नयन कोण का मान है–

(अ) 30° (ब) 45°

(स) 60° (द) 90°

12. बहुमंजिल भवन के शीर्ष से 8 मीटर ऊँचे भवन के शीर्ष और तल के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। बहुमंजिल भवन की ऊँचाई है–

(अ) $4\left(3+\sqrt{3}\right)$ मीटर

(ब) $4\left(3-\sqrt{3}\right)$ मीटर

(स) $8\sqrt{3}$ मीटर

(द) 12 मीटर

13. एक गुब्बारे की ऊँचाई स्थिर है। उसका उन्नयन कोण 60° से घटकर 30° हो जाता है। अंतिम क्षैतिज दूरी और प्रारंभिक दूरी का अनुपात है–

(अ) 1 : 3 (ब) 2 : 1

(स) 3 : 1 (द) $\sqrt{3}:1$

14. 50 मीटर ऊँची मीनार के शीर्ष से भूमि पर स्थित एक बिन्दु का अवनमन कोण 60° है। उस बिन्दु की मीनार के आधार से दूरी है–

(अ) $50\sqrt{3}$ मीटर (ब) $\frac{50}{\sqrt{3}}$ मीटर

(स) $25\sqrt{3}$ मीटर (द) 25 मीटर

15. ड्रोन किसी बिन्दु से $5\sqrt{3}$ मीटर क्षैतिज दूरी और 5 मीटर उर्ध्वाधर ऊँचाई पर है। उस बिन्दु से ड्रोन का उन्नयन कोण है–

(अ) 30° (ब) 45°

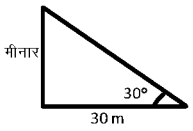
(स) 60° (द) 90°

उत्तर : 1. (स), **2.** (स), **3.** (स), **4.** (अ), **5.** (ब), **6.** (स), **7.** (अ), **8.** (अ), **9.** (ब), **10.** (ब), **11.** (स), **12.** (अ) **13.** (स), **14.** (ब), **15.**(अ)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. मीनार के आधार से 30 मीटर दूर बिन्दु से उसके शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना मीनार की ऊँचाई h मीटर है।



$$\tan 30° = \frac{h}{30} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

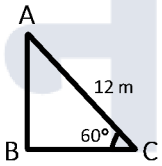
$$h = 10\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मीटर है।

2. 12 मीटर लम्बी सीढ़ी भूमि के साथ 60° का कोण बनाकर दीवार से लगी है। दीवार पर सीढ़ी द्वारा प्राप्त ऊँचाई और दीवार से सीढ़ी के पाद की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लेते है : दीवार की ऊँचाई = AB

पाद से दूरी = BC



$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$\sin 60° = \frac{AB}{AC}$$

$$AB = 12 \times \sin 60° = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB = 6\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos 60° = \frac{BC}{AC}$$

$$BC = 12 \times \cos 60° = 12 \times \frac{1}{2}$$

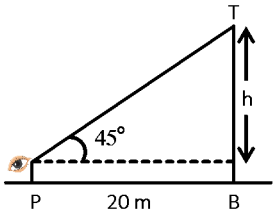
$$BC = 6 \text{ मीटर}$$

अतः दीवार की ऊँचाई $6\sqrt{3}$ मीटर और दीवार से सीढ़ी के पाद की दूरी 6 मीटर है।

3. 1.5 मीटर ऊँचाई वाला व्यक्ति 20 मीटर दूर खड़ी मीनार के शीर्ष को 45° के उन्नयन कोण पर देखता है। मीनार की कुल ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

हल : $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$



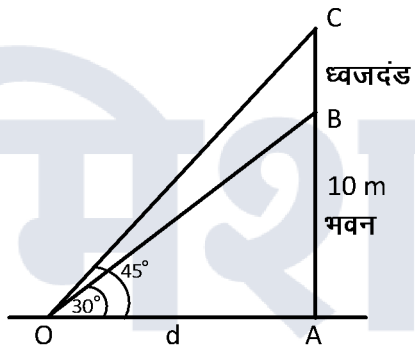
$\tan 45° = \frac{h}{20}$

$h = 20$

आँख स्तर से शीर्ष की ऊँचाई = 20 मीटर

कुल ऊँचाई = 20 + 1.5 = 21.5 मीटर

4. 10 मीटर ऊँचे भवन के शीर्ष पर ध्वजदंड है। भूमि के एक बिन्दु से भवन के शीर्ष और ध्वजदंड के शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। उस बिन्दु से भवन की दूरी तथा ध्वजदंड की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल : त्रिभुज OAB मे,

बिंदु से भवन की दूरी = d मीटर

$\tan 30° = \frac{10}{d}$ $\left\{\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}\right\}$

$\Rightarrow d = 10\sqrt{3}$ मीटर

त्रिभुज OAC मे,

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

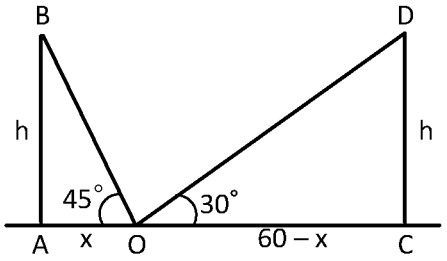
$\tan 45° = \frac{AC}{d}$

$AC = 10\sqrt{3}$

ध्वजदंड की ऊँचाई = $10\sqrt{3} - 10$

ध्वजदंड की ऊँचाई = $10\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर

5. 60 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर समान ऊँचाई के खंभे हैं। सड़क के एक बिन्दु से उनके शीर्षों के उन्नयन कोण 45° और 30° हैं। खम्भों की ऊँचाई तथा बिन्दु से दोनों खम्भों की दूरियाँ ज्ञात कीजिए।



हल : ΔBAO में,

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow \tan 45° = \frac{h}{x}$

$x = h$ ..... (i)

ΔOCD से,

$\tan 30° = \frac{h}{60° - x}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{60° - x}$

समी. (i) से

$x = \frac{(60-x)}{\sqrt{3}} \Rightarrow x\left(\sqrt{3}+1\right) = 60$

$x = h = 30\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर {समी. (i) से}

$OC = 60 - x$

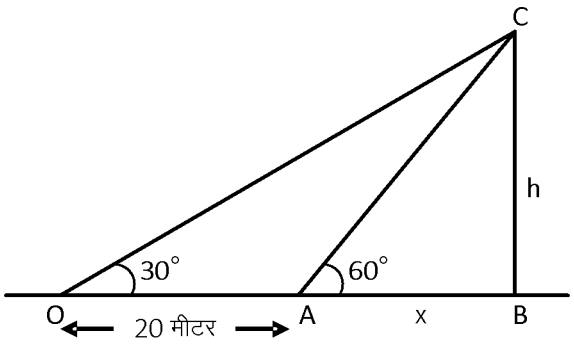
$OC = 60 - 30\left(\sqrt{3}-1\right)$

$OC = 30\left(3-\sqrt{3}\right)$ मीटर

अतः खम्भों की ऊँचाईयाँ $30\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर और बिंदु से दोनो खम्भो की दूरियाँ क्रमशः $30\left(\sqrt{3}-1\right)$m, $30\left(\sqrt{3}+1\right)$m है।

6. मीनार के एक ही ओर स्थित दो बिन्दु परस्पर 20 मीटर दूर हैं। निकट बिन्दु से शीर्ष का उन्नयन कोण 60° और दूर स्थित बिन्दु से 30° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!



हल : माना निकट बिन्दु की दूरी x है।

ΔABC में,

$$\tan 60° = \frac{h}{x} \qquad \left\{\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}\right\}$$

$$h = \sqrt{3}x \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

अब ΔOBC में,

$$\tan 30° = \frac{h}{x+20}$$

$$h = \frac{(x+20)}{\sqrt{3}}$$

समीकरण (i) से

$3x = x + 20 \Rightarrow x = 10$ मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मीटर है।

7. 45 मीटर ऊँचे प्रकाशस्तम्भ के शीर्ष से समुद्र में जहाज का अवनमन कोण 30° है। जहाज की प्रकाश स्तम्भ से क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : प्रकाश स्तम्भ की ऊँचाई = 45 m

$$\tan 30° = \frac{45}{d} \left\{\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}\right\}$$

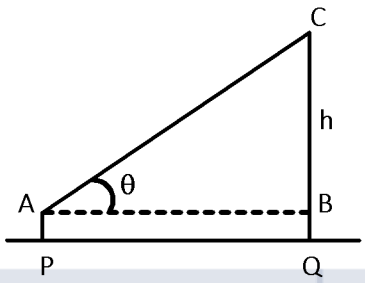
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{45}{d}$$

अतः $d = 45\sqrt{3}$ मीटर

अतः जहाज की प्रकाश स्तम्भ से क्षैतिज दूरी $45\sqrt{3}$ मीटर है।

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. इंड़ियागेट की ऊँचाई 42 मीटर है। एक छात्रा की आँखे भूमि से 1 मीटर ऊँचाई पर है और वह शिखर को देखती है। (i) यदि वह आधार से 41 मीटर दूर है, तो उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए। (ii) यदि उन्नयन कोण 60° है, तो उसकी आधार से दूरी ज्ञात कीजिए। (iii) उन्नयन कोण 45° से 30° होने पर वह कितनी दूरी पीछे गई?



हल : इंडियागेट से शिखर की ऊँचाई = 42 – 1 = 41 मीटर

इंडियागेट से छात्रा की दूरी (AB) = 41 मीटर

(i) ΔABC में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{41}{41}$$

$\tan\theta = 1$

$\tan\theta = \tan 45° \Rightarrow \theta = 45°$

(ii) यदि $\theta = 60°$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{41}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{41}{AB}$$

$$AB = \frac{41}{\sqrt{3}}$$

परिमेयकरण करने पर

$$AB = \frac{41}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{41\sqrt{3}}{3}$$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

(iii) जब $\theta = 45°$ तब चली गयी दूरी d_1

$$\tan 45° = \frac{BC}{d_1}$$

$$1 = \frac{41}{d_1}$$

$$d_1 = 41 \text{ m}$$

जब $\theta = 30°$ तब चली गयी दूरी d_2

$$\tan 30° = \frac{BC}{d_2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{41}{d_2}$$

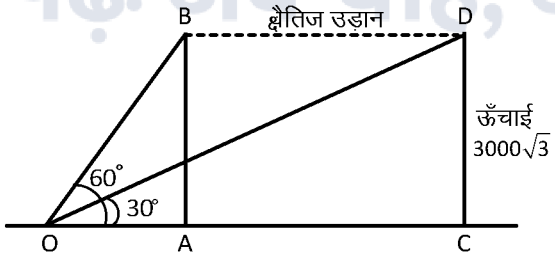
$$d_2 = 41\sqrt{3}$$

चली गयी दूरी $= d_2 - d_1$

$$= 41\sqrt{3} - 41$$

$$= 41\left(\sqrt{3} - 1\right) \text{ मीटर}$$

2. एक विमान $3000\sqrt{3}$ मीटर की स्थिर ऊँचाई पर क्षैतिज उड़ रहा है। भूमि के एक बिन्दु से उसका उन्नयन कोण 60° है और 30 सेकंड बाद 30° हो जाता है। विमान की चाल मीटर/सेकंड और किमी./घण्टे में ज्ञात कीजिए।



हल : ऊँचाई $H = 3000\sqrt{3}$ मीटर

ΔOAB में,

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\tan 60° = \frac{AB}{OA}$$

$$\sqrt{3} = \frac{3000\sqrt{3}}{OA}$$

$$OA = 3000 \text{ m}$$

अब ΔOCD में,

$$\tan 30° = \frac{CD}{OC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3000\sqrt{3}}{OC}$$

$$OC = 9000 \text{ m}$$

30 सेकंड में चली दूरी $= 9000 - 3000 = 6000$ मीटर

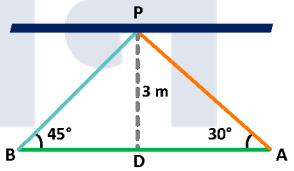
$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\text{चाल} = \frac{6000}{30} = 200 \text{ मीटर/सेकंड}$$

$$\text{किमी./घण्टे में} : 200 \times \frac{18}{5} = 720 \text{ किमी./घण्टे}$$

3. नदी से 3 मीटर ऊँचे पुल पर स्थित के एक बिन्दु से नदी के विपरीत किनारों के अवनमन कोण 30° और 45° है। नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए और उत्तर का लगभग मान भी निकालिए।

हल :



पुल के बिन्दु की लम्बवत् ऊँचाई $PD = 3$ मीटर

30° वाले किनारे तक दूरी; $\tan 30° = \frac{PD}{BD}$

$$BD = \frac{3}{\tan 30°}$$

$$BD = \sqrt{3}\,m$$

$$\tan 45° = \frac{3}{AD}$$

$$1 = \frac{3}{AD} \Rightarrow AD = 3m$$

चौड़ाई $AB = AD + DB = 3\left(\sqrt{3} + 1\right)$ मीटर

$\sqrt{3} = 1.732$ लेने पर

$AB \approx 3 \times 2.732 = 8.196$ मीटर

4. 20 मीटर और 14 मीटर ऊँचे दो खम्भों के शीर्षों को एक तार जोड़ता है जो क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है। तार की लम्बाई खम्भों के बीच क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

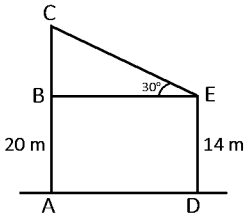
हल : पहले खंभे की ऊँचाई (AC) = 20 मीटर

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

दूसरे खंभे की ऊँचाई (DE) = 14 मीटर

खंभों की ऊँचाईयों में अंतर (BC) = 6 मीटर

अब ΔEBC में



$$\sin\theta = \frac{BC}{CE}$$

$$\sin 30° = \frac{6}{CE} \Rightarrow CE = 12 \text{ मीटर}$$

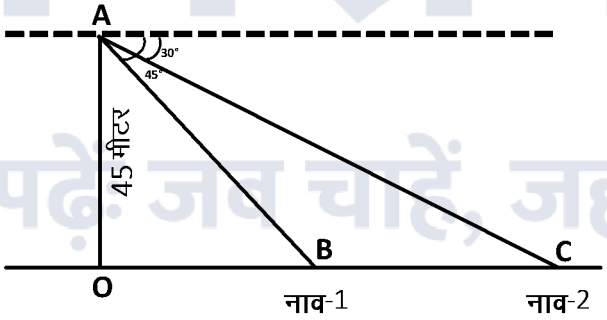
$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\tan 30° = \frac{BC}{BE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{BE} \Rightarrow BE = 6\sqrt{3}\,m$$

अतः तार की लंबाई = 12cm, क्षैतिज दूरी = $6\sqrt{3}$ m है।

5. 45 मीटर ऊँचे निगरानी टावर से एक नाव का अवनमन कोण 30° है। 5 मिनट बाद कोण 45° हो जाता है। नाव समान चाल से टावर की ओर चलती है। नाव की चाल ज्ञात कीजिए।



हल : टॉवर की ऊँचाई (OA) = 45m

ΔAOB में,

$$\tan B = \frac{OA}{OB}$$

$$\tan 45° = \frac{45}{OB}$$

OB = 45 m

ΔAOC में,

$$\tan C = \frac{OA}{OC}$$

$$\tan 30° = \frac{45}{OC}$$

$$OC = 45\sqrt{3}$$

5 मिनट में चली दूरी = OC − OB

$$= 45\sqrt{3} - 45$$

$$= 45\left(\sqrt{3}-1\right)m$$

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\text{चाल} = \frac{45(\sqrt{3}-1)}{5}$$

$$\text{चाल} = 9(\sqrt{3}-1) \text{ मीटर/मिनट}$$

$$\text{चाल} = 9(1.73-1) = 6.57 \text{ मीटर/मिनट}$$

अतः नाव की चाल 6.57 मीटर/मिनट है।

10 वृत्त

स्पर्श रेखा

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. वृत्त के अंदर स्थित बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

(अ) 0 (ब) 1
(स) 2 (द) 3

2. केन्द्र O वाले वृत्त की P पर स्पर्श रेखा PT है तो ∠OPT का मान है:

(अ) 30° (ब) 45°
(स) 60° (द) 90°

3. व्यास AB के सिरों A और B पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ होती है:

(अ) परस्पर लंब (ब) समांतर
(स) प्रतिच्छेदी (द) संपाती

4. यदि त्रिज्या 9cm और बाहरी बिंदु की केन्द्र से दूरी 41 cm है, तो स्पर्श रेखा की लंबाई है:

(अ) 32 cm (ब) 40 cm
(स) 41 cm (द) 50 cm

5. एक वृत्त के केन्द्र O से 13cm दूर स्थित बिन्दु P से स्पर्श रेखा PQ की लंबाई 12cm है। वृत्त का व्यास क्या है?

(अ) 5cm (ब) 10cm
(स) 12cm (द) 13cm

6. एक 4 cm त्रिज्या वाले वृत्त में दो समातंर स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी है–

(अ) 2cm (ब) 4cm
(स) 6cm (द) 8cm

7. एक बिन्दु P वृत्त के केन्द्र से 25cm की दूरी पर है। वृत्त की त्रिज्या 7cm है और P से वृत्त की खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई होगी–

(अ) $\sqrt{3}$ cm (ब) 24cm
(स) 28cm (द) 30cm

उत्तर : 1. (अ), **2.** (द), **3.** (ब), **4.** (ब), **5.** (ब), **6.** (द), **7.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. स्पर्श रेखा, छेदक रेखा और स्पर्श बिंदु की परिभाषा लिखिए।

हल : स्पर्श रेखा : वह रेखा जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

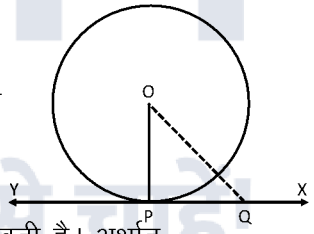
छेदक रेखा : वह रेखा जो वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर काटती है।

स्पर्श बिंदु : वृत्त और उसकी स्पर्श रेखा का एकमात्र उभयनिष्ठ बिंदु।

2. वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

हल : हमें केंद्र O वाला एक वृत्त दिया है और एक बिंदु P पर स्पर्श रेखा XY दी है। हमें सिद्ध करना है कि OP, XY पर लंब है।

XY पर P के अतिरिक्त एक बिंदु Q लीजिए और OQ को मिलाइए (देखिए आकृति)



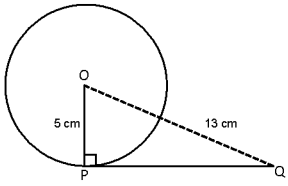
अतः OQ त्रिज्या OP से बड़ी है। अर्थात्

$$OQ > OP$$

क्योंकि यह बिंदु P के अतिरिक्त XY के प्रत्येक बिंदु के लिए सत्य है, OP बिंदु O से XY के अन्य बिंदुओं को न्यूनतम दूरी है। इसलिए OP, XY पर लंब है।

3. एक बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात कीजिए, जबकि बिंदु की वृत्त के केन्द्र से दूरी 13 सेमी. है और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है।

हल : चूँकि $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$ (समकोण ΔOPQ में)



या $PQ^2 = OQ^2 - OP^2 = 13^2 - 15^2 = 169 - 25 = 144$

$PQ = \sqrt{144} = 12$

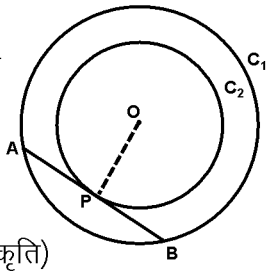
PQ = 12 सेमी.

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. सिद्ध कीजिए कि दो सकेंद्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित होती है।

हल : हमें केंद्र O वाले दो सकेंद्रीय वृत्त C_1 और C_2 तथा बड़े वृत्त C_1 की जीवा AB, जो छोटे वृत्त C_2 को बिंदु P पर स्पर्श करती है, दिए हैं (देखिए आकृति)



हमें सिद्ध करना है AP = BP

आइए OP को मिलाएँ। इस प्रकार AB, C_2 के बिंदु P पर स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है।

अतः प्रमेय 10.1 से

$OP \perp AB$

अब AB वृत्त C_1 की एक जीवा है और $OP \perp AB$ है। अतः OP जीवा AB समद्विभाजित करेगी क्योंकि केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब समद्विभाजित करता है,

अर्थात् AP = BP

बाहरी बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि किसी वृत्त की दो त्रिज्याओं के बीच का कोण 110° है, तो त्रिज्याओं के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण होगा:

(अ) 90° (ब) 110°
(स) 40° (द) 70°

2. यदि कोई समांतर चतुर्भुज किसी वृत्त के परिगत है, तो वह कौन–सा चतुर्भुज होगा–

(अ) वर्ग (ब) आयत
(स) पतंग (द) समचतुर्भुज

3. यदि 3 cm त्रिज्या वाले वृत्त पर 60° के कोण पर झुकी हुई दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है, तो प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई होगी–

(अ) 3 cm (ब) 6 cm
(स) $3\sqrt{3}$ cm (द) $3\sqrt{2}$ cm

4. यदि किसी वृत्त में 2 समांतर स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी 18 cm हो, तो उस वृत्त की त्रिज्या होगी–

(अ) 8 cm (ब) 10 cm
(स) 9 cm (द) 12 cm

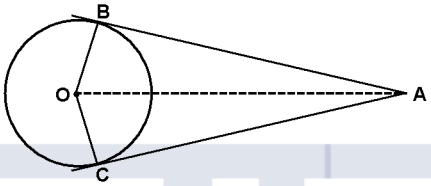
5. यदि एक समचतुर्भुज ABCD की चारों भुजाएँ एक वृत्त को स्पर्श करती है तो–

(अ) AC + DA = BD + CD
(ब) AB + CD = BC + DA
(स) AB + CD = AC + BC
(द) AC + AD = BC + BD

6. एक वृत्त के बाह्य बिंदु से खींची गई अधिकतम स्पर्श रेखाएँ हैं–

(अ) एक (ब) दो
(स) तीन (द) अनन्त

7. दी गई आकृति में AB तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं, O वृत्त का केन्द्र है, यदि ∠CAB = 60° तो ∠BOC है–



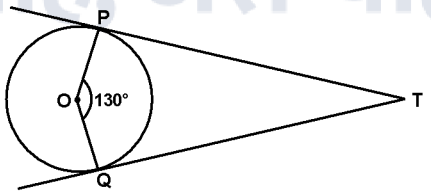
(अ) 60° (ब) 70°
(स) 120° (द) 150°

उत्तर : 1. (द), **2.** (द), **3.** (स), **4.** (स), **5.** (ब), **6.** (ब), **7.** (स)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. चित्र में यदि TP और TQ केन्द्र O वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं ∠POQ = 150° तो ∠PTQ का मान ज्ञात कीजिये।

हल :



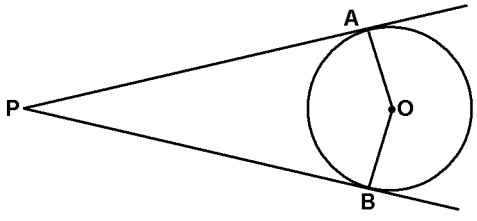
PT व QT स्पर्श रेखाएँ है।

$\therefore \quad \angle POQ + \angle PTQ = 180°$

$\Rightarrow \quad 130° + \angle PTQ = 180°$

$\angle PTQ = 180° - 130° = 50°$

2. दिये गये चित्र में यदि PA और PB केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि कोण APB = 80°, तो कोण AOB का मान ज्ञात कीजिये।



हल : चित्र में PA और PB, केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

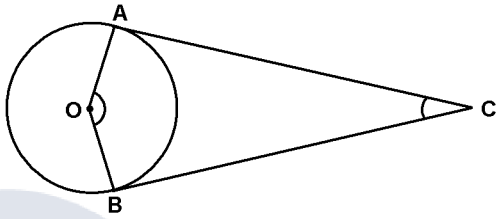
$\therefore$ $\angle PAO = \angle PBO = 90°$

और $\angle APB = 80°$ दिया गया है।

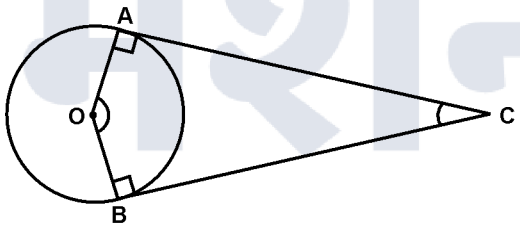
$\therefore$ $\angle AOB = 360° - (90° + 90° + 80°)$

$= 360° - 260° = 100°$

3. दी गई आकृति में O एक वृत्त का केन्द्र है जिसके बाह्य बिन्दु C से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ CA, CB खींची गई हैं, तो सिद्ध कीजिए $\angle AOB$ व $\angle ACB$ संपूरक हैं।



हल : **दिया है** – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। C बिन्दु C से CA और CB दिये गये वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।



सिद्ध करना है– $\angle AOB + \angle ACB = 180°$

उपपत्ति– OA त्रिज्या है और CA बिन्दु C से दिये गये वृत्त पर स्पर्श रेखा है।

$\therefore$ $\angle OAC = 90°$ ..... (i)

[वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।]

इसी प्रकार $\angle OBC = 90°$ ..... (ii)

अब चतुर्भुज BOAC में

$\angle BOA + \angle CBO + \angle OAC + \angle ACB = 360°$

या $\angle BOA + 90° + 90° + \angle ACB = 360°$

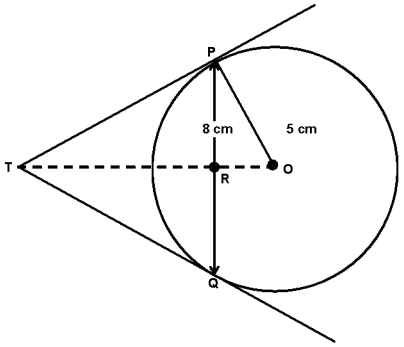
या $\angle BOA + \angle ACB = 360° - 180°$

या $\angle BOA + \angle ACB = 180°$

{इतिसिद्धम}

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न –

1. 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त की 8 cm लंबी एक जीवा PQ है। P और Q पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर एक बिंदु T पर प्रतिच्छेद करती हैं (देखिए आकृति)। TP की लंबाई ज्ञात कीजिए।



हल : OT को मिलाएँ। माना यह PQ को बिंदु R पर प्रतिच्छेद करती है। तब ΔTPQ समद्विबाहु है और TQ, $\angle PTQ$ का कोणार्धक है। इसलिए $OT \perp PQ$ और इस प्रकार OT, PQ का अर्धक है जिससे प्राप्त होता है $PR = RQ = 4cm$

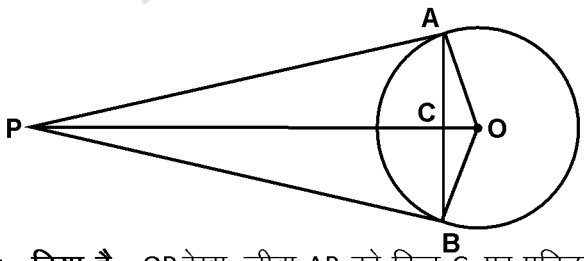
साथ ही $OR = \sqrt{OP^2 - OR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}\,cm = 3cm$

अब $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$

अतः $\angle RPO = \angle PTR$

इसलिए समकोण त्रिभुज TPR और समकोण त्रिभुज PRO, AA समरूपता द्वारा समरूप हैं। इससे $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$ प्राप्त होता हैं। अर्थात् $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ अर्थात् $TP = \frac{20}{3}cm$

2. आकृति में वृत्त का का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु P से खींची हुई स्पर्श रेखाएँ PA और PB वृत्त को क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि OP रेखाखण्ड, AB का समद्विभाजक हैं।



हल : **दिया है**– OP रेखा, जीवा AB को बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करती है।

ΔPAC और ΔPBC में

$PA = PB$ { किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खीची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती है। }

$\angle APC = \angle BPC$ { PA और PB, OP से बराबर कोण पर झुके हुए हैं और }

और $PC = PC$ (उभयनिष्ठ है)

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

∴ भुजा–कोण–भुजा से

$\Delta PAC \cong \Delta PBC$

$\therefore \quad AC = BC$

और $\angle ACP = \angle BCP$

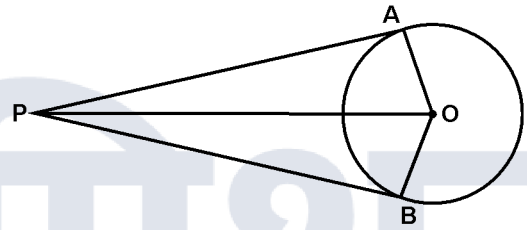
किन्तु $\angle ACP + \angle BCP = 180°$

$\therefore \quad \angle ACP = \angle BCP = 90°$

अतः OP रेखाखण्ड AB का समद्विभाजक है।

{इतिसिद्धम}

3. आकृति में, बाह्य बिन्दु P से केन्द्र O वाले वृत्त को PA एवं PB दो स्पर्श रेखाएँ क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि PAOB एक चक्रीय चतुर्भुज है।



हल : वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से त्रिज्या पर लम्बवत् होती है।

अब $OA \perp AP$ और $OB \perp BP$

$\Rightarrow \quad \angle OAP = 90°$ और $\angle OBP = 90°$

$\Rightarrow \quad \angle OAP + \angle OBP = 90° + 90°$

$\Rightarrow \quad \angle OAP + \angle OBP = 180°$ ..... (i)

चतुर्भुज OAPB के कोणों का योग 360° होता है।

$\therefore \quad \angle APB + \angle BOA = 360° - (180°)$

$\angle APB + \angle BOA = 180°$ ..... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से स्पष्ट है।

$\angle OAP + \angle OBP = 180°$

और $\angle OAP + \angle OBP = 180°$

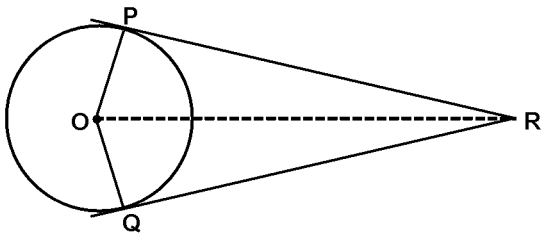
यहाँ पर सम्मुख कोणों का योग सम्पूरक है।

अतः चतुर्भुज AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है। {इतिसिद्धम}

4. सिद्ध कीजिए की किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती है।

अथवा

सिद्ध कीजिए की एक बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती है।



हल : **दिया है–** वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु R से दो स्पर्श रेखाएँ RP और RQ हैं।

सिद्ध करना है– RP = RQ

रचना– OP, OQ और OR को मिलाया।

उपपत्ति– हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लम्बवत होती हैं।

अतः $\angle OPR = \angle OQR = 90°$ ..... (i)

अब ΔOPR और ΔOQR में,

$\angle OPR = \angle OQR = 90°$ समीकरण (i) से

$OR = OR$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$OP = OQ$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

∴ समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta OPR \cong \Delta OQR$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

$RP = RQ$ {इतिसिद्धम}

11 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. 21cm त्रिज्या वाले वृत्त में 60° के केन्द्रिय कोण वाले चाप की लंबाई है–

(अ) 11cm (ब) 22cm

(स) 44cm (द) 66cm

2. 14cm त्रिज्या वाले वृत्त के चतुर्थांश का परिमाप है –

(अ) 36cm (ब) 44cm

(स) 50cm (द) 56cm

3. यदि किसी त्रिज्यखंड की त्रिज्या आधी तथा केन्द्र कोण दुगुना कर दिया जाए, तो उसका क्षेत्रफल –

(अ) समान रहेगा (ब) आधा होगा

(स) दुगुना होगा (द) चौथाई होगा

4. 7cm त्रिज्या के वृत्त में 90° केंद्र कोण वाले लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल है –

(अ) $14cm^2$ (ब) $28cm^2$

(स) $38.5cm^2$ (द) $49cm^2$

5. समान केंद्रीय कोण वाले दो त्रिज्यखंडों की त्रिज्याओं का अनुपात 3 : 5 है। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात होगा –

(अ) 3 : 5 (ब) 6 : 10

(स) 9 : 25 (द) 27 : 125

6. समान त्रिज्या वाले 45° और 135° के त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफलों का अनुपात होगा –

(अ) 1 : 2 (ब) 1 : 3

(स) 2 : 3 (द) 3 : 1

7. 14cm त्रिज्या के किसी त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $154cm^2$ है, तो केन्द्रिय कोण होगा –

(अ) 45° (ब) 60°

(स) 90° (द) 120°

8. 35mm व्यास वाले एक वृत्त को 10 समान त्रिज्यखंडों में बाँटा गया है। प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल है –

(अ) $48.125mm^2$ (ब) $96.25mm^2$

(स) $192.5mm^2$ (द) $962.5mm^2$

उत्तर : 1. (ब), **2.** (स), **3.** (ब), **4.** (अ), **5.** (स), **6.** (ब), **7.** (स), **8.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. 6cm त्रिज्या और 60° केन्द्रिय कोण वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या = 6cm, $\theta = 60°c$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{60°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 6^2$

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 36$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{132}{7} cm^2$

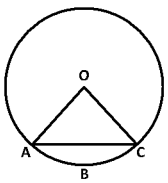
2. 10cm त्रिज्या की एक जीवा केंद्र पर 90° का कोण बनाती है। सगत लघु वृत्तखंड तथा लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

हल : त्रिज्या = 10cm, $\theta = 90°$

त्रिज्यखंड OABC का क्षेत्रफल $(A_1) = \frac{\pi r^2 \theta}{360°}$

$= 3.14 \times 10^2 \times \frac{90°}{360°}$

$A_1 = 78.5\ cm^2$



लघु वृत्तखण्ड ABC का क्षेत्रफल =

ΔOAC का क्षेत्रफल – त्रिज्यखण्ड OABC का क्षेत्रफल

$= 78.5 - \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= 78.5 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10$

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

$= 78.5 - 50$

$= 28.5\ cm^2$

लघु वृत्तखण्ड ABC का क्षेत्रफल $= 28.5\ cm^2$

3. 14cm त्रिज्या वाले वृत्त में 60° केंद्र कोण वाले लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14, \sqrt{3} = 1.73$)

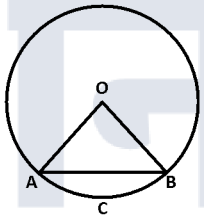
हल : वृत्तखंड का क्षेत्रफल =

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल − त्रिभुज का क्षेत्रफल

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल : $\frac{\pi r^2\theta}{360°}$

$A_1 = \frac{60°}{360°} \times 3.14 \times 14^2 = 102.57 cm^2$

चूँकि $OA = OB = 14\ cm$ और $\angle AOB = 60°$, इसलिए ΔOAB समबाहु है।



समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$A_2 = \frac{1.73}{4} \times 14^2 = 84.77 cm^2$

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल $= A_1 - A_2$

$= 102.57 - 84.77$

$= 17.80 cm^2$

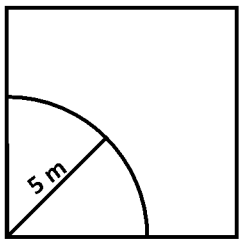
4. एक वर्गाकार खेत के एक कोने पर 5m लंबी रस्सी से घोड़ा बाँधा गया है। घोड़ा अधिकतम कितना क्षेत्र चर सकता है?

हल : वर्ग के कोने का कोण 90° है, इसलिए चराई का क्षेत्र 5 m त्रिज्या वाले वृत्त का चतुर्थांश होगा।

$A = \frac{1}{4}\pi r^2$

$A = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 5^2$

$A = 19.625 m^2$



अतः अधिकतम $19.625\ m^2$

5. 45cm त्रिज्या की एक छतरी में 8 समान तानें हैं। दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : 45cm त्रिज्या की एक छतरी में 8 समान ताने हैं।

प्रत्येक भाग का कोण :

$\theta = \frac{360°}{8} = 45°$

दो तानों के बीच का कोण $= \frac{\pi r^2\theta}{360°}$

$A = \pi \times 45^2 \frac{45}{360°}$

$A = \frac{2025\pi}{8} = cm^2$

$A \approx 795.54\ cm^2$

6. किसी वृत्त में चाप की लंबाई 5π cm तथा केंद्रीय कोण 50° है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : केन्द्रीय कोण $= 50°$

चाप की लम्बाई $= 5\pi\ cm$

$2\pi r \frac{\theta}{360°} = 5\pi$

$2\pi r \frac{50°}{360°} = 5\pi$

$r \frac{10}{180} = 1$

$r = 18\ cm$

अतः वृत्त की त्रिज्या 18 cm है।

7. 21cm त्रिज्या वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $231 cm^2$ है। केंद्रीय कोण ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= 231\ cm^2$ है।

$\frac{\pi r^2\theta}{360°} = 231$

$\pi \times 21^2 \times \frac{\theta}{360°} = 231$

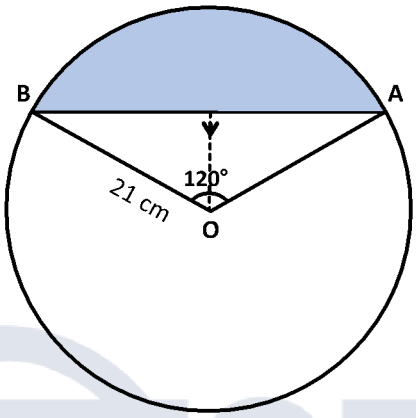
$\theta = \frac{231 \times 360}{441 \times 3.14}$

$\theta = 60°$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

दीर्घ–उत्तरात्मक प्रश्न –

1. 21cm त्रिज्या की एक जीवा केंद्र पर 120° का कोण बनाती है। संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। उत्तर को $\sqrt{3}$ के रूप में दीजिए।



हल : वृत्त की त्रिज्या = 21cm

केन्द्रिय कोण $(\theta) = 120°$

वृत्तखण्ड AYB का क्षेत्रफल =

त्रिज्यखण्ड OAYB का क्षेत्रफल $-\Delta OAB$ का क्षेत्रफल

त्रिज्यखंड OAYB का क्षेत्रफल : $\frac{\theta}{360°}\pi r^2$

$$A_1 = \frac{120°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$A_1 = 462 \text{ cm}^2$$

केन्द्र O से जीवा AB पर $OM \perp AB$ खींचते हैं।

समद्विबाहु त्रिभुज O AB में :

$\angle AOM = \angle BOM = 60°$

$$OM = 21\cos 60° = \frac{21}{2}\text{cm}$$

$$AM = 21\sin 60° = \frac{21\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

$$AB = 2AM = 21\sqrt{3}\text{cm}$$

त्रिभुज O AB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$A_2 = \frac{1}{2} \times AB \times OM$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$$

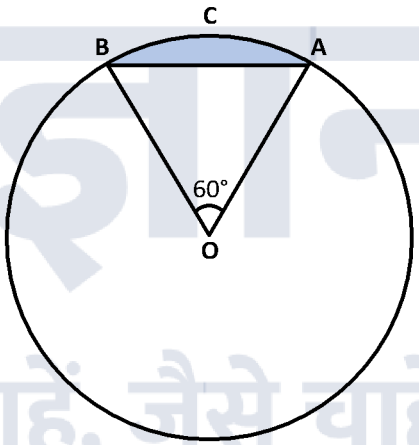
$$A_2 = \frac{441\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

अतः लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल :

$$A = A_1 - A_2$$

$$A = 462 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

2. 15cm त्रिज्या की एक जीवा केंद्र पर 60° का कोण बनाती है। लघु तथा दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)



वृत्त की त्रिज्या = 15cm

केन्द्रिय कोण = 60°

हल : त्रिज्यखंड OACB का क्षेत्रफल : $\frac{\theta}{360°}\pi r^2$

$$A_1 = \frac{60°}{360°} \times 3.14 \times 15^2$$

$$A_1 = 117.75 \text{ cm}^2$$

यहाँ OA = OB = 15 तथा $\angle AOB = 60°$, इसलिए ΔOAB समबाहु त्रिभुज है।

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

$A_2 = \frac{1.73}{4} \times 15^2$

$A_2 = 97.3125\ cm^2$

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल =

त्रिज्यखण्ड OACB – ΔOAB का क्षेत्रफल

$A_{लघु} = 117.75 - 97.3125$

$A_{लघु} = 20.44\ cm^2$

वृत्त का क्षेत्रफल : πr^2

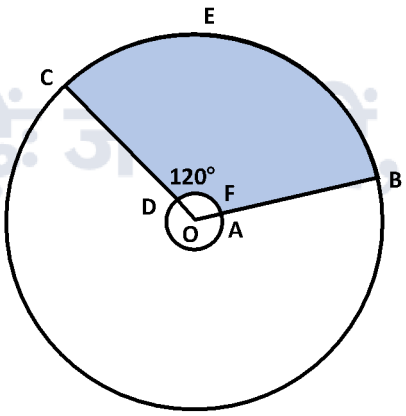
$A_{वृत्त} = 3.14 \times 15^2 = 706.5\ cm^2$

दीर्घ वृत्तखंड = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$A_{दीर्घ} = 706.5 - 20.4375$

$A_{दीर्घ} = 686.06\ cm^2$

3. दो वाइपरों में प्रत्येक का धुरी से बाहरी सिरा 25cm तथा भीतरी सिरा 5cm दूर है। प्रत्येक वाइपर 120° घूमता है और दोनों द्वारा साफ किए गए क्षेत्र परस्पर नहीं काटते। दोनों वाइपरों द्वारा साफ किया गया कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14)



हल : बाहरी त्रिज्या (R) = 25cm

भीतरी त्रिज्या (r) = 5cm

केन्द्रिय कोण = 120°

त्रिज्यखण्ड OBEC का क्षेत्रफल – त्रिज्यखण्ड OAFD का क्षेत्रफल

एक वाइपर द्वारा साफ क्षेत्र = $\frac{\theta}{360°} \times \pi R^2 - \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$A_1 = \frac{120°}{360°} \pi(R^2 - r^2)$

$A_1 = \frac{1}{3} \times 3.14(25^2 - 5^2)$

$A_1 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 600 = 628 cm^2$

दो वाइपरों का कुल क्षेत्र :

$A = 2 \times 628$

$A = 1256 cm^2$

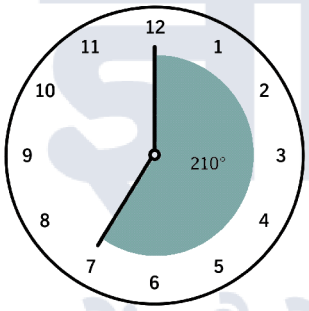
4. एक घड़ी की मिनट सूई 18cm लंबी है। सूई द्वारा 35 मिनट में घूमने पर निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

1. सूई द्वारा बनाया गया कोण

2. सुई के सिरे द्वारा चली गई दूरी

3. सूई द्वारा रचित क्षेत्रफल

4. बने त्रिज्यखंड का परिमाप



हल : सूई की लम्बाई = वृत्त की त्रिज्या = 18cm

1 चक्कर में कुल कोण = 360°

60 मिनट में बना कोण = 360°

1 मिनट में बना कोण = $\frac{360°}{60°} = 6°$

(i) 35 मिनट में सूई द्वारा बनाया गया कोण :

$\theta = 35 \times 6° = 210°$

$\theta = 210°$

(ii) सिरे द्वारा चली दूरी = चाप की लम्बाई

$\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

$l = \frac{210}{360°} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 18$

$l = 66\ cm$

पढ़ें जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

(iii) सूई द्वारा रचित क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2 \implies A = \frac{210°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 18^2$$

$A = 594\ cm^2$

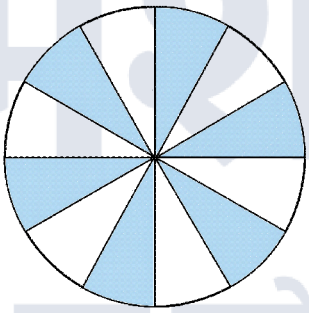
(iv) त्रिज्यखंड का परिमापः P = 2r + चाप की लम्बाई

P = 2(18) + 66 P = 102cm

5. 21cm त्रिज्या के एक वृत्ताकार पहिए को 12 समान त्रिज्यखंडों में बाँटा गया है। एकांतर 6 त्रिज्यखंड रंगे गए हैं। ज्ञात कीजिए –

1. रंगा हुआ क्षेत्र

2. बाहरी परिधि तथा 12 तीलियों के लिए आवश्यक कुल तार $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



हल : पहिए की त्रिज्या = 21 cm

6 एकांतार भाग मिलकर अर्द्ध वृत्त बनाते है, तो रंगा हुआ क्षेत्र = अर्द्ध वृत्त का क्षेत्रफल

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 21^2$$

$A = 693\ cm^2$

वृत्त की परिधि = $2\pi r$

$C = 2\pi r$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = 132cm$$

12 तीलियों की कुल लंबाई :

$12 \times 21 = 252cm$

कुल तार की लंबाई =

वृत्त की परिधि + 12 तीलियों की कुल लम्बाई

132 + 252 = 384cm

कुल तार की लम्बाई = 384cm

12 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है–

(अ) $2\pi r^2$ (ब) $3\pi r^2$

(स) $4\pi r^2$ (द) πr^2

2. कैप्सूल = बेलन + दो अर्धगोले। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा–

(अ) $2\pi rh + 4\pi r^2$ (ब) $2\pi rh + 2\pi r^2$

(स) $\pi r^2 h$ (द) $3\pi r^2$

3. यदि r = 7 cm, h = 10 cm हो, तो बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल होगा?

(अ) 220 cm^2 (ब) 440 cm^2

(स) 660 cm^2 (द) 154 cm^2

4. एक शंकु को बेलन के ऊपर रखा गया है। दोनों की त्रिज्या समान है। बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा–

(अ) $2\pi rh + \pi rl$ (ब) $2\pi rh + \pi r^2 + \pi rl$

(स) $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (द) $3\pi r^2 + \pi rl$

5. यदि शंकु की त्रिज्या 7 cm और तिर्यक ऊँचाई 25 cm है, तो इसकी ऊँचाई होगी–

(अ) 18 cm (ब) 20 cm

(स) 22 cm (द) 24 cm

6. एक बेलन के दोनों सिरों पर अर्धगोले लगे हैं। त्रिज्या 3.5 cm और बेलन की लम्बाई 10 cm है। बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा–

(अ) 297 cm^2 (ब) 374 cm^2

(स) 440 cm^2 (द) 484 cm^2

उत्तर : 1. (ब), **2.** (अ), **3.** (ब), **4.** (ब), **5.** (द), **6.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक बेलन की त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 10 cm हैं। बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है–

बेलन की त्रिज्या (r) = 3.5 cm

बेलन की ऊँचाई (h) = 10 cm

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 10$

$= 2 \times 22 \times 0.5 \times 10$

$= 44 \times 5 = 220\ cm^2$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 220 वर्ग सेमी. है।

2. एक शंकु की त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 8 cm है। शंकु की तिर्यक ऊँचाई और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है–

शंकु की त्रिज्या (r) = 6 cm

शंकु की ऊँचाई (h) = 8 cm

तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$l = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$l = \sqrt{36 + 64} \quad \Rightarrow l = \sqrt{100}$

$\Rightarrow l = 10$ cm

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = πrl

$= 3.14 \times 6 \times 10$

$= 3.14 \times 60$

$= 188.4\ cm^2$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 188.4 cm^2

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

3. एक खिलौना एक शंकु के आकार का है, जो एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। दोनों की त्रिज्या r समान है। यदि शंकु की ऊंचाई h और तिर्यक ऊंचाई l है, तो इस खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : शंकु की त्रिज्या = r

अर्धगोले की त्रिज्या = r

शंकु की तिर्यक ऊँचाई = l

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= (शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) +

(अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= \pi rl + 2\pi r^2$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(l + 2r)$

दीर्घउत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक खिलौना एक शंकु के आकार का है, जो समान त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। खिलौने की कुल ऊंचाई 15.5 सेमी है और अर्धगोले की त्रिज्या 3.5 सेमी है। खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : खिलौने की त्रिज्या (r) = 3.5 cm

खिलौने की कुल ऊँचाई = 15.5 cm

अर्धगोले की त्रिज्या r = 3.5 cm

शंकु की ऊँचाई (h) = कुल ऊँचाई – अर्धगोले की त्रिज्या

h = 15.5 – 3.5 = 12 cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$l = \sqrt{3.5^2 + 12^2}$ $= \sqrt{12.25 + 144}$

$l = \sqrt{156.25}$ $= 12.5$ cm

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= (शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) +

(अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= \pi rl + 2\pi r^2 = \pi r(l + 2r)$

$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (12.5 + 2 \times 3.5)$

$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (12.5 + 7)$

$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times 19.5$

$= 22 \times 0.5 \times 19.5$

$= 11 \times 19.5$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 214.5 cm^2

2. एक तंबू एक बेलन के आकार का है, जिस पर एक शंकु अध्यारोपित है। यदि तंबू के आधार की त्रिज्या 2 मीटर, बेलनाकार भाग की ऊँचाई 2.1 मीटर और शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 मीटर है, तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही यदि कैनवास की दर ₹500 प्रति वर्ग मीटर है, तो तंबू बनाने की कुल लागत भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है–

तंबू की त्रिज्या (r) = 2 मीटर

बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h) = 2.1 मीटर

शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = 2.8 मीटर

कैनवास का क्षेत्रफल = (बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + (शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$

मान रखने पर, $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

$= \frac{22}{7} \times 2 \times (2 \times 2.1 + 2.8)$

$= \frac{22}{7} \times 2 \times (4.2 + 2.8)$

$= \frac{22}{7} \times 2 \times 7$

कैनवास का क्षेत्रफल = 44 वर्ग मीटर

कुल लागत = कैनवास का क्षेत्रफल × 1m^2 की लागत

= 44 m^2 × 500 ₹/m^2 = ₹22000

3. एक बर्तन एक खोखले अर्धगोले पर एक खोखले बेलन को रखकर बनाया गया है। अर्धगोले का व्यास 14 cm है और बर्तन की कुल ऊँचाई 13 cm है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : अर्धगोले का व्यास (d) = 14 cm

अर्धगोले की त्रिज्या (r) = $\frac{14}{2}$ = 7cm

बेलन की त्रिज्या (r) = 7 cm

बर्तन की कुल ऊँचाई = 13 cm

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

बेलन की ऊँचाई (h) = कुल ऊँचाई – अर्धगोले की त्रिज्या

$h = 13 - 7 = 6$ cm

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

= (बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + (अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

मान रखने पर, $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (6 + 7)$

$= 2 \times 22 \times 13$

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = 572 वर्ग सेमी.

4. एक पक्षी–स्नान एक खोखले बेलन के आकार का है, जिसके एक सिरे पर अर्धगोलाकार कटोरा लगा हुआ है। यदि बेलन की त्रिज्या 30 सेमी. और कुल ऊँचाई 1.45 मीटर है, तो इस पक्षी–स्नान का कुल आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या (r) = 30 सेमी. = 0.3 मीटर

कुल ऊँचाई (H) = 1.45 मीटर

बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h) = कुल ऊँचाई – अर्धगोले की त्रिज्या

$h = 1.45 - 0.3 = 1.15$ मीटर

बर्तन का कुल आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = (बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + (अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi rh(h + r)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.3 \times (1.15 + 0.3)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.3 \times 1.45$

= 2.7318 वर्ग मीटर

अतः बर्तन का कुल आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल 2.7318 वर्ग मीटर है।

5. एक वस्तु एक बेलन के आकार की है, जिसके ऊपर एक अर्धगोला अध्यारोपित है। यदि बेलन और अर्धगोले की त्रिज्या 7 सेमी. है और बेलनाकार भाग की ऊँचाई 10 सेमी. है, तो इस वस्तु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या (r) = 7 सेमी.

बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h) = 10 सेमी.

वस्तु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = (बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + (अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + (बेलन के आधार का क्षेत्रफल)

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 3\pi r^2 = \pi r(2h + 3r)$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times (2 \times 10 + 3 \times 7)$

$= 22 \times (20 + 21)$

$= 22 \times 41$

वस्तु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 902 वर्ग सेमी.

ठोसों के संयोजन का आयतन

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. बेलन का आयतन है–

(अ) $2\pi rh$ (ब) $\pi r^2 h$

(स) πrl (द) $4\pi r^2$

2. गोले का आयतन है–

(अ) $\frac{4}{3}\pi r^3$ (ब) $\frac{2}{3}\pi r^3$

(स) $\pi r^2 h$ (द) πrl

3. यदि एक घन का प्रत्येक किनारा 6 cm है और उसके ऊपर समान आधार वाला घनाभ रखा है जिसकी ऊँचाई 4 cm है, तो कुल आयतन होगा–

(अ) 216 cm^3 (ब) 288 cm^3

(स) 360 cm^3 (द) 432 cm^3

4. एक ठोस में बेलन और दो अर्धगोले हैं। यह आकार किसके समान आयतन रखता है?

(अ) बेलन + गोला (ब) बेलन + शंकु

(स) दो बेलन (द) केवल गोला

5. यदि एक शंकु और एक बेलन की त्रिज्या (r) और ऊँचाई (h)समान है, तो बेलन का आयतन, शंकु के आयतन से कितना गुना होता है?

(अ) 2 गुना (ब) 3 गुना

(स) आधा (द) बराबर

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

6. एक शंकु की त्रिज्या 7 सेमी. और ऊँचाई 9 सेमी. है। इस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

(अ) 462 cm^3 (ब) 154 cm^3

(स) 1386 cm^3 (द) 616 cm^3

उत्तर : 1. (ब), **2.** (अ), **3.** (स), **4.** (अ), **5.** (ब), **6.** (अ)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक घन की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 5 सेमी. है। घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है–

घन की भुजा (a) = 5 cm

घन का आयतन = a^3

आयतन = $5 \times 5 \times 5 = 125\ cm^3$

2. एक ठोस बेलन में से उसी त्रिज्या और ऊँचाई वाला एक शंक्वाकार भाग बाहर निकाला गया है। शेष बचे ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए सूत्र क्या होगा?

हल : माना, बेलन की त्रिज्या = शंकु की त्रिज्या = r

बेलन की ऊँचाई = शंकु की ऊँचाई = h

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

शेष बचे ठोस का आयतन

= बेलन का आयतन – शंकु का आयतन

$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 h\left(1 - \frac{1}{3}\right)$

शेष बचे ठोस का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ घन इकाई

दीर्घउत्तरात्मक प्रश्न –

1. एक खिलौना एक अर्धगोले पर अध्यारोपित एक शंकु के आकार का है। यदि खिलौने की त्रिज्या 2 सेमी. और शंकु की ऊँचाई 2 सेमी. है, तो इस खिलौने का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है,

अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 2 सेमी.

शंकु की त्रिज्या (r) = 2 सेमी.

शंकु की ऊँचाई (h) = 2 सेमी.

खिलौने का कुल आयतन = (शंकु का आयतन) + (अर्धगोले का आयतन)

आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 (h + 2r)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times [2 + 2 \times 2]$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 4 \times [2 + 4]$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 4 \times 6$

$= 3.14 \times 4 \times 2$

खिलौने का कुल आयतन = 25.12 घन सेमी.

2. एक शेड एक घनाभ के आकार का है, जिस पर एक अर्ध–बेलनाकार छत बनी है। शेड के आधार की विमाएँ 7 मीटर × 15 मीटर है और घनाभ वाले भाग की ऊँचाई 8 मीटर है। यदि अर्ध–बेलनाकार छत की लम्बाई 15 मीटर है और उसका व्यास 7 मीटर है, तो शेड के अंदर की हवा का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है–

घनाभ की लम्बाई (l) = 15 मीटर

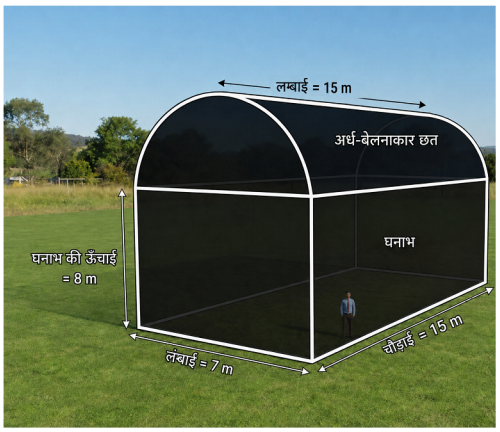
घनाभ की चौड़ाई (b) = 7 मीटर

घनाभ की ऊँचाई (h) = 8 मीटर

अर्ध–बेलनाकार छत का व्यास (d) = 7 मीटर,

त्रिज्या (r) = 3.5 मीटर

अर्ध–बेलनाकार छत की लम्बाई (L) = 15 मीटर



पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

घनाभ का आयतन = l × b × h

= 15 × 7 × 8 = 840 घन मीटर

बेलन के आयतन का आधा = $\frac{1}{2}\times\left(\pi r^2 L\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times(3.5)^2\times15$

$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times12.25\times15$

आयतन = 11 × 1.75 × 15 = 288.75 घन मीटर

हवा का कुल आयतन = 840 + 288.75

= 1128.75 घन मीटर

अतः शेड के अन्दर हवा का कुल आयतन 1128.75 घन मीटर होगा।

3. एक खिलौना एक शंकु के आकार का है, जो समान त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। यदि खिलौने की त्रिज्या 3.5 सेमी. और शंकु की ऊँचाई 12 सेमी. है, तो इस खिलौने का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : खिलौने की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी.

शंकु की ऊँचाई (h) = 12 सेमी.

खिलौने का कुल आयतन = (शंकु का आयतन) + (अर्धगोले का आयतन)

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h+\frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{1}{3}\pi r^2(h+2r)$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times12.25\times(12+7)$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{1225}{100}\times19$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\times19$

$= \frac{1}{3}\times22\times\frac{7}{4}\times19$

कुल आयतन = $\frac{1463}{6}$

खिलौने का कुल आयतन ≈ 243.83 घन सेमी.

4. एक 14 सेमी. भुजा वाले घनाकार ब्लॉक के एक फलक को अंदर की ओर से काटकर एक अर्धगोलाकार गढ्ढा बनाया गया है। यदि अर्धगोले का व्यास घन की भुजा के बराबर है, तो शेष बचे ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : घन की भुजा (a) = 14 सेमी. = अर्द्धगोले का व्यास

अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 7 सेमी.

शेष बचे ठोस का आयतन = (घन का आयतन) – (अर्धगोले का आयतन)

$= a^3-\frac{2}{3}\pi r^3$

$= 14^3-\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3$

$= 2744-\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times343$

$= 2744-\frac{2156}{3}$

शेष बचे ठोस का आयतन = 2744 – 718.67

शेष बचे ठोस का आयतन = 2025.33 घन सेमी.

5. एक ठोस वस्तु बेलन के आकार की है, जिसके ऊपर समान त्रिज्या वाला एक अर्धगोला अध्यारोपित है। यदि बेलन की त्रिज्या 7 सेमी. बेलन की ऊँचाई 12 सेमी. है और अर्धगोले की त्रिज्या भी 7 सेमी. है, तो इस वस्तु का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : बेलन की त्रिज्या (r) = 7 सेमी.

बेलन की ऊँचाई (h) = 12 सेमी.

अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 7 सेमी.

वस्तु का कुल आयतन = (बेलन का आयतन) + (अर्धगोले का आयतन)

$= \pi r^2 h+\frac{2}{3}\pi r^3$

$= \pi r^2\left(h+\frac{2}{3}r\right)$

$= \frac{22}{7}\times(7)^2\times\left(12+\frac{2}{3}\times7\right)$

$= \frac{22}{7}\times49\times\left(12+\frac{14}{3}\right)$

$= 22\times7\times\left(\frac{36+14}{3}\right)$

$= 154\times\left(\frac{50}{3}\right) \Rightarrow \frac{7700}{3}$ घन सेमी.

वस्तु का कुल आयतन ≈ 2566.67 घन सेमी.

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

13 सांख्यिकी

माध्य

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. यदि $x_i = 10, 20, 30$ और $f_i = 2, 3, 5$ है, तो माध्य है–

(अ) 20 (ब) 23

(स) 25 (द) 30

2. वर्ग अंतराल 30-50 का वर्ग चिह्न है–

(अ) 30 (ब) 40

(स) 50 (द) 80

3. यदि $\sum f_i = 40$ और $\sum f_i x_i = 1800$ हो, तो माध्य है–

(अ) 40 (ब) 42

(स) 45 (द) 50

4. यदि $a = 50, h = 10, \sum f_i u_i = -8$ m और $\sum f_i = 20$ हो, तो माध्य है–

(अ) 44 (ब) 46

(स) 48 (द) 54

5. यदि सभी प्रेक्षणों में 3 जोड़ दिया जाए, तो माध्य–

(अ) 3 घट जाएगा (ब) 3 बढ़ जाएगा

(स) वही रहेगा (द) दुगुना हो जाएगा

6. पाँच संख्याओं का माध्य 12 है, तो संख्याओं का योग होगा–

(अ) 50 (ब) 55

(स) 60 (द) 72

उत्तर : 1. (ब), **2.** (ब), **3.** (स), **4.** (ब), **5.** (ब), **6.** (स)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. $x_i = 5, 10, 15, 20$ और $f_i = 2, 3, 4, 1$ माध्य हो, तो ज्ञात कीजिए।

हल :

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	2	10
10	3	30
15	4	60
20	1	20
योग	10	120

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{120}{10} = 12$$

2. यदि माध्य 27 है, तो x ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f_i	4	x	12	8	4

हल : वर्गचिन्ह : 5, 15, 25, 35, 45

$$\sum f_i = 4 + x + 12 + 8 + 4 = 28 + x$$

$$\sum f_i x_i = 20 + 15x + 300 + 280 + 180 = 780 + 15x$$

$$\frac{780 + 15x}{28 + x} = 27 \quad \left\{\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right\}$$

$= 24 = 12x \Rightarrow x = 2$

$$27 = \frac{780 + 15x}{28 + x}$$

$$27(28 + x) = 780 + 15x$$

$$756 + 27x = 780 + 15x$$

$$24 = 12x$$

$$x = 2$$

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

3. यदि $x_i = 10, 20, 30, 40$, $f_i = 2, x, 4, 3$ और माध्य 28 है, तो x ज्ञात कीजिए।

हल :

x_i	f_i	f_ix_i
10	2	20
20	x	20x
30	4	120
40	3	120
योग	9 + x	260 + 20x

$$\sum f_i = 2 + x + 4 + 3 = 9 + x$$

$$\sum f_ix_i = 20 + 20x + 120 + 120 = 260 + 20x$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

$$28 = \frac{260 + 20x}{9 + x}$$

$$28(9 + x) = 260 + 20x$$

$$252 + 28x = 260 + 20x$$

$$8x = 8$$

$$x = 1$$

4. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40
f_i	3	5	7	5

हल :

वर्ग अन्तराल	x_i (वर्गचिन्ह)	f_i	f_ix_i
0-10	5	3	15
10-20	15	5	75
20-30	25	7	175
30-40	35	5	175
योग		20	440

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{440}{20}$$

$$\bar{x} = 22$$

5. a = 30 को कल्पित माध्य के कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

x_i	20	30	40	50
f_i	4	6	7	3

हल :

x_i	f_i	$d_i = x_i - 30$	f_ix_i
20	4	–10	–40
30	6	0	0
40	7	10	70
50	3	20	60
योग	20		90

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_id_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = 30 + \frac{90}{20} \quad \Rightarrow \quad 30 + 4.5 = 34.5$$

6. पद–विचलन विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50
f_i	2	5	8	5

हल : मान लें a = 35, h = 10

वर्ग अन्तराल	x_i	f_i	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	f_iu_i
10-20	15	2	–2	–4
20-40	25	5	–1	–5
30-40	35	8	0	0
40-50	45	5	1	5
योग		20		–4

$$\bar{x} = a + h\left(\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right)$$

$$\bar{x} = 35 + 10\left(\frac{-4}{20}\right)$$

$$\bar{x} = 35 - 2 = 33$$

$$\bar{x} = 33$$

7. पद विचलन विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

आय	व्यक्ति
100-120	5
120-140	8
140-160	12
160-180	10
180-200	5

हल : मान a = 150, h = 20

$$\bar{x} = \frac{a + \sum f_iu_i}{\sum f_i} \times h$$

$$\bar{x} = 150 + \left(\frac{2}{40}\right)20$$

$$\bar{x} = 150 + 1$$

$$\bar{x} = 151$$

आय	x_i (वर्गचिन्ह)	f_i		f_iu_i
100-120	110	5	–2	– 10
120-140	130	8	–1	–8
140-160	150	12	0	0
160-180	170	10	1	10
180-200	190	5	2	10
योग		40		2

$$\bar{x} = 150 + 20\left(\frac{2}{40}\right) = 150 + 1 = 151$$

8. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्य 370 है, f ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बारंबारता
100-200	4
200-300	6
300-400	f
400-500	10
500-600	5

हल :

वर्ग अन्तराल	x_i (वर्गचिन्ह)	f_i	f_ix_i
100-200	150	4	600
200-300	250	6	1500
300-400	350	f	350f
400-500	450	10	4500
500-600	550	5	2750
योग		25 + f	9350 + 350f

वर्ग चिह्न = 150, 250, 350, 450, 550

$$\sum f_i = 25 + f$$

$$\sum f_ix_i = 4(150) + 6(250) + 350f + 10(450) + 5(550)$$

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

= 600 + 1500 + 350f + 4500 + 2750

= 9350 + 350f

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$370 = \frac{9350 + 350f}{25 + f}$$

9250 + 370f = 9350 + 350f

20f = 100

f = 5

माध्यक

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. माध्यक किसका मान बताता है?

(अ) सबसे अधिक आने वाला मान

(ब) बीच का मान

(स) सभी मानों का योग

(द) सबसे बड़ा मान

2. यदि आँकड़े पहले से आरोही क्रम में हैं, तो 2, 4, 6, 8, 10 का माध्यक है–

(अ) 4 (ब) 6

(स) 8 (द) 10

उत्तर : 1. (ब), **2.** (ब)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. 12, 15, 18, 20, 25 का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल : आँकड़े आरोही क्रम में हैं।

n = 5

माध्यक = $\frac{n+1}{2}$ वाँ = $\frac{5+1}{2}$ वाँ = 3 | माध्यक = 18

2. निम्न आँकड़ों का माध्यक वर्ग ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40
f_i	4	5	8	3

हल :

वर्ग अन्तराल	f_i	c.f.
0-10	4	4
10-20	5	9
20-30	8	17
30-40	3	20

N = 20, $\frac{N}{2} = 10$

10 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बरता = 17

इसलिए माध्यक वर्ग = 20-30

3. निम्न तालिका की संचयी बारम्बारता लिखिए।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40
f_i	3	5	12	10

हल :

वर्ग	f_i	c.f.
0-10	3	3
10-20	5	8
20-30	12	20
30-40	10	30

4. यदि N = 40, l = 20, cf = 15, f = 10, h = 10 हो, तो माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल : माध्यक = $l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$

माध्यक = $20 + \left(\frac{20 - 15}{10}\right) \times 10$

माध्यक = 20 + 5 = 25

5. निम्न आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f_i	5	8	12	10	5

हल :

वर्ग	f_i	c.f.
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	12	25
30-40	10	35
40-50	5	40

$N = 40, \frac{N}{2} = 20$

20 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता = 25

माध्यक वर्ग = 20–30

l = 20, cf = 13, f = 12, h = 10

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$\text{माध्यक} = 20 + \left(\frac{20-13}{12}\right) \times 10$$

$$\text{माध्यक} = 20 + \frac{70}{12} = 25.83$$

6. निम्न आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
f_i	3	6	10	8	3

हल :

वर्ग	f_i	c.f.
0-5	3	3
5-10	6	9
10-15	10	19
15-20	8	27
20-25	3	30

$N = 30, \frac{N}{2} = 15$

15 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता = 19

माध्यक वर्ग = 10-15

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

l = 10, cf = 9, f = 10, h = 5

$$\text{माध्यक} = 10 + \left(\frac{15-9}{10}\right) \times 5$$

माध्यक = 10 + 3 = 13

7. एक बीमा कम्पनी ने 100 ग्राहकों की आयु का निम्न वितरण दिया है, यदि ग्राहकों की न्यूनत्तम आयु 18 वर्ष है, तो ग्राहकों की माध्यक आयु ज्ञात कीजिए।

आयु	ग्राहकों की संख्या
20 से कम	4
25 से कम	10
30 से कम	22
35 से कम	48
40 से कम	75
45 से कम	90
50 से कम	96
55 से कम	99
60 से कम	100

पढ़ः जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल :

वर्ग अन्तराल	f_i	c.f.
18-20	4	4
20-25	6	10
25-30	12	22
30-35	26	48
35-40	27	75
40-45	15	90
45-50	6	96
50-55	3	99
55-60	1	100

$N = 100, \frac{N}{2} = 50$

50 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता = 75

माध्यक वर्ग = 35-40

$l = 35, cf = 48, f = 27, h = 5$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$\text{माध्यक} = 35 + \left(\frac{50 + 48}{27}\right) \times 5$$

$$\text{माध्यक} = 35 + \frac{10}{27} = 35.37$$

8. 200 बल्बों की आयु का निम्न 'से कम' प्रकार का संययी बारम्बारता वितरण दिया गया है। बलबों की माध्यक आयु ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	f_i	c.f.
0-100	10	10
100-200	18	28
200-300	32	60
300-400	45	105
400-500	45	150
500-600	30	180
600-700	15	195
700-800	5	200

हल :

वर्ग अन्तराल	f_i	c.f.
0-100	10	10
100-200	18	28
200-300	32	60
300-400	45	105
400-500	45	150
500-600	30	180
600-700	15	195
700-800	5	200

$N = 200, \frac{N}{2} = 100$

100 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता = 105

माध्यक वर्ग = 300-400

$l = 300, cf = 60, f = 45, h = 100$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$= 300 + \left(\frac{100 - 60}{45}\right) \times 100$$

$$= 300 + \frac{4000}{45} = 388.89 \text{ घंटे}$$

9. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक **88** है और कुल बारंबारता **100** हैं। x और y ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बरंबारता	cf
0-20	4	4
20-40	8	12
40-60	x	12 + x
60-80	18	30 + x
80-100	25	55 + x
100-120	20	75 + x
120-140	y	75 + x + y
140-160	5	80 + x + y
योग	80 + x + y	

हल : कुल बारम्बारता = 100

80 + x + y = 100

x + y =20 .....(1)

माध्यक = 88, इसलिए माध्यक वर्ग = 80 - 100

l = 80, h = 20, f = 25, N = 100

cf = 30 + x

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$88 = 80 + \left(\frac{50 - (30 + x)}{25}\right) \times 20$$

$$8 = \frac{20 - x}{25} \times 20$$

200 = 400 – 20x

20x = 200

x = 10

x + y = 20

10 + y = 20

y = 10

अतः x = 10, y = 10

10. 50 विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ दी गई हैं। माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई सेमी. में	विद्यार्थियों की संख्या
120-128	4
129-137	6
138-146	12
147-155	15
156-164	8
165-173	5

हल :

वर्ग अंतराल	सतत वर्ग अंतराल	f	cf
120-128	119.5-128.5	4	4
129-137	128.5-137.5	6	10
138-146	137.5-146.5	12	22
147-155	146.5-155.5	15	37
156-164	155.5-164.5	8	45
165-173	164.5-173.5	5	50

N = 50, $\frac{N}{2}$ = 25, 25 से ठिक बड़ी संचयी बारम्बरता = 37

माध्यक वर्ग - 146.5-155.5

l = 146.5, cf = 22, f = 15, h = 9

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$= 146.5 + \left(\frac{25 - 22}{15}\right) \times 9$$

= 146.5 + 1.8 = 148.3 सेमी.

पढ़ें जब चाहें, जहाँ
RECORDED VIDEOS | LIVE CLASSES | PDF NOTES | e-BOOKS | QUIZ | TEST SERIES

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

11. 100 व्यक्तियों की आयु नीचे दी गई है। माध्यक आयु ज्ञात कीजिए।

आयु वर्ष में	व्यक्तियों की संख्या
18-22	8
23-27	12
28-32	20
33-37	28
38-42	18
43-47	14

हल :

वर्ग अंतराल	सतत वर्ग	f	cf
18-22	17.5-22.5	8	8
23-27	22.5-27.5	12	20
28-32	28.5-32.5	20	40
33-37	32.5-37.5	28	68
38-42	37.5-42.5	18	86
43-47	42.5-47.5	14	100

$N = 100, \frac{N}{2} = 50$

50 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता = 68

माध्यक वर्ग - 33-37

$l = 32.5, cf = 40, f = 28, h = 5$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$= 32.5 + \left(\frac{50 - 40}{28}\right) \times 5$$

= 32.5 + 1.7 = 34.29 वर्ष

बहुलक

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. बहुलक किसे कहते हैं?

(अ) सबसे बड़ा मान

(ब) सबसे छोटा मान

(स) सबसे अधिक बार आने वाला मान

(द) बीच का मान

2. निम्न आँकड़े 5, 6, 6, 7, 8, 6, 9 का बहुलक है–

(अ) 5 (ब) 6

(स) 7 (द) 9

3. यदि माध्य = 20, माध्यक = 22 हो, तो बहुलक होगा–

(अ) 24 (ब) 25

(स) 26 (द) 28

उत्तर : 1. (स), **2.** (ब), **3.** (स)

लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. 1, 3, 5, 6, 1, 3, 5, 3, 6, 1, 3 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : 3 बहुलक है।

2. यदि $l = 20, h = 10, f_0 = 5, f_1 = 14, f_2 = 4$ हो, तो बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : $\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$\text{बहुलक} = 20 + \left(\frac{14 - 5}{2(14) - 5 - 4}\right) \times 10$$

$$\text{बहुलक} = 20 + \left(\frac{9}{19}\right) \times 10$$

बहुलक = 20 + 4.74 = 24.74

3. यदि बहुलक माध्य = 10, माध्याक = 15 हो, तो बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : 3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य

3(15) = बहुलक + 2 × 10

45 – 20 = बहुलक

25 = बहुलक

4. निम्न आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए–

वर्ग अन्तराल	0-5	5-10	10-15	15-20
f_i	2	7	10	5

हल : बहुलक वर्ग $f_i = 10$

बहुलक वर्ग = 10-15

$l = 10, h = 5, f_0 = 7, f_1 = 10, f_2 = 5$

$$\text{बहुलक} = 10 + \left(\frac{10-7}{20-7-5}\right) \times 5$$

$$= 10 + \frac{3}{8} + 5 = 11.875$$

5. 100 परिवारों के मासिक दूध खर्च का वितरण निम्न है। बहुलक और माध्य खर्च ज्ञात कीजिए।

व्यय ₹ में	परिवारों की संख्या
1000-1250	7
1250-1500	16
1500-1750	30
1750-200	24
2000-2250	15
2250-2500	8

हल : बहुलक खर्च –

सबसे अधिक आवृत्ति 30 है,

इसलिए बहुलक वर्ग 1500-1750 है।

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

यहाँ,

$l = 1500, f_1 = 30, f_0 = 16, f_2 = 24, h = 250$

$$\text{बहुलक} = 1500 + \frac{30-16}{2(30)-16-24} \times 250$$

$$\text{बहुलक} = 1500 + \frac{14}{20} \times 250$$

बहुलक = 1500 + 175 = 1675

बहुलक खर्च = ₹1675

औसत खर्च –

वर्ग	मध्य मान (x_i)	f_i	$f_i x_i$
1000-1250	1125	7	7875
1250-1500	1375	16	22000
1500-1750	1625	30	48750
1750-2000	1875	24	45000
2000-2250	2125	15	31875
2250-2500	2375	8	19000
योग		100	174500

$\sum f = 100$

$\sum fx = 174500$

$$\text{माध्य} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$= \frac{174500}{100} = 1745$$

औसत खर्च = ₹1745

14 प्रायिकता

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. निम्न में से कौन–सा मान किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकता?

(अ) 0.75 (ब) 1

(स) –0.2 (द) $\frac{2}{5}$

2. किसी असंभव घटना की प्रायिकता होती है–

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{2}$

(स) 1 (द) निर्धारित नहीं

3. यदि $P(E) = 0.37$ हो, तो $P(\bar{E})$ है–

(अ) 0.27 (ब) 0.63

(स) 1.37 (द) 0.73

4. दो सिक्के उछालने पर ठीक एक चित आने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{1}{4}$ (ब) $\frac{1}{2}$

(स) $\frac{3}{4}$ (द) 1

5. एक पासे पर अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{1}{3}$ (ब) $\frac{1}{2}$

(स) $\frac{2}{3}$ (द) $\frac{5}{6}$

6. एक पासे पर 3 का गुणज न आने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{1}{3}$ (ब) $\frac{1}{2}$

(स) $\frac{2}{3}$ (द) $\frac{5}{6}$

7. एक पत्ता निकालने पर इक्का न मिलने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{1}{13}$ (ब) $\frac{4}{13}$

(स) $\frac{12}{13}$ (द) $\frac{48}{13}$

8. एक थैले में 5 लाल, 3 नीली और 2 हरी गेंदें हैं। नीली गेंद न मिलने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{7}{10}$ (ब) $1\frac{1}{2}$

(स) $1\frac{3}{8}$ (द) $\frac{4}{5}$

9. 1 से 8 तक समान खंडों वाले स्पिनर पर अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{1}{4}$ (ब) $\frac{3}{8}$

(स) $\frac{1}{2}$ (द) $\frac{4}{5}$

10. 0 से 9 तक अंकित दस कार्डों में से सम अंक चुनने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{2}{5}$ (ब) $\frac{1}{2}$

(स) $\frac{3}{5}$ (द) $\frac{4}{5}$

11. एक कक्षा में 18 लड़कियाँ और 12 लड़के हैं। यादृच्छिक रूप से लड़का चुने जाने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{2}{5}$ (ब) $\frac{3}{5}$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

(स) $\frac{1}{3}$ (द) $\frac{1}{2}$

12. 25 वस्तुओं में 4 दोषपूर्ण हैं। एक अच्छी वस्तु मिलने की प्रायिकता है–

(अ) $\frac{4}{25}$ (ब) $\frac{19}{25}$

(स) $\frac{21}{25}$ (द) $\frac{1}{5}$

13. दो खिलाड़ियों के मैच में ड्रॉ संभव नहीं। A के जीतने की प्रायिकता 0.58 है। B के जीतने की प्रायिकता है–

(अ) 0.42 (ब) 0.48

(स) 0.58 (द) 1.58

उत्तर : 1. (स), **2.** (अ), **3.** (ब), **4.** (ब), **5.** (ब), **6.** (स), **7.** (स), **8.** (अ), **9.** (ब), **10.** (ब), **11.** (अ), **12.** (स) **13.** (अ)

लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि $P(E)=\frac{7}{20}$ है, तो $P(\bar{E})$ ज्ञात कीजिए।

हल : $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$= 1-\frac{7}{20} = \frac{13}{20}$

2. तीन सिक्के उछालने पर ठीक दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल परिणाम = 8

अनुकूल परिणाम (HHT, HTH, THH) = 3

अतः $P = \frac{3}{8}$ $\left\{\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}}\right\}$

3. दो पासे फेंकने पर योग 9 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : अनुकूल क्रमित युग्म (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) हैं।

अनुकूल परिणाम = 4, कुल परिणाम = 36

$P=\frac{4}{36} \Rightarrow P=\frac{1}{9}$

4. एक ताश की गड्डी से काला बादशाह या लाल रानी मिलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : काले बादशाह 2 और लाल रानियाँ 2 हैं।

अनुकूल परिणाम = 4

$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

5. एक ताश की गड्डी से ऐसा पत्ता मिलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जो न फेस कार्ड हो और न इक्का।

हल : कुल पत्ते = 52, फेस कार्ड = 12, इक्के = 4

अनुकूल परिणाम = 52 – 16

अनुकूल परिणाम = 36

$P=\frac{4}{36} \Rightarrow P=\frac{1}{9}$

6. 1 से 30 तक अंकित कार्डों में से पूर्ण वर्ग संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : पूर्ण वर्ग संख्याएँ = 1, 4, 9, 16, 25

अनुकूल परिणाम = 5, कुल परिणाम = 30

$P=\frac{5}{30} \Rightarrow P=\frac{1}{6}$

7. एक कक्षा में 24 लड़कियाँ और 16 लड़के हैं। यादृच्छिक रूप से लड़की चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल छात्र = 40, लड़कियों की संख्या = 24

$P=\frac{24}{40} \Rightarrow P=\frac{3}{5}$

8. 40 बल्बों में 5 दोषपूर्ण हैं। एक अच्छा बल्ब चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : अच्छे बल्ब = 35 कुल बल्ब = 40

$P=\frac{35}{40} \Rightarrow P=\frac{7}{8}$

9. एक मैच में ड्रॉ नहीं हो सकता। A की जीतने की प्रायिकता 0.73 है। B की जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : $P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow 1 - 0.73 = 0.27$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न –

1. तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। ज्ञात कीजिए।

(i) कम–से–कम दो चित

(ii) ठीक एक पट

(iii) कोई चित नहीं।

पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

DOWNLOAD MISSION GYAN APP!

हल : तीन सिक्कों की समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

कुल परिणाम = 8

(i) कम–से–कम दो चित = {HHH, HHT, HTH, THH}

अनुकूल परिणाम = 4

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ii) ठीक एक पट = {HHT, HTH, THH}

अनुकूल परिणाम = 3

$$P = \frac{3}{8}$$

(iii) कोई चित नहीं = {TTT}

अनुकूल परिणाम = 1

$$P = \frac{1}{8}$$

2. दो न्यायसंगत पासे फेंके जाते हैं। ज्ञात कीजिए–

(i) योग 8; (ii) योग 8 न हो,

(iii) कम–से–कम एक पासे पर 5 आए।

हल : कुल परिणाम = 36

(i) योग 8 = {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)} = 5

$$P = \frac{5}{36}$$

(ii) P (योग 8 न हो) $= 1 - \frac{5}{36}$

$$= \frac{31}{36}$$

(iii) कम–से–कम एक पासे पर 5 आए

अनुकूल परिणाम = (5, 1) ... (5, 6) तथा (1, 5) ... (6, 5)

(5, 5) दो बार गिना गया, इसलिए 6 + 6 – 1 = 11

$$P = \frac{11}{36}$$

3. एक ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है। पान का पत्ता या बादशाह मिलने की प्रायिकता तथा इनमें से कोई भी न मिलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : पान के पत्ते 13, बादशाह 4 और पान का बादशाह दोनों में साझा हैं।

अनुकूल परिणाम = 13 + 4 – 1 = 16

P (पान या बादशाह) $= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

P (न पान, न बादशाह) $= 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$

4. 52 पत्तों की गड्डी से 2 पान, 4 हुकुम और ईंट का इक्का हटा दिया गया। शेष गड्डी से (i) काला पत्ता, (ii) लाल पत्ता न मिलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : शेष पत्ते = 52 – 7 = 45

(i) काले शेष = 26 – 4 = 22

अतः P (काला) $= \frac{22}{45}$

(ii) लाल पत्ता न मिलना अर्थात् काला पत्ता।

अतः $P = \frac{22}{45}$

5. एक थैले में 5 लाल, 3 नीली और 2 हरी गेंदें हैं। एक लाल गेंद निकालकर अलग रख दी जाती है। अब शेष थैले में एक गेंद निकाली जाती हैं। लाल, नीली और हरी गेंद मिलने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

हल : एक लाल गेंद निकालने के बाद शेष गेंदे = 4 लाल, 3 नीली, 2 हरी

कुल = 9

$P(\text{लाल}) = \frac{4}{9}$, $P(\text{नीली}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$P(\text{हरी}) = \frac{2}{9}$

6. 1 से 50 तक अंकित कार्डों में से एक कार्ड चुना जाता है। ज्ञात कीजिए– (i) 2 या 5 का गुणज, (ii) न 2 का गुणज और न ही 5 का गुणज।

हल : कुल परिणाम = 50

2 के गुणज = 25

5 के गुणज = 10

दोनों के गुणज अर्थात् 10 के गुणज = 5

(i) संघ = 25 + 10 – 5 = 30

$$P = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

(ii) पूरक घटना की प्रायिकता $= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

P(न 2 और न ही 5 का गुणज) $= \frac{2}{5}$

मिशन ज्ञान
पढ़ें जब चाहें, जहाँ चाहें, जैसे चाहें!

7. 1 से 8 तक समान खंडों वाला स्पिनर घुमाया जाता है। ज्ञात कीजिए – (i) अभाज्य संख्या, (ii) विषम संख्या, (iii) 4 का गुणज न आने की प्रायिकता।

हल : कुल परिणाम = 8

(i) अभाज्य संख्याएँ = {2, 3, 5, 7}

अनुकूल परिणाम = 4

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ii) विषम संख्याएँ = {1, 3, 5, 7}

अनुकूल परिणाम = 4

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(iii) 4 के गुणज न हो = {1, 2, 3, 5, 6, 7}

अनुकूल परिणाम = 6

$$P \text{ (न गुणज)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

8. एक डिब्बे में 25 वस्तुएँ हैं जिनमें 4 दोषपूर्ण हैं। एक वस्तु चुनी जाती है। ज्ञात कीजिए–

(i) दोषपूर्ण, (ii) अच्छी,

(iii) यदि एक दोषपूर्ण वस्तु पहले ही हटा दी गई हो, तो अगली वस्तु के अच्छी होने की प्रायिकता।

हल : प्रारम्भ में दोषपूर्ण वस्तुएँ = 4, अच्छी वस्तुएँ = 21

कुल वस्तुएँ = 25

(i) $P \text{ (दोषपूर्ण)} = \frac{4}{25}$

(ii) $P \text{ (अच्छी)} = \frac{21}{25}$

(iii) एक दोषपूर्ण हटने पर कुल वस्तुएँ = 24,

अच्छी अभी भी 21 है।

$$P = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$