Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

कक्षा - 12

गणित

अध्याय – 3

आव्यूह

भाग – 4

केशव शर्मा

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



मैट्रिक्स गुणन (Matrix multiplication)

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times1 & 1\times2+2\times3 \\ 3\times1+4\times1 & 3\times2+4\times3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+6 \\ 3+4 & 6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

341. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$A \to 3\times 2$ ✓

$B \to 2\times 3$ ✓

$AB \to 3\times 3$

$B \to 2\times 3$

$A \to 3\times 2$

$BA = 2\times 2$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2\times -3 + 0\times 5 & 2\times 1 + 0\times 2 & 2\times 2 + 0\times -1 \\ -1\times -3 + 3\times 5 & -1\times 1 + 3\times 2 & -1\times 2 + 3\times (-1) \\ -3\times -3 + 2\times 5 & -3\times 1 + 2\times 2 & -3\times 2 + 2\times (-1) \end{bmatrix}$$

$-3\times 1 + 2\times 2 = -3 + 4$

$-3\times 2 + 2\times (-1) = -6 - 2$

$$AB = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 18 & 5 & -5 \\ 19 & 1 & -8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3\times2 + 1\times(-1) + 2\times(-3) & -3\times0 + 1\times3 + 2\times2 \\ 5\times2 + 2\times(-1) + (-1\times-3) & 5\times0 + 2\times3 + (-1\times2) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -6 - 1 - 6 & 3 + 4 \\ 10 - 2 + 3 & 6 - 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -13 & 7 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

311. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}_{3\times1}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3}$

$A \rightarrow 3\times1$

$B \rightarrow 1\times3$

$AB \rightarrow 3\times3$

$B \rightarrow 1\times3$

$A \rightarrow 3\times1$

$BA = 1\times1$

$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 12 & -4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = [-3 \times 1 + (1 \times -3) + 0 \times -4]$$

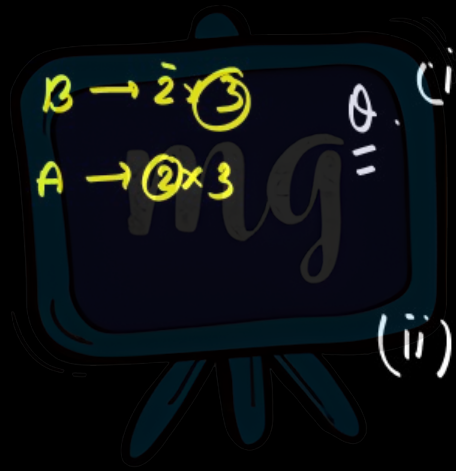
$$BA = [-3 - 3 + 0]$$

$$BA = [-6]_{1 \times 1}$$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



LET'S LEARN TOGETHER

(i) A → 2 × 3
B → 2 × 3
AB = ✗
BA = ✗

(ii) A → 3 × 4
B → 4 × 1
AB = ✓
BA = ✗

(iii) A → 1 × 5
B → 2 × 5
AB = ✗
BA = ✗

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



$A \longrightarrow m \times a$

$B \longrightarrow a \times n$

$AB \rightarrow m \times n$

* A के स्तम्भों की संख्या
=
B के पंक्तियों की संख्या

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

11. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ तो A^2 का मान ज्ञात कीजिए। 2021

हल :-

$A^2 = A \cdot A$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+(-1\times-1) & 1\times(-1)+(-1\times1) \\ -1\times1+(1\times-1) & (-1\times-1)+(1\times1) \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ दो आव्यूह है तो AB होगा।

2022

$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 4-3 & 6-6 \\ -2+2 & -3+4 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

13. दर्शाइए कि

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$

L.H.S.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

R.H.S.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2024

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

14. *निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए।*

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

मैट्रिक्स गुणन के गुणधर्म (Properties of matrix multiplication)

उपयुक्त कोटि के मैट्रिक्स A, B, C के लिए

(i) $AB \neq BA$ (अक्रमविनिमेयता)

(ii) $(AB)C = A(BC)$ (साहचर्यता)

(iii) $IA = A = AI$, जहाँ A वर्ग मैट्रिक्स है। (तत्समकता)

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

(iv) $\left.\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC \\ (B+C)A &= BA+CA \end{aligned}\right\}$ (बंटनता)

(v) $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$AB \neq BA$

$AB = AC$

$B = C$

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

टिप्पणी : यह आसानी से देखा जा सकता है कि

(i) दो त्रिभुजाकार मैट्रिक्स का गुणनफल एक त्रिभुजाकार मैट्रिक्स होता है।

(ii) दो विकर्ण मैट्रिक्स का गुणनफल भी एक विकर्ण मैट्रिक्स होता है तथा

$$\text{diag}\,(a_1 a_2 \ldots a_n) \times \text{diag}\,(b_1 b_2 \ldots b_n) = \text{diag}\,(a_1 b_1\ a_2 b_2 \ldots\ a_n b_n)$$

(iii) दो अदिश मैट्रिक्स का गुणनफल भी एक अदिश मैट्रिक्स होता है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$

$= A^2 \cdot A^2$

मैट्रिक्स की धनात्मक पूर्णांक घातें (Positive integral polwers of am atrix) :

किसी मैट्रिक्स A की धनात्मक पूर्णांक घातें तभी विद्यमान होती हैं जबकि A एक वर्ग मैट्रिक्स हो। उस स्थिति में

$A^2 = AA$

$A^3 = AAA = A^2A$

A^2A

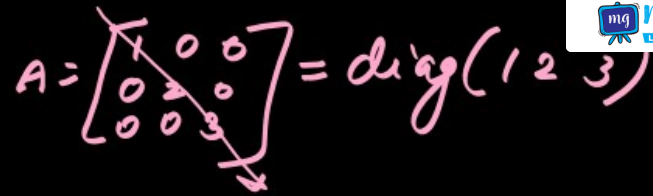
$A \cdot A^2$

.. ..

A^n = AA..... A (n गुणनखण्ड)

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



diagonal

diag

$I^2 = I$

$I^3 = I$

किसी भी स्वेच्छा धन पूर्णांक m, n के लिए निन परिणाम आसानी से स्थापित किए जा सकते हैं:

(i) $A^m A^n = A^{m+n}$

(ii) $(A^m)^n = A^{mn} = (A^n)^m$

(iii) $I^n = I$, $I^m = I$

टिप्पणी : किसी वर्ग मैट्रिक्स की शून्य घात संगत क्रम का इकाई मैट्रिक्स परिभाषित किया जाता हैं अतः यदि A, n क्रम का वर्ग मैट्रिक्स है, तो $A^0 = I_n$