RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

ई-पाठशाला कार्यक्रम

Class 12th

# MATHS

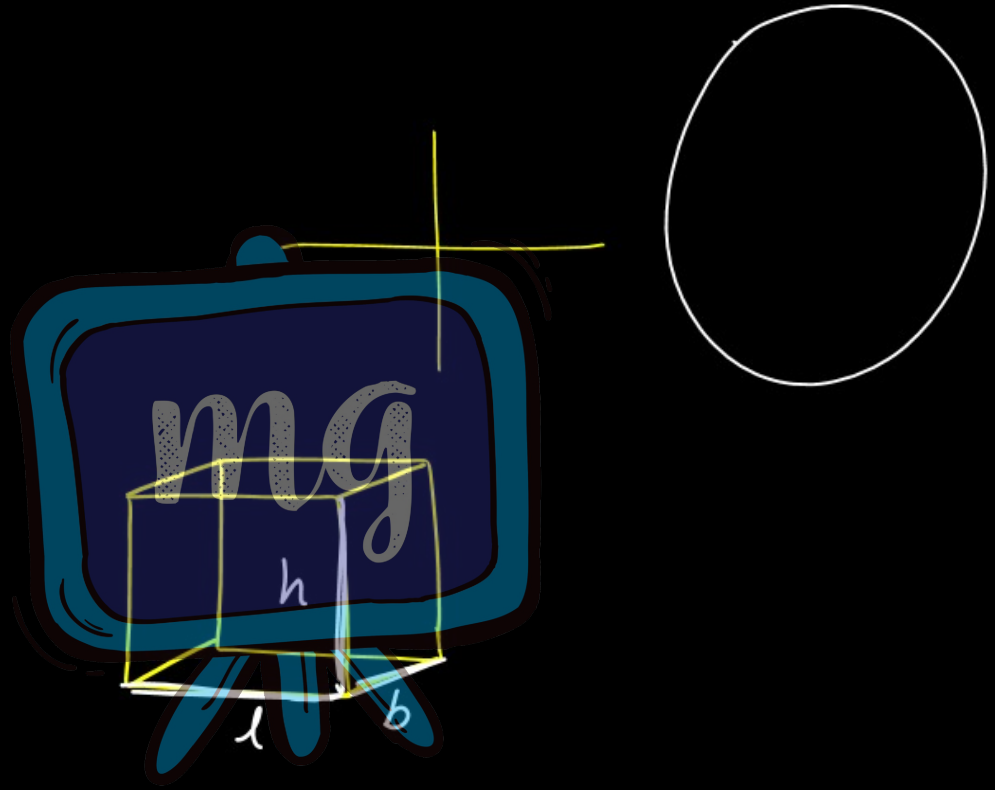
# त्रिविमीय ज्यामिति

RAPID REVISION



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

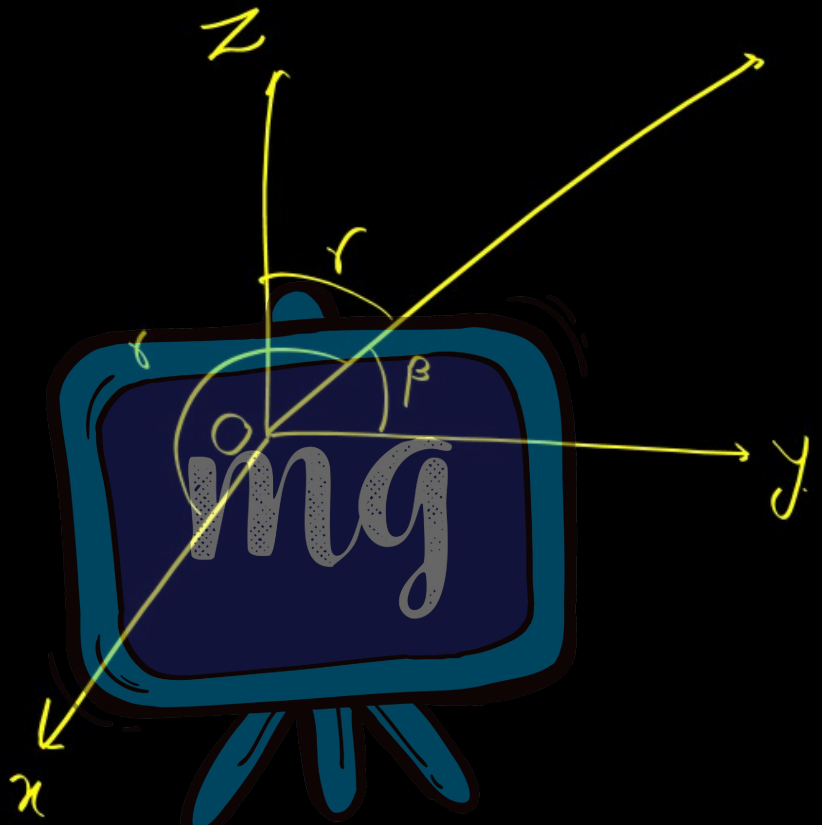
mg missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

# दिक् कोज्याएँ

दिक् कोसाइन

$(l, m, n)$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

# दिक् कोज्याएँ, दिक् अनुपात (a, b, c)




$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

दो बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$

$$l = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{AB}$$

$$m = \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{AB}$$

$$n = \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{AB}$$

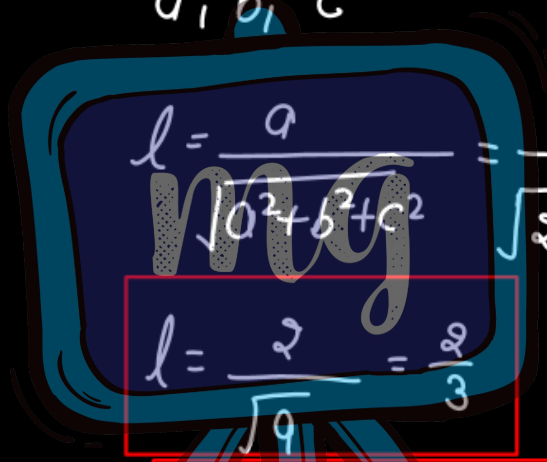
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$\equiv \frac{2, -1, 2}{a, b, c}$ दिक् अनुपात



$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$

$$l = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-1}{3}$$

$$n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$n = \frac{2}{3}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**Q.** $A(-2, 7, 5)$ $B(1, 2, 3)$

$(x_1, y_1, z_1)$ $(x_2, y_2, z_2)$

$l = \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{AB}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{AB}$

$n = \dfrac{z_2 - z_1}{AB}$

$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

$= \sqrt{[1-(-2)]^2 + [2-7]^2 + [3-(-5)]^2}$

$= \sqrt{9 + 4 + 64}$

$AB = \sqrt{77}$

$l = \dfrac{1-(-2)}{\sqrt{77}} = \dfrac{3}{\sqrt{77}}$

$m = \dfrac{2-7}{\sqrt{77}} = \dfrac{-5}{\sqrt{77}}$

$n = \dfrac{3-(-5)}{\sqrt{77}} = \dfrac{8}{\sqrt{77}}$

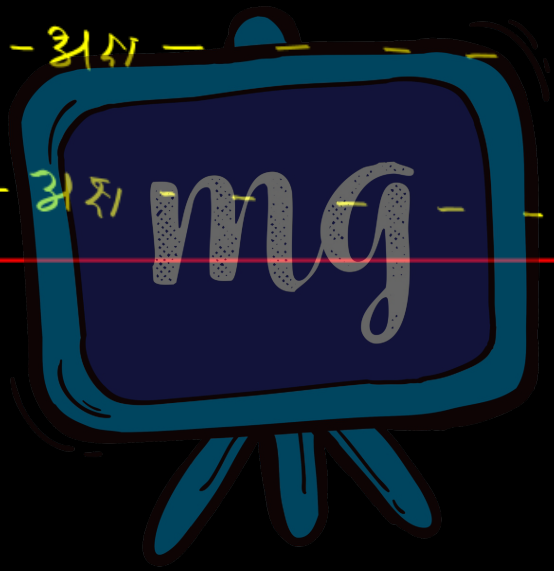
RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

mg missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

x- अक्ष के दिक् कोसाइन (1,0,0)

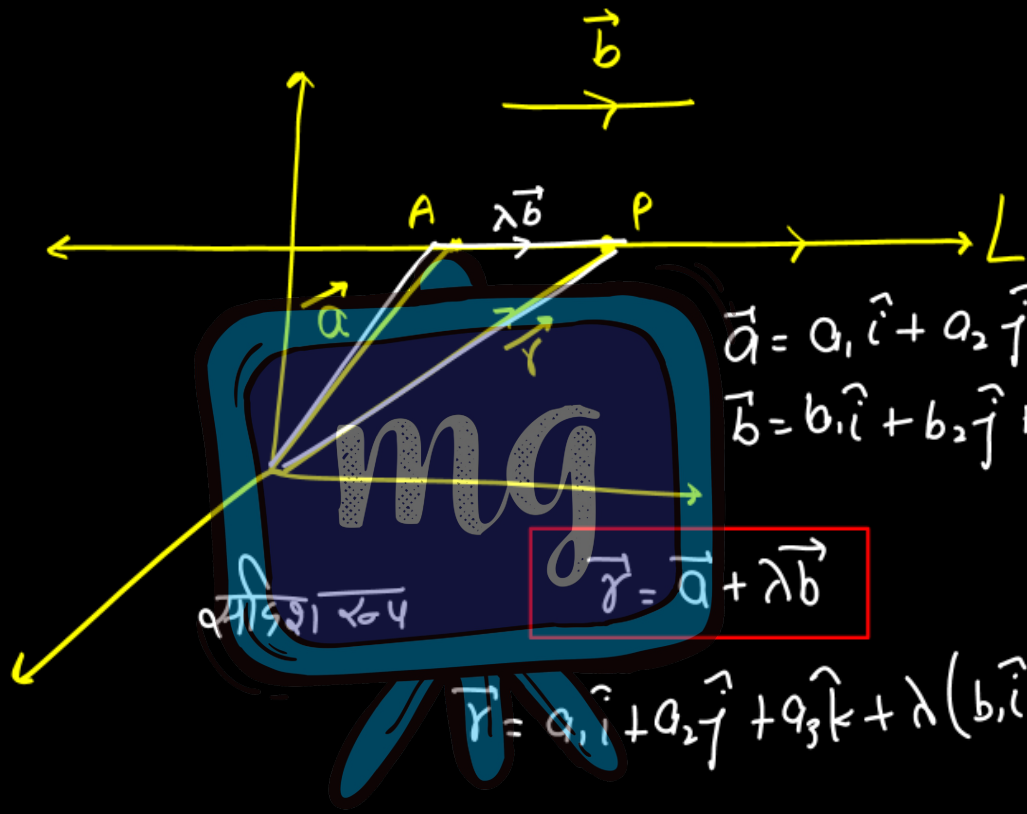
y- अक्ष - - - - (0,1,0)

z- अक्ष - - - - (0,0,1)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER




$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

सदिश रूप

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$\vec{r} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} + \lambda(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

# कार्तीय रूप

$P(x, y, z)$

$A \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

$(a, b, c)$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$A(1,2,3)$ $x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ z_1 = 3$

$\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$a = 3,\ b = 2,\ c = -2$

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

mg missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

# कोण

## (i) दिक् अनुपात

$a_1, b_1, c_1$ / $a_2, b_2, c_2$

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$

(a) $\theta = 90^\circ$ $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(b) $\theta = 0^\circ$ समांतर $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(ii) दिक् कोज्याएँ

$l_1, m_1, n_1$ / $l_2, m_2, n_2$

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

(a) $\theta = 90^\circ$

$$0 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

(b) $\theta = 0^\circ$

$$1 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

(iii) $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda_1 \vec{b}_1$

$\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda_2 \vec{b}_2$

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|} \right|$$

(iv) $\dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{b_1} = \dfrac{z-z_1}{c_1}$ , $\dfrac{x-x_2}{a_2} = \dfrac{y-y_2}{b_2} = \dfrac{z-z_2}{c_2}$

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \right|$$

**प्रश्न** यदि सरल रेखाएँ $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{\lambda}=\frac{z-1}{-1}$ तथा $\frac{x-1}{-\lambda}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो '$\lambda$' का मान है

अ) 0 ब) 1

स) 2 द) 3

(2026)

**हल** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{\lambda}=\frac{z-1}{-1}$ $\quad a_1 \quad b_1 \quad c_1$

$\frac{x-1}{-\lambda}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ $\quad a_2 \quad b_2 \quad c_2$

$\theta = 90^\circ$

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

$1\times(-\lambda)+\lambda(2)+(-1)(1)=0$

$-\lambda+2\lambda-1=0$

$\lambda=1$

**प्रश्न** दो बिंदुओं $(-2, 4, -5)$ और $(1, 2, 3)$ से होकर गुजरने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए ।

(2026)



**प्रश्न** स्थिति सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ वाले बिन्दु से गुजरने वाली तथा $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए। (2026)

हल:- $\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ $(2,-1,4)$

$x_1 = 2$

$y_1 = -1$

$z_1 = 4$

$\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$a = 1$

$b = 2$

$c = -1$

सदिश रूप $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$= 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k} + \lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

$= (2+\lambda)\hat{i} + (-1+2\lambda)\hat{j} + (4-\lambda)\hat{k}$

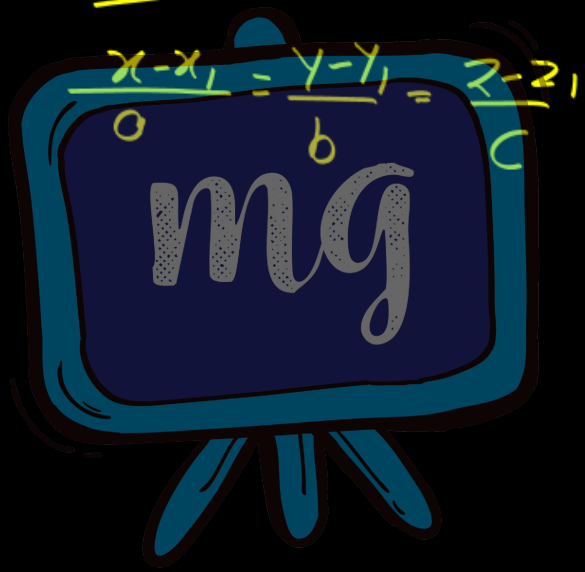
$x_1$

$y_1$

$z_1$

## कार्तीय रूप

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** रेखा-युग्म $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। (2026)

हल :- $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$, $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$

$$\cos\theta=\left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

$a_1=2,\ b_1=2,\ c_1=1,\ a_2=4,\ b_2=1,\ c_2=8$

$$\cos\theta=\left|\frac{2\times4+2\times1+1\times8}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{4^2+1^2+8^2}}\right|$$

$$\cos\theta=\left|\frac{18}{\sqrt{9}\sqrt{81}}\right|$$

$$\cos\theta=\left|\frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{3\times\cancel{9}}\right|$$

$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

**प्रश्न** P का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2P}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3P}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हों ।

(2026)



$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$a_1 = 1$

$b_1 = 1$

$c_1 = -2$

$$l = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

**प्रश्न**

सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के दिक्–कोसाइन है –

अ) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{2}$

ब) $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$

स) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

द) 1, 1, –2

(2025)

**प्रश्न**

बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली तथा रेखा $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ के समान्तर रेखा का कार्तीय समीकरण होगा – [1]

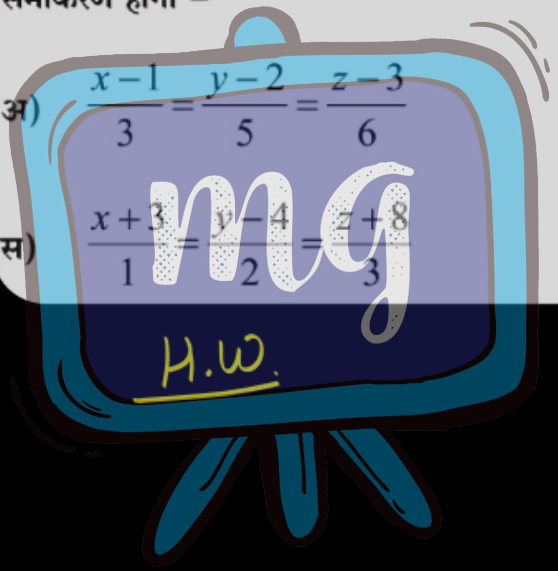
अ) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{6}$

ब) $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{6}$

स) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+8}{3}$

द) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-6}{5}=\frac{z+5}{6}$

(2025)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** एक त्रिभुज की भुजाओं के दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु A(3, 5, –4), B(–1, 1, 2) और C(–5, –5, –2) हैं। **[3]**

(2025)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, 2, 3), (3, 4, 5) से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं (–1, 2, 4), (2, –1, 4) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

(2025)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न**

बिन्दु $(1, 2, -4)$ से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ के लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। [4]

(2025)



**प्रश्न** $y$ – अक्ष के दिक्–कोसाइन है :

अ) $0, 0, 0$ ब) $1, 0, 0$

स) $0, 1, 0$ द) $0, 0, 1$

(2024)

**प्रश्न** दो बिंदुओं $(-2, 4, -5)$ और $(1, 2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन है :

अ) $\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{8}{\sqrt{70}}$

ब) $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

स) $\frac{2}{\sqrt{77}}, \frac{-3}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

द) $\frac{8}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}$

(2024)

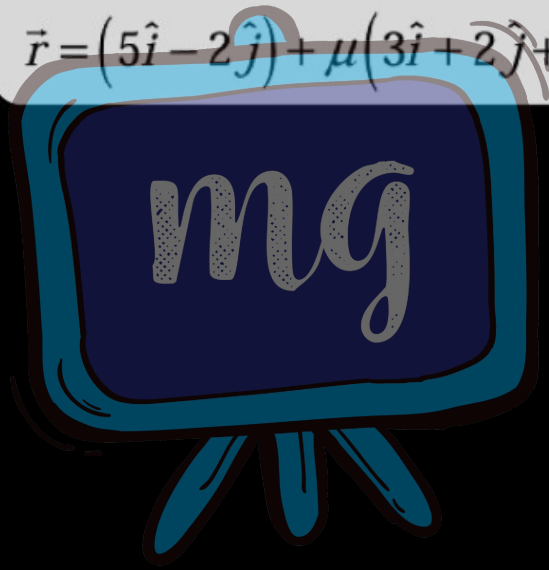
RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** दिए गए रेखा–युग्म $\vec{r}=\left(3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}\right)+\lambda\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$ और

$\vec{r}=\left(5\hat{i}-2\hat{j}\right)+\mu\left(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}\right)$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

(2024)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** दर्शाइए कि बिन्दुओं $(1, -1, 2)$, $(3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं $(0, 3, 2)$ और $(3, 5, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब है। **[3]**

(2024)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

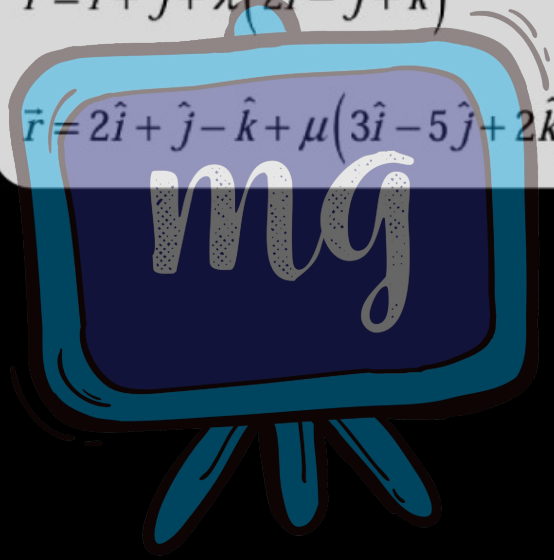
missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** रेखाओं $l_1$ और $l_2$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\left(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}\right)$$

(2024)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** बिन्दु, जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ से गुजरने व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए। [4]

(2024)



**प्रश्न** यदि बिन्दुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (–4, 3, –6) और (2, 9, 2) हैं, तो AB और CD रेखाओं के बीच का न्यून कोण ..... होगा। [1]

(2023)

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

**प्रश्न** दर्शाइए कि बिन्दुओं $(1, -1, 2)$ और $(3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं $(0, 3, 2)$ और $(3, 5, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब है। [1]

(2023)



**प्रश्न** एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

(2023)



**प्रश्न** एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

(2023)

