कक्षा - 12

Chapter - 8

समाकलनों के अनुप्रयोग

परिचय

Part - 1

Lakhan Saini

समाकलनों के अनुप्रयोग

समाकलनों के अनुप्रयोग :-

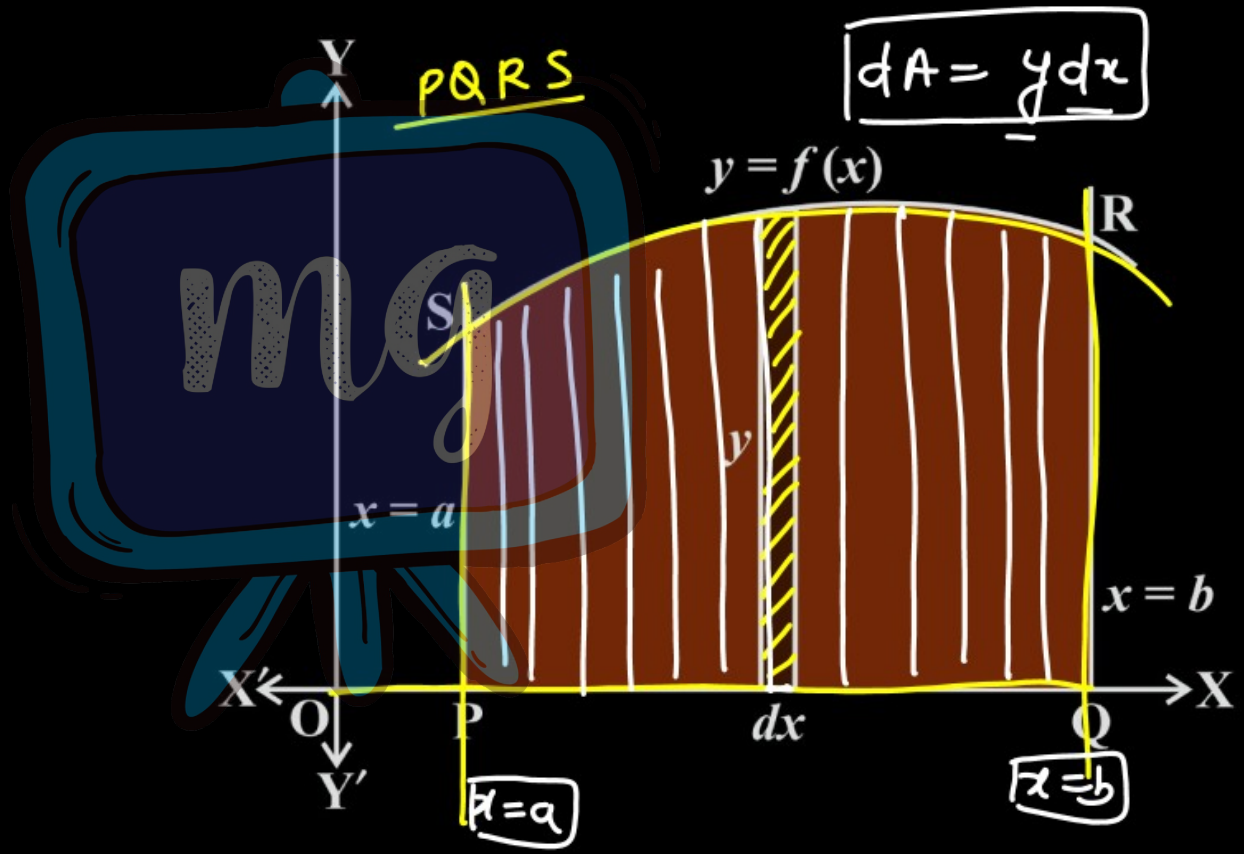
इस अध्याय में हम निश्चित समाकलनों के महत्वपूर्ण अनुप्रयोग "साधारण वक्रों के अन्तर्गत क्षेत्रफल" की चर्चा करेंगे।

समाकलनों के अनुप्रयोग

साधारण वक्रों के अन्तर्गत क्षेत्रफल:-

माना वक्र $y = f(x)$ एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ तथा x-अक्ष से घिरा क्षेत्रफल A है।

समाकलनों के अनुप्रयोग



समाकलनों के अनुप्रयोग

- इस क्षेत्र PQRS के क्षेत्रफल A को बहुत सी पतली एवं उर्ध्वाधर पट्टियों से निर्मित मान सकते है।
- यदि हम एक स्वेच्छ पट्टी जिसकी ऊचाई y एवं चौड़ाई dx पर विचार करें तो हम पायेंगे कि इसका क्षेत्रफल $dA = y\,dx$ है।

➲ यहाँ y = f(x) है। तथा यह क्षेत्रफल प्रारंभिक क्षेत्रफल कहलाता है।

$$dA = y\,dx$$

$$\text{or } (PQRS) = A = \int_a^b dA = \int_a^b y\,dx$$

समाकलनों के अनुप्रयोग

- वक्र $y = f(x)$ तथा कोटियों $x = a$, $x = b$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल A, सभी पट्टियों के क्षेत्रफलों के योगफल के परिणाम के रूप में देख सकते है। अतः

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

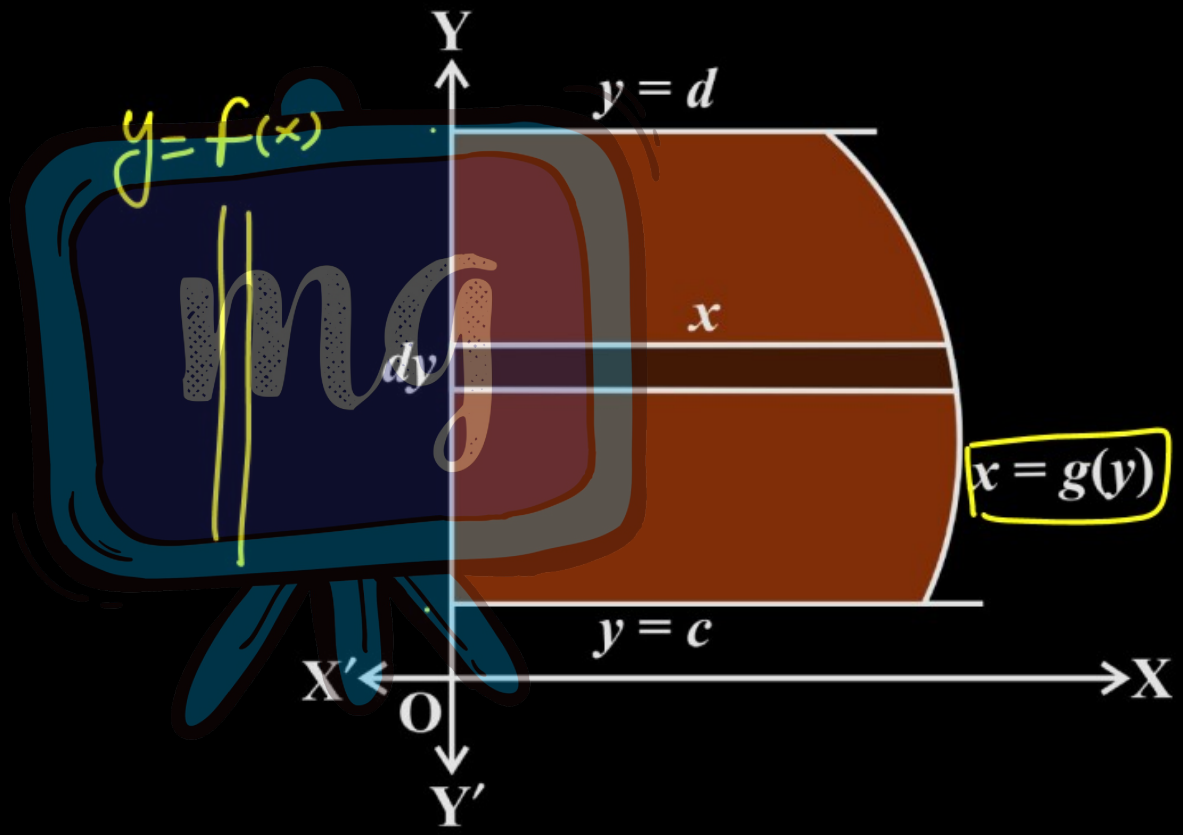
समाकलनों के अनुप्रयोग

$y=f(x)$ ➲ इसी प्रकार वक्र $x = g(y)$, y-अक्ष एवं रेखाओं $y = c$, $y = d$ से घिरा क्षेत्रफल-

$$A = \int_c^d x\,dy = \int_c^d g(y)\,dy$$

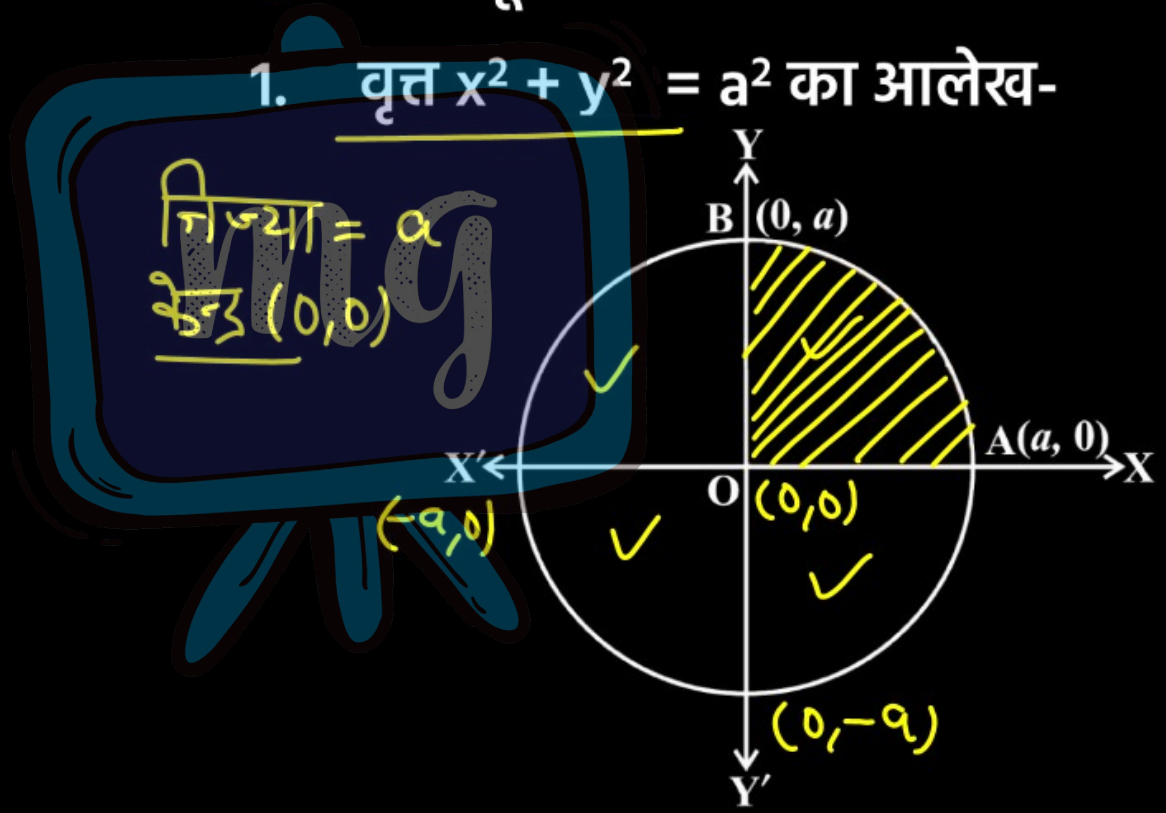
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

समाकलनों के अनुप्रयोग



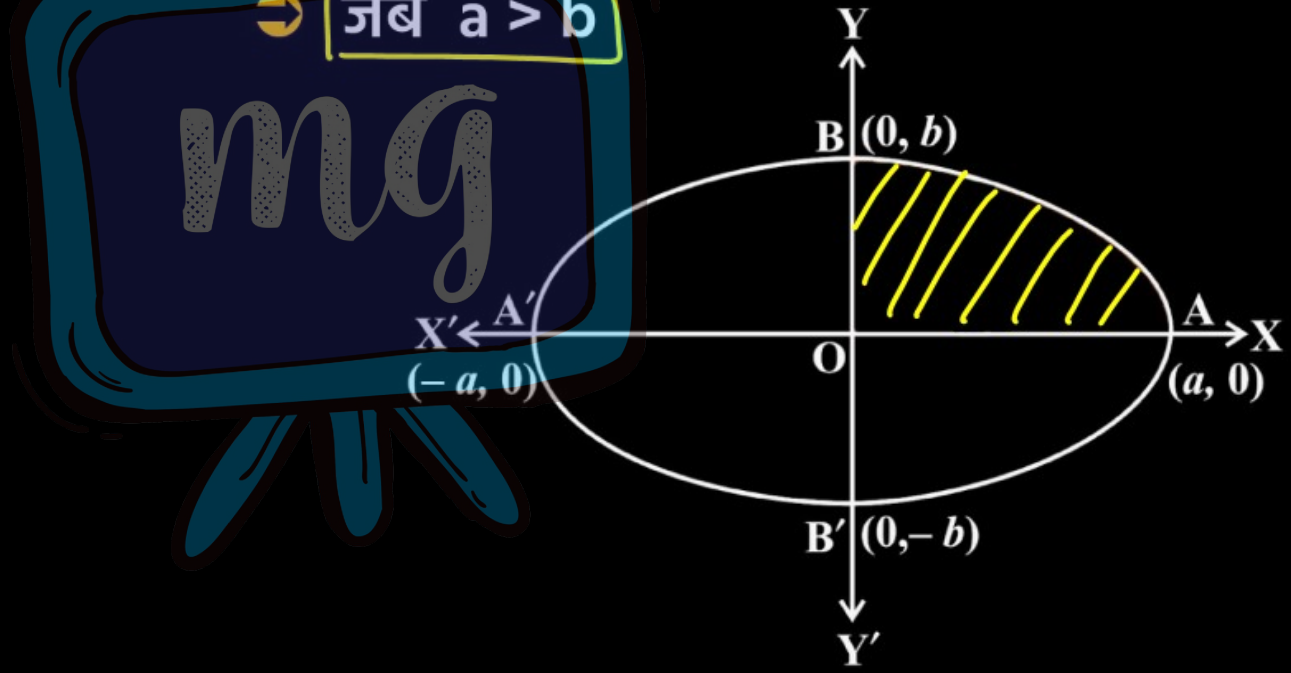
➲ महत्त्वपूर्ण साधारण वक्रों के आलेख-

1. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का आलेख-



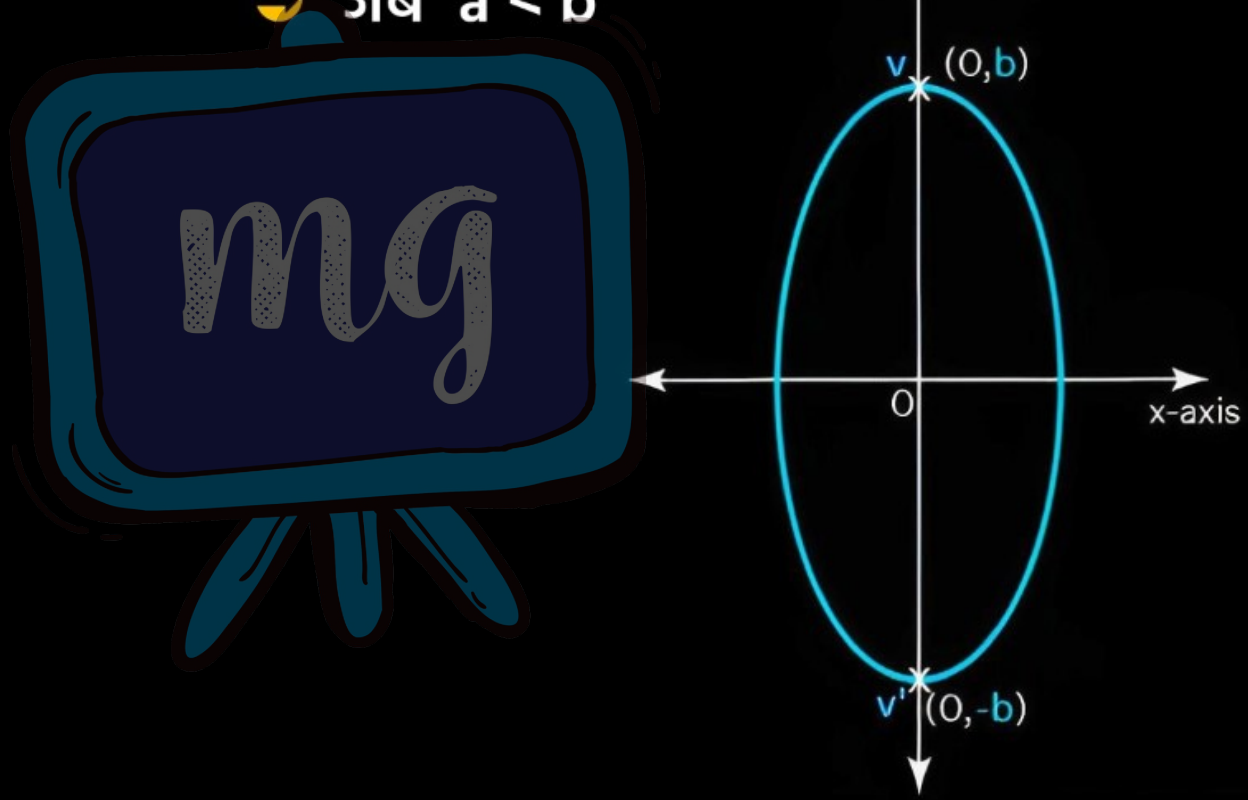
2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का आलेख-

➲ जब $a > b$



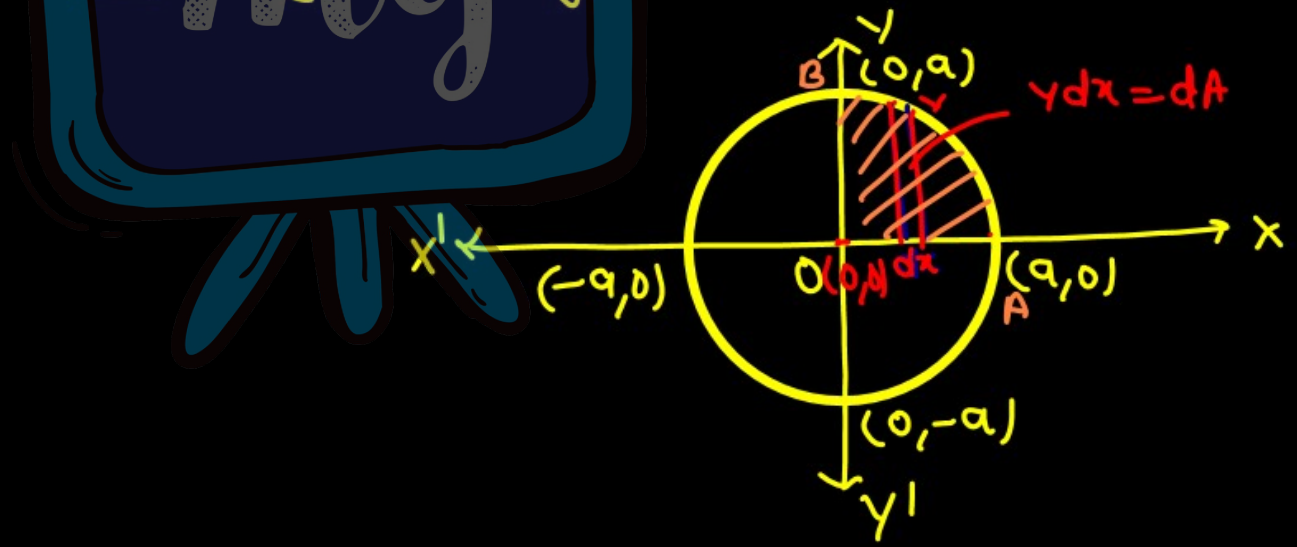
समाकलनों के अनुप्रयोग

➲ जब a < b



उदाहरण 1 : वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :- वृत्त $x^2+y^2=a^2$ का आलेख



ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

∵ वृत्त $x^2+y^2=a^2$ x-अक्ष तथा y-अक्ष के प्रति सममित है अतः



वृत्त का क्षे० = 4 × OABA का क्षे०

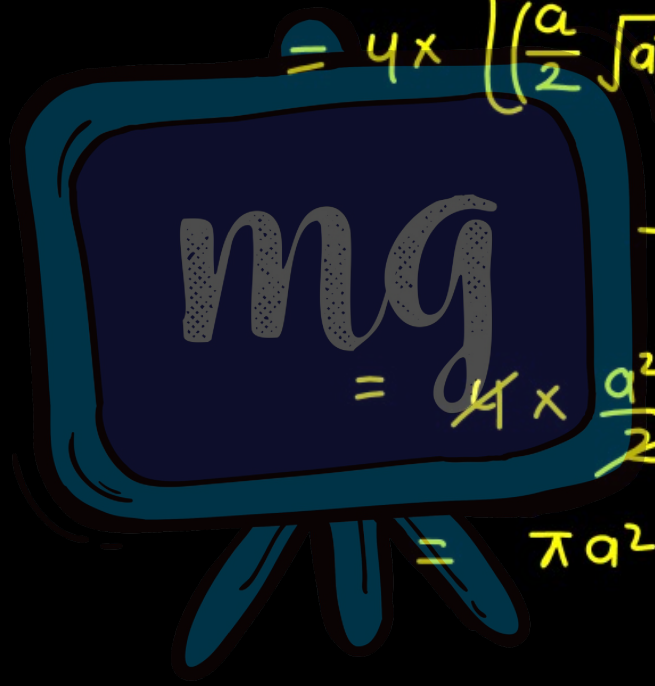
$$= 4 \times \int_0^a y\,dx$$

$$= 4 \times \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4 \times \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^a$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$= 4 \times \left[\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)\right) - \left(\frac{0}{2}\sqrt{a^2-0} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{0}{a}\right)\right)\right]$$

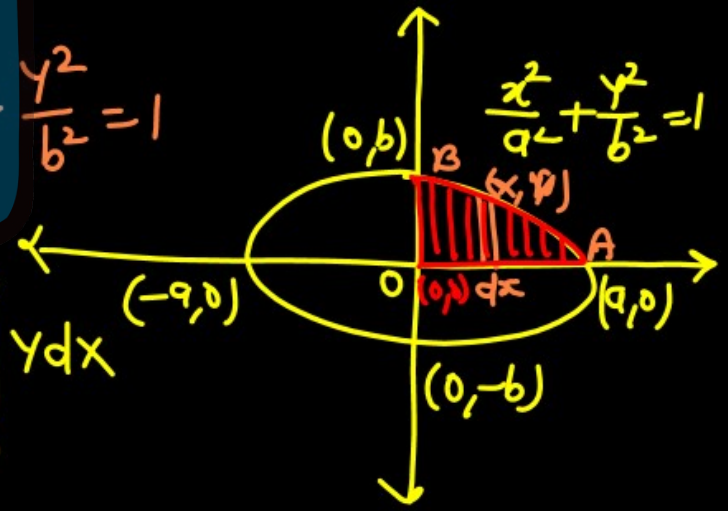
$$= \cancel{4} \times \frac{a^2}{\cancel{2}} \times \frac{\pi}{\cancel{2}}$$

$$= \pi a^2$$

उदाहरण 2 : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल का ज्ञात कीजिए।

हल :- दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से घिरे क्षेत्र का

क्षेत्रफल $= 4\int_0^a y\,dx$



ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

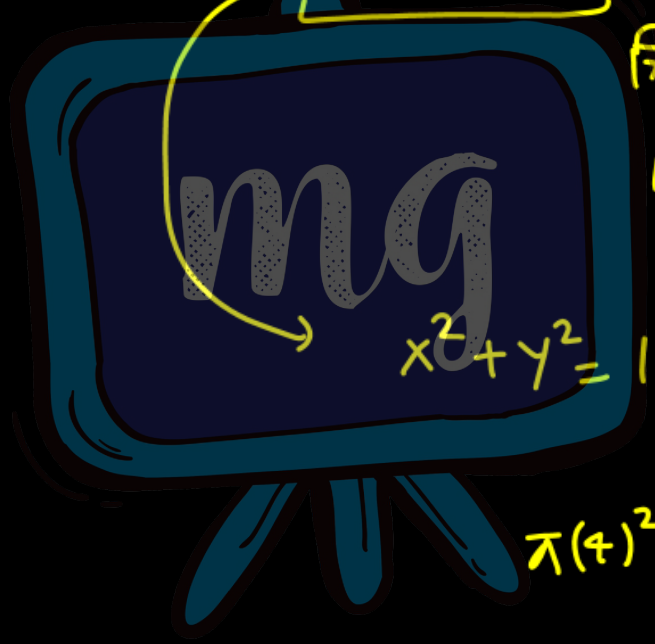
$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right)-0\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\times\frac{a^2}{2}\times\frac{\pi}{2} = \boxed{\pi ab}$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$x^2 + y^2 = a^2$

त्रिज्या $= a$

$A = \pi a^2$

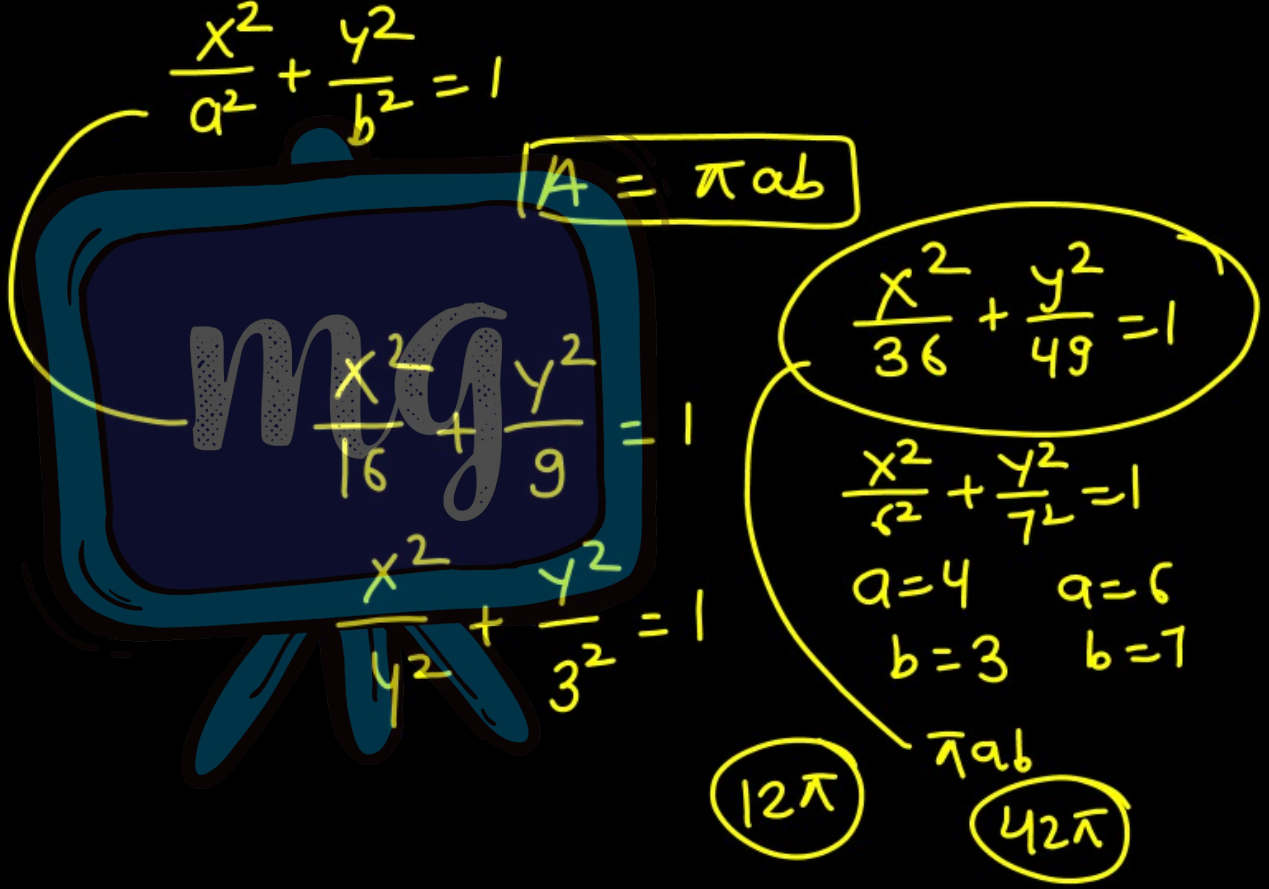
$x^2 + y^2 = 16 = 4^2$

$a = 4$

$\pi(4)^2 = 16\pi$

$x^2 + y^2 = 9$

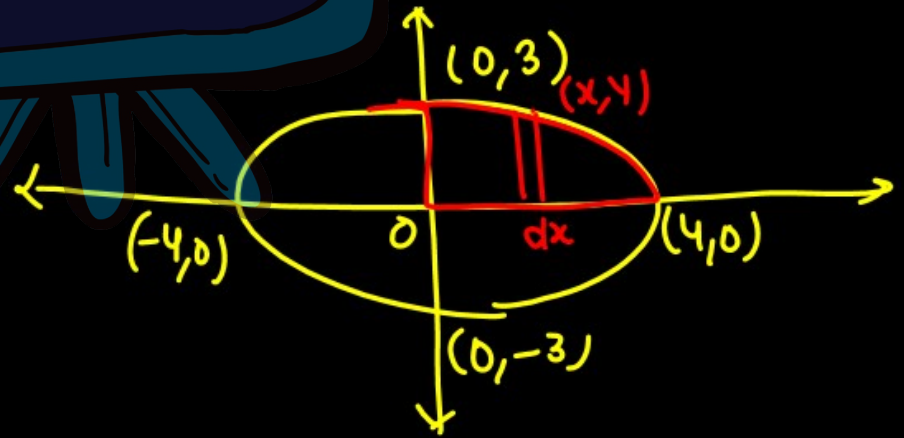
9π


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$A = \pi ab$
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$
$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$
$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$
$a = 4$ $a = 6$
$b = 3$ $b = 7$
πab
12π
42π

$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (2 अं)

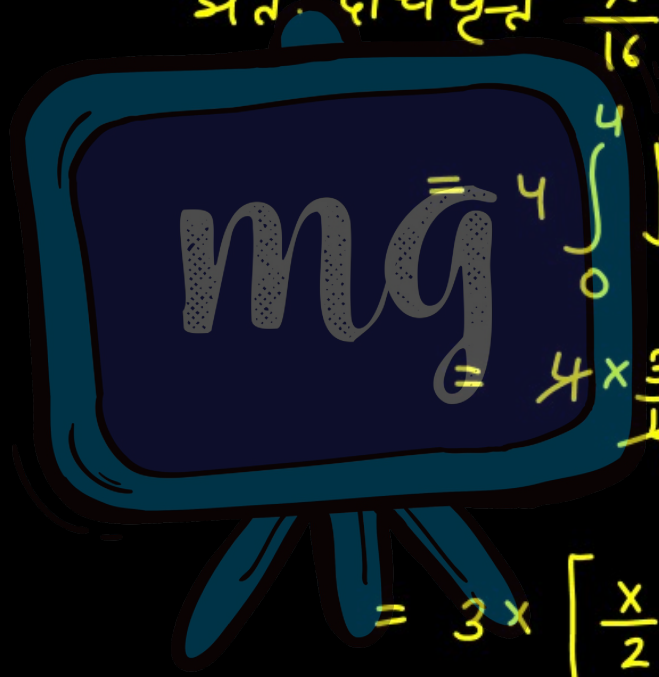
हल :- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ का आलेख -



ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

अत: दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ का क्षे०



$$= 4\int_0^4 \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{16}\right)9}\,dx$$

$$= 4\times\frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{(4)^2-x^2}\,dx$$

$$= 3\times\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{16}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$= 3\times\frac{16}{2}\times\frac{\pi}{2} = 12\pi$$

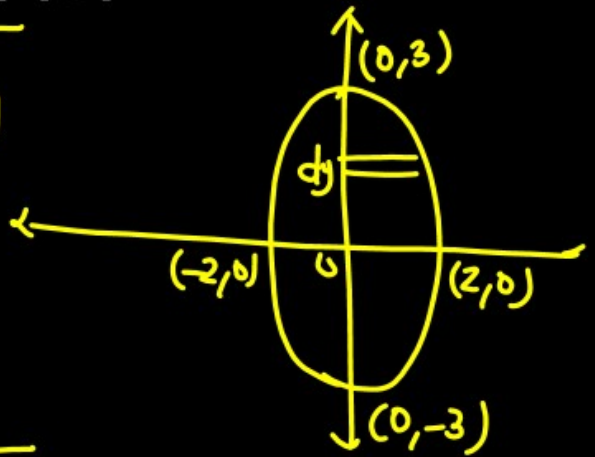
2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

πab

$\pi(2)(3)$

6π

हल :- $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$



$$A = 4\int_0^3 x\,dy$$

$$= 4\int_0^3 \sqrt{\left(1-\frac{y^2}{9}\right)4}\,dy$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$= 4 \times \frac{2}{3} \int_0^3 \sqrt{9 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{8}{3} \left[\frac{y}{2} \sqrt{9 - y} + \frac{9}{2} \sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right) \right]_0^3$$

$$= \frac{8}{3} \left[0 + \frac{9}{2} \sin^{-1}(1) - 0 \right]$$

$$= \frac{8}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{3}$$

$$= 6\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 3 एवं 4 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

3. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0$, $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(a) π

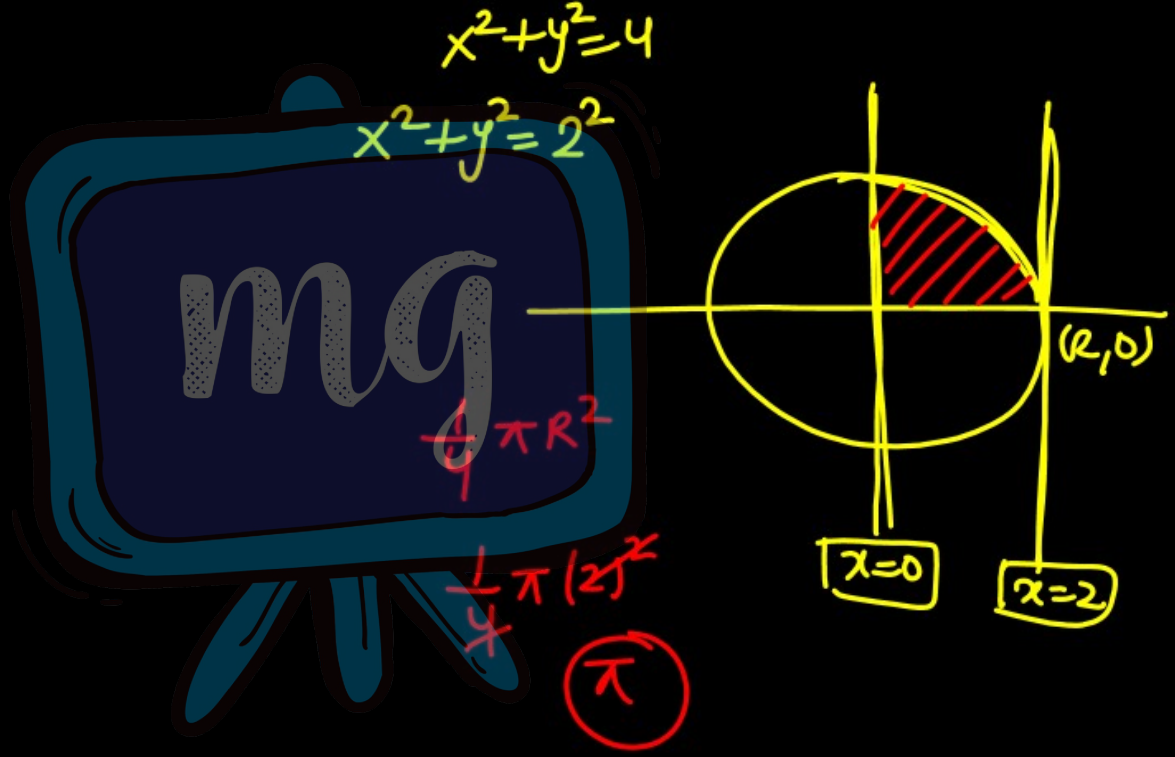
(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$

(d) $\frac{\pi}{4}$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



प्रश्न 3 एवं 4 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

4. वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(a) 2

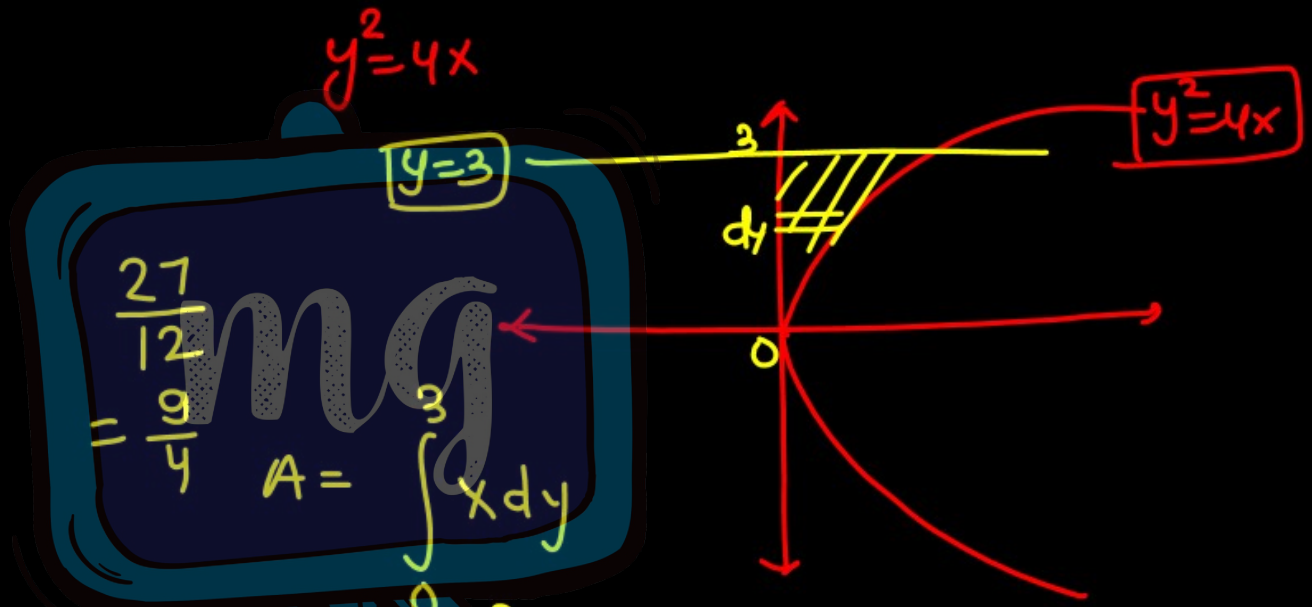
(b) $\frac{9}{4}$

(c) $\frac{9}{2}$

(d) $\frac{9}{3}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



$$A = \int_0^3 x\,dy$$

$$A = \int_0^3 \frac{y^2}{4}\,dy = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{y^3}{3}\right)\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{12}(27)$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$\frac{27}{12}$$