कक्षा-12

आव्यूह

(Matrices)

अध्याय - 3

भाग - 1

आव्यूह - परिचय

By : Rajendra Yadav Sir

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

1. आव्यूह (Matrix) : संख्याओं की पंक्तियों एंव स्तम्भों में सुनिश्चित आयताकार व्यवस्था को आव्यूह (Matrix) कहते है। इस आयतातकार व्यवस्था को प्रायः छोटे ( ) या बड़े [ ] कोष्टकों में बंद किया जाता है।

   किसी आव्यूह (Matrix) प्रायः बड़े अक्षर A, B, C ..... आदि से तथा उसके अवयवों को छोटे अक्षरों a, b, c, x, y, ... आदि से व्यक्त करते है।

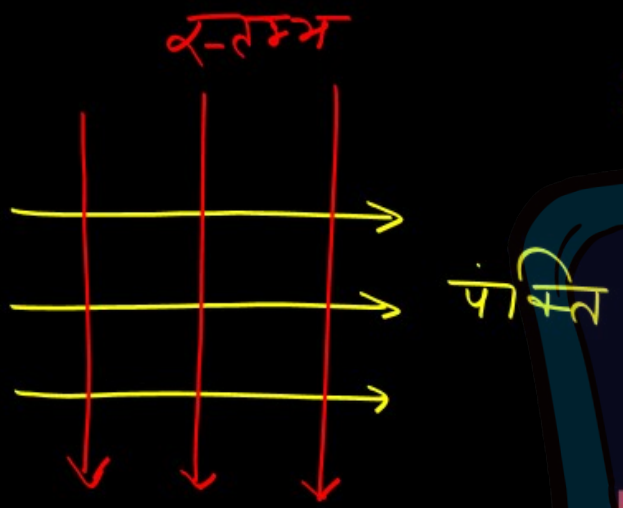
उदाहरण: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ या $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ या $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



2. आव्यूह की कोटि [Order of a matrix] :

यदि किसी मैट्रिक्स A में m पंक्ति एंव n स्तम्भ हो तो इसे $m \times n$ कोटि (या क्रम) का मेट्रिक्स कहते हैं। जिसे $A_{m \times n}$ या $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ से व्यक्त करते हैं।

Note : $m \times n$ कोटि के आव्यूह (matrix) में अवयवों की संख्या mn होती हैं।

कोटी = पंक्ति × स्तंभ

= 2 × 3

उदाहरण- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ की कोटि 2×3 है चूंकि

इसमें 2 पंक्तियां एवं 3 स्तम्भ है।

अवयवो की संख्या = 2 × 3

= 6

आव्यूह A में अवयवों की संख्या = $2 \times 3 = 6$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

3. आव्यूह का निरूपण [Representation of a matrix]: m × n कोटि के किसी मैट्रिक्स A को प्रायः निम्न प्रकार प्रदर्शित करते हैं।

कोटि = $m \times n$

अवयवों की संख्या = mn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}.....a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}.....a_{m\times n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

या $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

या $A = [a_{ij}]$ जहाँ i = 1, 2, 3..... m

j = 1, 2, 3.....n

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{13} = 3$

$a_{21} = 4, \quad a_{22} = 5, \quad a_{23} = 6$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

4. आव्यूह की समता [Equility of matrices] :

दो मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ तथ $B = [b_{ij}]$ समान मैट्रिक्स कहलाते है यदि

(i) A की कोटि = B की कोटि

(ii) $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall$ i तथा j अर्थात दोनों के संगत अवयव समान हों।

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

तो $A = B$

उदाहरण: यदि $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$ तथा

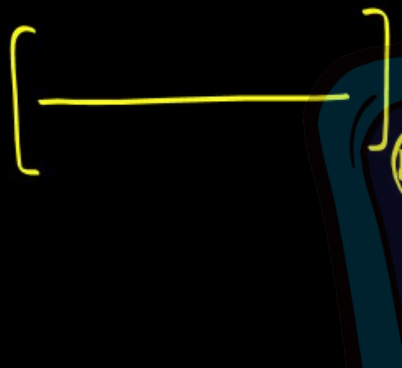
$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ यदि $A = B$ हो तब

$x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

$a = 7,\ b = 9,\ c = 8$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



5. मैट्रिक्स के विभिन्न प्रकार (Different types of matrices):

(i) पंक्ति मैट्रिक्स [Row matrix] : एक पंक्ति वाले मैट्रिक्स को पंक्ति मैट्रिक्स कहते है।

अतः $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक पंक्ति मैट्रिक्स होगा यदि $m = 1$

उदाहरण:

$$A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \ldots\ldots\ a_{1n}]_{1 \times n}$$

$$B = [1\ 2\ 3]_{1 \times 3}$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



(ii) स्तम्भ मैट्रिक्स (Column matrix) :

एक स्तम्भ वाले मैट्रिक्स को स्तम्भ मैट्रिक्स कहते है।

अतः $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक स्तम्भ मैट्रिक्स हैं यदि कहते हैं।

अतः $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक स्तम्भ मैट्रिक्स यदि $n = 1$

$A = [a]_{1\times1}$

$B = [1]$

$C = [2]$

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3\times1}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times1}$

Note : 1×1 कोटि का मैट्रिक्स प्रायः एकल [singleton] मैट्रिक्स कहलाता है।

$A = [a_{ij}]$

$a_{ij} = 0 \ \forall \ i, j$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) शून्य मैट्रिक्स (Zero matrix) :

वह मैट्रिक्स जिसके अवयव शून्य हों एक शून्य मैट्रिक्स कहलाता है।

अतः $A = [a_{ij}]$ एक शून्य मैट्रिक्स होगा यदि $a_{ij} = 0 \ \forall \ i, j$ शून्य मैट्रिक्स को प्रायः O से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$m = n$

⇒ पंक्तियों की संख्या = स्तंभों की संख्या

(iv) वर्ग मैट्रिक्स [Square matrix] :

जिस मैट्रिक्स में पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या समान हो उसे वर्ग मैट्रिक्स कहते हैं।

अतः $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ वर्ग मैट्रिक्स कहलाएगा

यदि $m = n$

यदि $i = j$ हो तो मिलने वाले अवयव आव्यूह के विकर्ण के अवयव कहलाते हैं।

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Note : वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ के वे अवयव जिनके लिए $i = j$ हो अर्थात् $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ विकर्ण के अवयव (Diagonal elements) कहलाते हैं।

उदाहरण: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ में विकर्ण के अवयव $a_{11} = 1, a_{22} = 5, a_{33} = 9$ होंगे।

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

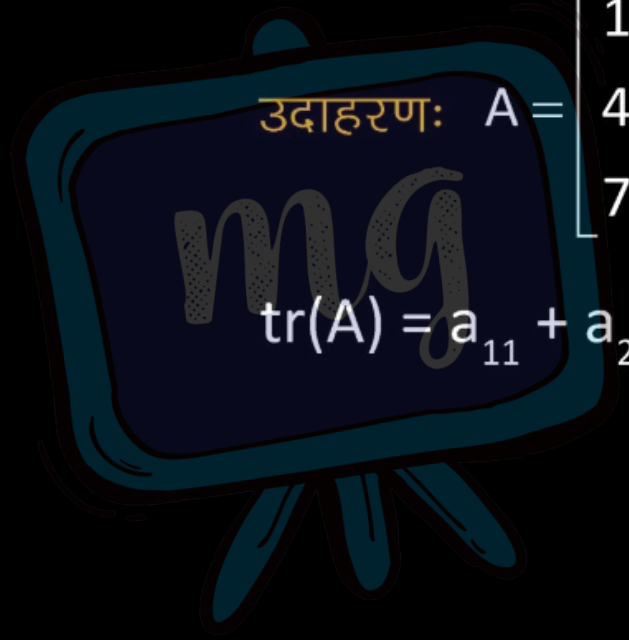
मैट्रिक्स का ट्रेस (Trace of a matrix) :

किसी वर्ग मैट्रिक्स $A = a_{ij}$ में उसके विकर्ण के अवयवों का योग $\sum a_{ij}$ उस मैट्रिक्स A का ट्रेस (trace) कहलाता है। जिसे tr(A) से प्रदर्शित करते हैं।

$$tr(A) = \sum a_{ij}$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



उदाहरण: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 5 + 9 = 15$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

गुणधर्म :

(i) $tr(A) = tr(A^T)$

(ii) $tr(KA) = K.tr(A)$

(iii) $tr(AB) = tr(BA)$

(iv) $tr(I_n) = n$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

विकर्ण मैट्रिक्स (Diagonal matrix) :

यदि किसी वर्ग मैट्रिक्स के मुख्य विकर्ण के अतिरिक्त अन्य सभी अवयव शून्य हो, तो विकर्ण मैट्रिक्स कहते हैं।

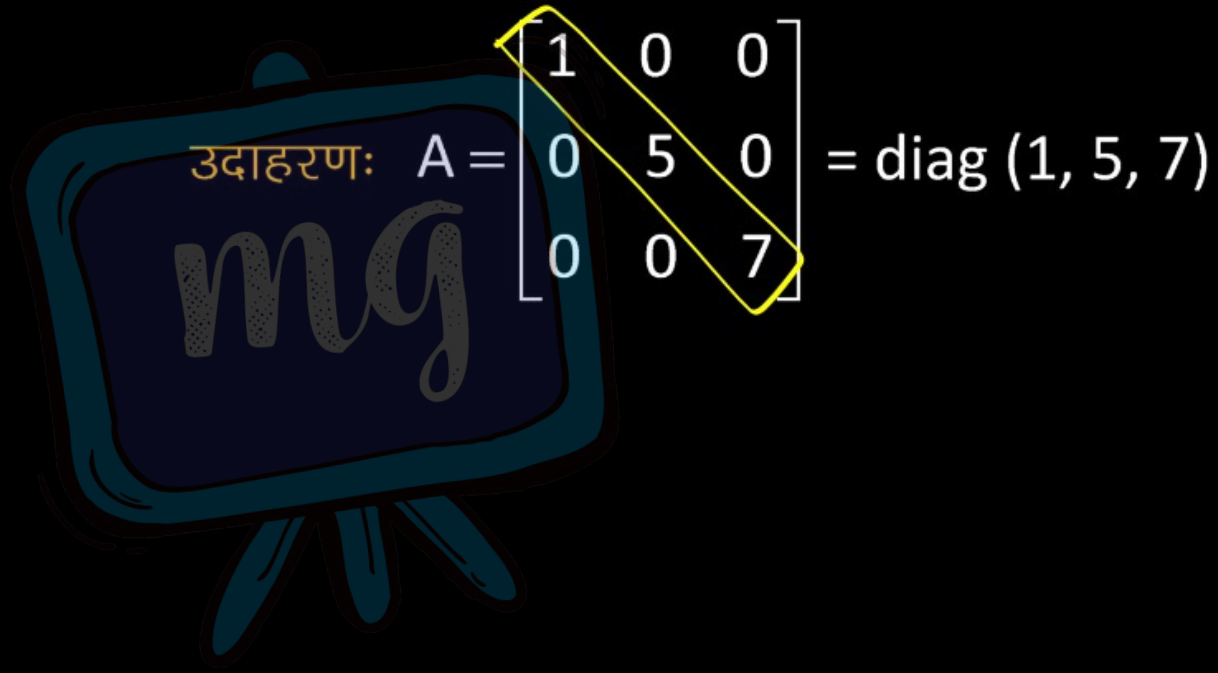
अतः वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ विकर्ण मैट्रिक्स होगा।

यदि $a_{ij} = 0$ जब $i \neq j$

उदाहरण: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ एक विकर्ण मैट्रिक्स है जिसे a_{11}, a_{22}, a_{33} से प्रदर्शित करते हैं।

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ एक विकर्ण मैट्रिक्स नहीं है।

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

अदिश आव्यूह (Scalar matrix) :

यदि किसी विकर्ण मैट्रिक्स के विकर्ण के सभी अवयव समान हो, तो उसेअदिश मैट्रिक्स कहते हैं। अतः वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ अदिश मैट्रिक्स कहलाएगा यदि

$$a_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ K; & i = j \end{cases}$$

उदाहरण:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ तथा $$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$ अदिश मैट्रिक्स है।

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

इकाई मैट्रिक्स (Unit matrix) :

यदि किसी वर्ग मैट्रिक्स के मुख्य विकर्ण का प्रत्येक अवयव 1 तथा अन्य सभी अवयव शून्य हो, तो उसे इकाई मैट्रिक्स कहते हैं।

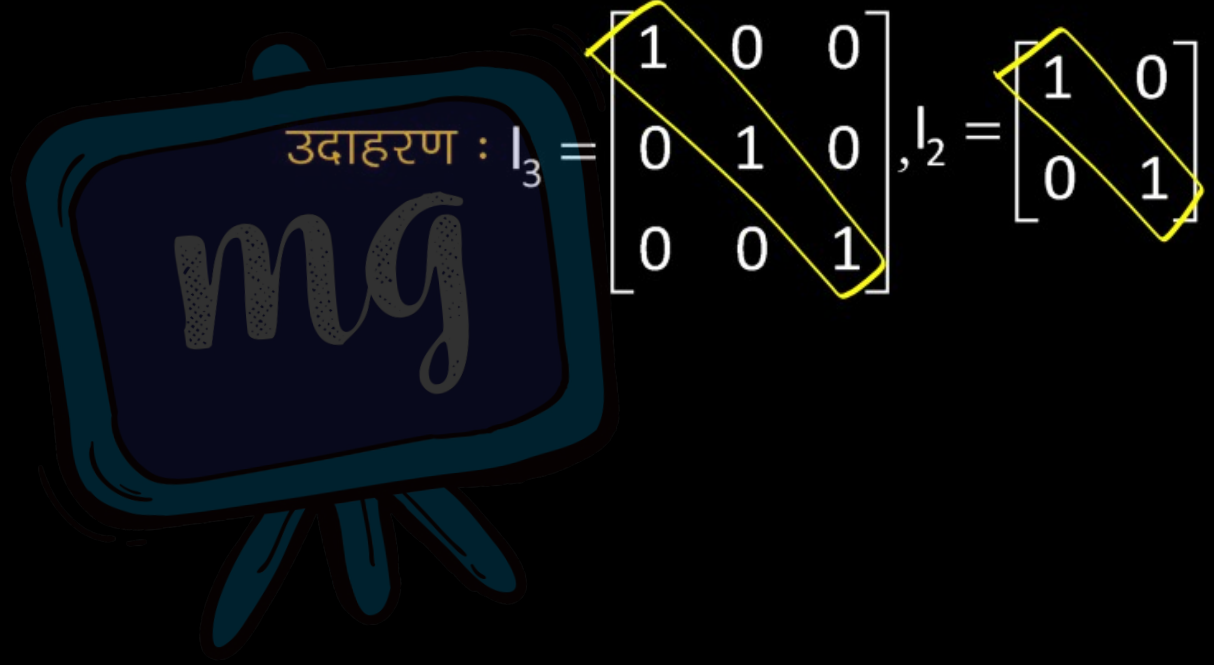
अतः वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ ईकाई मैट्रिक्स

कहलाएगा यदि $a_{ij} = \begin{cases} 1 ; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$

Note : n कोटि के ईकाई मैट्रिक्स को प्राय I_n संकेत से व्यक्त करते हैं।

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण -1 : तीन फैक्ट्रियों I, II तथा III में पुरुष तथा महिला कर्मियों से संबंधित निम्नलिखित सूचना पर विचार कीजिए :

	पुरुष कर्मी	महिला कर्मी
I	30	25
II	25	31
III	27	29

उपर्युक्त सूचना को एक 3 × 2 आव्यूह में निरूपित कीजिए। तीसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ वाली प्रविष्टि क्या प्रकट करती है?

यहाँ 3 × 2 कोटी का आव्यूह :

	पुरुष	महिला	
$A =$	30	25	I
	25	31	II
	27	29	III

अब, $a_{32} = 29 \Rightarrow$ III rd फैक्ट्री में महिला कर्मियों की संख्या।

माना, पंक्तियाँ = m

व स्तंभ = n

तथा अवयवों की संख्या = 8

$mn = 8$

$\Rightarrow 1 \times 8,\ 2 \times 4,\ 4 \times 2,\ 8 \times 1$ (संभव कोटियाँ)

उदाहरण -2 : यदि किसी आव्यूह में 8 अवयव हैं, तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हो सकती हैं?

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$

कोटी = 3×2

$\Rightarrow m = 3, n = 2$

उदाहरण -3 : एक ऐसे 3 × 2 आव्यूह की रचना कीजिए, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ द्वारा प्रदत्त हैं।

यदि $i = 1, j = 1$ हो :

$a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3 \times 1| = \frac{1}{2}|-2| = 1$

यदि $i = 1, j = 2$ हो :

$a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3 \times 2| = \frac{1}{2}|-5| = \frac{5}{2}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

यदि $i = 2$ व $j = 1$ हो:

$$a_{21} = \frac{1}{2}\left|2 - 3 \times 1\right| = \frac{1}{2}\left|-1\right| = \frac{1}{2}$$

यदि $i = 2$ व $j = 2$ हो:

$$a_{22} = \frac{1}{2}\left|2 - 3 \times 2\right| = \frac{1}{2}\left|-4\right| = 2$$

यदि $i = 3$ व $j = 1$ हो

$$a_{31} = \frac{1}{2}\left|3 - 3 \times 1\right| = 0$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

यदि $i = 3$ व $j = 2$ हो :

$$a_{32} = \frac{1}{2}|3 - 3 \times 2| = \frac{1}{2}|-3| = \frac{3}{2}$$

अत : आव्यूह होगा :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$