ipca
A dose of life

कक्षा - 12

Chapter - 9

अवकल समीकरण

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

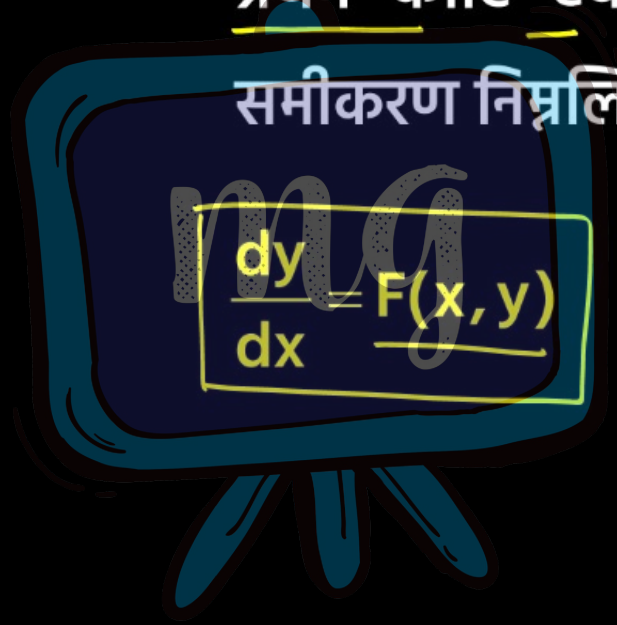
Part - 3

Lakhan Saini

mg
MISSION GYAAN
LET'S LEARN TOGETHER

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप का होता है:



$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad \ldots(1)$$

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

यदि F (x, y) को गुणनफल g (x), h(y) के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है जहाँ g(x), x का फलन है और h(y), y का एक फलन है तो समीकरण (1) पृथक्करणीय चर वाला समीकरण कहलाता है। ऐसा होने पर समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$

$\frac{dy}{dx} = h(y).g(x)$ ...(2)

$h(y).g(x)$

$h(y) \neq 0$

$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

यदि h (y) ≠ 0, तो चरों को पृथक् करते हुए समीकरण (2) को

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \qquad \ldots(3)$$

ipca
A dose of life

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

LET'S LEARN TOGETHER

के रूप में लिखा जा सकता है। समीकरण (3) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$y = f(x)$

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \ldots(4)$$

$H(y) = G(x) + C$

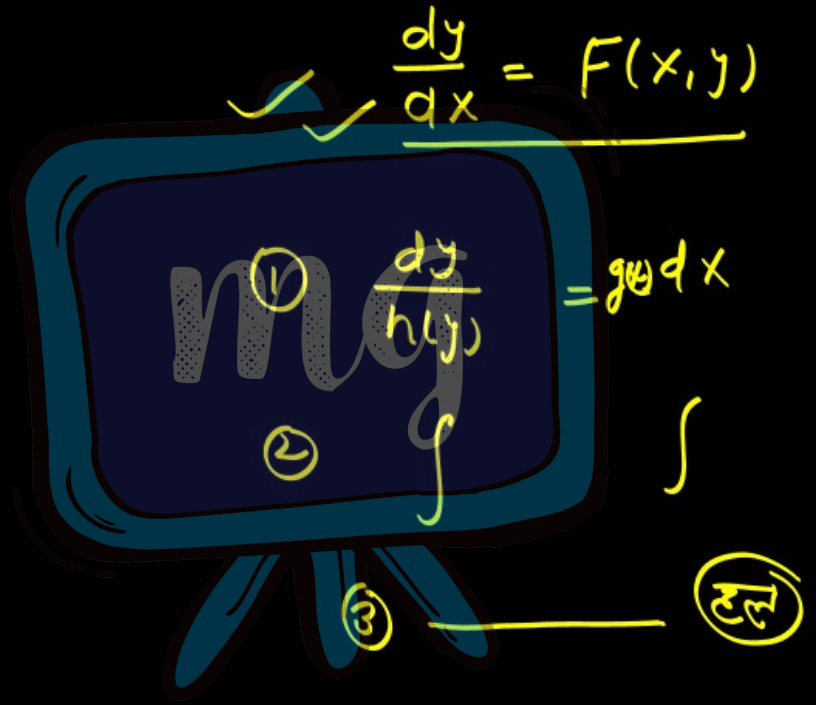
पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

इस प्रकार समीकरण (4), दिए हुए अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित रुप में प्रदान करता है:

$$H(y) = G(x) + C \quad \ldots(5)$$

यहाँ H (y) एवं G (x) क्रमशः $\frac{1}{h(y)}$ एवं g(x) के प्रतिअवकलज हैं और C स्वेच्छ अचर है।

ipca
A dose of life



पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

उदाहरण 4 : अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$ $(y \neq 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

हल :- दी अवकल समी.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \qquad y \neq 2$$

चर पृथक करने पर

$$(2-y)\,dy = (x+1)\,dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर

$$\int (2-y)\,dy = \int (x+1)\,dx$$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

$$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x - 2y + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2c_1 = 0$$

अत: अभीष्ट व्यापक हल -

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2x - 4y + C = 0} \quad [C = 2c_1]$$

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

उदाहरण 5 : अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :- दी गई अवकल समी० –

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

चर पृथक् करने पर

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

दोनों ओर समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}y = \tan^{-1}x + C$$

जो कि अभीष्ट व्यापक हल है।

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

उदाहरण 6 : अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, यदि $y = 1$ जब $x = 0$ हो।

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

हल :- दी गई अवकल समी. -

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2$$

चर पृथक करने पर -

$$\frac{dy}{y^2} = -4x\,dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर -

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (-4x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = -4^2\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = 2x^2 - c$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2x^2 - c}$$

जो की दी गई अवकल समी. का व्यापक हल है।

$\therefore$ जब $x = 0$ पर $y = 1$

$$\therefore \quad 1 = \frac{1}{2(0)^2 - c} \Rightarrow -c = 1$$

$$\Rightarrow c = -1$$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

अत: अभीष्ठ विशिष्ठ हल -



$$y = \frac{1}{\text{शेष}+1}$$

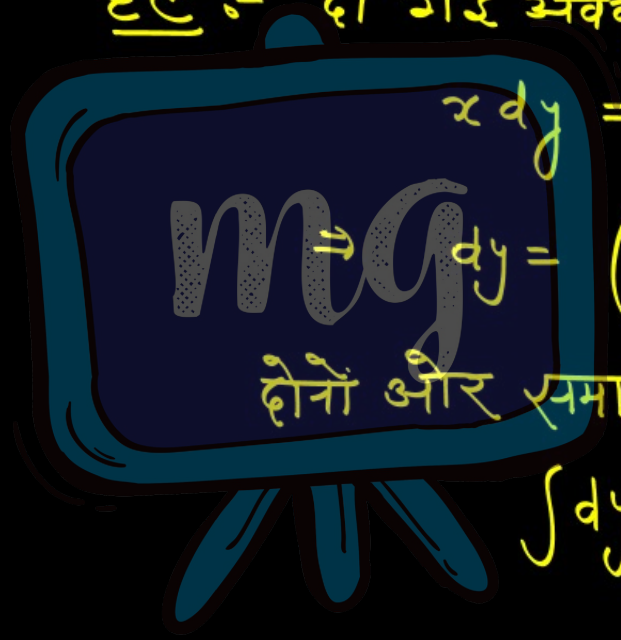
पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

उदाहरण 7 : बिंदु (1, 1) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण कीजिए जिसका अवकल समीकरण $x\,dy = (2x^2 + 1)\,dx\ (x \neq 0)$ है।

$y = f(x)$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER



हल :- दी गई अवकल समी०-

$$x\,dy = (2x^2+1)\,dx \qquad x \neq 0$$

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर-

$$\int dy = \int \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx$$

$$y = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \log|x| + c \quad \text{—— (1)}$$

जो कि दी गई समी. का व्यापक हल है।

∵ वक्र (1) बिन्दु (1, 1) से गुजरता है।

$$\therefore \quad 1 = (1)^2 + \log 1 + c$$

$$c = 0$$

अतः अभीष्ट वक्र की समी०

$$\boxed{y = x^2 + \log|x|}$$

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

उदाहरण 8 : बिंदु (-2, 3), से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है।

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

हल :- हम जानते हैं कि किसी वक्र के बिन्दु (x, y) पर प्रवणता $= \frac{dy}{dx}$

अतः प्रश्नानुसार -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \quad \text{——} (1)$$

पर हल करने पर -

$$y^2 dy = 2x dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर -

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + c \quad \text{—— (2)}$$

जो कि समी० (1) का व्यापक हल है।

∴ वक्र (2) बिन्दु $(-2, 3)$ से गुजरता है अतः

$$\frac{(3)^3}{3} = (-2)^2 + c$$

$$9 = 4 + c \Rightarrow \boxed{c = 5}$$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

अत: अभीष्ट वक्र की समी.



$$y^3/3 = x^2 + 5$$

$$y = (3x^2 + 15)^{1/3}$$

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण

उदाहरण 9 : किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। कितने वर्षों में Rs 1000 की राशि दुगुनी हो जाएगी?

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

हल :- माना t समय पर बैंक में मूलधन P है।

अतः प्रश्नानुसार

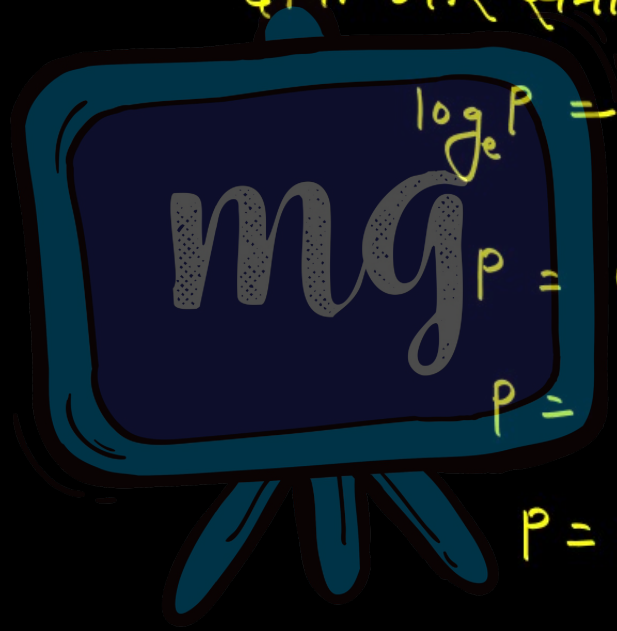
$$mg\frac{dP}{dt} = \frac{5}{100} \times P$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{P}{20} \quad \text{—— (i)}$$

चर पृथक करने पर

$$\frac{1}{P}dP = \frac{1}{20}dt$$

दोनों ओर समाकलन करने पर



$$\log_e P = \frac{1}{20}t + C'$$

$$P = e^{t/20 + C'}$$

$$P = e^{t/20} \cdot e^{C'}$$

$$P = C e^{t/20} \qquad [C = e^{C'}]$$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

$\because t=0$ पर $P=1000$

$\therefore \quad 1000 = Ce^0 \Rightarrow C=1000$

$\therefore P = 1000e^{t/20}$

अब, माना t_1 समय में ₹1000 दुगना हो जाता है

अतः

$2000 = 1000e^{t_1/20}$

$2 = e^{t_1/20}$

$$\Rightarrow \log 2 = \log_e e^{t_{1/20}}$$

$$\Rightarrow \log 2 = \frac{t_1}{20}$$

अतः अभीष्ट समय $(t_1) = 20 \log 2$