RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

12th MATHS

ARJUN BATCH

फलन
FUNCTIONS

अध्याय-01 | भाग-09



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

आज क्या पढेंगे ?



1 फलन

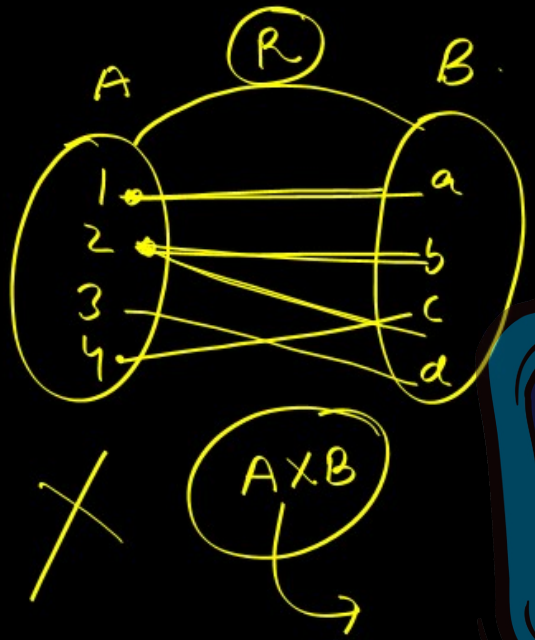
2 प्रश्नावली 1.2

फलन (Function)

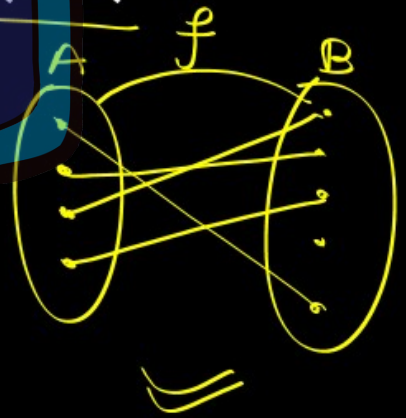


RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

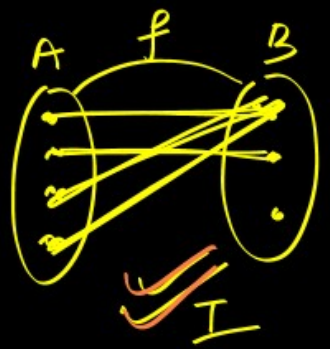


एक समुच्चय A से समुच्चय B का संबंध, f एक फलन कहलाता है, यदि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में, एक और केवल एक प्रतिबिंब होता है।

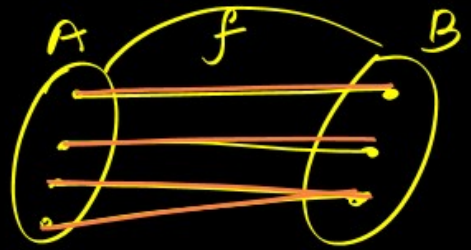


RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

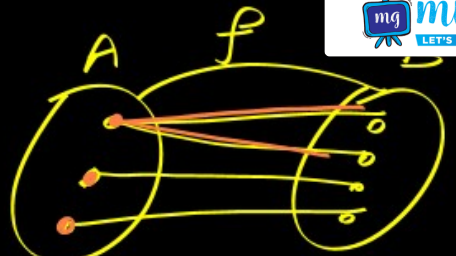
missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



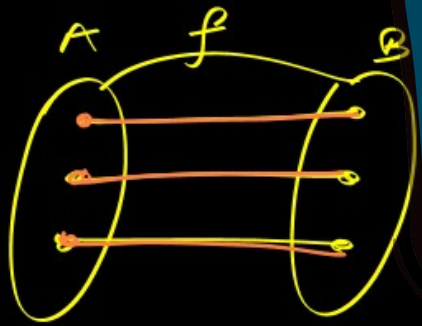
I ✓



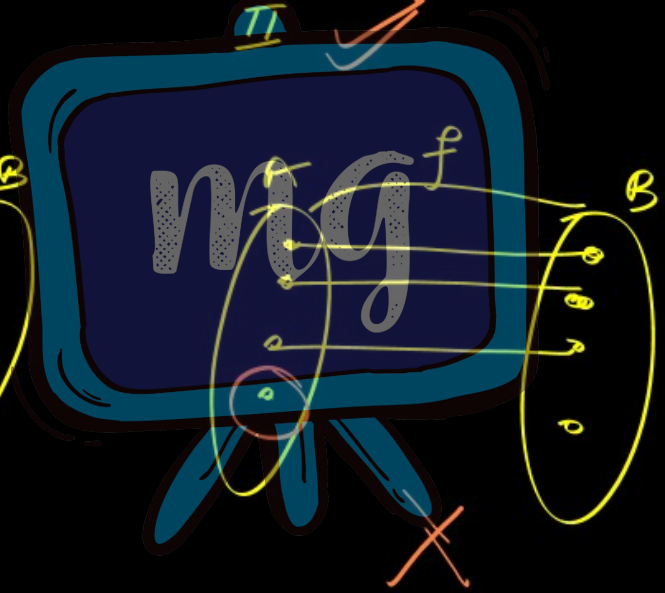
II ✓



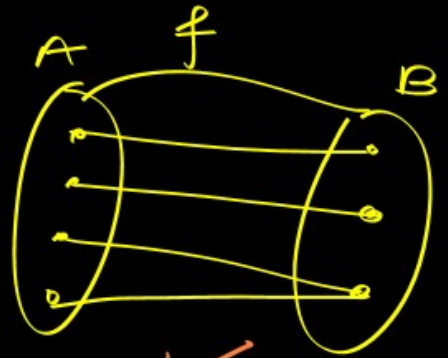
III ✗



IV ✓



✗



✓

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

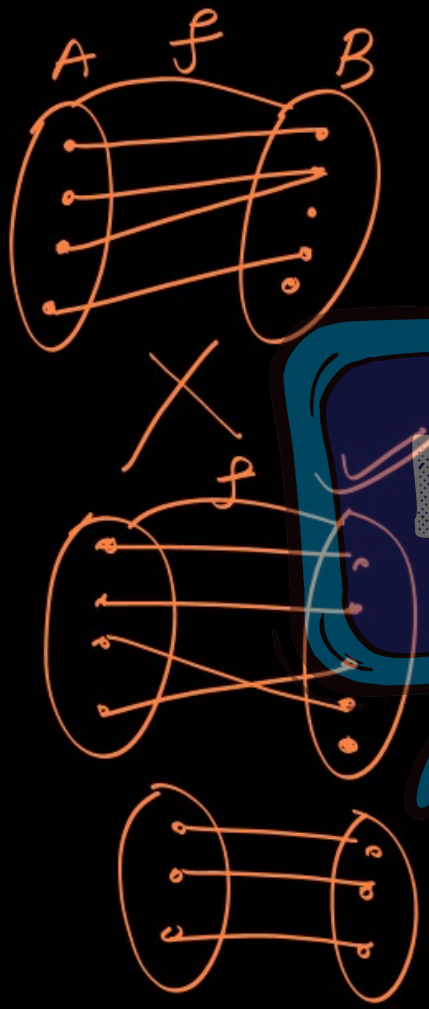


फलन के प्रकार (Types of Function)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

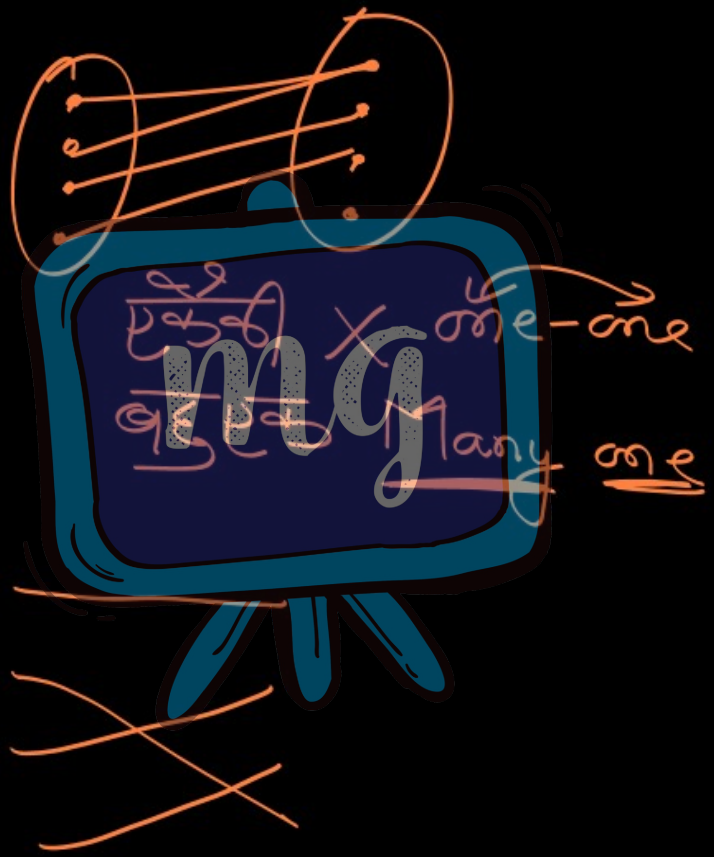


1 एकैकी फलन (One-One Function)

एक फलन $f : X \to Y$ एकैकी (one-one) अथवा एकैक (injective) फलन कहलाता है, यदि f के अंतर्गत X के भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न होते हैं, अर्थात् प्रत्येक $x_1, x_2 \in X$, के लिए $f(x_1) = f(x_2)$ का तात्पर्य है कि $x_1 = x_2$ अन्यथा f एक बहुएक (many-one) फलन कहलाता है।

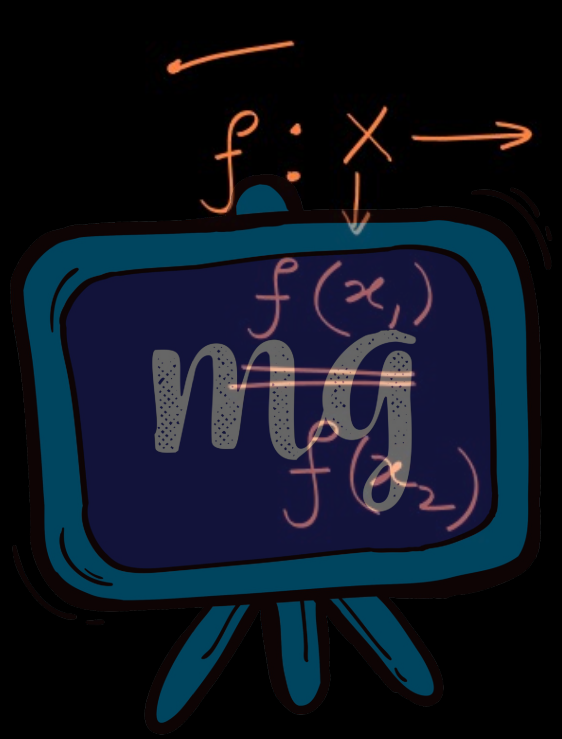
RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

mg missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$f : A \to B$

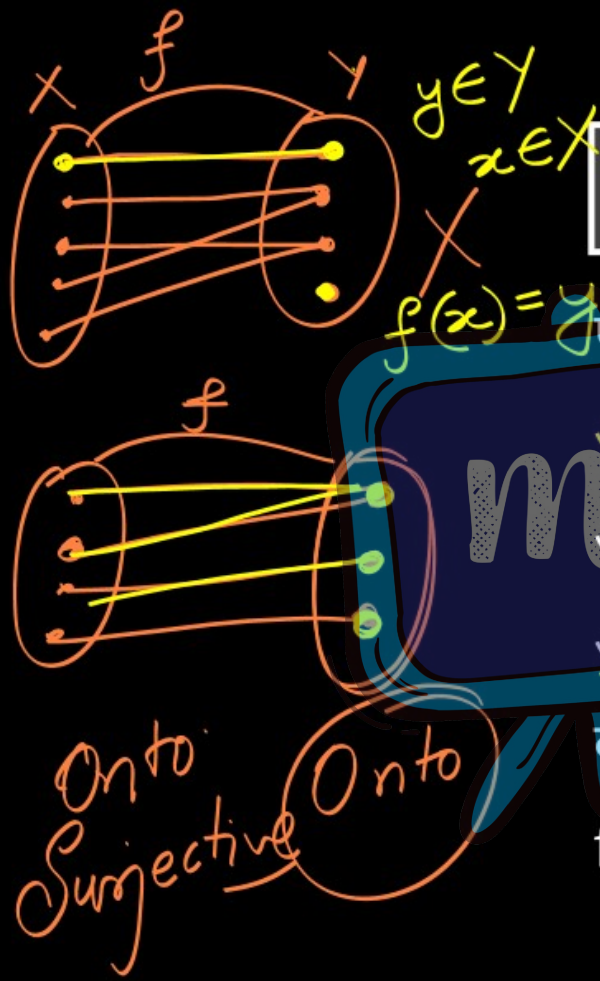
$f(x) = x^2$

$x_1 \to f(x_1) = x_1^2$

$2 \to f(2) = 2^2 = 4$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



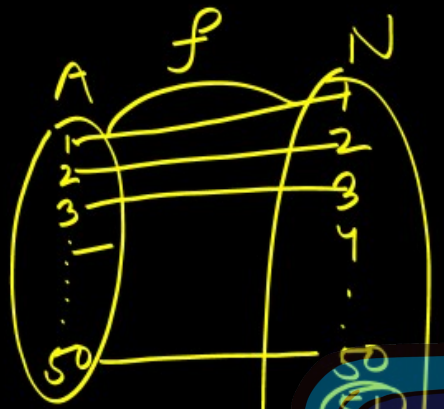
2 आच्छादक फलन (Onto Function)

फलन $f : X \to Y$ आच्छादक (onto) अथवा आच्छादी (surjective) कहलाता है, यदि f के अंतर्गत Y का प्रत्येक अवयव, X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब होता है, अर्थात् प्रत्येक $y \in Y$, के लिए, X में एक ऐसे अवयव का अस्तित्व है कि

$f(x) = y$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



उदाहरण : 7

मान लीजिए कि कक्षा X के सभी 50 विद्यार्थियों का समुच्चय A है। मान लीजिए $f : A \to N$, $f(x)$ = विद्यार्थी x का रोल नंबर, द्वारा परिभाषित एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

माना $f : A \to N$ इस प्रकार है कि

$f(x)$ = विद्यार्थी x का रोल नम्बर.

एकैकी :-

माना $x_1, x_2 \in A$ इस प्रकार है

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1$ का रोल नं. विद्यार्थी x_2 के रोल नम्बर के बराबर

और हम जानते है कि किन्हीं भी दो विद्यार्थियों के रोल नं. बराबर वही होंगे

$\Rightarrow x_1 = x_2$

अतः फलन f एकैकी होगा।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

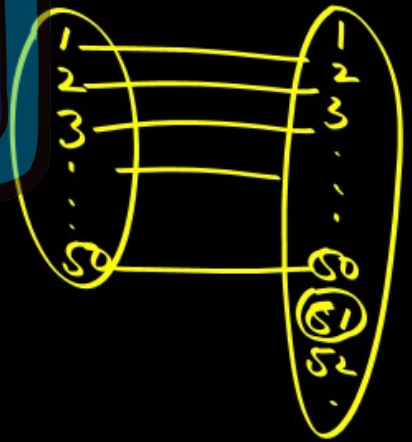
missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

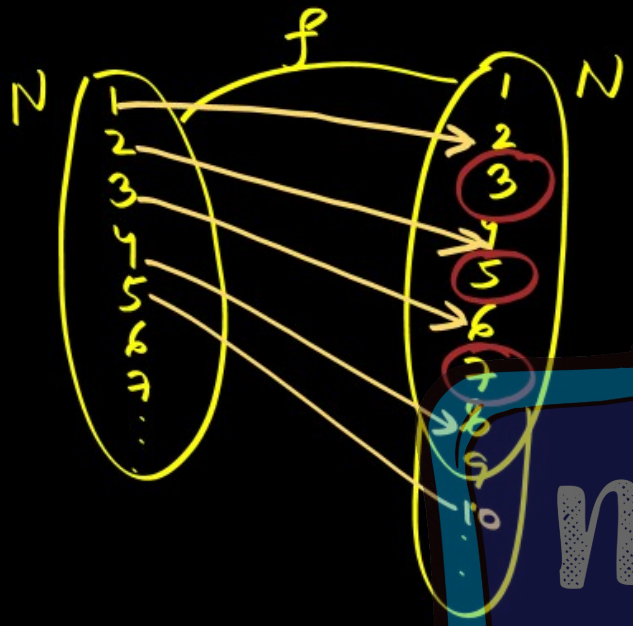
आच्छादक :

क्योंकि कक्षा में 50 विद्यार्थी हैं अतः उनके रोल नं. 1 से लेकर 50 तक दी हो सकती हैं।

अतः $S \mid \in N$ इस प्रकार विद्यमान है कि यह समुच्चय A के किसी भी विद्यार्थी का रोल नं. नहीं है।

फलन f आच्छादक नहीं होगा।





उदाहरण : 8

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : N \to N$, एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

$f(x) = 2x$

$f(1) = 2 \times 1 = 2$

$f(2) = 2 \times 2 = 4$

फलन $f: N \to N$ इस प्रकार है कि $f(x) = 2x$

एकैकी :- माना $x_1, x_2 \in N$ के लिए

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

अतः फलन एकैकी होगा।

आच्छादक :- यहाँ $3 \in N$ इस प्रकार कि यह प्रांत N के किसी भी अवयव का प्रतिबिंब नहीं है फलन आच्छादक नहीं है

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : 9

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$, एकैकी तथा आच्छादक है।



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : 10

सिद्ध किजिए कि $f(1) = f(2) = 1$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : N \to N$, आच्छादक तो है किंतु एकैकी नहीं है।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : 11

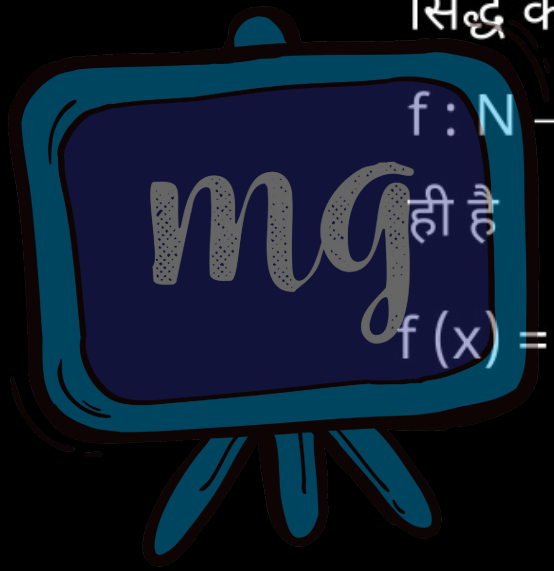
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : 12

सिद्ध कीजिए कि नीचे परिभाषित फलन $f : N \to N$, एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही है



$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{यदि } x \text{ विषम है} \\ x - 1, & \text{यदि } x \text{ सम है} \end{cases}$$

उदाहरण : 13

सिद्ध कीजिए कि आच्छादक फलन $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ सदैव एकैकी फलन होता है।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : 14

सिद्ध कीजिए कि एक एकैकी फलन $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ अनिवार्य रूप से आच्छादक भी है।



प्रश्नावली 1.2

1. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R_* \to R_*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ R_* सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत R_* को N से बदल दिया जाए, जब कि सहप्रांत पूर्ववत R_* ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

प्रश्नावली 1.2

2. निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादी (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए:



(i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : N \to N$ फलन है।

प्रश्नावली 1.2

(ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : Z \to Z$ फलन है।



प्रश्नावली 1.2

(iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : R \to R$ फलन है।



प्रश्नावली 1.2

(iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : N \to N$ फलन है।



प्रश्नावली 1.2

(v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : Z \to Z$ फलन है।



प्रश्नावली 1.2

3. सिद्ध कीजिए कि f (x) = [x] द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन f : R → R, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ [x], x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

प्रश्नावली 1.2

4. सिद्ध कीजिए कि f (x) = |x| द्वारा प्रदत्त मापांक फलन f : R → R, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ |x| बराबर x, यदि x धन या शून्य है तथा |x| बराबर –x, यदि x ऋण है।

5. सिद्ध कीजिए कि $f : R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0, \end{cases}$$

द्वारा प्रदत्त चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।