कक्षा - 12

Chapter - 9

अवकल समीकरण

रैखिक अवकल समीकरण

(Linear differential equations)

Part - 8

Lakhan Saini

रैखिक अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

के रूप वाला अवकल समीकरण, जिसमें P एवं Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं, प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है।

रैखिक अवकल समीकरण

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

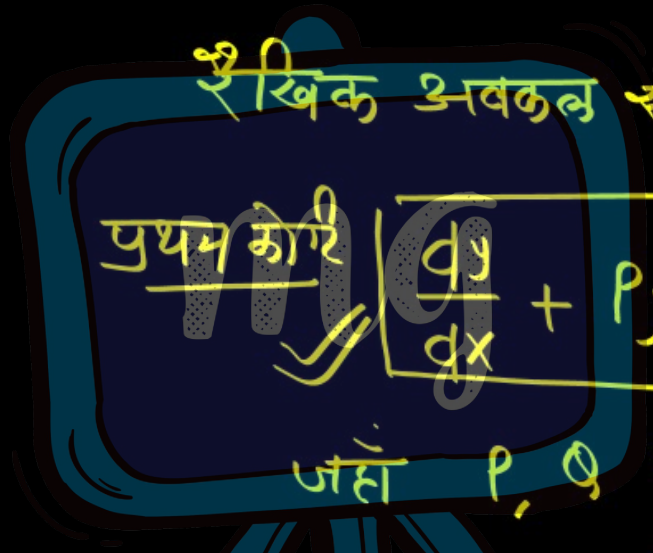
1. $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$ $\quad \frac{dy}{dx} + Py = Q$ $\quad P = 1$ $\quad Q = \sin x$

2. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y = e^x$ $\quad \Rightarrow P = \frac{1}{x}$ $\quad Q = e^x$

3. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x \log x}\right) = \frac{1}{x}$ $\quad P = \frac{1}{x \log x}$ $\quad Q = \frac{1}{x}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



रैखिक अवकल समी. का मानक रूप -

प्रथम कोटि

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

जहाँ $P, Q \Rightarrow$ अचर

$\Rightarrow$ केवल x के फलन

II form

$$\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$$

$P_1, Q_1 \Rightarrow$ अचर

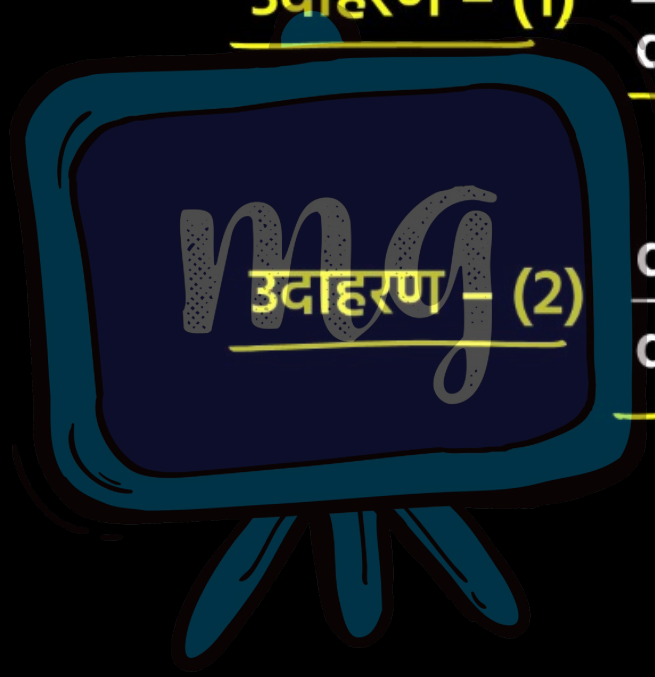
$\Rightarrow$ केवल y के फलन

रैखिक अवकल समीकरण

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का दूसरा रूप $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ है, जिसमें P_1 और Q_1 अचर अथवा केवल y के फलन हैं।

रैखिक अवकल समीकरण

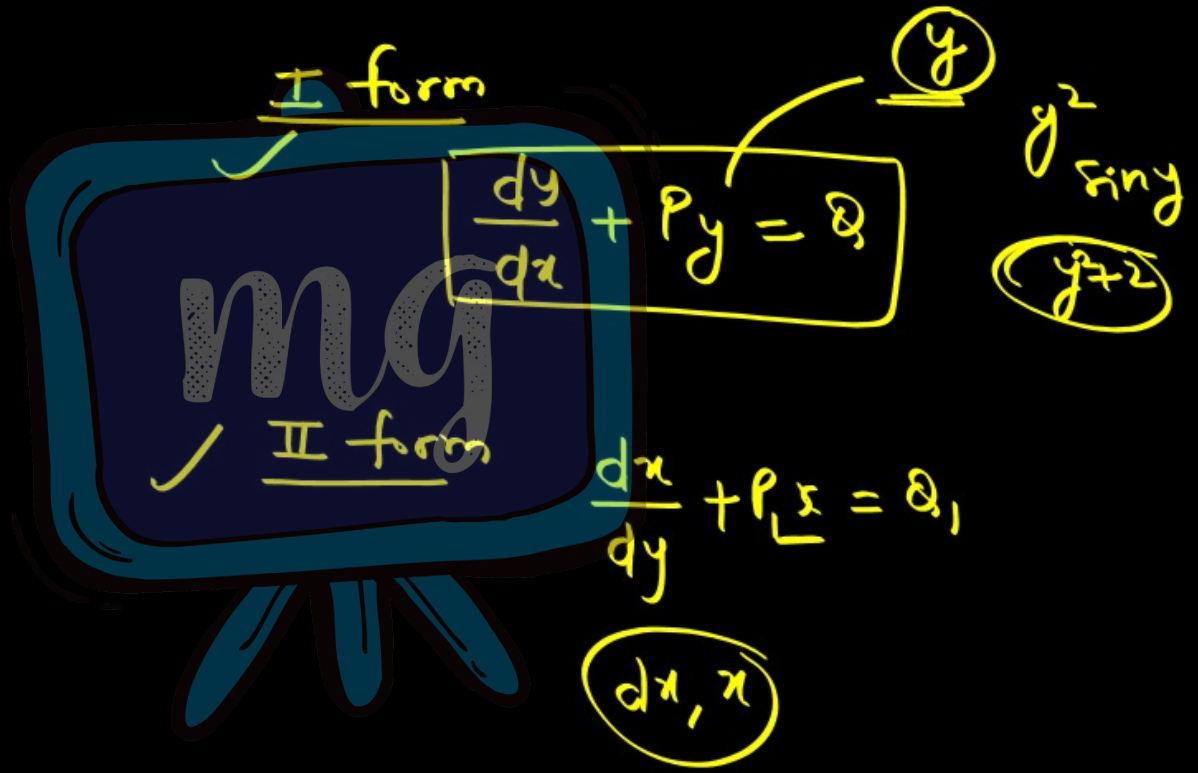
उदाहरण – (1) $\frac{dx}{dy} + x = \cos y$



उदाहरण – (2) $\frac{dx}{dy} + \frac{-2x}{y} = y^2 e^{-y}$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



रैखिक अवकल समीकरण

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण को हल करने के लिए सम्मिलित चरण:

(i) दिए हुए अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप में लिखिए जिसमें P, Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं।

रैखिक अवकल समीकरण

(ii) समाकलन गुणक (I.F.) = $e^{\int Pdx}$ ज्ञात कीजिए।

(iii) दिए हुए अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित रूप में लिखिए:

$$y.(I.F.) = \int (Q \times I.F.)dx + C$$

रैखिक अवकल समीकरण

यदि प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ के रूप में है जिसमें P_1 और Q_1 अचर अथवा केवल y के फलन हैं, तब $I.F. = e^{\int P_1 dy}$ और

$$x.(I.F.) = \int (Q_1 \times I.F.)dy + C$$

अवकल समीकरण का हल है।

$e^{\int P_1 dx}$

$e^{\int P_1 dy}$

उदाहरण 14 : अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :- दी गई अवकल समी०-

$$\frac{dy}{dx} - y = \cos x$$

जो कि $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ रूप का प्रथम कोटि का अवकल समी० है जहाँ $P = -1$; $Q = \cos x$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

अत: $I.F. = e^{\int P dx}$

$= e^{-\int dx}$

$= e^{-x}$

तथा व्यापक हल –

$y(I.F.) = \int Q(I.F)\,dx + C$

$\Rightarrow y e^{-x} = \int \cos x\,(e^{-x})\,dx + C$

ILATE

माना $I = \int e^{-x} \cos x \, dx$

$\because \int u.v \, dx = u \int v \, dx - \int \left\{ \frac{du}{dx} \int v \, dx \right\} dx$

$I = \cos x \int e^{-x} - \int \left\{ \frac{d}{dx} \cos x \int e^{-x} dx \right\} dx$

$I = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx$

$I = -e^{-x} \cos x - \left[\sin x \int e^{-x} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \sin x \int e^{-x} dx \right\} dx \right]$

$\Rightarrow I = -e^{-x} \cos x - \left[-e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx \right]$

$$I = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - I$$

$$2I = e^{-x}[\sin x - \cos x]$$

$$I = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x)$$

अतः अभीष्ट व्यापक हल –

$$\boxed{y(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C}$$

या $$y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + Ce^{x}$$

उदाहरण 15 : अवकल समीकरण

$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 (x \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :- दी गई अवकल समी० -

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)y = x \quad \text{——} (1)$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

जो कि $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप का रैखिक अवकल

समी० है जहाँ $P = \frac{2}{x}$; $Q = x$

अत: $I.F. = e^{\int P dx}$

$= e^{\int \frac{2}{x} dx}$

$= e^{2\log x}$

$= e^{\log x^2} = x^2$

$[a^{\log_a M} = M]$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

तथा व्यापक हल -

$$y(I.F.) = \int Q\,(I.F)\,dx + C$$

$$\Rightarrow y(x^2) = \int x\,(x^2)\,dx + C$$

$$\Rightarrow y(x^2) = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{4} + Cx^{-2}}$$

उदाहरण 16 : अवकल समीकरण

$y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ का व्यापक हल

ज्ञात कीजिए।

हल :- दी गई अवकल समी०

$$y\,dx - (x+2y^2)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow y\,dx = (x+2y^2)\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x+2y^2}{y}$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + 2y$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \left(\frac{1}{y}\right)x = 2y \qquad \text{---------- (1)}$$

जो कि $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ रूप का रैखिक अवकल

समी॰ (1) जहाँ $P_1 = \frac{-1}{y}$; $Q_1 = 2y$

अतः $I.F. = e^{\int P dy}$ $\Rightarrow I.F. = e^{-\int \frac{1}{y} dy}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$$\Rightarrow IF = e^{-\log y} = e^{\log \frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$$

तथा व्यापक हल –

$$x(IF) = \int Q_1 (IF)\, dy + C$$

$$x\left(\frac{1}{y}\right) = \int 2y\left(\frac{1}{y}\right) dy + C$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = 2y + C$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2y^2 + cy}$$

उदाहरण 17 : अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2\cot x (x \neq 0)$$

का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

हल :- दी गई अवकल समी० –

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2\cot x \quad (x \neq 0)$$

जो कि $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ रूप का है अ. समी. है जहाँ

$$P = \cot x \quad ; \quad Q = 2x + x^2\cot x$$

अब: $I.F. = e^{\int P dx}$

$= e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$\because e^{\log_e m} = m$

तथा व्यापक हल –

$$y(I.F.) = \int Q(I.F)\,dx + C$$

$$\Rightarrow y(\sin x) = \int [2x + x^2 \cot x] \sin x + C$$

$$= \int 2x \sin x\,dx + \int x^2 \cos x\,dx + C$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$$\because \int u \cdot v\,dx = u\int v\,dx - \int \left\{\frac{dy}{dx}\int v\,dx\right\}dx$$

$$\therefore y(\sin x) = \int 2x\sin x\,dx + \left[x^2\int \cos x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x^2\int \cos x\,dx\right\}dx\right] + c$$

$$\Rightarrow y(\sin x) = \int 2x\sin x\,dx + x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx + c$$

$$\Rightarrow y(\sin x) = x^2\sin x + c$$

$$\Rightarrow y = x^2 + \frac{c}{\sin x} \quad \text{——— (2)}$$

जो हमारी (1) का व्यापक हल है।

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$\because$ $y = 0$ यदि $x = \pi/2$

अतः समी. (2) से

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{C}{\sin \pi/2}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{\pi^2}{4}$$

अतः अभीष्ट विशिष्ट हल –

$$y = x^2 + \frac{-\pi^2/4}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x^2 - \frac{\pi^2}{4\sin x}}$$

उदाहरण 18 : बिन्दु (0, 1) से गुजरने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए, यदि इस वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, उस बिंदु के x निर्देशांक (भुज) तथा x निर्देशांक और y निर्देशांक (कोटि) के गुणनफल के योग के बराबर है।

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

हल:- ∵ किसी वक्र के बिन्दु (x,y) पर प्रवणता $= \frac{dy}{dx}$

अतः प्रश्नानुसार,

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - xy = x \quad \text{——(1)}$$

जो कि $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ रूप का रैखिक अवकल

समी० है जहाँ- $P = -x$; $Q = x$

अतः $I.F. = e^{\int P dx}$

$= e^{-\int x\,dx}$ $= e^{-x^2/2}$

तथा व्यापक हल –

$$y(I.F.) = \int Q\,(I.F)\,dx + C$$

$$\Rightarrow y e^{\frac{-x^2}{2}} = \int e^{\frac{-x^2}{2}} x\,dx + C$$

माना $I = \int e^{\frac{-x^2}{2}} x\,dx$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

यदि $\frac{x^2}{2} = t$

$\Rightarrow x\,dx = +dt$

तथा $I = \int e^{-t}\,dt = -e^{-t}$

$= -e^{-\frac{x^2}{2}}$

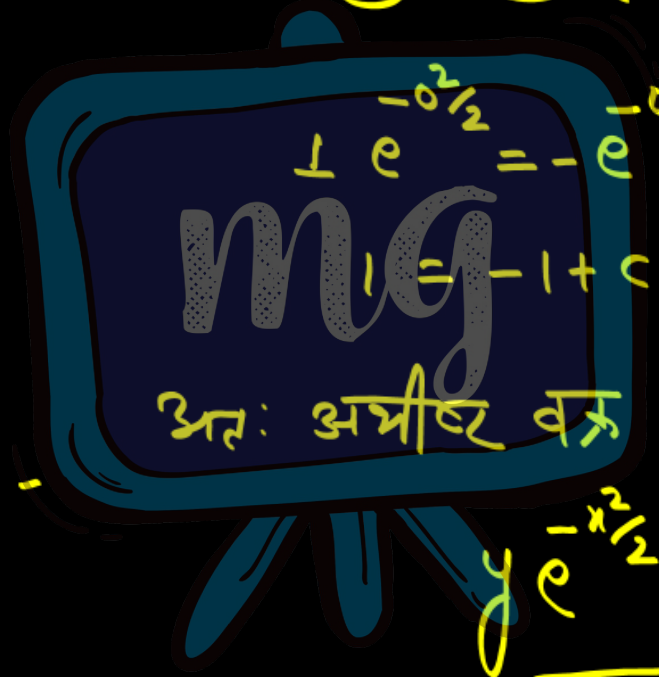
अतः व्यापक हल –

$$y\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C \quad \text{——} (2)$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

∵ वक्र ② बिन्दु (0,1) से गुजरता है अतः



$$1 \cdot e^{-0^2/2} = -e^{-0^2/2} + c$$

$$1 = -1 + c \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

अतः अभीष्ट वक्र का समी० –

$$y e^{-x^2/2} = -e^{-x^2/2} + 2$$

$$\boxed{y = -1 + 2e^{-x^2/2}}$$