RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

12th MATHS

ARJUN BATCH

संबंध एवं फलन

Relations & Functions

अध्याय-01 | भाग-03



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

आज क्या पढेंगे ?

1 उदाहरण

2 प्रश्नावली 1.1



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

दिया हुआ है।

समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$

तथा संबंध $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$

उदाहरण : 4

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3} में $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध स्वतुल्य है, परंतु न तो सममित है और न संक्रामक है।

यहाँ प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a,a) \in R$

अतः यह संबंध स्वतुल्य होगा।

इस संबंध में $(1,2) \in R$ परंतु $(2,1) \notin R$

अतः यह सममित संबंध नहीं है।

$\forall a \in A$

$(a,a) \in R$

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

mg missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

यहाँ $(1,2) \in R$ तथा $(2,3) \in R$.

परंतु $(1,3) \notin R$

अतः यह संबंध R सक्रामक नहीं हैं.

अतः R एक तुल्यता संबंध भी नहीं हैं.



माना Z पूर्णांकों का समुच्चय है।

$R = \{(a, b) :$ संख्या 2, $(a-b)$ को विभाजित करती है$\}$

उदाहरण : 5

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) :$ संख्या 2, $(a - b)$ को विभाजित करती है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है।

स्वतुल्य (Reflexive)

प्रत्येक $a \in Z$ के लिए

$(a-a)=0$ की संख्या 0

2 विभाजित करती है।

$\Rightarrow (a,a) \in R$

$a \in Z.$

$(a,a) \in R$

अतः संबंध R स्वतुल्य होगा।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सममित (Symmetric).

माना $a, b \in Z$ के लिए

$(a,b) \in R$

$\Rightarrow (a-b)$ को 2 विभाजित करता है।

$\Rightarrow -(-a+b)$ को 2 विभाजित करता है।

$\Rightarrow (-a+b)$ " " "

$\Rightarrow (b-a)$ को 2 विभाजित करता है।

$\Rightarrow (b,a) \in R$

अतः संबंध R सममित होगा।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सक्रामक :

माना $a, b, c \in Z$ के लिए

$(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$

अब $(a,b) \in R \Rightarrow a-b$ को 2 विभाजित करता है।

$\Rightarrow a-b = 2K$; $K \in Z$ — ①

तथा $(b,c) \in R \Rightarrow b-c$ को 2 विभाजित करता है।

$\Rightarrow b-c = 2m$; $m \in Z$ — ②

① तथा ② को जोड़ने पर, $a-b+b-c = 2K+2m$

$\Rightarrow a-c = 2(K+m)$

$\Rightarrow a-c$ को 2 विभाजित करता है।

$\Rightarrow (a,c) \in R$

$\Rightarrow R$ एक सक्रामक संबंध है।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

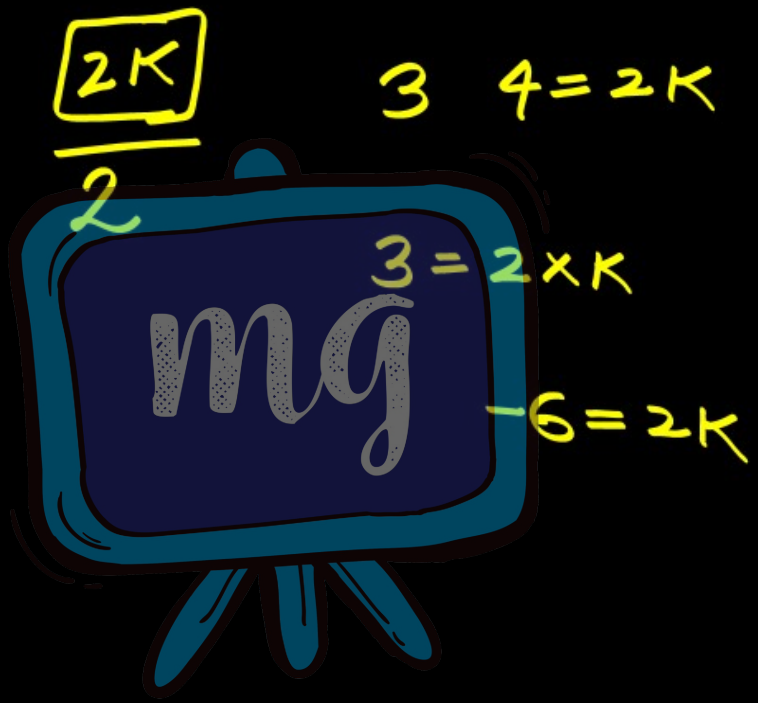
missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

अब क्योंकि यह संबंध R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है। तो यह एक तुल्यता संबंध होगा।



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$\frac{0}{2}$ $\frac{0}{3}$ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{5}$

$\frac{2}{0} \times \frac{1 \times 0}{2}$



$0 \quad \pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3$

$0 = 1 \times 0$

$= \frac{2}{2} \times 0$

$= \frac{3}{3} \times 0$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

mg missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

प्रत्येक $a \in A$ के लिए
$(a,a) \in R$ में होगा
क्योंकि a या तो सम होगा
उस स्थिति में (a,a) में दोनों
ही सम होंगे
तथा यदि a विषम होगा
तो (a,a) में दोनों विषम
होंगे तथा इन दोनों
ही स्थितियों में $(a,a) \in R$
होगा
अतः संबंध R स्वतुल्य
होगा।

उदाहरण : 6

मान लीजिए कि समुच्चय A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} में R = {(a, b) : a तथा b दोनों ही या तो विषम हैं या सम हैं} द्वारा परिभाषित एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।साथ ही सिद्ध कीजिए कि उपसमुच्चय {1, 3, 5, 7} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित है, और उपसमुच्चय {2, 4, 6} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित है, परंतु उपसमुच्चय {1, 3, 5, 7} का कोई भी अवयव उपसमुच्चय {2, 4, 6} के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है।


mg

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

सममित

माना $a, b \in A$ के लिए $(a,b) \in R$

$\Rightarrow$ या तो a तथा b दोनों विषम हों
या दोनों सम हों.

$\Rightarrow (b,a) \in R$

अतः संबंध R सममित होगा.

सक्रामक

माना $a, b, c \in A$ के लिए

$(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R$

$\Rightarrow$ a तथा b दोनों सम होंगे तब (b,c) दोनों सम होंगे इस स्थिति में a तथा c भी दोनों सम होंगे

तथा यदि

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

यदि a तथा b दीर्घविधम हों तो b तथा c भी
विषम होंगे
इस स्थिति में a तथा c विषम होंगे।

$\Rightarrow (a, c) \in R$

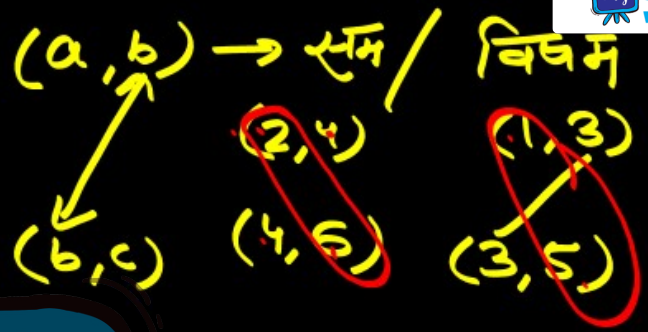
R एक सर्वांगसमता संबंध होगा।

अतः R एक तुल्यता संबंध होगा.



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER





प्रश्नावली 1.1

1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं:

   (i) समुच्चय A = {1, 2, 3, ..., 13, 14} में संबंध R, इस प्रकार परिभाषित है कि R = {(x, y) : 3x – y = 0}

प्रश्नावली 1.1

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में

$R = \{(x, y) : y = x + 5 \text{ तथा } x < 4\}$

द्वारा परिभाषित संबंध R.



प्रश्नावली 1.1

(iii) समुच्चय A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} में R = {(x, y) : y भाज्य है x से} द्वारा परिभाषित संबंध R है।



(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय Z में

$R = \{(x, y) : x - y$ एक पूर्णांक है$\}$

द्वारा परिभाषित संबंध R.



(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध R



(a) R = {(x, y) : x तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।}

(b) R = {(x, y) : x तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं।}



(c) R = {(x, y) : x, y से ठीक-ठीक 7 सेमी लंबा है}



(d) R = {(x, y) : x, y की पत्नी है}



(e) R = {(x, y) : x, y के पिता हैं}



प्रश्नावली 1.1

2. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।



प्रश्नावली 1.1

3. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5, 6} में R = {(a, b) : b = a + 1} द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

प्रश्नावली 1.1

4. सिद्ध कीजिए कि R में

R = {(a, b) : a ≤ b}, द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।



प्रश्नावली 1.1

5. जाँच कीजिए कि क्या R में

$R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?



प्रश्नावली 1.1

6. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3} में R = {(1, 2), (2, 1)} द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किंतु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।



प्रश्नावली 1.1

7. सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।



प्रश्नावली 1.1

8. सिद्ध कीजिए कि A = {1, 2, 3, 4, 5} में, R = {(a, b) : la – bl सम है} द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि {1,3,5} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय {2, 4} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं परंतु {1,3,5} का कोई भी अवयव {2,4} के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।