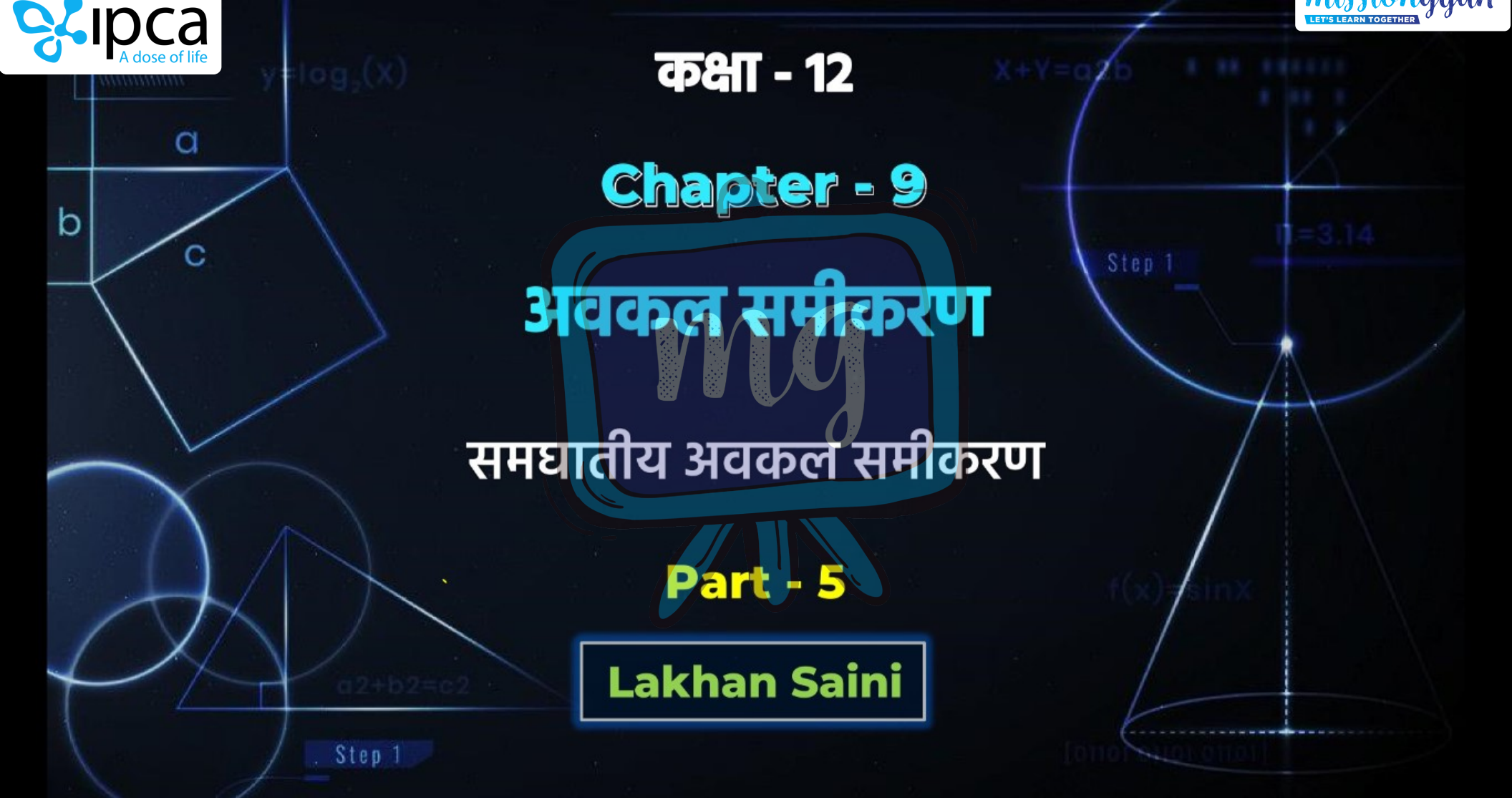

ipca
A dose of life
कक्षा - 12
Chapter - 9
अवकल समीकरण
समघातीय अवकल समीकरण
Part - 5
Lakhan Saini

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्नावली 9.3

22. किसी जीवाणु समूह में जीवाणुओं की संख्या 1,00,000 है। 2 घंटो में इनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है। कितने घंटों में जीवाणुओं की संख्या 2,00,000 हो जाएगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर उनके उपस्थित संख्या के समानुपाती है।

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

हल :- माना t समय पर जीवाणुओं की संख्या y है।

प्रश्नानुसार

$$\frac{dy}{dt} \propto y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky \quad [k \text{ समानुपाती स्थिरांक है}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = k\,dt$$

दोनों ओर समाकलन करने पर-

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

$$\Rightarrow \log y = kt + c'$$

$$\Rightarrow y = e^{kt+c'}$$

$$\Rightarrow y = e^{kt} \cdot e^{c'}$$

$$\Rightarrow y = c\,e^{kt} \quad \text{—— ①} \quad [c = e^{c'}]$$

$\because$ $t = 0$ पर $y = 100000 = 10^5$

$$10^5 = c\,e^{k(0)} \quad [\text{समी. (1)}]$$

$\therefore$ $c = 10^5$

अतः समी (i) निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है-

$$y = 10^5 e^{kt} \quad \text{——— (2)}$$

∵ 2 घण्टे में जीवाणुओं की संख्या में 10% की वृद्धि होती है अतः

$t = 2$ पर

$$y = 10^5 e^{k(t)} = 100000 + \frac{10}{100} \times 100000$$

$$= 10 e^{k(2)} = 10^5 + 10^4$$

$$10 \cdot 10^5 e^{k(2)} = 10^4 \times 11$$

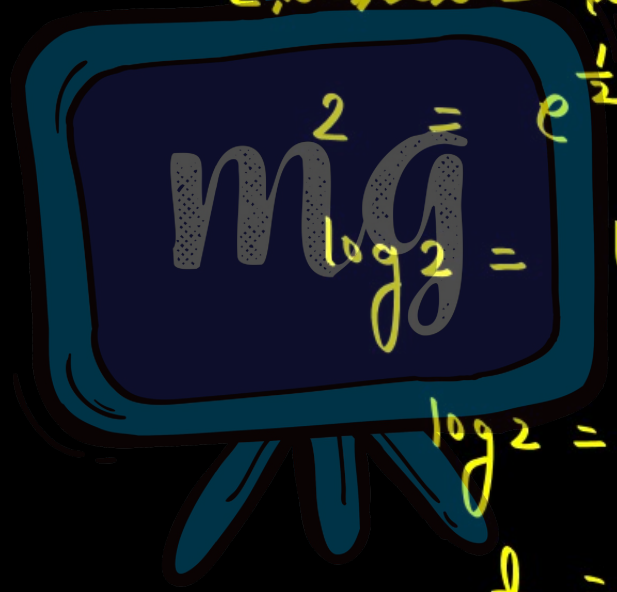
$$e^{2k} = \frac{11}{10}$$

$$2k = \log\left(\frac{11}{10}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)$$

अत: समी. (2) से -

$$y = 10^5 e^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)t} \quad \text{—— ③}$$

अब, माना t_1 घण्टे में जीवाणुओं की संख्या 2,00,000 हो जाती है अत: समी ③ से -



$$2{,}00{,}000 = 10^7 e^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)t_1}$$

$$2 = e^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)t_1}$$

$$\log 2 = \log e^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)t_1}$$

$$\log 2 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)t_1$$

$$t_1 = \frac{\log 2}{\frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)} = \frac{2\log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$$

ipca
A dose of life

प्रश्नावली 9.3

23. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का व्यापक हल है:

(A) $e^x + e^{-y} = C$

(B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{-x} + e^y = C$

(D) $e^{-x} + e^{-y} = C$

$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$

$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$

$-e^{-y} = e^x + C'$

$\boxed{e^x + e^{-y} = C}$

समघातीय अवकल समीकरण

समघातीय फलन :-

एक फलन $f(x,y)$ n घात का समघातीय फलन कहलाता है यदि किसी शून्येत्तर अचर λ के लिए $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

समघातीय अवकल समीकरण

समघातीय फलनों के उदाहरण:

(i) $f(x,y) = y^2 + 2xy$

हल:- $f(x,y) = y^2 + 2xy$

$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y)$

$= \lambda^2 y^2 + 2\lambda^2 xy$

$= \lambda^2 (y^2 + 2xy)$

$= \lambda^2 f(x,y)$

समघातीय अवकल समीकरण

(ii) $f(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ शून्य

$f(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$

$= \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

$= \lambda^0 f(x, y)$

समघातीय अवकल समीकरण

(iii) $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x-y}$



$\dfrac{\lambda x + 2\lambda y}{\lambda x - \lambda y}$

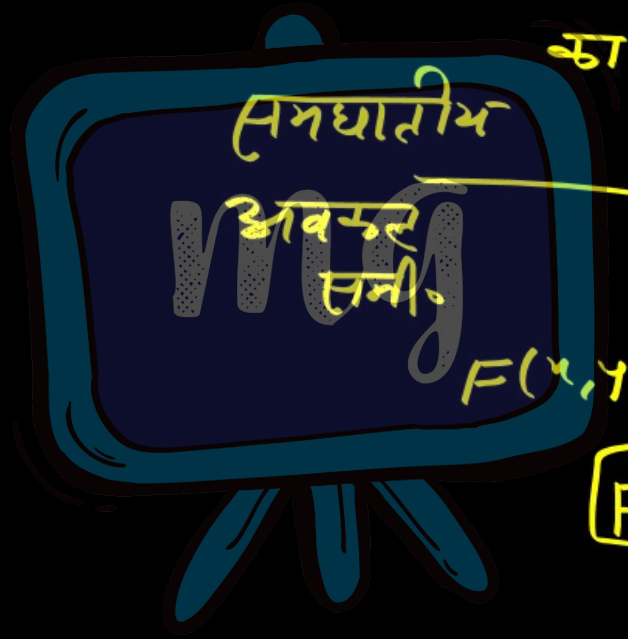
$\dfrac{\lambda (x+2y)}{\lambda (x-y)}$

$\lambda^0 f(x,y)$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

प्रथम कोटि व प्रथम घात का अवकल समी०



$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

$F(x,y)$ → समघाती फलन

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y)$$

समघातीय अवकल समीकरण

उदाहरण 10 : दर्शाइए कि अवकल समीकरण $(x-y)\frac{dy}{dx} = x+2y$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए।

हल :- दी गई अवकल समी०-

$$(x-y)\frac{dy}{dx} = x+2y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} = F(x,y) \text{ (माना)} \quad \text{---- (1)}$$

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

$\because F(x,y) = \frac{x+2y}{x-y}$

$\therefore F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + 2\lambda y}{\lambda x - \lambda y}$

$= \lambda^0 \left(\frac{x+2y}{x-y}\right)$

$= \lambda^0 F(x,y)$

अत: $F(x,y)$ शून्य घात का समघातीय फलन है।

⇒ सभी ① शून्य घात वाला अवकल समी. (समघातीय) हो

अब, माना $y = vx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vx) = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x + 2(vx)}{x - vx} \quad \left[\because \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}\right]$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - \frac{v}{1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v-v+v^2}{1-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v+v^2}{1-v}$$

$2v+1 \quad 2v-2+3-3$

$$\Rightarrow \frac{(v-1)\,dv}{v^2+v+1} = \frac{-1}{x}\,dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर

$$\int \frac{(v-1)\,dv}{v^2+v+1} = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv - \frac{3}{2}\int \frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\frac{v+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right] = -\log x + C'$$

ipca
A dose of life

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + \log x = c'$$

$\because y = vx \Rightarrow v = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right| + 2\log x = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2y}{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + 2c'$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y^2+xy+x^2}{x^2}\right| + \log x^2 = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{x\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\Rightarrow \log(x^2+y^2+xy) = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{x\sqrt{3}}\right) + c$$

समघातीय अवकल समीकरण

उदाहरण 11 : दर्शाइए कि अवकल समीकरण

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$ समघातीय

है और इसका हल ज्ञात कीजिए।

हल :- दी गई अवकल समी.

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} = F(x,y) \text{ (माना)} \quad \text{---- (1)}$$

$\because F(x,y) = \dfrac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$

$\therefore F(\lambda x,\lambda y) = \dfrac{\lambda y\cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)+\lambda x}{\lambda x\cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)}$

$= \lambda^0 F(x,y)$

$\therefore$ सभी ① शून्य घात वाला समघातीय अवकल समीकरण है।

ipca
A dose of life

LET'S LEARN TOGETHER

माना, $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\int \cos v\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\sin v = \log x + c$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + c}$$