Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

कक्षा – 12

गणित

अध्याय – 3

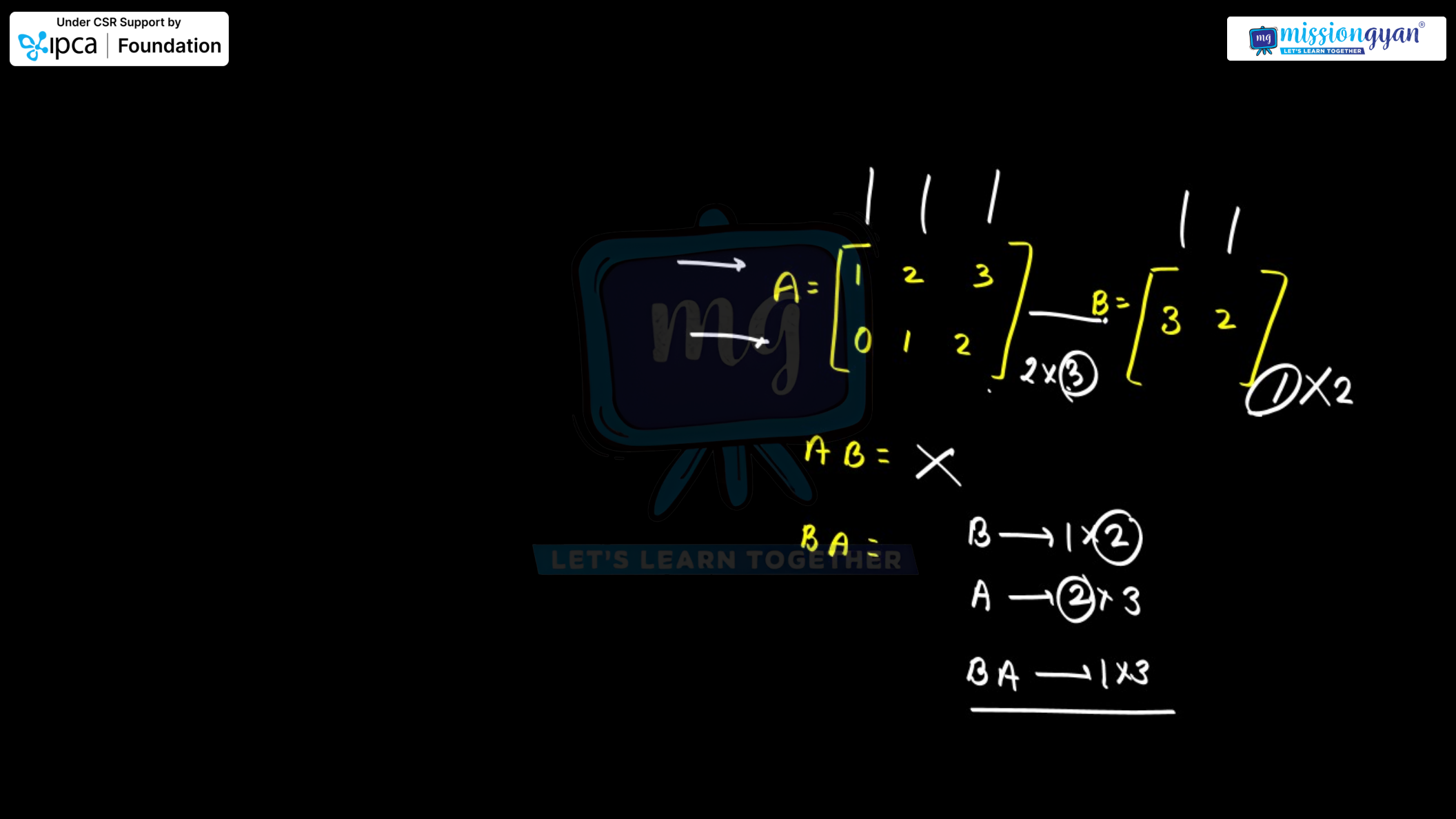
आव्यूह

भाग – 5

केशव शर्मा

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER



LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

मैट्रिक्स की धनात्मक पूर्णांक घातें (Positive integral polwers of am atrix) :

किसी मैट्रिक्स A की धनात्मक पूर्णांक घातें तभी विद्यमान होती हैं जबकि A एक वर्ग मैट्रिक्स हो। उस स्थिति में

$A^2 = AA$

$A^3 = AAA = A^2A$

.. ..

$A^n = AA..... A$ (n गुणनखण्ड)

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

किसी भी स्वेच्छा धन पूर्णांक m, n के लिए निन परिणाम आसानी से स्थापित किए जा सकते हैं:

(i) $A^m A^n = A^{m+n}$

(ii) $(A^m)^n = A^{mn} = (A^n)^m$

(iii) $I^n = I, I^m = I$

टिप्पणी : किसी वर्ग मैट्रिक्स की शून्य घात संगत क्रम का इकाई मैट्रिक्स परिभाषित किया जाता हैं अतः यदि A, n क्रम का वर्ग मैट्रिक्स है, तो $A^0 = I_n$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

पुनः यदि A, B समान कोटि के कोई दो मैट्रिक्स हों तो निम्न परिणाम भी आसानी से सत्यापित किए जा सकते हैं:

(i) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$

(ii) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$

(iii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 - AB + BA$

(iv) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 + AB - BA$

(v) $(-A)\,B = -(AB) = A\,(-B)$

(vi) $A = \text{diag}\,(\lambda_1 \lambda_2 \ldots . \lambda_n)$

$\Rightarrow A^n = \text{diag}\,(\lambda_1^n\, \lambda_2^n \ldots . \lambda_n^n)\ \forall\ n \in N$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$AB \neq BA$

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B)$$

$$= A(A-B) - B(A-B)$$

$$= A^2 - AB - BA + B^2$$

$$= A^2 + B^2 - AB - BA$$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा

$2A + 3X = 5B$ दिया हो, तो आव्यूह X ज्ञात कीजिए।

हल :- $2A + 3X = 5B$

$3X = 5B - 2A$

$3X = 5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$$3X = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 8 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$3X = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix}$$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

H.W.

15. सरल कीजिए, $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

mg LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

16. यदि $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)\,F(y) = F(x+y)$

हल :-

$F(y)=\begin{bmatrix}\cos y & -\sin y & 0\\ \sin y & \cos y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$F(x)\,F(y) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(x)\,F(y) = \begin{bmatrix} \cos x\cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y & 0 \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(x)\,F(y) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -(\sin x\cos y + \cos x \sin y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos x \cos y - \sin x \sin y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(x)\,F(y) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F(x+y)$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो, तो k ज्ञात कीजिए।

हल :-

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$$A^2 = KA - 2I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ 4K & -2K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K-2 & -2K \\ 4K & -2K-2 \end{bmatrix}$$

LET'S LEARN TOGETHER

$$+2K = +2$$

$$2K = 2$$

$$K = 1$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

परिवर्त मैट्रिक्स (Transpose of a matrix):

A^T / A'

स्तम्भ → पंक्ति

पंक्ति → स्तम्भ

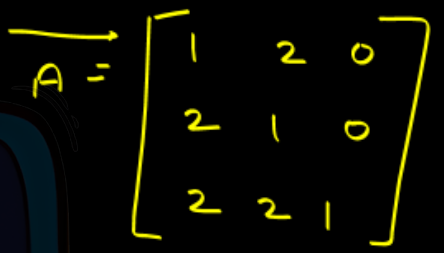
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ -a & -b & -c \end{bmatrix}$$

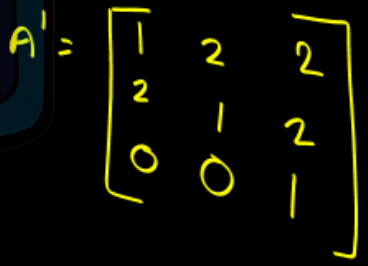
LET'S LEARN TOGETHER

$$A^T / A' = \begin{bmatrix} a & e & -a \\ b & f & -b \\ c & g & -c \end{bmatrix}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER





mg
LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

18. यदि $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ तो

सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$. 2022

$(AB)' = B'A'$

हल :-

$$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 12 & -24 & 0 \end{bmatrix}$$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$$B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ -12 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

अतः $(AB)' = B'A'$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

19. यदि $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए $A'A = I$

2023

हल :-

$A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$A' = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$A'A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$A'A = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{bmatrix}$

$A'A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

यदि किसी मैट्रिक्स A कि सभी पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाये तो इस प्रकार प्राप्त मैट्रिक्स A का परिवर्त मैट्रिक्स संकेत से व्यक्त करते हैं।

परिभाषा से स्पष्ट हैं कि

A की कोटि $m \times n$

$\Rightarrow A^T$ की कोटि $= n \times m$

$A \longrightarrow 2 \times 3$

$A' \longrightarrow 3 \times 2$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ तो $A^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण : $I_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

अतः प्रत्येक इकाई मैट्रिक्स का परिवर्त उस इकाई मैट्रिक्स के बराबर होता है।

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



परिवर्त के गुणधर्म (Properties of transpose):

(i) $(A')' = A$

(ii) $A'A = I$

(iii) $(AB)' = B'A'$

LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

यदि A, B उपयुक्त कोटि के मैट्रिक्स हैं तथा A^T एवं B^T क्रमशः उनके परिवर्त मैट्रिक्स हैं, तो

- (i) $(A^T)^T = A$
- (ii) $(A+B)^T = A^T+B^T$
- (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$
- (iv) $(kA)^T = kA^T$
- (v) $(AB)^T = B^TA^T$