Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

RIICO

12th MATHS

ARJUN BATCH

व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय फलन

अध्याय-03 | भाग- 12

11 सितंबर 2026 || 04:00 PM



Under CSR Support by ipca | Foundation

$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

अब $A + A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

अब $\frac{1}{2}(A + A') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ तो $\frac{1}{2}(A + A')$ तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ ज्ञात कीजिए।

$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix}$

अब $\frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix}$

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by ipca Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

हम जानते हैं कि प्रत्येक आव्यूह A को दो आव्यूहों $P=\frac{1}{2}$ ... तथा $Q=\frac{1}{2}(A-A')$ के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ P सममित (Symmetric) तथा Q विषम सममित आव्यूह होता है।

10. निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan® LET'S LEARN TOGETHER

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ तो $A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(Symmetric)
सममित

तथा $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(Skew Symmetic)
(विषम सममित)

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan® LET'S LEARN TOGETHER

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = ?$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$= \begin{bmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$



Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan® LET'S LEARN TOGETHER

$$P = \frac{1}{2}(A + A')$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

तथा $Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

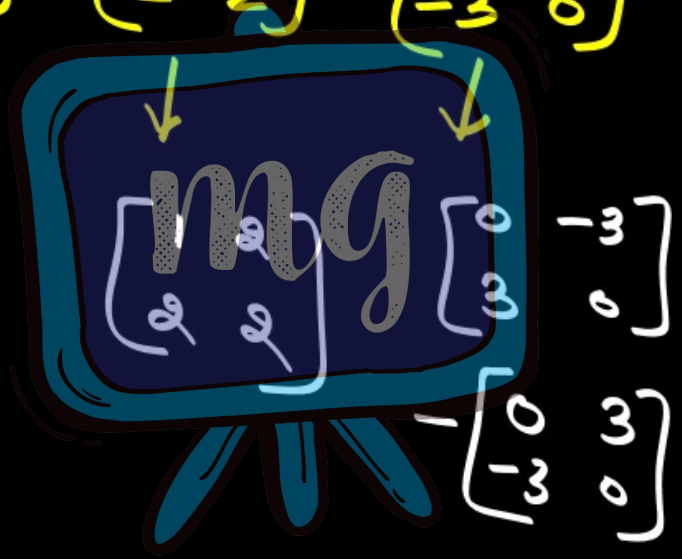
$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

अत: $A = P + Q$, जहाँ P सममित होता है और Q विषम सममित है

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Under CSR Support by ipca | Foundation

$A^1 = A \quad B^1 = B$

$(AB-BA)^1 = (AB)^1 - (BA)^1$

$= B^1A^1 - A^1B^1$

$= BA - AB$

$= -[AB-BA]$

अत: $(AB-BA)$ एक विषम सममित आव्यूह है

mg missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 में सही उत्तर चुनिए :

11. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB – BA एक

(अ) विषम सममित आव्यूह है

(ब) सममित आव्यूह है

(स) शून्य आव्यूह है

(द) तत्समक आव्यूह है

$(A+B)^1 = A^1 + B^1$

Under CSR Support by ipca | Foundation

mg missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $\frac{360}{6}$ $\frac{\pi}{3}$

$A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

अब $A + A' = I$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2\cos\alpha = 1$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$

0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}$ 0

12. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो α का मान है

(अ) $\frac{\pi}{6}$

(ब) $\frac{\pi}{3}$

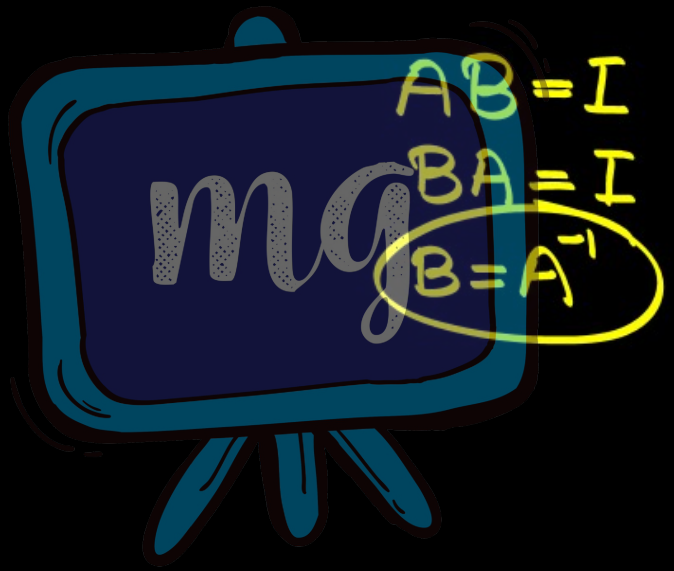
(स) π

(द) $\frac{3\pi}{2}$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrices)



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

m×m

यदि A, कोटि m, का, एक वर्ग आव्यूह है और यदि एक अन्य वर्ग आव्यूह का अस्तित्व इस प्रकार है, कि $AB = BA = I$, तो B को आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह कहते हैं और इसे A^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं। ऐसी दशा में आव्यूह A व्युत्क्रमणीय कहलाता है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$(A^{-1})^{-1} = A$

$A = [\ ]$ A^{-1}

- व्युत्क्रम का व्युत्क्रम मूल आव्यूह ही होगा, अर्थात $(A^{-1})^{-1} = A$
- एक आव्यूह के परिवर्त का व्युत्क्रम उसके व्युत्क्रम का परिवर्त होता है, अर्थात $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
- यदि A, B, C एक ही क्रम के तीन व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तो ABC व्युत्क्रमणीय है और इसके अतिरिक्त $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

A^{-1} B^{-1} C^{-1}

$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$



missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$



missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



☛ $A = \text{diag}\,(a_1 a_2 \ldots . a_n)$

$\Rightarrow A^{-1} = \text{diag}\,(a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots . a_n^{-1})$

☛ A एक अदिश आव्यूह है तब

$\Rightarrow A^{-1}$ यह भी एक अदिश आव्यूह होगा।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$A \rightarrow A^{-1}$

प्रमेय 3 : व्युत्क्रम आव्यूह की अद्वितीयता

किसी वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है तो अद्वितीय होता है।

Under CSR Support by ipca | Foundation

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

माना $A = [a_{ij}]$ एक m कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। तथा यदि संभव है तो माना कि इसके व्युत्क्रम आव्यूह B तथा C हैं।

अब व्युत्क्रम की परिभाषा से

$$AB = BA = I \quad \text{——} (1)$$

तथा

$$AC = CA = I \quad \text{——} (2)$$

अब $B = BI$

$= B(AC)$

$= (BA)C$

$= IC = C$

यानी $B = C$.

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

प्रमेय 4

यदि A तथा B समान कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

1. आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि

(अ) $AB = BA$

(ब) $AB = BA = 0$

(स) $AB = 0, BA = I$

(द) $AB = BA = I$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 23

यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, $n \in N$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 24

यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो दर्शाइए कि AB सममित है, यदि और केवल यदि A तथा B क्रमविनिमेय है, अर्थात् AB = BA है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 25

मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ है। एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = O$ हो।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

1. यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है।



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

2. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह B' AB सममित अथवा विषम सममित है यदि A सममित अथवा विषम सममित है।



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

3. x, y, तथा z के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ समीकरण

$A' A = I$ को संतुष्ट करता है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

4. x के किस मान के लिए

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O \text{ है।}$$



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

6. यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$

है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

7. एक निर्माता तीन प्रकार की वस्तुएँ x, y, तथा z का उत्पादन करता है जिन का वह दो बाजारों में विक्रय करता है। वस्तुओं की वार्षिक बिक्री नीचे सूचित (निदर्शित) है :

बाज़ार	उत्पादन		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(a) यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 2.50, ₹ 1.50 तथा ₹ 1.00 है तो प्रत्येक बाज़ार में कुल आय (Revenue), आव्यूह बीजगणित की सहायता से ज्ञात कीजिए।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(b) यदि उपर्युक्त तीन वस्तुओं की प्रत्येक इकाई की लागत (Cost) क्रमश: ₹ 2.00, ₹ 1.00 तथा 50 पैसे है तो कुल लाभ (Gross profit) ज्ञात कीजिए।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

8. आव्यूह X ज्ञात कीजिए, यदि

$$X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$ है।



Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए :

9. यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$ तो

(अ) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(ब) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(स) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

(द) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

10. यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही है तो :

(अ) A एक विकर्ण आव्यूह है।

(ब) A एक शून्य आव्यूह है।

(स) A एक वर्ग आव्यूह है।

(द) इनमें से कोई नहीं।

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

11. यदि A एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$ तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर है:

(अ) A

(ब) $I - A$

(स) I

(द) 3A

Under CSR Support by
ipca | Foundation

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

