RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

12th MATHS

ARJUN BATCH

आव्यूह

अध्याय-03 | भाग-03

27 अगस्त 2026 || 04:00 PM



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



8 ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह (Upper triangular matrix)

यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ में $i > j$ के लिए $a_{ij} = 0$ (मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हो) हो तो आव्यूह, ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण

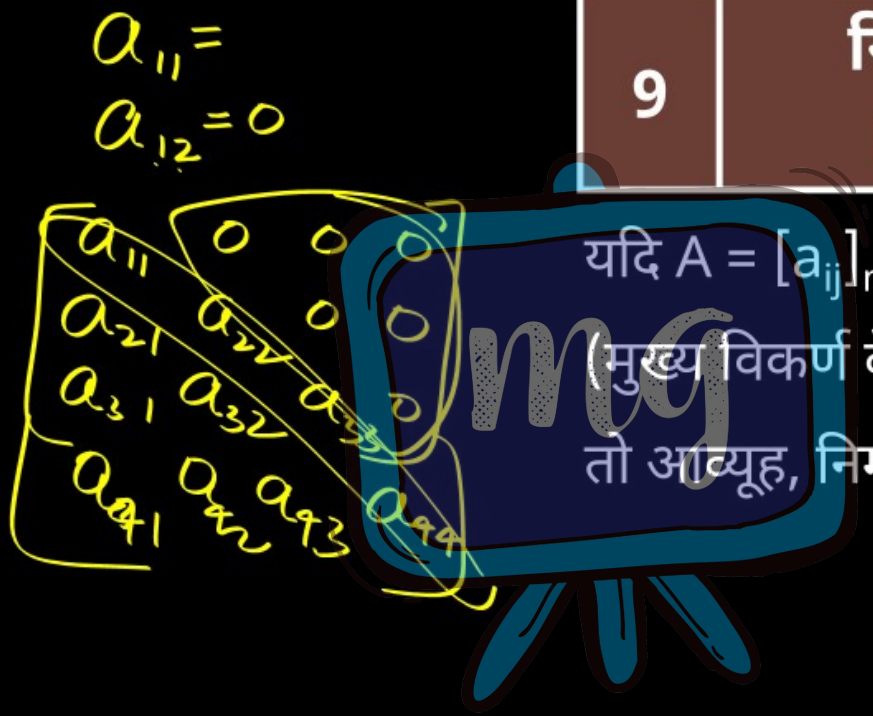
$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

4×4

3×3

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



9	निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह (Lower triangular matrix)

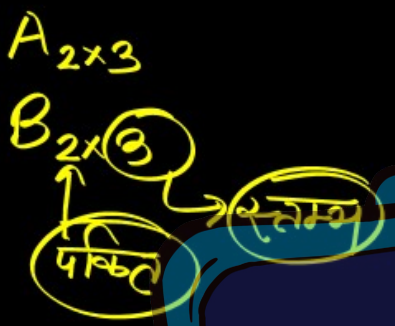
यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ में $i < j$ के लिए $a_{ij} = 0$ (मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हो) हो तो आव्यूह, निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



आव्यूह की समानता
(Equility of matrices)

दो आव्यूह $A = [a_{ij}]$ तथ $B = [b_{ij}]$ समान आव्यूह कहलाते है यदि

(i) A की कोटि = B की कोटि

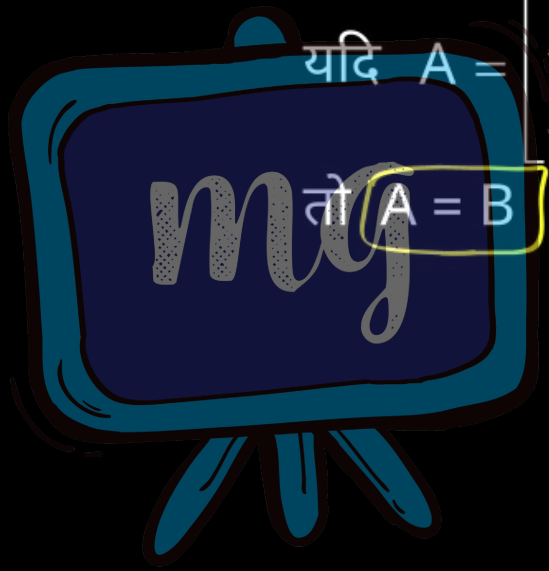
(ii) $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall$ i तथा j अर्थात दोनों के संगत अवयव समान हों।

उदाहरण

यदि $A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

2×2 2×2

तो $A = B$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण

यदि $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{bmatrix}_{2\times3}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{2\times3}$

यदि A = B हो तब x, y, z, a, b तथा c के मान होंगे?

$x = 2$
$y = 3$
$z = 4$
$a = 7$
$b = 9$
$c = 8$

अगर A=B तब सभी दिये गए संगत अवयव एकसमान होंगे

$2x+3y+4a$
$= 2(2)+3(3)+4(7)$
$= 4+9+28 = 41$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$a_{32} = 26$

उदाहरण - 1

तीन फैक्ट्रियों I, II तथा III में पुरुष तथा महिला कर्मियों से संबंधित निम्नलिखित सूचना पर विचार कीजिए :

	पुरूष कर्मी	महिला कर्मी
I	30	25
II	25	31
III	27	26

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उपर्युक्त सूचना को एक 3 x 2 आव्यूह में निरूपित कीजिए। तीसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ वाली प्रविष्टि क्या प्रकट करती है?



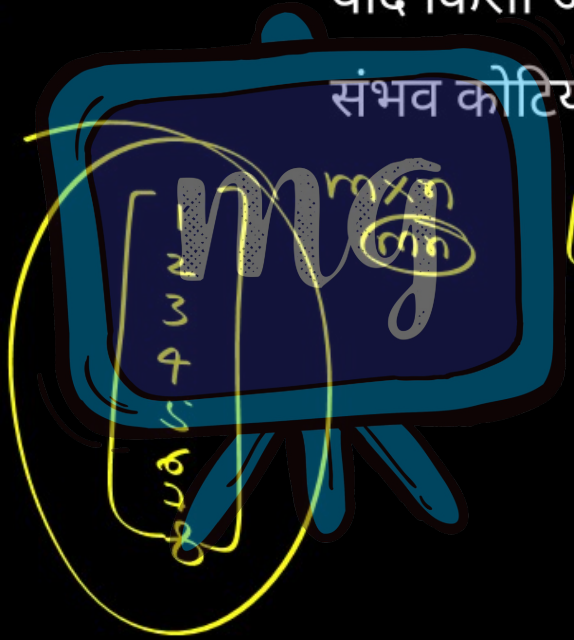
RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

1×8
2×4
4×2
8×1

उदाहरण - 2

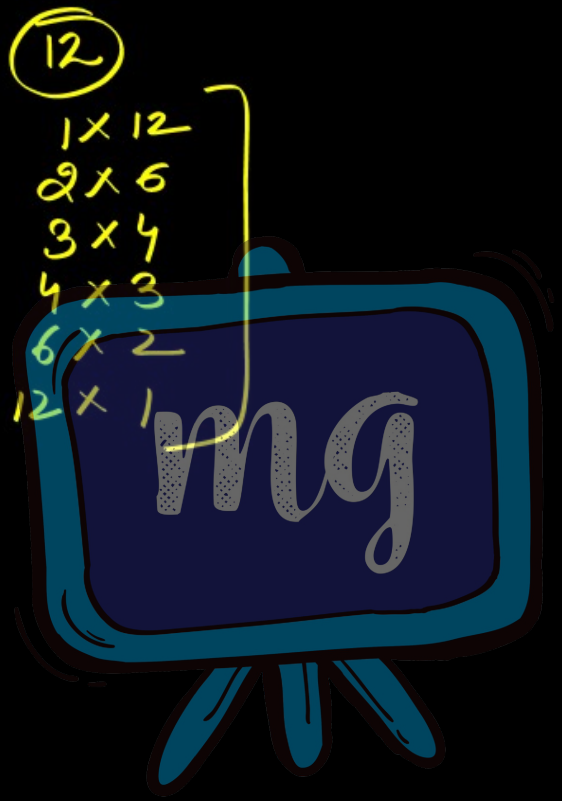
यदि किसी आव्यूह में 8 अवयव हैं, तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हो सकती हैं?



$[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8]$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

माना वह आव्यूह निम्न है

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

अतः $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

उदाहरण - 3

एक ऐसे 3 × 2 आव्यूह की रचना कीजिए, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$ द्वारा प्रदत्त हैं।

तब $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$

$a_{11} = \frac{1}{2}|1-3(1)| = \frac{1}{2}|1-3| = \frac{2}{2} = 1$

$a_{12} = \frac{1}{2}|1-3(2)| = \frac{5}{2}$

$a_{21} = \frac{1}{2}|2-3(1)| = \frac{1}{2}$

$a_{22} = \frac{1}{2}|2-3(2)| = \frac{4}{2} = 2$

$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3(1)| = 0$

$a_{32} = \frac{1}{2}|3-3(2)| = \frac{3}{2}$

क्योंकि दोनों आव्यूह समान हैं अतः इनके संगत अवयव एक समान होंगे

उदाहरण- 4

$$2y-7=3y-2$$

$$2y-3y=-2+7 \Rightarrow -y=5$$

यदि $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$

हो तो a, b, c, x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

$x+3=0$

$x=-3$

$z+4=6$

$z=6-4=2$

$y=-5$

$a=-2$

$b=-7$

$C=-1$

$a-1=-3$.

$a=-3+1$

$=-2$.

$b-3=2b+4$.

$2b-b=-3-4$.

$b=-7$.

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

mg missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$2a+b=4$ — ①
$a-2b=-3$ — ②
$5c-d=11$ — ③
$4c+3d=24$ — ④

$15c-3d=33$
$4c+3d=24$
$19c=57 \Rightarrow c=3$

$15-d=11$

$\Rightarrow 15-11=d$

$\Rightarrow d=4$

उदाहरण - 5

यदि $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ हो तो a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

$2a+b=4$

समी० ② की सहायता से

$a-2b=-3$

$a=2b-3=2(2)-3=4-3=1$.

इस मान को समी० ① में रखने पर

$2(2b-3)+b=4$

$\Rightarrow 4b-6+b=4$

$\Rightarrow 5b=4+6 \Rightarrow 5b=10 \Rightarrow b=2$

$a_{13} = 19$

$a_{21} = 35$

$a_{33} = -5$

$a_{24} = 12$

$a_{23} = \frac{5}{2}$

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ के लिए ज्ञात कीजिए :

(i) आव्यूह की कोटि $= 3 \times 4$

(ii) अवयवों की संख्या $= 12$

(iii) अवयव $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$

(i) आव्यूह की कोटि



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$$

(ii) अवयवों की संख्या



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$$

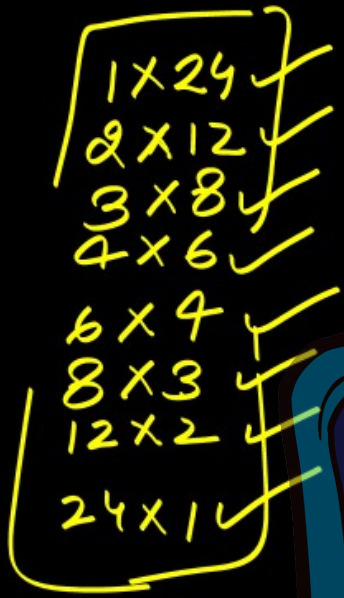
(iii) अवयव $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$



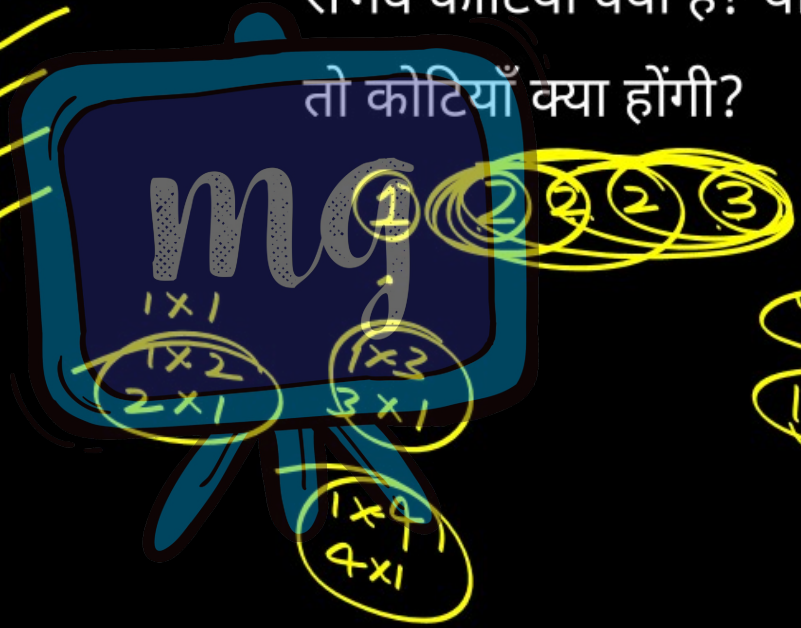
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER



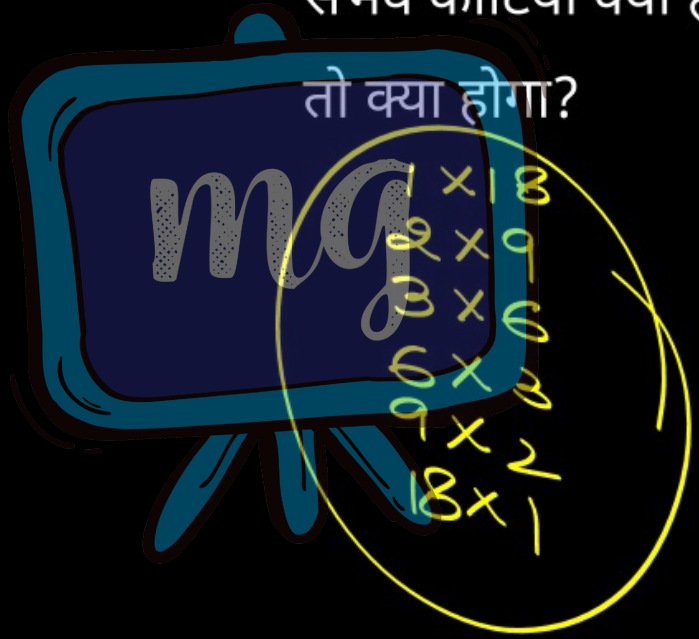
2. यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ क्या होंगी?



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

3. यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों तो क्या होगा?





RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

HW

4. एक 2 × 2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्रदत्त हैं–

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$

$a_{11} = \frac{(1+1)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

(ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$

