कक्षा - 12

Chapter - 9

अवकल समीकरण

विविध प्रश्नावली

Part - 11

Lakhan Saini

उदाहरण 22.

अवकल समीकरण

$(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल :- दिया गया समीकरण –

$$(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1+y^2)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1} y - x}{1+y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \quad \text{——— (1)}$$

यह $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ के रूप का रैखिक अवकल समी० है जहाँ –

$$P_1 = \frac{1}{1+y^2} \; ; \; Q_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$

अतः $I.F. = e^{\int P dy}$

$= e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$

तथा अपेक्षित हल –

$x(I.F.) = \int Q_1 (I.F) dy + C$

$\Rightarrow x e^{\tan^{-1} y} = \int \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} e^{\tan^{-1} y} dy + C$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

माना $\tan^{-1}y = t$

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{dt}{dy} \Rightarrow \frac{1}{1+y^2}dy = dt$$

3-रा. $\int \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} e^{\tan^{-1}y} dy = \int t e^t dt$

$= t\int e^t dt - \int \left\{\frac{d}{dt}t \int e^t dt\right\} dt$

$= te^t - e^t$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$= \tan^{-1}y\, e^{\tan^{-1}y} - e^{\tan^{-1}y}$$

अतः व्यापक हल –

$$x e^{\tan^{-1}y} = \tan^{-1}y\, e^{\tan^{-1}y} - e^{\tan^{-1}y} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \tan^{-1}y - 1 + c e^{-\tan^{-1}y}}$$

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$

उत्तर :- कोटि = 2 ; घात = 1

(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$

mg

कोटि = 1 ; घात = 3

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} - \sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$

mg

कोटि = 4

घात = परिभाषित नहीं

2. निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक के लिए सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (अस्पष्ट अथवा स्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है।

(i) $xy = a\,e^{x} + b\,e^{-x} + x^{2}$:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

हल :- दिया गया फलन –

$$xy = ae^{x} + be^{-x} + x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x}\left[ae^{x} + be^{-x} + x^2\right] \quad \text{—①}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर –

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left[ae^{x} - be^{-x} + 2x\right] + \left[ae^{x} + be^{-x} + x^2\right]\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left[\left[ae^{x} - be^{-x} + 2x\right] - \frac{1}{x}\left[ae^{x} + be^{-x} + x^2\right]\right]$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर –

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\left[ae^x + be^{-x} + 2 - \frac{1}{x}\left[ae^x - be^{-x} + 2x\right]\right.$$

$$\left. - \left[ae^x + be^{-x} + x^2\right]\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]$$

$$- \frac{1}{x^2}\left[\left(ae^x - be^{-x} + 2x\right) - \frac{1}{x}\left(ae^x + be^{-x} + x^2\right)\right]$$

y, $\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान दी गई अवकल समी० में रखने पर –

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

अतः दिया गया कलन

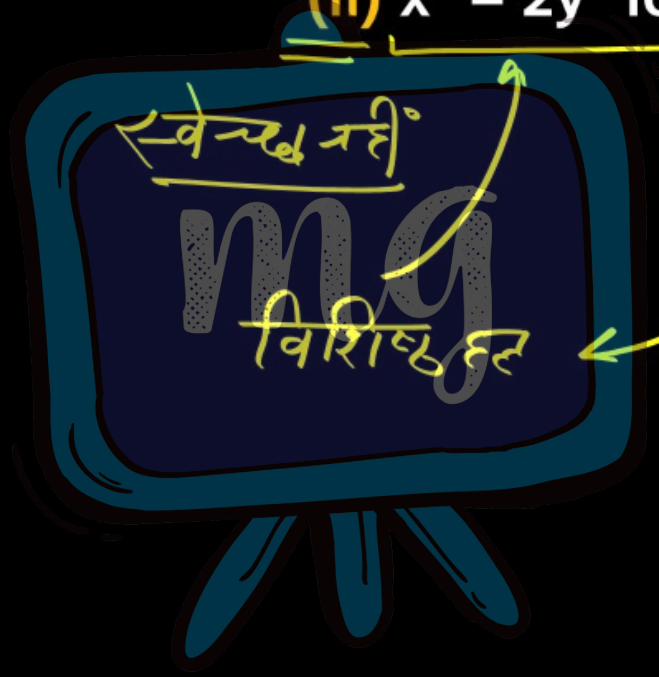
$$xy = ae^{x} + be^{-x} + x^2$$

अवकलन समी०

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$$

का हल है।

(ii) $x^2 = 2y^2 \log y$:



$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

हल :- दिया गया फलन –

$$x^2 = 2y^2 \log y \quad \longleftarrow (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर –

$$2x = 2\left[y^2 \cdot \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y \cdot (2y)\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow x = [y + \log y\,(2y)]\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad xy = \left[y^2 + 2y^2 \log y \right] \frac{dy}{dx}$$

समी. ① से

$$\Rightarrow xy = \left[y^2 + x^2 \right] \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + y^2 \right) \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

जो कि दी गई अवकल समी० है।

अतः फलन $x^2 = 2y^2 \log y$ दी गई अवकल

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

सभी का हल दो



3. सिद्ध कीजिए कि $x^2 - y^2 = c\,(x^2 + y^2)^2$ जहाँ c एक प्राचल है, अवकल समीकरण $(x^3 - 3xy^2)\,dx = (y^3 - 3x^2y)\,dy$ का व्यापक हल है।

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

हल :- दी गई अवकल समी० –

$$(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3 - 3x^2y} \quad \text{——— (1)}$$

जो कि समघात का अवकल समी० है अत: $y = vx$

प्रतिस्थापित करने पर –

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1 - 3v^2}{v^3 - 3v}$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2}{v^3-3v} - \frac{v}{1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2-v^4+3v^2}{v^3-3v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^4}{v^3-3v}$$

$$\Rightarrow \frac{v^3-3v}{1-v^4}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर -

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$\int \frac{v^3-3v}{1-v^4}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4}\int \frac{-4v^3}{1-v^4}\,dv - \frac{3}{2}\int \frac{2v}{1-(v^2)^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\log|1-v^4| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2(1)}\log\left|\frac{1+v^2}{1-v^2}\right| = \log|x|+C'$$

$$\left\{\because \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\right\}$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$\because v = \frac{y}{x}$

$\therefore -\frac{1}{4}\log\left|1-\frac{y^4}{x^4}\right| - \frac{3}{4}\log\left|\frac{1+y^2/x^2}{1-y^2/x^2}\right| = \log|x| + C'$

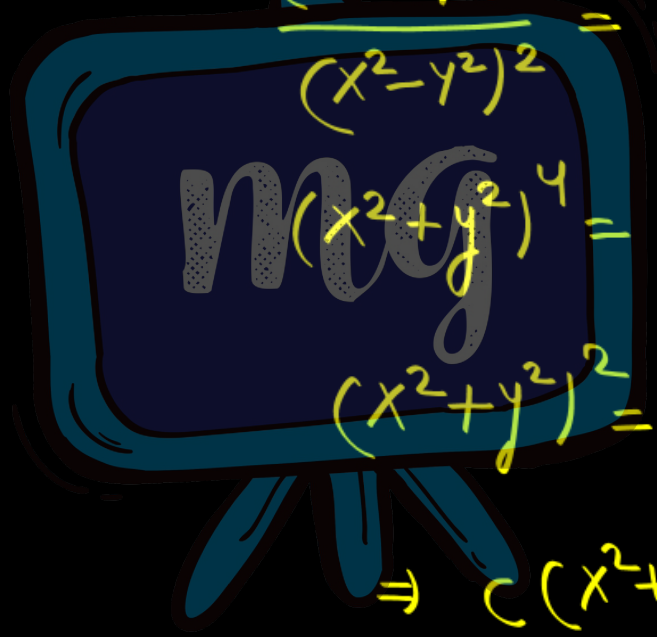
$\Rightarrow -\frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x^4-y^4}{x^4}\right| + 3\log\left|\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right|\right] = \log|x| + C'$

$\Rightarrow \log\left|\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^4} \times \frac{(x^2+y^2)^3}{(x^2-y^2)^3}\right| = -4\log|x| + C'$

$\Rightarrow \log\left|\frac{(x^2+y^2)^4}{x^4(x^2-y^2)^2} \cdot x^4\right| = C'$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$\frac{(x^2+y^2)^4}{(x^2-y^2)^2} = e^{c'}$$

$$(x^2+y^2)^4 = e^{c'}(x^2-y^2)^2$$

$$(x^2+y^2)^2 = \sqrt{e^{c'}}\,(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \underline{c(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2} \quad \left[c = \frac{1}{\sqrt{e^{c'}}}\right]$$

H.P.