KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

कक्षा – 12

गणित

संबंध एवं फलन

अध्याय – 1

भाग - 11

विविध प्रश्नावली

By : Rajendra Yadav Sir

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

विविध प्रश्नावली

Q1. सिद्ध कीजिए कि $f : R \to \{x \in R : -1 < x < 1\}$

जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $X \in R$ द्वारा परिभाषित फलन

एकैकी तथा आच्छादक है।

$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

x और y के फलन के लिए :

$f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

स्थिति - 1 : यदि x धनात्मक तथा y ऋणात्मक हो :

$$\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Rightarrow x - xy = y + xy$$

$$\Rightarrow x - y = 2xy \quad \text{यहाँ } x > y$$

यह असंभव है। $2xy < 0$ ($\because y$ ऋणात्मक है)

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

स्थिति - II : यदि x ऋणात्मक व y धनात्मक हो :

$\Rightarrow$ असंभव स्थिति होगी।

स्थिति - III : दोनो धनात्मक हो :

$$\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$$

$$\Rightarrow x + \cancel{xy} = y + \cancel{xy}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y}$$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

स्थिति - IV : यदि दोनों ऋणात्मक हों :

$$\frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Rightarrow x - \cancel{xy} = y - \cancel{xy}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y}$$

अतः यह फलन एकैकी है।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

आच्छादक के लिए :

$y \in R$, $-1 < y < 1$

$\Rightarrow x = \frac{y}{1+|y|}$; $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right) = \frac{\frac{y}{1+y}}{1+\frac{(-y)}{1+y}} = \frac{\frac{y}{1+y}}{\frac{1+y-y}{1+y}} = y$$

(आच्छादक पुलन)

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

विविध प्रश्नावली

Q2. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$ एकैक (Injective) है।

$f : R \to R$

$f(x) = x^3$

एकैकी फलन के लिए:

$f(x) = f(y)$

$\Rightarrow x^3 = y^3$ ——— (1)

$\Rightarrow x = y$

यदि $x \neq y$

$\Rightarrow x^3 \neq y^3$

जो समी. (1) का विरोधाभास है।

अतः $x = y$ होगा।

$\Rightarrow$ फलन एकैकी है।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

विविध प्रश्नावली

Q4. समुच्चय {1, 2, 3, ... , n} से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या $= n! = \lfloor n$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

विविध प्रश्नावली

Q5. मान लीजिए कि A = {– 1, 0, 1, 2}, B = {– 4, – 2, 0, 2} और f, g : A → B, क्रमशः $f(x) = x^2 - x$, $x \in A$ तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$, $x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या f तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए। (संकेत : नोट कीजिए कि दो फलन f : A → B तथा g : A → B समान कहलाते हैं यदि $f(a) = g(a)$ $\forall$ $a \in A$ हो।)

KOLORS make life better

missiongyan LET'S LEARN TOGETHER

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$. $B = \{-4, -2, 0, 2\}$

$f : A \to B$ $\quad$ $g : A \to B$

$f(x) = x^2 - x$ $\quad$ $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$ $\quad$ $(x \in A)$

$(x \in A)$

यदि $x = -1$ हो :

$f(-1) = (-1)^2 - (-1)$

$= 1 + 1 = 2$

$g(-1) = 2\left|-1 - \frac{1}{2}\right| - 1$

$= 2\left|\frac{-3}{2}\right| - 1$

$= 2 \times \frac{3}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$

$\boxed{f(-1) = g(-1)}$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

यदि $x = 0$ हो :

$f(0) = (0)^2 - 0 = 0$

$g(0) = 2|0 - \frac{1}{2}| - 1$

$= 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

$\boxed{f(0) = g(0)}$

यदि $x = 1$ हो :

$f(1) = (1)^2 - 1 = 0$

$g(1) = 2|1 - \frac{1}{2}| - 1$

$= 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

$\boxed{f(1) = g(1)}$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

यदि $x = 2$ हो :

$f(2) = (2)^2 - 2$

$= 4 - 2 = 2$

$g(2) = 2\left|2 - \frac{1}{2}\right| - 1$

$= 2\left|\frac{3}{2}\right| - 1$

$= 2 \times \frac{3}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$

$\boxed{f(2) = g(2)}$

अतः फलन f व g दोनों समान हैं।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

विविध प्रश्नावली

Q6. यदि A={1,2,3} हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रामक नहीं है, की संख्या है

(A). 1

(B). 2

(C). 3

(D). 4

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$A = \{1, 2, 3\}$

$A \times A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

अतः दिया हुआ संबंध है :

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1)\}$

यहाँ $(2,1) \in R$ व $(1,3) \in R$

परन्तु $(2,3) \notin R$ (सं.क्रामक नहीं है।)

अतः संबंधों की संख्या 1 होगी।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

विविध प्रश्नावली

Q7. यदि A = {1, 2, 3} हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है।

(A). 1

(B). 2

(C). 3

(D). 4

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$= \{1, 2, 3\}$

$A \times A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

अत: संबंध होगा :

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$ तुल्यता संबंध है।

यदि $(1,3)$ को शामिल कर लिया जाए :

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$

(सार्वत्रिक संबंध)