ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

कक्षा – 12

गणित

अवकलज के अनुप्रयोग

अध्याय – 6

भाग - 1

प्रश्नावली 6.1

By : Rajendra Yadav Sir

ipca
A dose of life

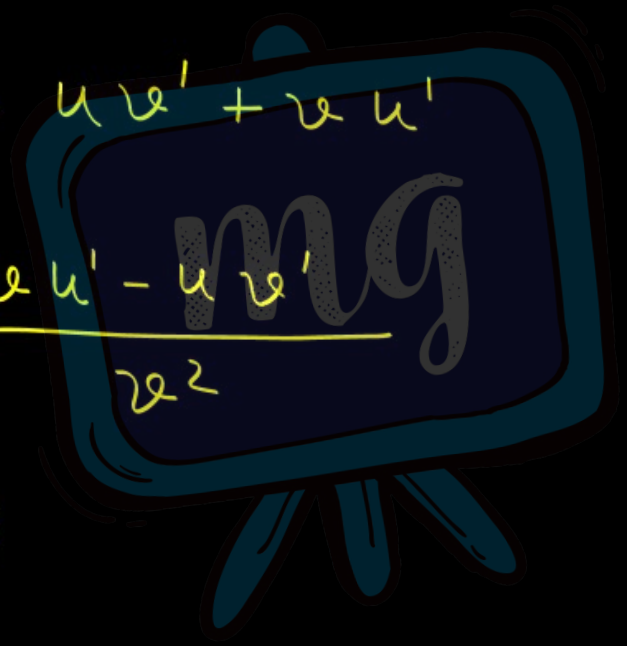
missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

1) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2) $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = uv' + vu'$

3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

4) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$



ipca
A dose of life

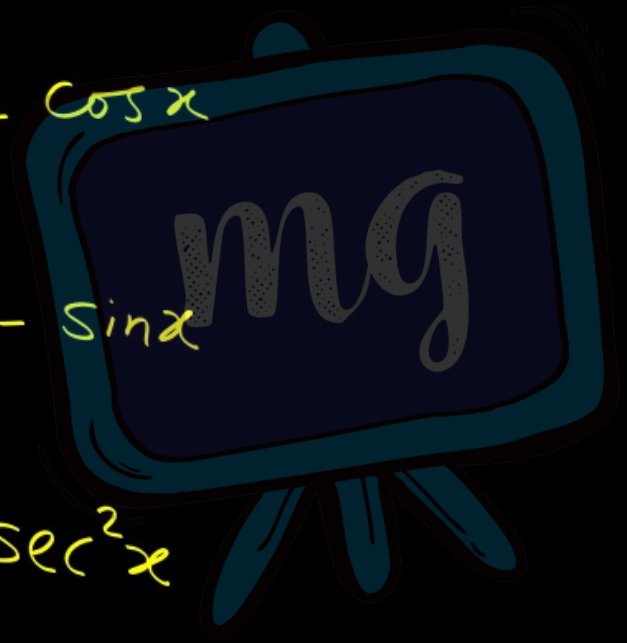
missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

5) $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$

6) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

7) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

8) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$



ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

9) $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

10) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \tan x$

11) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

12) $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 1

➤ वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब r = 5 cm है।

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

यदि $r = 5$ cm हो,

$\left.\frac{dA}{dr}\right|_{r=5} = 2\pi(5) = 10\pi$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 2

➤ एक घन का आयतन 9 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लंबायीं 10 cm है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है।

$V = x^3$

$\frac{dv}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$

$3 \cancel{9} = \cancel{3}(10)^2 \frac{dx}{dt}$ $(\because x = 10\,cm)$

$\Rightarrow 3 = 100 \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{3}{100}}$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

अतः, $A = 6x^2$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$

यहाँ $x = 10$ cm तथा $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{100}$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \cancel{12}^{6} \times \cancel{10}^{1} \times \frac{3}{\cancel{100}_{5}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{18}{5}}$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 3

$\frac{dr}{dt} = 4\ cm/s.$ ➤ एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 4 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10cm है, तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है?

अब, $A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10) \times 4 \quad (\because r = 10\ cm)$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 80\pi}\ cm^2/s.$$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 4

किसी आयत की लंबायीं x, 3cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 2 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब x = 10 cm और y = 6 cm है तब आयत के

(a) परिमाप और

(b) क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(a) परिमाप :

$P = 2(x+y)$

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$

$= 2(-3+2)$

$= 2(-1)$

$\frac{dP}{dt} = -2$ cm/min

लम्बाई $= x$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -3$ cm/min.

चौड़ाई $= y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2$ cm/min.

(b) $\frac{dx}{dt} = -3$ cm/min, $\frac{dy}{dt} = 2$ cm/min

जब, $x = 10$ cm व $y = 6$ cm है:

अब, $A = x \cdot y$

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$= 10 \times 2 + 6(-3)$$

$$= 20 - 18 = 2 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 5

- किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत C(x) रुपये में

$C(x) = 0.005\ x^3 - 0.02\ x^2 + 30x + 5000$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जब 3 इकाई उत्पादित की जाती है। जहाँ सीमांत लागत (marginal cost या MC) से हमारा अभिप्राय किसी स्तर पर उत्पादन के संपूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर से है।

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

यहाँ $C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 30x + 5000$

$$MC = \frac{dC}{dx} = 0.005 \times 3x^2 - 0.02 \times 2x + 30$$

यदि $x = 3$ इकाई

$$MC = \frac{dC}{dx} = 0.015(3)^2 - 0.04(3) + 30$$

$$= 0.135 - 0.120 + 30$$

$$= 0.015 + 30$$

$$= 30.015$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 6

किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपये में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 5$ हो तो सीमांत आय ज्ञात कीजिए। जहाँ सीमांत आय (marginal revenue or MR) से हमारा अभिप्राय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष संपूर्ण आय के परिवर्तन की दर से है।

$$R(x) = 3x^2 + 36x + 5$$

$$MR = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$$

यहाँ $x = 5$

$$MR = \frac{dR}{dx} = 6 \times 5 + 36$$

$$= 30 + 36 = 66$$

ipca
A dose of life

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्नावली 6.1

Q1. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि

(a) r = 3 cm है।

(b) r = 4 cm है।

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

a) $r = 3$

$\frac{dA}{dr} = 2\pi(3)$

$= 6\pi$

b) $r = 4$

$\frac{dA}{dr} = 2\pi(4)$

$= 8\pi$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

प्रश्नावली 6.1

Q2. एक घन का आयतन 8 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जबकि इसके किनारे की लंबायीं 12 cm है।

$\frac{dV}{dt} = 8\ cm^3/s.$

$x = 12\ cm$

अतः, $V = x^3$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow 8 = 3(12)^2 \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{8}{3 \times 144}\ cm/s.$

ipca
A dose of life

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

3rd, $A = 6x^2$

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 12 \times 12 \times \frac{8}{3 \times 144} \quad (\because x = 12 \text{ cm})$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{8}{3} \text{ cm}^2/\text{s}}$$