KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

कक्षा – 12

गणित

संबंध एवं फलन

अध्याय – 1

भाग - 10

फलनों का संयोजन

By : Rajendra Yadav Sir

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

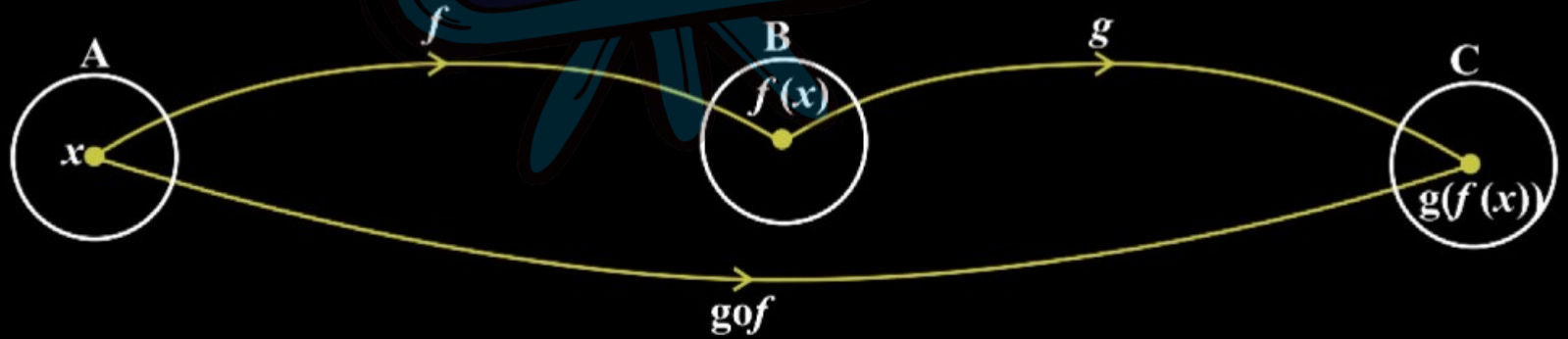
$gof = g(f(x))$

$f + g = gof$

$A \to B \quad B \to C \quad A \to C$

परिभाषा - 8

मान लीजिए कि f : A → B तथा g : B → C दो फलन हैं। तब f और g का संयोजन, gof द्वारा निरूपित होता है, तथा फलन gof : A → C, gof (x) = g (f(x)), ∀ x ∈ A द्वारा परिभाषित होता है।



KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 15

मान लीजिए कि f : {2, 3, 4, 5} → {3, 4, 5, 9} और, g : {3, 4, 5, 9} → {7, 11, 15} दो फलन इस प्रकार हैं कि f (2) = 3, f (3) = 4, f (4) = f (5) = 5 और g (3) = g (4) = 7 तथा g (5) = g (9) = 11, तो gof ज्ञात कीजिए।

$gof \rightarrow ??$

अब, $gof(2)$

$= g(f(2))$

$= g(3)$

$= 7$

इसीप्रकार, $gof(3)$

$= g(f(3)) = g(4)$

$= 7$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

पुन: $g \circ f(4) = g(f(4))$

$= g(5)$

$= 11$

पुन: इसीप्रकार, $g \circ f(5) = g(f(5))$

$= g(5)$

$= 11$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 16

यदि $f : R \to R$ तथा $g : R \to R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है तो gof और fog ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए gof ≠ fog.

$f : R \to R$

$f(x) = \cos x$

और $g : R \to R$

$g(x) = 3x^2$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

अब, $gof = gof(x) = g(f(x))$

$= g(\cos x)$

$gof = 3\cos^2 x$

इसीप्रकार, $fog = fog(x) = f(g(x))$

$= f(3x^2)$

$fog = \cos(3x^2)$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

अब, $x = 0$ पर :

$$fog = \cos(3x^2) = \cos(0) = 1$$

इसीप्रकार, $$gof = 3\cos^2 x = 3 \times \cos^2 0 = 3 \times 1 = 3$$

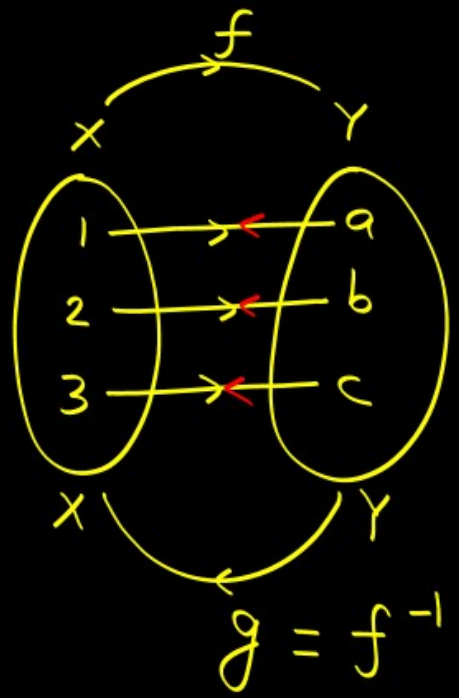
$$\Rightarrow fog \neq gof$$

इति सिद्धम्।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)



परिभाषा - 9

फलन $f : X \to Y$ **व्युत्क्रमणीय (Invertible)** कहलाता है, यदि एक फलन $g : Y \to X$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $gof = I_x$ तथा $fog = I_Y$ है। फलन g को फलन f का प्रतिलोम (Inverse) कहते हैं और इसे प्रतीक f^{-1} द्वारा प्रकट करते हैं।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

अतः, यदि f व्युत्क्रमणीय है, तो f अनिवार्यतः एकैकी तथा आच्छादक होता है और विलोमतः, यदि f एकैकी तथा आच्छादक है, तो f अनिवार्यतः व्युत्क्रमणीय होता है। यह तथ्य, f को एकैकी तथा आच्छादक सिद्ध करके, व्युत्क्रमणीय प्रमाणित करने में महत्वपूर्ण रूप से सहायक होता है, विशेष रूप से जब f का प्रतिलोम वास्तव में ज्ञात नहीं करना हो।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 17

मान लीजिए कि f : N → Y, f(x) = 4x + 3, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ Y = {y ∈ N : y = 4x + 3 किसी x ∈ N के लिए}। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

$f : N \longrightarrow Y$

$f(x) = 4x + 3$

$\Rightarrow y \in Y$

$y = 4x + 3$

$\Rightarrow 4x = y - 3$

$\Rightarrow x = \frac{y-3}{4}$

$\Rightarrow g(y) = \frac{y-3}{4}$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

अब, $f \circ g = f(g(y))$

$= f\left(\frac{y-3}{4}\right)$

$= 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3$

$= y - 3 + 3$

$f \circ g = y \in I_Y$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(4x+3)$

$= \frac{4x+3-3}{4}$

$= \frac{4x}{4}$

$g \circ f = x \in I_N$

यहाँ फलन g, फलन f का प्रतिलोम फलन है।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 18

यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी एक तुल्यता संबंध है।

माना $a \in A$

$(a,a) \in R_1$ तथा

$(a,a) \in R_2$

$\Rightarrow (a,a) \in R_1 \cap R_2$

स्वतुल्य है।

पुनः $(a,b) \in R_1$ तथा $(a,b) \in R_2$

$\Rightarrow (b,a) \in R_1$ $\Rightarrow (b,a) \in R_2$

$\Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2$ सममित

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

$(a, b) \in R_1, \quad (b, c) \in R_2$

$\Rightarrow (a, c) \in (R_1 \cap R_2)$ संक्रामक

अतः $(R_1 \cap R_2)$ एक तुल्यता संबंध है।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 20

मान लीजिए कि X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} है।

मान लीजिए कि X में R_1 = {(x, y) : x – y संख्या 3 से भाज्य है} द्वारा प्रदत्त एक संबंध R_1 है तथा R_2 = {(x, y): {x, y} ⊂ {1,4,7} या {x, y} ⊂ {2, 5, 8} या {(x, y } ⊂ {3, 6, 9} द्वारा प्रदत्त X में एक अन्य संबंध R_2 है। सिद्ध कीजिए कि $R_1 = R_2$ है।

{1, 4, 7} , {2, 5, 8} .

{3, 6, 9}

यदि $(x, y) \in R_1$

$\Rightarrow (x, y) \subset \{1, 4, 7\}$

$(x, y) \subset \{2, 5, 8\}$

$(x, y) \subset \{3, 6, 9\}$

$\Rightarrow R_1 \subset R_2$ — (1)

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

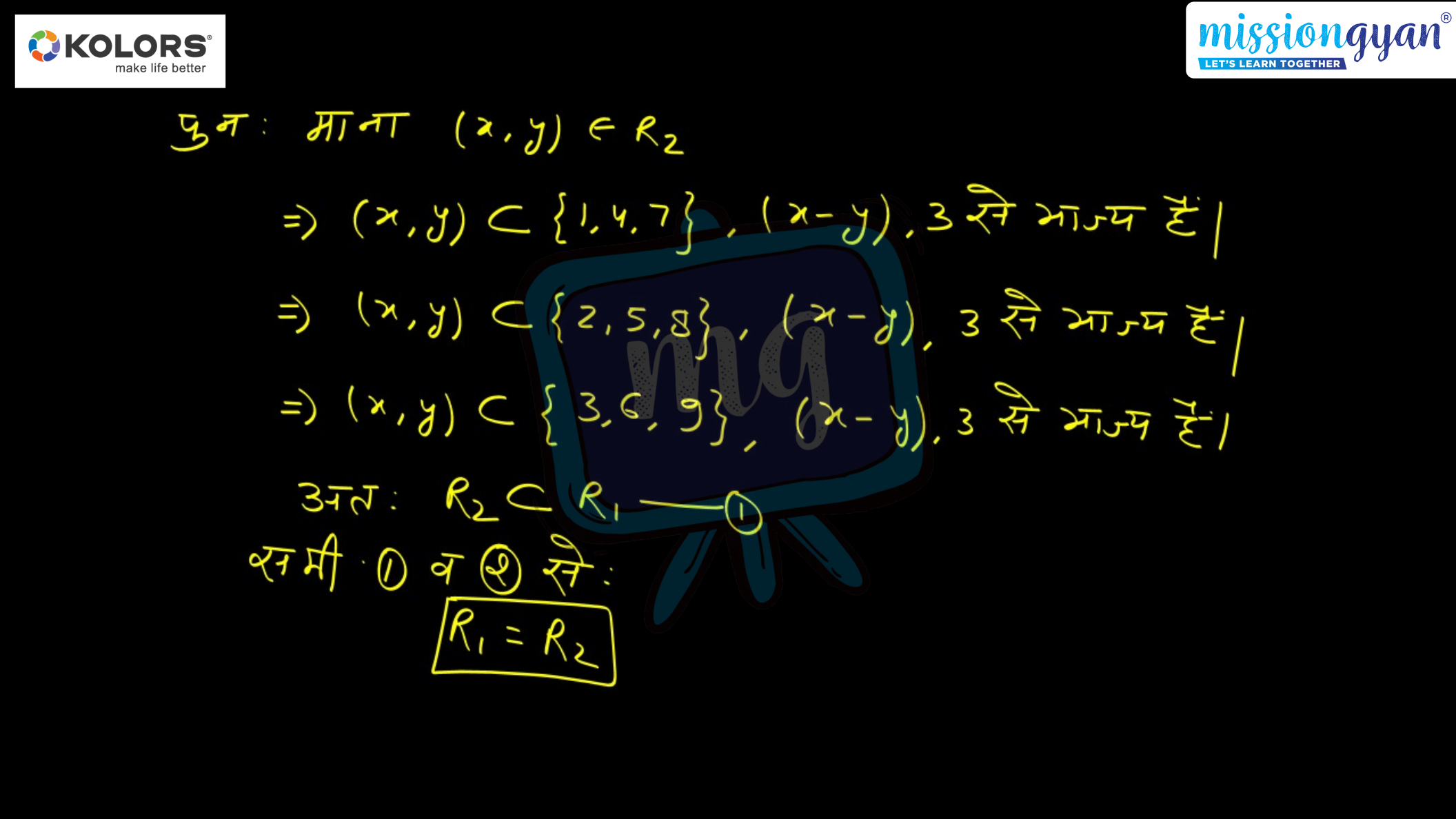
पुन: माना $(x, y) \in R_2$

$\Rightarrow (x, y) \subset \{1, 4, 7\}$, $(x-y)$, 3 से भाज्य हैं।

$\Rightarrow (x, y) \subset \{2, 5, 8\}$, $(x-y)$, 3 से भाज्य हैं।

$\Rightarrow (x, y) \subset \{3, 6, 9\}$, $(x-y)$, 3 से भाज्य हैं।

अत: $R_2 \subset R_1$ ——①



सभी ① व ② से:

$$R_1 = R_2$$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 22

समुच्चय A = {1, 2, 3} से स्वयं तक सभी एकैकी फलन की संख्या ज्ञात कीजिए।

$A = \{1, 2, 3\}$

एकैकी फलनों की संख्या = 3 !

$= 3 \times 2 = 6$

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 25

तत्समक फलन $I_N : N \to N$ पर विचार कीजिए, जो $I_N(x) = x, \forall\ x \in N$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि, यद्यपि I_N आच्छादक है किंतु निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित फलन $I_N + I_N : N \to N$ आच्छादक नहीं है

$$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$$

$(I_N + I_N)(x)$

$= x + x = 2x$

माना, $y = 3$

$\Rightarrow 2x = 3$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin N$

अतः फलन आच्छादक नहीं है।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

फलन (Function)

उदाहरण - 26

f(x) = sin x द्वारा प्रदत्त फलन $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ तथा g (x) = cos x द्वारा प्रदत्त फलन $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f तथा g एकैकी है, परंतु f + g एकैकी नहीं है।

$f(x) = \sin x$

$g(x) = \cos x$

यहाँ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ के लिए f(x) व g(x) हमेशा एकैकी हैं क्योंकि प्रत्येक कोण पर इनके मान अलग-अलग होते हैं।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

अब, $f+g = f(x)+g(x) = \sin x + \cos x$

यदि $x = 0$ हो :

$f+g = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

यदि $x = \frac{\pi}{2}$ हो :

$f+g = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

परन्तु $0 \neq \frac{\pi}{2}$ अतः फलन एकैकी नहीं है।

KOLORS
make life better

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

विविध प्रश्नावली

Q1. सिद्ध कीजिए कि $f : R \to \{x \in R : -1 < x < 1\}$

जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $X \in R$ द्वारा परिभाषित फलन

एकैकी तथा आच्छादक है।

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

$x \to$ धनात्मक

$$y = \frac{1}{1+x}$$

$x \to$ ऋणात्मक

$$y = \frac{1}{1-x}$$