RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

12th MATHS

ARJUN BATCH

आव्यूह का गुणन

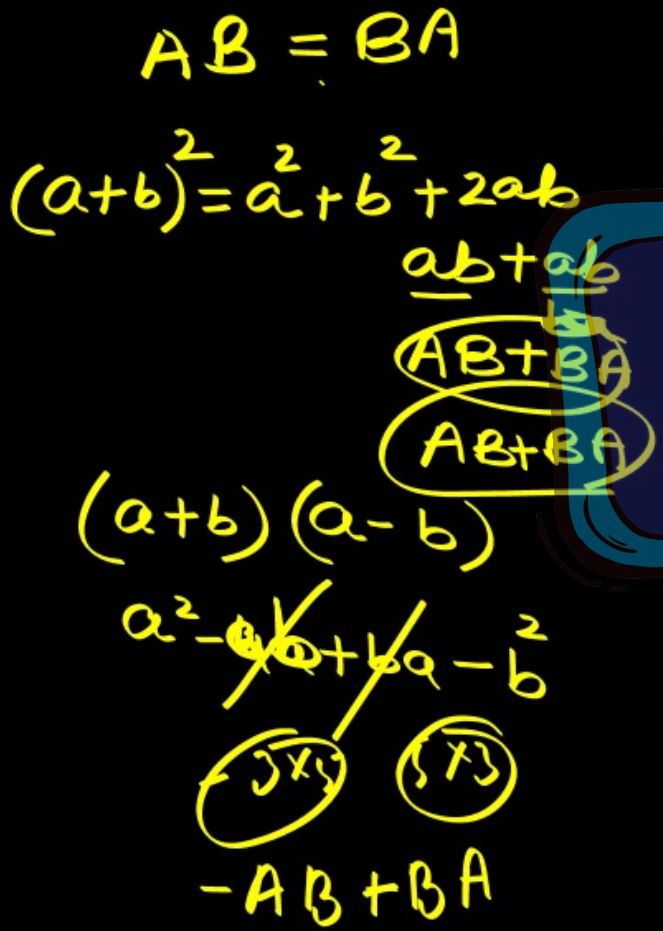
अध्याय-03 | भाग-07

04 सितंबर 2026 || 04:00 PM



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

mg missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



पुनः यदि A, B समान कोटि के कोई दो मैट्रिक्स हों तो निम्न परिणाम भी आसानी से सत्यापित किए जा सकते हैं:

(i) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$

(ii) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$

(iii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 - AB + BA$

(iv) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 + AB - BA$

(v) $(-A)B = -(AB) = A(-B)$

(vi) $A = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n) \Rightarrow$

$A^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n \ldots\ldots \lambda_n^n) \ \forall\ n \in N$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \text{diag}(2, 3, 1)$$

$$A^2 = \text{diag}(2^2, 3^2, 1^2)$$

$$= \text{diag}(4, 9, 1)$$




mg

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण - 16

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ तो A(BC) तथा (AB)C ज्ञात कीजिए और दिखलाइए कि

(AB)C = A(BC) है।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

सर्वप्रथम

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times2 & 1\times2+3\times0 & 1\times3-3\times2 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

3 2 - 1

9 - 2 + 8

अर्थात $A(BC) = (AB)C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण - 17

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

तो AC, BC तथा (A + B)C का परिकलन कीजिए।

यह भी सत्यापित कीजिए कि (A + B)C = AC + BC

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

अब $A^3 - 23A - 40I$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 23 & 46 & 69 \\ 69 & -46 & 23 \\ 92 & 46 & 23 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

उदाहरण - 18

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि

$A^3 - 23A - 40I = O$

mg

सिद्ध करें: $A^3 - 23A - 40I = O$

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$A^3 = A^2 \cdot A \quad :2$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

4+6+4

8-4+2

1+2+1

16 → 15

28 − 12 + 30 = 46

8 − 12 + 6 = 2

6 − 8 + 15 = 13

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण - 19

किसी विधान सभा चुनाव के दौरान एक राजनैतिक दल ने अपने उम्मीदवार के प्रचार हेतु एक जन संपर्क फर्म को ठेके पर अनुबंद्धित किया। प्रचार हेतु तीन विधियों द्वारा संपर्क स्थापित करना निश्चित हुआ। ये हैं: टेलीफोन द्वारा, घर-घर जाकर तथा पर्चा वितरण द्वारा। प्रत्येक संपर्क का शुल्क (पैसों में) नीचे आव्यूह A में व्यक्त है,

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

AB=

प्रति संपर्क मूल्य

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{टेलीफोन द्वारा} \\ \text{घर जाकर} \\ \text{पर्चा द्वारा} \end{matrix}$$

X तथा Y दो शहरों में, प्रत्येक प्रकार के सम्पर्कों की संख्या आव्यूह

$$B = \begin{matrix} \text{टेलीफोन} & \text{घर जाकर} & \text{पर्चा द्वारा} \\ \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow X \\ \rightarrow Y \end{matrix} \end{matrix}$$

में व्यक्त है। X तथा Y शहरों में राजनैतिक दल द्वारा व्यय की गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix}$$



1. मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) $A + B$

(ii) $A - B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(iii) $3A - C$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(iv) AB

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$



(v) BA

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

2. निम्नलिखित को परिकलित कीजिए :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$



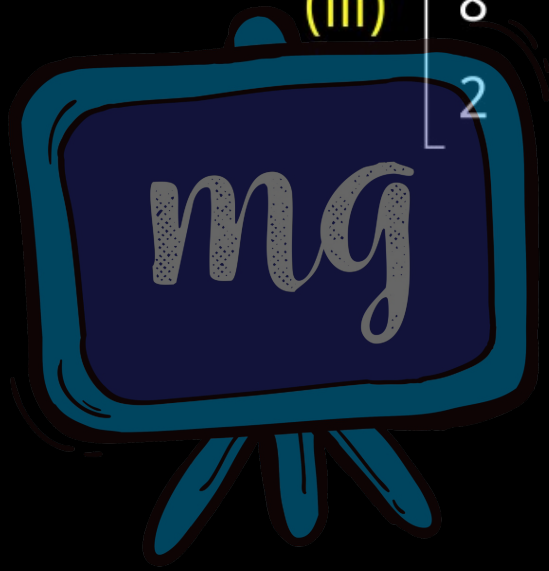
(ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$



(iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

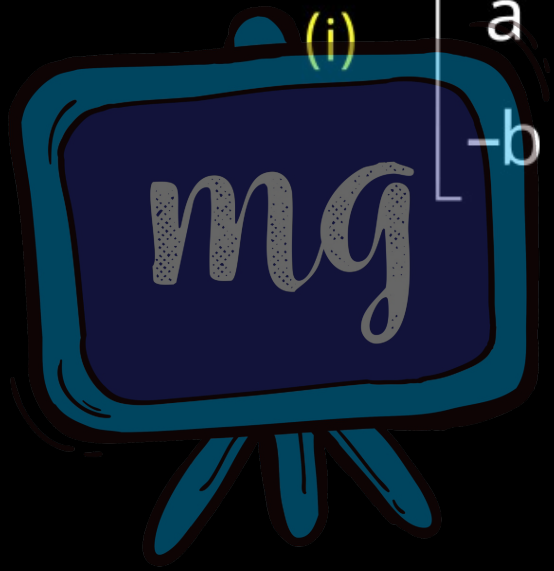


RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

3. निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$



(ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$



(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$



4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ तथा

$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ तो (A + B) तथा (B – C)

परिकलित कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए

कि $A + (B - C) = (A + B) - C$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

5. यदि $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

तो $3A - 5B$ परिकलित कीजिए।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$



6. सरल कीजिए,

$$\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$$

7. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि

(i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

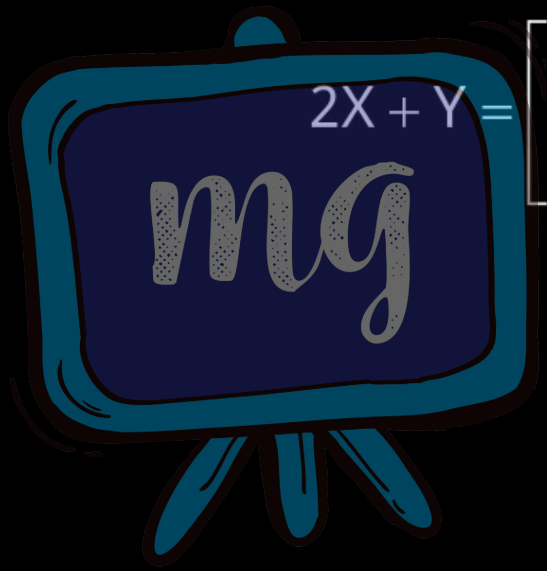
(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

8. X ज्ञात कीजिए यदि $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ है।



9. x तथा y ज्ञात कीजिए यदि

$$2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

10. प्रदत्त समीकरण को x, y, z तथा t के लिए हल कीजिए यदि

$$2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

11. यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ है तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

12. यदि $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$

है तो x, y, z तथा w के मानों को ज्ञात कीजिए।



13. यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)\,F(y) = F(x+y)$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

14. दर्शाइए कि

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$



(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$, का मान ज्ञात कीजिए।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तथा I कोटि 2 का एक तत्समक आव्यूह है। तो सिद्ध कीजिए कि $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

19. किसी व्यापार संघ के पास 30,000 रुपयों का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बोंड में निवेशित करना है। प्रथम बोंड पर 5% वार्षिक तथा द्वितीय बोंड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि 30,000 रुपयों के कोष को दो प्रकार के बोंडों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज

(a) ₹ 1800 हो। (b) ₹ 2000 हो।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

20. किसी स्कूल की पुस्तकों की दुकान में 10 दर्जन रसायन विज्ञान, 8 दर्जन भौतिक विज्ञान तथा 10 दर्जन अर्थशास्त्र की पुस्तकें हैं। इन पुस्तकों का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 80, ₹ 60 तथा ₹ 40 प्रति पुस्तक है। आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

मान लीजिए कि X, Y, Z, W तथा P क्रमशः 2 × n, 3 × k, 2 × p, n × 3 तथा p × k, कोटियों के आव्यूह हैं। नीचे दिए प्रश्न संख्या 21 तथा 22 में सही उत्तर चुनिए।

21. PY + WY के परिभाषित होने के लिए n, k तथा p पर क्या प्रतिबंध होगा?

(अ) k = 3, p = n

(ब) k स्वेच्छ है, p = 2

(स) p स्वेच्छ है, k = 3

(द) k = 2 p = 3

22. यदि n = p, तो आव्यूह 7X – 5Z की कोटि है।

(अ) p x 2

(ब) 2 x n

(स) n x 3

(द) p x n

अभ्यास प्रश्न

1. आव्यूह गुणन $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ बराबर होगा –

(अ) $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$

(ब) $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}$

(द) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा

$B=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$ तब उचित संबंध होगा –

(अ) $A^2 = B^2$ (ब) $A + B = B - A$

(स) $AB = BA$ (द) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $A=\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$ तथा $A^n = O$, तब n का न्यूनतम मान होगा –

(अ) 2

(ब) 3

(स) 4

(द) 5

आव्यूह का परिवर्त

(Transpose of a matrix)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan
LET'S LEARN TOGETHER

यदि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है तो A की पंक्तियों तथा स्तंभों का परस्पर विनिमय (Interchange) करने से प्राप्त होने वाला आव्यूह A का परिवर्त (Transpose) कहलाता है।

आव्यूह A के परिवर्त को A' (या A^T) से निरूपित करते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तो $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ होगा।

यदि A की कोटि m × n तो A' की कोटि n×m होगी।



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ तब $A' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण

$$I_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

अतः प्रत्येक इकाई मैट्रिक्स का परिवर्त उस इकाई मैट्रिक्स के बराबर होता है।

आव्यूह के परिवर्त के गुणधर्म

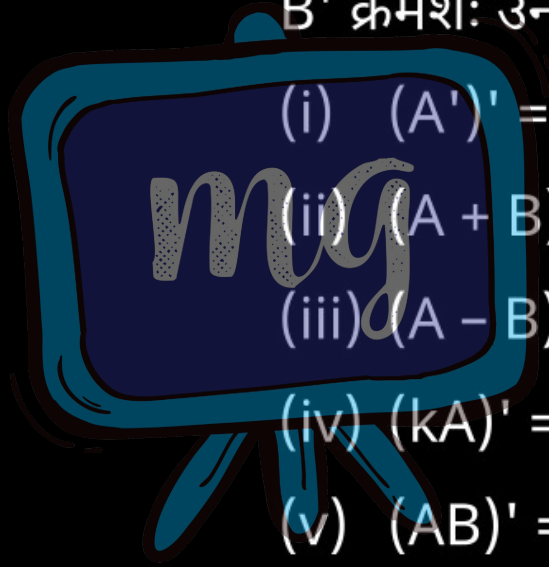
(Properties of Transpose of Matrices)



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

यदि A, B उपयुक्त कोटि के मैट्रिक्स हैं तथा A' एवं B' क्रमशः उनके परिवर्त मैट्रिक्स हैं, तो



(i) $(A')' = A$

(ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(A - B)' = A' - B'$

(iv) $(kA)' = kA'$

(v) $(AB)' = B'A'$

उदाहरण – 20

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

तो निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए :

(i) $(A')' = A$

(ii) $(A + B)' A' + B'$

(iii) $(kB)' = kB'$,

जहाँ k कोई अचर है।

(ii) $(A + B)' A' + B'$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(iii) $(kB)' = kB'$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$



उदाहरण – 21

यदि $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित

कीजिए $(AB)' = B'A'$ है।

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER



$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

सममित एवं विषम सममित आव्यूह

(Symmetric and skew-symmetric matrices)



(i) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ सममित कहलाता है यदि $A' = A$ अर्थात् i व j के हर संभव मानों के लिए $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ हो।

(ii) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ विषम सममित आव्यूह कहलाता है, यदि $A' = -A$, अर्थात् i तथा j के हर संभव मानों के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$ हो। अब, यदि हम $i = j$ रखें, तो $a_{ii} = -a_{ii}$ होगा। अतः $2a_{ii} = 0$ या $a_{ii} = 0$ समस्त i के लिए।

उदाहरण

$$\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

सममित आव्यूह

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

उदाहरण

$$\begin{bmatrix} o & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

विषम सममित आव्यूह

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

नोट

- प्रत्येक इकाई मैट्रिक्स तथा वर्ग शून्य मैट्रिक्स सममित मैट्रिक्स होता है। प्रत्येक वर्ग शून्य मैट्रिक्स विषम सममित भी होता है।
- प्रत्येक विषम सममित मैट्रिक्स के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं, चूंकि विकर्ण के किसी अवयव a_{ii} के लिए के लिए

$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$

RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

सममित एवं विषम सममित आव्यूहों के गुणधर्म (Properties of symmetric and skew-symmetric matrices)

(a) यदि A कोई एक वर्ग मेट्रिक्स है, तो

(i) A + A' सममित मैट्रिक्स होते हैं।

(ii) A – A' विषम सममित मैट्रिक्स होता है।

(b) प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स A को अद्वितीय रूप से एक सममित एवं एक विषम सममित मैट्रिक्स के योग के रूप में लिख सकते हैं। अर्थात्

$$A = \left\{\frac{1}{2}(A+A')\right\} + \left\{\frac{1}{2}(A-A')\right\}$$

उदाहरण – 22

आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

1. निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक का परिवर्त ज्ञात कीजिए :



(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$



RIICO
GROW WITH RAJASTHAN

missiongyan®
LET'S LEARN TOGETHER

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$



2. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A + B)' = A' + B'$